

Некоторые вопросы статистики данных по сверхновым типа Ia

С.С. Степанов

В работе проводится анализ недавней компиляции данных (Union2) по сверхновым типа Ia. Предложена простая аппроксимационная функция, "выравнивающая" модули расстояния при различных красных смещениях. Анализируется способ получения доверительных интервалов для параметров (Ω_M , Ω_Λ) стандартной космологической модели на основе гипотезы Байеса. Предлагается альтернативный метод, результаты которого свидетельствуют о том, что доверительная область космологических параметров, возможно, должна быть расширена.

1 Введение

За последние десятилетие наметился существенный прогресс в наблюдательной космологии [1]. Данные по измерению кривых блеска сверхновых типа Ia и измерение флуктуаций микроволнового фона позволили существенно сократить допустимую область возможных космологических параметров стандартной Λ CDM-модели. В результате появились убедительные свидетельства существования ненулевого космологического Λ -члена в уравнениях Эйнштейна (тёмной энергии).

Исторически первым и наиболее прямым тестом, выявившим ускоренное расширение Вселенной, было измерение кривых блеска при взрывах сверхновых типа Ia в широком диапазоне параметра красного смещения. Несмотря на впечатляющие успехи последних лет, величина экспериментальных ошибок остаётся достаточно высокой. На фоне этих заметных ошибок необходимо уметь различать тонкие эффекты, связанные с различными значениями космологических параметров. Поэтому исключительную важность приобретает выбор верного статистического инструмента анализа достоверности делающихся выводов.

В этой работе мы рассмотрим метод получения доверительных интервалов для параметров (Ω_M , Ω_Λ) на основе гипотезы Байеса. Будет предложен альтернативный подход, результаты которого могут свидетельствовать о необходимости расширения области возможных значений космологических параметров.

2 Ia сверхновые и Λ CDM модель

В результате наблюдения вспышек сверхновых строится зависимость модуля расстояния (distance modulus) μ от красного смещения z галактики в которой находится сверхновая. Если L – светимость сверхновой, а F – поток световой энергии, падающий на Землю, то фотометрическое расстояние D определяется на основе стандартного соотношения, справедливого для евклидового пространства $F = L/(4\pi D^2)$. Модуль расстояния μ – это разность наблюдаемой звёздной величины m сверхновой и её абсолютной звёздной величины m_a :

$$\mu = m - m_a = -2.5 \log(F/F_a) = 25 + 5 \log D, \quad (1)$$

где расстояние D измеряется в мегалпарсеках, а абсолютная звёздная величина m_a (или световой поток F_a) соответствует расстоянию 10 пк. Логарифм имеет десятичное основание.

Звёздная величина m в максимуме светимости сверхновой может быть измерена непосредственно. Значительно сложнее определить абсолютную звёздную величину m_a . Тем не менее, как известно, существует два аспекта, которые облегчают ситуацию.

Наблюдения за близкими сверхновыми, расстояние до которых может быть измерено независимыми методами, показывают, что абсолютные светимости сверхновых типа Ia достаточно стабильны. Этот тип сверхновых идентифицируется по характеру их спектра, который не содержит водородных линий, однако имеет линии поглощения кремния. По современным представлением, если в тесной двойной звёздной системе одна из звёзд является белым карликом, то при постепенном захвате им вещества второй звезды, достигается предел Чандрасекара по массе белого карлика, и он взрывается, превращаясь в сверхновую типа Ia. Именно благодаря постоянству предела Чандрасекара возникает относительная стабильность яркости вспышек сверхновых.

Кроме этого, существует эмпирическая зависимость между абсолютной светимостью и темпом снижения блеска сверхновой после достижения её своего максимума. Чем ярче сверхновая, тем медленнее спадает её яркость, и наоборот [2]. Это позволяет по форме кривой блеска достаточно точно откалибровать абсолютные светимости удалённых сверхновых. Заметим, что использование подобной калибровки требует учёта эффекта замедления в $1 + z$ раз процессов, происходящих на удалённых объектах, которые наблюдаются с Земли [3].

В стандартной модели расширяющегося пространства световой поток уменьшается за счёт трёх составляющих. Прежде всего он падает пропорционально площади поверхности, окружающей сверхновую. Значение этой площади зависит от кривизны трёхмерного пространства. Второй фактор, уменьшающий поток в $1 + z$ раз, связан со сдвигом спектра (уменьшением энергии) за счёт красного смещения. И, наконец, ещё один множитель $1 + z$ в знаменателе возникает в результате замедления процессов, происходящих на удалённом объекте. В нашем случае – это число фотонов, излучаемых в единицу времени.

В результате, фотометрическое расстояние в Λ CDM модели имеет вид:

$$D = \frac{c}{H_0} \frac{1+z}{\sqrt{|\Omega_K|}} \text{SinN} \left[\sqrt{|\Omega_K|} \int_0^z \frac{du}{\sqrt{\Omega_M(1+u)^3 + \Omega_K(1+u)^2 + \Omega_\Lambda}} \right], \quad (2)$$

где $\Omega_K = 1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda$, c – скорость света, а функция SinN является обычным синусом, если $\Omega_K < 0$, и гиперболическим синусом при $\Omega_K > 0$. Если же $\Omega_K \rightarrow 0$, то $\text{SinN}(x) = x$. Таким образом, модуль расстояния оказывается функцией красного смещения z и трёх параметров: постоянной Хаббла H_0 , относительной плотности вещества Ω_M и относительной плотности тёмной энергии Ω_Λ . Постоянная Хаббла [точнее $\mu_0 = 25 - 5 \log(H_0/c)$] является аддитивной константой, смещающей кривую $\mu = \mu(z)$ вверх или вниз. Плотности вещества и энергии входят в функцию $\mu(z)$ существенно нелинейным образом, определяя её наклон и степень кривизны.

В подынтегральной функции выражение под корнем должно быть положительным. Это накладывает определённое ограничение на область допустимых космологических параметров. В частности, если параметры таковы, что $2\Omega_K \leq -3\Omega_M$, то должно выполняться следующее неравенство:

$$\Omega_K^3 + \frac{27}{4} \Omega_\Lambda \Omega_M^2 > 0. \quad (3)$$

Мы будем анализировать компиляцию наблюдений 557 сверхновых, проведенную группой Supernova Cosmology Project [4] в 2010 г. (Union2). Эти данные содержат сверхновые с красными смещениями в диапазоне от $z = 0.015$ до $z = 1.4$ и типичными абсолютными ошибками измерения μ в пределах $\sigma = 0.15 \div 0.25$ (медиана ошибок 0.19, минимальная 0.08, максимальная 1.08). Значения модулей расстояния изменяются от 33.81 до 45.12. По сравнению с предыдущей компиляцией 2008 года (Union) число сверхновых выросло на 250 звёзд, в основном за счёт диапазона красных смещений $z < 0.4$.

Если непосредственно построить по наблюдаемым данным модуль расстояния как функцию красного смещения z , то детали аппроксимационной кривой на таком масштабе будут видны очень слабо:

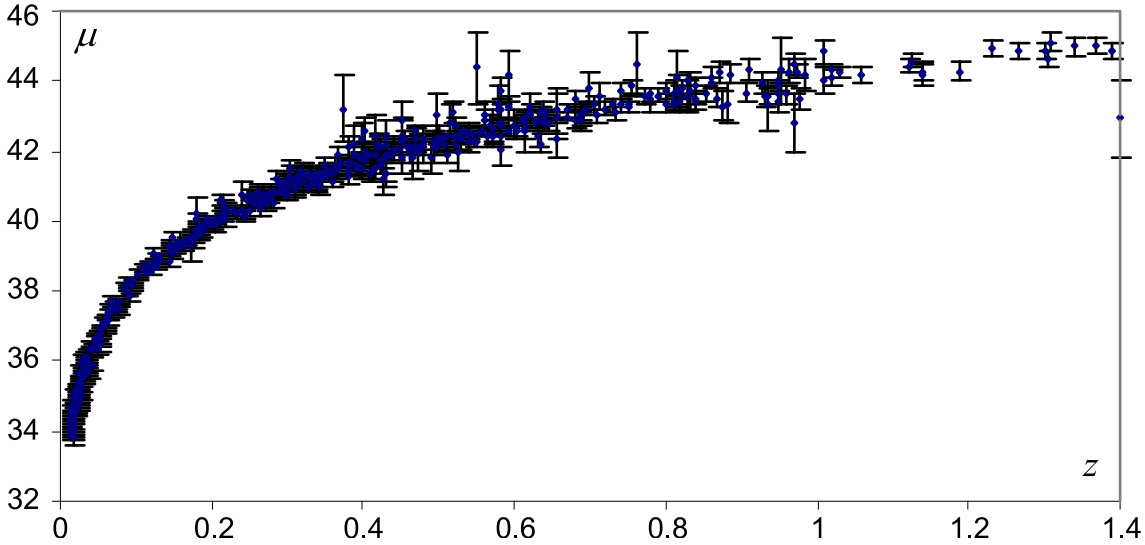


Рисунок 1. Исходные данные по сверхновым (Union2) [4].

Зависимость $\mu = \mu(z)$ является нелинейной функцией z с сингулярностью вида $5 \log z$ при $z \rightarrow 0$. Поэтому для визуализации наблюдательных данных и представления теоретических кривых $\mu = \mu(z)$ при различных значениях параметров удобно выбрать некоторую стандартную функцию, относительно которой будут проводиться построения (“выравнивающая кривая”). В качестве такой кривой мы будем использовать значения параметров $\Omega_M = \Omega_\Lambda = 0$. В этом случае зависимость модуля расстояния от красного смещения принимает исключительно простой вид:

$$\mu(z) = \mu_0 + 5 \log(z + z^2/2). \quad (4)$$

Естественно, пустое пространство с отрицательной кривизной ($\Omega_K = 1$) в рамках стандартной модели не выглядит реалистичным. Тем не менее, как мы увидим ниже, функция (4) достаточно хорошо аппроксимирует наблюдательные данные.

Любопытно, что зависимость (4) возникает в рамках специальной теории относительности при рассмотрении радиального разлёта осколков с постоянными скоростями после обычного взрыва в пустом евклидовом пространстве [10]. Соотношение (4) также реализуется для модуля расстояния в проективной теории относительности [11]. Однако, в нашей работе мы будем рассматривать (4) лишь как удобную, в силу своей простоты, аппроксимационную кривую, дающую нулевой отсчёт для μ .

На рисунке 2 приведены теоретические кривые модуля расстояния при различных значениях космологических параметров $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$. При этом из них вычтена функция (4).

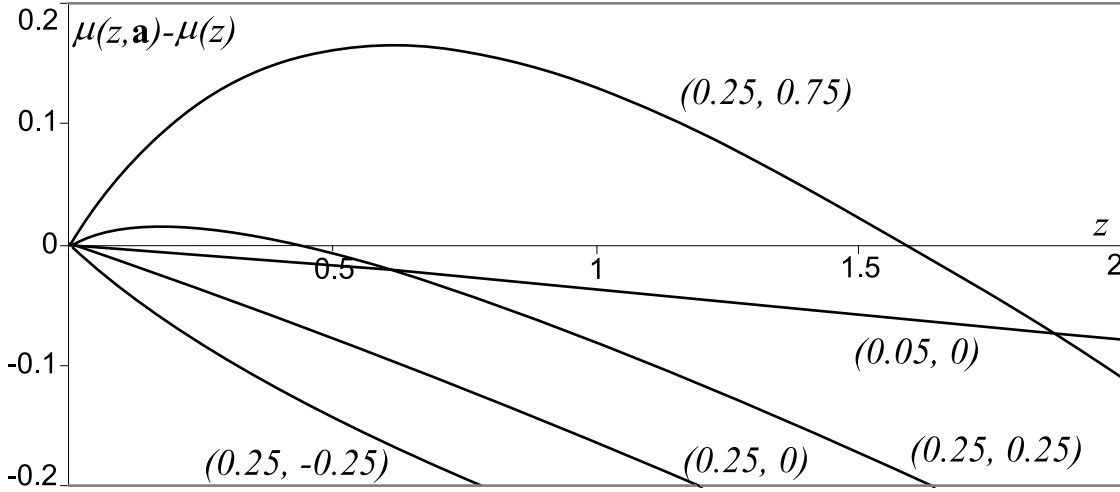


Рисунок 2. Теоретические зависимости $\mu(z, \mathbf{a}) - \mu(z)$ при различных параметрах $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$, значения которых указаны в скобках рядом с кривыми. Горизонтальная линия соответствует $\Omega_M = \Omega_\Lambda = 0$.

В дальнейшем совокупность космологических параметров будет обозначаться при помощи вектора $\mathbf{a} = \{H_0, \Omega_M, \Omega_\Lambda\}$. Функция $\mu(z, \mathbf{a})$ – это зависимость модуля расстояния от красного смещения, получаемая в стандартной космологической Λ CDM модели. Функция $\mu(z)$ соответствует уравнению (4) для параметров $\Omega_M = \Omega_\Lambda = 0$. Иногда постоянная Хаббла будет выделяться отдельно в виде аддитивной константы. В этом случае, мы будем помечать теоретические кривые без этой константы чертой сверху: $\mu(z, \mathbf{a}) = \mu_0 + \bar{\mu}(z, \mathbf{a})$ и $\mu(z) = \mu_0 + \bar{\mu}(z)$. В частности на рисунке 2 на самом деле приведена разница $\bar{\mu}(z, \mathbf{a}) - \bar{\mu}(z)$, т.е. аддитивные константы μ_0 всех кривых считаются одинаковыми.

При малых z , приведенные на рисунке функции имеют следующее поведение:

$$\mu(z, \mathbf{a}) - \mu(z) \approx \frac{5}{4 \ln 10} (2\Omega_\Lambda - \Omega_M) \cdot z + \dots \quad (5)$$

Если $\Omega_\Lambda \leq \Omega_M/2$ кривые $\mu(z, \mathbf{a}) - \mu(z)$ всегда направлены вниз, имея при $\Omega_\Lambda = 0$ примерно линейную зависимость от z , наклон которой тем больше, чем больше Ω_M . При $\Omega_\Lambda > \Omega_M/2$ кривые сначала выгибаются вверх (тем сильнее, чем больше Ω_Λ). Однако рано или поздно они загибаются вниз, выходя на асимптотический режим, наклон которого пропорционален Ω_M и слабо зависит от Ω_Λ .

3 Экспериментальные данные

На рисунке 3 приведены наблюдательные данные по 557 сверхновым [1]. Из них вычтена функция (4), в которой постоянная Хаббла H_0 (или μ_0) определяется по методу наименьших квадратов (см. ниже).

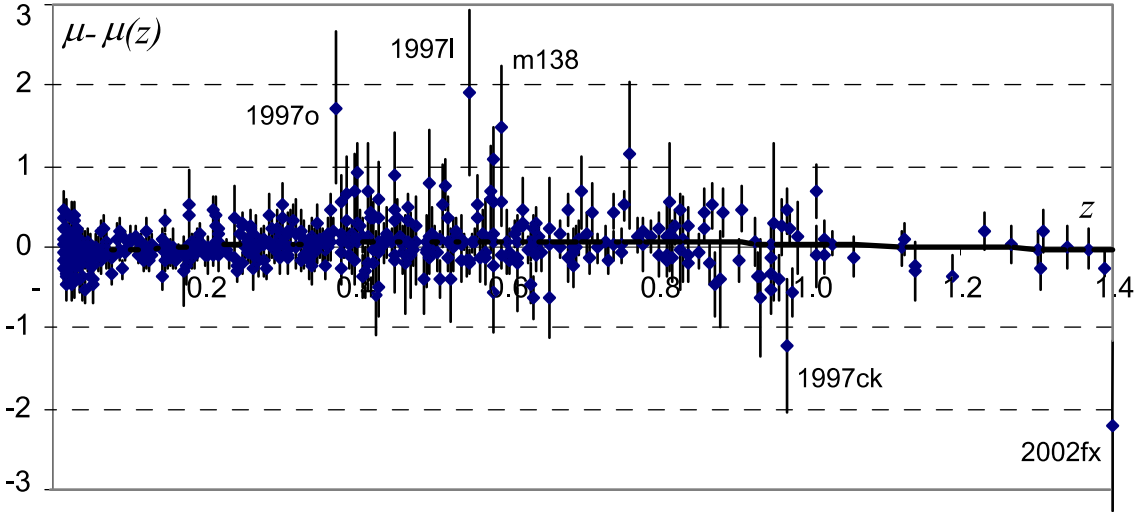


Рисунок 3. Наблюдательные данные по 557 сверхновым из которых вычтена функция $\mu(z)$. Приведены названия некоторых сверхновых.

На рисунке 4 эти же данные агрегированы с шагом 0.02 по z (см. Приложение) и растянут масштаб по вертикальной оси:

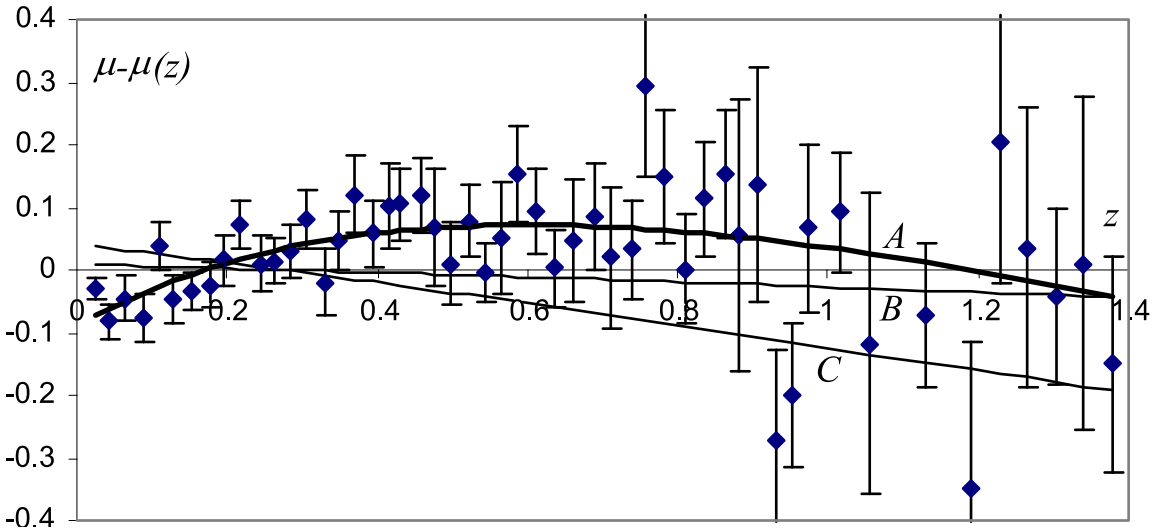


Рисунок 4. Точки рисунка 3 агрегированы по оси z с шагом 0.02. Линии соответствуют $A = (0.25, 0.75)$, $B = (0.05, 0)$ и $C = (0.25, 0)$. Сверхновая 2002fx ($z = 1.4$) на рисунок не попала.

Видно, что функция (4) действительно достаточно хорошо “выравнивает” точки. Сверхновые с малыми значениями z находятся чуть ниже горизонтальной линии, тогда как в области $z \sim 0.4 \div 0.8$ наблюдается поднятие точек вверх. Эта особенность данных и приводит к тому, что метод наименьших квадратов даёт высокие значения для плотности тёмной энергии Ω_Λ , “выгибая” кривую $\mu(z, \mathbf{a}) - \mu(z)$ вверх.

В приведенном на рисунке масштабе теоретические кривые A и B со значением параметров $(0.25, 0.75)$ или $(0.05, 0.00)$ находятся внутри полосы ошибок и очень близко друг к другу. Действительно, как следует из рисунка 2, на наблюдаемом интервале максимальная разница кривых $(0.25, 0.75)$ и $(0.05, 0)$ составляет порядка 0.18 в области $z = 0.5 \div 0.7$. Экспериментальные точки имеют в этой же области медиану ошибок 0.25 и среднеквадратичный разброс средних порядка 0.40.

При оценке значений параметров модели обычно используется метод наименьших квадратов, в котором минимизируется сумма:

$$\chi^2(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \frac{[\mu_i - \mu(z_i, \mathbf{a})]^2}{\sigma_i^2}, \quad (6)$$

где (z_i, μ_i) – совокупность из $n = 557$ наблюдательных данных красных смещений и модулей расстояния сверхновых типа Ia, σ_i – соответствующие им стандартные экспериментальные ошибки (включая пекулярный разброс скоростей галактик и т.п. дополнительные ошибки). Вектор $\mathbf{a} = \{H_0, \Omega_M, \Omega_\Lambda\}$ содержит параметры модели, которые необходимо определить, анализируя данные.

Выделим аддитивный параметр $\mu_0 = 25 - 5 \log(H_0/c)$, связанный с постоянной Хаббла. Для этого введём теоретическую зависимость с чертой $\mu(z, \mathbf{a}) = \mu_0 + \bar{\mu}(z, \mathbf{a})$. Остаток теоретической кривой $\bar{\mu}(z, \mathbf{a})$ зависит уже только от двух параметров: $\mathbf{a} = \{\Omega_M, \Omega_\Lambda\}$. Метод наименьших квадратов позволяет легко определить параметр μ_0 . Приравнивая производную χ^2 по μ_0 нулю, получаем следующее выражение:

$$\hat{\mu}_0 = \sigma_0^2 \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i - \bar{\mu}(z_i, \mathbf{a})}{\sigma_i^2}, \quad (7)$$

где введена дисперсия σ_0^2 разброса выборочного значения $\hat{\mu}_0$:

$$\frac{1}{\sigma_0^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}. \quad (8)$$

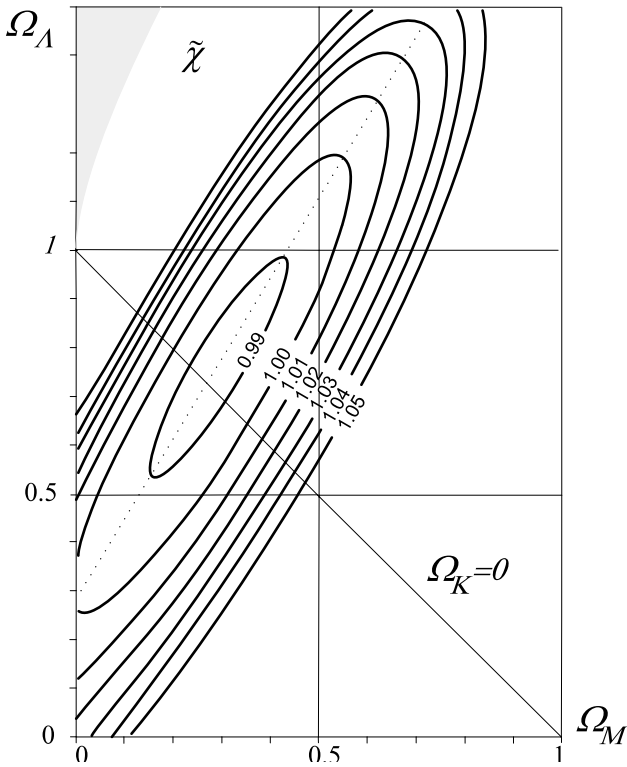
Поиск оставшихся параметров $\mathbf{a} = \{\Omega_M, \Omega_\Lambda\}$, минимизирующих χ^2 , требует больше вычислительных действий, однако также не представляет особой проблемы.

Учитывая, что теоретические кривые проходят внутри полосы ошибок, минимум χ^2 оказывается достаточно плоским, а область “оптимальных” параметров сравнительно широкой.

Ниже на рисунке 5 приведены полосы значений $\tilde{\chi}$. Тильдой мы будем помечать χ , нормированную на число точек (число сверхновых) $n = 557$:

$$\tilde{\chi} = \left(\frac{\chi^2}{n} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Она характеризует среднюю относительную ошибку в долях стандартной экспериментальной ошибки. Если $\tilde{\chi} < 1$, в среднем отклонения теоретических значений от экспериментальных меньше величины ошибки. Линии $\tilde{\chi} < const$ идут с шагом 0.01, начиная с $\tilde{\chi} = 0.99$. Справа от рисунка приведены значения космологических параметров и соответствующие им значения $\tilde{\chi}$. В первой строке даны оптимальные значения параметров в точке абсолютного минимума $\tilde{\chi}$.



Ω_M	Ω_Λ	H_0	$\tilde{\chi}$
0.30	0.78	70.13	0.987
0.25	0.75	70.27	0.988
0.10	0.45	69.36	0.993
0.00	0.28	68.95	0.999
0.00	0.00	67.38	1.027
0.05	0.00	67.12	1.036
0.10	0.00	66.86	1.048
0.15	0.00	66.61	1.062
0.20	0.00	66.37	1.078
0.25	0.00	66.13	1.094

Рисунок. 5 Полосы значений $\tilde{\chi}$ (только экспериментальные ошибки). В верхнем левом углу область “запрещённых” параметров. Диагональная прямая линия соответствует плоской вселенной.

Поверхность функции $\tilde{\chi}$ на плоскости $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ вытянута примерно вдоль прямой линии

$$\Omega_\Lambda \approx 0.28 + 1.67 \Omega_M, \quad (10)$$

являющаяся линией “оврага”. Первые четыре строки в таблице справа от рисунка 5 соответствуют некоторым наборам параметров вдоль этого оврага.

Значения $\tilde{\chi}$ приведены для исходных наблюдательных ошибок. Во-обще говоря, к ним необходимо добавлять общую ошибку σ , делая в знаменателе (6) замену $\sigma_i^2 \mapsto \sigma_i^2 + \sigma^2$. Эта дисперсия возникает в силу различных факторов, не связанных непосредственно с измерениями. Например, существует пекулярный разброс в скоростях сверхновых относительно сопутствующей системы координат. Обычно его принимают равным $\Delta v = 300$ км/сек. При интерпретации красного смещения в духе эффекта Доплера параметр $z \approx v/c$, и, следовательно, пекулярная ошибка в модуле расстояния равна:

$$\sigma_v = \Delta\mu = \frac{\partial\mu}{\partial z} \Delta z \approx \frac{5}{\log 10} \cdot \frac{1+z}{z+z^2/2} \cdot \frac{\Delta v}{c}. \quad (11)$$

Последнее соотношение записано при помощи аппроксимации (4). Так как величина Δv достаточно оценочная, использование более точного выражения $\mu(z, \mathbf{a})$ особого смысла не имеет.

Второй фактор, увеличивающий дисперсию, это гравитационное линзирование [7]. В работе [4] для этого эффекта используется выражение:

$$\sigma_g = 0.093 z. \quad (12)$$

Наконец, поправки на Галактическую пыль дополнительно дают постоянную ошибку $\sigma_d = 0.013$. Поэтому итоговая дополнительная дисперсия равна $\sigma_{tot}^2 = \sigma_v^2 + \sigma_g^2 + \sigma_d^2$. Далее ошибку σ_{tot} мы будем называть общей ошибкой.

Заметим, что ошибки σ_v и σ_g , как функции z , действуют в противофазе. При малых z более заметной оказываются σ_v , достигая при $z = 0.015$ значения 0.15, сравнимого с экспериментальными ошибками. С ростом z величина σ_v достаточно быстро падает, однако начинает возрастать ошибка гравитационного линзирования σ_g . В области $z \approx 0.15$ обе ошибки сравниваются и имеют довольно малое значение 0.01. Так как общая ошибка находится суммированием дисперсий $\sigma_i^2 \mapsto \sigma_i^2 + \sigma_{tot}^2$, а σ_{tot} невелика, то результирующая ошибка лишь ненамного превышает экспериментальную σ_i .

Кроме этих трёх факторов, иногда добавляется систематическая ошибка σ_{sys} , отдельно вычисляемая для каждой сверхновой, при помощи алгоритма, описанного в [5]. В этом случае минимизируется

$$\chi^2 = \sum_{i,j=1}^n (\mu_i - \mu(z_i, \mathbf{a})) D_{ij}^{-1} (\mu_j - \mu(z_j, \mathbf{a})), \quad (13)$$

где D_{ij} – ковариационная матрица, которая может быть найдена на сайте Supernova Cosmology Project [8].

4 Байесовская оценка достоверности

В пионерской работе [6] для построения доверительных интервалов использовался подход, восходящий к Байесу. Предположим, что при *фиксированных* параметрах \mathbf{a} отклонение наблюдаемых данных от теоретической кривой имеет нормальное распределение вероятности. Тогда условная плотность вероятности в n наблюдениях получить набор чисел μ_1, \dots, μ_n имеет вид:

$$P(\mu_1, \dots, \mu_n | \mathbf{a}) = \prod_i \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[\mu_i - \mu(z_i, \mathbf{a})]^2}{2\sigma_i^2}\right) \sim e^{-\chi^2(\mathbf{a})/2}, \quad (14)$$

где учтено определение (6) функции $\chi^2(\mathbf{a})$. Множитель перед экспонентой является константой, зависящей от ошибок наблюдения.

При неизвестных параметрах можно рассмотреть *совместную вероятность* $P(\mu_1, \dots, \mu_n, \mathbf{a})$. Она, по определению, связана с условными вероятностями следующим образом:

$$P(\mu_1, \dots, \mu_n, \mathbf{a}) = P(\mu_1, \dots, \mu_n | \mathbf{a}) P(\mathbf{a}) = P(\mathbf{a} | \mu_1, \dots, \mu_n) P(\mu_1, \dots, \mu_n). \quad (15)$$

Нас интересует условная вероятность $P(\mathbf{a} | \mu_1, \dots, \mu_n)$ того, что при реализовавшихся результатах наблюдений μ_1, \dots, μ_n параметры принимают то или иное значение \mathbf{a} . Чтобы её найти делается следующее предположение. Так как отсутствует априорная информация о возможных значениях космологических параметров, то распределение плотности $P(\mathbf{a})$ полагается *равным константе* (все значения \mathbf{a} равновероятны). Это позволяет при помощи (15) и (14) найти условную вероятность для параметров:

$$P(\mathbf{a} | \mu_1, \dots, \mu_n) = \frac{e^{-\chi^2(\mathbf{a})/2}}{\mathcal{N}}, \quad (16)$$

где \mathcal{N} – нормировочный множитель, не зависящий от \mathbf{a} :

$$\mathcal{N} = \int e^{-\chi^2(\mathbf{a})/2} d\mathbf{a} = \int_{-\infty}^{\infty} dH_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega_\Lambda \int_0^{\infty} d\Omega_M e^{-\chi^2(\mathbf{a})/2}. \quad (17)$$

Заметим, что интегрирование по параметру Ω_M начинается с 0, что обусловлено его физическим смыслом.

Условная плотность вероятности для параметров Ω_M, Ω_Λ получается интегрированием по H_0 :

$$P(\Omega_M, \Omega_\Lambda | \mu_1, \dots, \mu_n) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{a} | \mu_1, \dots, \mu_n) dH_0. \quad (18)$$

При помощи этой плотности вероятности оцениваются доверительные интервалы для космологических параметров.

Обратим внимание, что при нахождении условной плотности вероятности $P(\Omega_M, \Omega_\Lambda | \mu_1, \dots, \mu_n)$ делается ключевое предположение о равновероятности различных значений параметров $P(\mathbf{a}) = const$. Подобное задание априорной вероятности носит название *постулата Байеса*. Известно, что сам Томас Байес сомневался в справедливости этого постулата и, возможно, поэтому не опубликовал свою работу при жизни. Однако, в дальнейшем постулат получил активную поддержку Лапласа. По видимому, первым кто начал критику постулата Байеса был Джордж Буль, который называл этот метод “слишком произвольным” [9].

Почему постулат Байеса в большинстве случаев не является верным? Дело в том, что *незнание не является синонимом равновероятности*. Говоря о случайных событиях, обычно задают их вероятности из соображений симметрии. То, что вероятность выпадения орла при бросании монеты равна $1/2$ следует из её симметрии, а не из нашего незнания. Вероятность появления любой суммы при броске кости, из соображений симметрии уже равна $1/6$, при той же степени “незнания”. Существует известная шутка, о том, что Некто делает вывод о вероятности встречи динозавра равной $1/2$ на основании того, что он его либо встретит, либо не встретит.

Полагая $P(\mathbf{a}) = const$, мы уподобляемся этому Некто, присваивая равные вероятности различным значениям космологических параметров, лишь на том основании, что мы их не знаем. Кроме этого, для непрерывных величин \mathbf{a} ввести постоянные плотности вероятности в бесконечном диапазоне невозможно в принципе. Даже если ограничить диапазон, $\mathbf{a}_{min} < \mathbf{a} < \mathbf{a}_{max}$, равновероятность будет зависеть от выбора способа параметризации.

Например, вместо постоянной Хаббла H_0 удобно рассматривать аддитивную для функций модуля расстояния константу $\mu_0 = 25 - 5 \log(H_0/c)$. У нас нет априорного знания ни о параметре H_0 , ни о параметре μ_0 . Однако понятно, что если распределение $P(H_0)$ на некотором диапазоне постоянно, то для случайной величины μ_0 плотность вероятности $P(\mu_0)$ уже не является константой. И наоборот, равновероятность μ_0 влечёт неравновероятность H_0 . Какой же из этих двух параметров необходимо рассматривать, как априорно равновероятный?

Необычным также выглядит предположение о том, что постоянная Хаббла изменяется от минус до плюс бесконечности. Допущение для H_0 равновероятности отрицательных и положительных значений равносильно игнорированию всего апостериорного знания, накопленного наблюдательной космологией за последнее столетие.

Тем не менее, рассмотрим результаты применения байесовского подхода. Выделим в выражении для χ^2 аддитивный параметр μ_0 :

$$\chi^2 = \frac{(\mu_0 - \hat{\mu}_0)^2}{\sigma_0^2} - \frac{\hat{\mu}_0^2}{\sigma_0^2} + \sum_{i=1}^n \frac{(\mu_i - \bar{\mu}(z_i, \mathbf{a}))^2}{\sigma_i^2}, \quad (19)$$

где соответствующая минимуму χ^2 величина $\hat{\mu}_0$ определена в (7), а ошибка её измерения σ_0 – в (8).

Практически при любых параметрах \mathbf{a} получаем выборочное значение $\hat{\mu}_0 \approx 43$ и $\sigma_0 = 0.00737$ (только экспериментальные ошибки). В результате первое слагаемое χ^2 приводит в (16) к очень узкой гауссиане по параметру μ_0 . Благодаря этому, практически не играет роли, по какому параметру μ_0 или H_0 – производить усреднение. Область малых значений H_0 также роли не играет. Этот факт несколько снимает проблему того, какую их величин H_0 или μ_0 считать априорно равновероятными. Однако относительно оставшихся двух параметров эта проблема, естественно, остаётся.

Будем считать, что производится интегрирование по μ_0 . В этом случае первое слагаемое в χ^2 даёт постоянный множитель, не зависящий от параметров $\mathbf{a} = \{\Omega_M, \Omega_\Lambda\}$. Остальные слагаемые в χ^2 , включая $\hat{\mu}_0$, зависят от этих параметров. Поэтому для вычисления доверительных интервалов необходимо протабулировать на некоторой сетке выражение для условной вероятности, которое мы запишем следующим образом:

$$P = P(\Omega_M, \Omega_\Lambda | \mu_1, \dots, \mu_n) = \frac{1}{\mathcal{N}} \exp \left\{ \frac{\hat{\mu}_0^2}{2\sigma_0^2} - \sum_{i=1}^n \frac{(\mu_i - \bar{\mu}(z_i, \mathbf{a}))^2}{2\sigma_i^2} \right\} \quad (20)$$

Нормировочный множитель \mathcal{N} вычисляется вторым проходом, из требования равенства единице суммарной вероятности (площадь под P). Уровни значимости получаются после сортировки значений P по убыванию. Передвижение по этому списку сверху вниз и вычисление накопленной суммы позволяют выделить область, в которую попадают параметры с той или иной вероятностью.

Отметим одну техническую деталь. На самом деле ненормированная на число сверхновых величина χ^2 достаточно велика. Это приводит к тому, что показатель экспоненты в (20) отрицателен и по модулю велик. В результате, при компьютерных расчётах возникают нулевые значения для вероятности. Для избежания этого, необходимо из всех показателей экспоненты предварительно вычесть их максимальное значение.

На рисунке 6 (см. также [4]) приведены доверительные интервалы для параметров, соответствующие вероятностям 0.683, 0.954, 0.997. Слева использованы исходные экспериментальные ошибки, тогда как справа они увеличены на значения общих ошибок. С точки зрения байесовского подхода космологические параметры оказываются во внутреннем эллипсе с вероятностью 0.683.

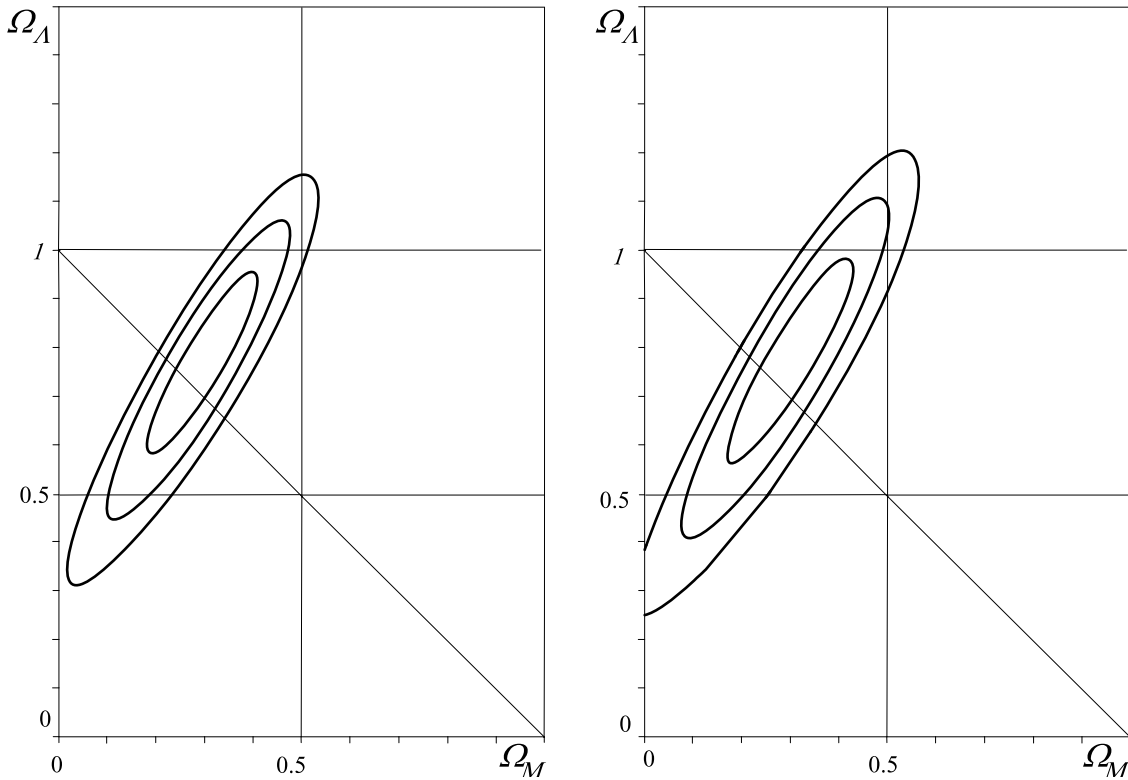


Рисунок. 6 Доверительные интервалы параметров, полученные при помощи байесовского подхода. Каждая линия последовательно соответствует вероятностям 0.683, 0.954, 0.997. Слева использованы исходные экспериментальные ошибки, а справа к ним добавлены общие и систематические. Наклонная прямая линия соответствует плоской вселенной с $\Omega_K = 0$.

Мы видим, что, особенно при учёте дополнительных ошибок, область доверительных параметров, получаемых при наблюдениях сверхновых, достаточно широкая. Её пересечение с данными экспериментов СМВ и ВАО позволяют эту область уменьшить. Однако в этой работе мы ограничимся только данными по результатам наблюдения сверхновых.

Заметим, что правый рисунок несколько отличается от рисунка, приведенного в [4], где размеры доверительных областей при добавлении систематических ошибок заметно увеличены.

5 Критерий значимости

Попробуем оценить достоверность предпочтения одних космологических параметров другим, не используя Байесовский постулат. Наиболее очевидный метод – это Монте-Карло моделирование отклонений экспериментальных данных от наблюдаемых средних. Для этого фиксируются оптимальные значения параметров \mathbf{a}_0 , найденные по методу наименьших квадратов. При помощи этих параметров для i -й сверхновой генерируются случайные значения модулей расстояния с гауссовым распределением:

$$\mu_i = N(\mu(z_i, \mathbf{a}_0), \sigma_i^2 + \sigma^2), \quad (21)$$

где σ_i – экспериментальная ошибка, присущая данной сверхновой, а σ – общая и систематическая ошибка. По каждому набору μ_1, \dots, μ_n вычисляются оптимальные параметры, соответствующие минимуму χ^2 . По совокупности этих параметров, полученных в каждом эксперименте, можно найти совместную плотность вероятности и доверительные интервалы.

Проблема этого подхода состоит в том, что значения μ_i возникают вокруг кривой, полученной при минимизации χ^2 . В результате доверительные области окружают именно точку заданных параметров. Если же мы выберем, например нефизические в рамках Λ CDM модели параметры $(0, 0)$, то доверительная область будет окружать эту точку, даже не пересекаясь с областью, например, для параметров $(0.25, 0.75)$. В результате сравнить различные модели оказывается проблематичным.

Поэтому мы будем использовать другой метод. Будем считать, что значения красного смещения z_i для каждой из $n = 557$ сверхновых фиксированы. Фиксированы также ошибки σ_i возможных разбросов μ_i . Предположим, что при данных космологических параметрах $\mathbf{a} = (\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ вероятность получить значение μ_i для конкретной сверхновой имеет нормальное распределение (21).

Будем проводить многократные численные эксперименты по следующему алгоритму. Для каждой сверхновой генерим случайное значение μ_i с нормальным распределением (21). На основании этой выборки по формуле (7) найдём H_0 и по (6) вычислим параметр χ . Полученный χ сравним с реально наблюдаемым $\chi_{\mathbf{a}} = \chi(\mathbf{a})$ для данных космологических параметров и фактически существующих экспериментальных данных.

В результате можно вычислить вероятность $P(\chi \geq \chi_{\mathbf{a}} | \mathbf{a})$ того, что наблюдаемое при данных параметрах \mathbf{a} ненулевое значение $\chi_{\mathbf{a}} = \chi(\mathbf{a})$ могло возникнуть в результате случайного стечения обстоятельств.

Ниже в таблице для некоторых параметров Ω_M, Ω_Λ приведены значения нормированной на число экспериментальных данных n величины среднеквадратичного отклонения $\tilde{\chi} = \sqrt{\chi^2(\mathbf{a})/n}$ и соответствующие вероятности $P = P(\chi \geq \chi_{\mathbf{a}}|\mathbf{a})$:

		σ_i		σ_i, σ_{tot}	
Ω_M	Ω_Λ	$\tilde{\chi}$	P	$\tilde{\chi}$	P
0.30	0.78	0.987	0.652	0.941	0.973
0.10	0.45	0.993	0.578	0.946	0.960
0.00	0.27	0.999	0.487	0.953	0.939
0.00	0.00	1.026	0.175	0.977	0.763
0.05	0.00	1.036	0.104	0.986	0.657
0.25	0.00	1.094	0.001	1.038	0.093

Таблица 1. В третьей и четвёртой колонка даны результаты моделирования для исходных экспериментальных ошибок σ_i . В последних двух колонках приведены аналогичные результаты в ситуации, когда к экспериментальным дисперсиям прибавляется общая дисперсия σ_{tot}^2 .

Отклонение от кривой $\mu(z, \mathbf{a})$ с параметрами $\mathbf{a} = (0.30, 0.78)$ больше или равное наблюдаемому $\chi_{\mathbf{a}} = 0.987$ имеет вероятность 0.652. Т.е. *если* $\Omega_M = 0.30$ и $\Omega_\Lambda = 0.78$, то в 65 случаях из 100 мы будем получать регистрируемое или большее отклонение от теоретической кривой в силу случайных факторов. Будем считать это критерием значимости того, что $\mathbf{a} = (0.30, 0.78)$.

Кривая с нулевыми космологическими параметрами $\Omega_M = \Omega_\Lambda = 0$ имеет вероятность $P = 0.175$. Это только в 3.7 раза меньше, чем 0.652. В тоже время точка $\Omega_M = \Omega_\Lambda = 0$ при Байесовском подходе даже не попадает в доверительный интервал 99.7% [4].

Подобный критерий исключительно чувствителен к величине экспериментальных ошибок. Из последней колонки Таблицы 1 следует, что добавление общих ошибок, приводит к тому, что с вероятностью 0.66 оказывается справедливой даже область параметров $(0.05, 0)$ с нулевым космологическим членом. Заметим, что при этом исходные ошибки порядка 0.19 увеличиваются в среднем только на 0.02.

Таким образом, подобный критерий значимости делает достаточно вероятным “случайный” выгиб экспериментальных данных, приводящий к заметному значению плотности тёмной энергии. Напомним, что мы обсуждаем только данные по сверхрновым, в отрыве от других экспериментов.

6 Заключение

В работе был проведен критический анализ стандартного байесовского подхода к построению доверительных интервалов и был предложен критерий значимости для возможных значений тех или иных космологических параметров. Из этого критерия следует, что если ограничиться только данными по наблюдениям сверхновых, существует вероятность того, что значения космологических параметров могут оказаться далёкими от общепринятых.

Открытие новых сверхновых позволит добавить определённости в этот вопрос. Особенно важной является область $z \sim 0.4 \div 0.8$, которая определяет степень выгибания кривой в результате положительных значений Ω_Λ . Естественно, и наблюдения сверхновых в области сверхбольших $z > 1.5$ также очень желательны.

ПРИЛОЖЕНИЕ. Агрегирование данных

Пусть произведено 2 набора (серий) измерений для которых указано среднее значение и стандартная ошибка: $\bar{x}_1 \pm \sigma_1$ и $\bar{x}_2 \pm \sigma_2$. И пусть истинная дисперсия D случайной величины x постоянна. Это означает, что если в сериях было проделано n_1 и n_2 измерений, то при больших n_i имеем $\sigma_i^2 = D/n_i$ или $n_i = D/\sigma_i^2$. Считаем, что среднее значение, выборочная дисперсия и стандартная ошибка находились по формулам:

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha, \quad \tilde{D} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n (x_\alpha - \bar{x})^2, \quad \sigma^2 = \frac{\tilde{D}}{n}$$

Объединяя данные по двум сериям и выражая n_i через стандартные ошибки σ_i , имеем следующее агрегированное среднее:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 n_1 + \bar{x}_2 n_2}{n_1 + n_2} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{\frac{\bar{x}_1}{\sigma_1^2} + \frac{\bar{x}_2}{\sigma_2^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}.$$

Аналогично, объединённая стандартная ошибка по обоим сериям равна:

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2}{(n_1 + n_2)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}.$$

Обобщение на произвольное число серий очевидно.

Список литературы

- [1] Perlmutter S. “*Supernovae, dark energy, and the accelerating universe*”, Physics Today, **56**, N4, pp.53-62 (2003)
- [2] Phillips M. “*The Absolute Magnitudes of Type Ia Supernovae*”, Astrophys. J. **413**, N2, p. L105, (1993)
- [3] Goldhaber G. et al. “*Timescale stretch parameterization of Type Ia supernova B-band light curves*”, Astrophys. J. **558**, N1; pp.359-368 (2001)
- [4] Amanullah R. et al. “*Spectra and HST light curves of six type Ia supernovae at $0.511 < z < 1.12$ and the Union2 compilation.*”, Astrophys. J., (2010), arxiv.org/abs/1004.1711
- [5] Kowalski B. et al, “*Improved cosmological constraints from new, old, and combined supernova data sets*” Astrophys. J. **686** pp.749-778 doi: 10.1086/589937 (2008)
- [6] Riess A.G. et al, “*Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*” Astrophys. J. **116**, N3, pp.1009-1038, (1998)
- [7] Holz D.E., Linder E.V. ApJ, 631, 678 (2005) Astrophys. J. **631** N2, pp.678-688 (2005)
- [8] Supernova Cosmology Project: <http://supernova.lbl.gov/>
- [9] Hudson D.J. “*Statistics. Lectures on Elementary Statistics and Probability.*” Geneva (1964)
- [10] Farley F.J. “*Does gravity operate between galaxies? Observational evidence re-examined.*”, Proc. R. Soc. A **466** N2122 pp.3089-3096 (2010)
- [11] Stepanov S.S. – “*A time-space varying speed of light and the Hubble Law in static Universe*”, Phys. Rev. D 62 (2000) 023507, arXiv: astro-ph/9909311 (1999).

2010-12-24 (c) synset.com printed: 21 марта 2011 г.