Глава 9

Биспиноры

Новый тип полей, связанных со спинорами, лежит в основе квантового описания фундаментальных элементарных частиц, таких как лептоны и кварки. В этой главе мы рассмотрим классические свойства этих полей. Подробно будут изучены трансформационные свойства биспинорного поля относительно преобразований Лоренца и различных дискретных симметрий. Рассмотрены тензоры спина и спиральности, а также представление физических величин, связанных с биспинорным полем, в импульсном пространстве. Затем, на примере биспинорного поля, будет рассмотрен основополагающий принцип калибровочной инвариантности, который лежит в основе построения всех фундаментальных теорий взаимодействия. Заключают главу разделы, посвященные квантованию полей, античастицам и грассмановой природе биспинорного поля.

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ МИР

Сергей С. Степанов

Последняя версия находится на сайте http://synset.com. Все обнаруженные ошибки и замечания просьба присылать по почте: phys@synset.com. Печать: 2 июля 2013 г.

9.1 Уравнение Дирака

• Если спинорный тензор зависит от координат и времени, он становится полем. Спинорные поля с нечетным числом индексов не выражаются через 4-тензоры. Поэтому интерес представляет построение соответствующих спинорных полевых теорий. К тому же эксперимент показывает, что все фундаментальные частицы "материи" (лептоны и кварки) являются фермионами, и описываются спинорным дираковским полем. Рассмотрим простейший случай спинора с одним индексом χ^μ. Для него можно записать обычное уравнение второго порядка с массовым членом:

$$\partial^2\chi^\mu + m^2\chi^\mu = 0.$$

Далее будет удобно использовать оператор производной, умноженный на мнимую единицу $\hat{p}^\mu = \imath\partial^\mu = \{\imath\partial_0,\ -\imath\nabla\}$. Шляпка сверху $\hat{p}^\mu$ напоминает, что это не просто 4-вектор, а оператор, который должен подействовать на функцию. В этих обозначениях уравнение второго порядка имеет вид:

$$\hat{\mathrm{p}}^2\chi^\mu = m^2\chi^\mu. \tag{9.1}$$

Спинорные уравнения могут быть также дифференциальными уравнениями первого прядка. Для их записи необходимо ввести спинорный тензор $\hat{p}_{\nu\dot\mu}$, построенный по компонентам 4-вектора $\hat{p}^\mu$ (8.108), стр. 547. Свертка такого тензора с χ^ν приводит к выражению, имеющему индекс с точкой. Его можно построить или из комплексного сопряжения χ_ν или, в более общем случае, введя ещё одно спинорное поле с соответствующим индексом. Для него необходимо записать аналогичное уравнение:

$$\hat{p}_{\nu\dot\mu}\,\chi^\nu = m\xi_{\dot\mu}, \qquad\qquad \hat{p}^{\mu\dot\nu}\,\xi_{\dot\nu} = m\chi^\mu. \tag{9.2}$$

В обоих уравнениях стоит одна и та же константа m. Можно было бы ввести различные константы, однако это не добавит общности. Уравнения линейны, поэтому переопределением спиноров (умножая их на константы) эти два параметра всегда можно сделать равными.

Умножим обе части второго уравнения (9.2) на m и подставим $m\xi_{\dot\nu}$ из первого уравнения:

$$m^2\chi^\mu = \hat{p}^{\mu\dot\nu}\,m\xi_{\dot\nu} = \hat{p}^{\mu\dot\nu}\,\hat{p}_{\alpha\dot\nu}\,\chi^\alpha = \delta^\mu_\alpha\,\hat{\mathrm{p}}^2\chi^\alpha = \hat{\mathrm{p}}^2\chi^\mu,$$

где мы воспользовались соотношением (8.111), стр. 547. Таким образом, решения системы уравнений (9.2) удовлетворяют уравнению (9.1) и аналогичному для спинора $\xi_{\dot\mu}$. Однако, вообще говоря, не наоборот!

• При помощи матриц Паули (стр. 508) систему (9.2) можно переписать в матричном виде. Для этого введем два столбика с компонентами:

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix}, \qquad \xi = \begin{pmatrix} \xi_{\dot{1}} \\ \xi_{\dot{2}} \end{pmatrix}.$$

Меняя в первом уравнении (9.2) порядок индексов $\hat{p}_{\nu\dot{\mu}}\,\chi^\nu = (\hat{p}^T)_{\dot{\mu}\nu}\,\chi^\nu$ и учитывая (8.108),(8.109) стр. 547 получаем систему матричных уравнений:

$$(\hat{p}^0 - \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}})\chi = m\xi, \qquad (\hat{p}^0 + \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}})\xi = m\chi. \tag{9.3}$$

Их можно объединить, перейдя от матриц 2x2 к матрице 4x4:

$$\begin{pmatrix} 0 & \hat{p}_0 + \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}} \\ \hat{p}_0 - \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix},$$

элементы которой – это матрицы 2x2. Введя 4-х компонентную величину, которую называют *дираковским биспинором*:

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \\ \xi_{\dot{1}} \\ \xi_{\dot{2}} \end{pmatrix},$$

системе (9.2) можно ($\lessdot$ H$_{134}$) придать еще более компактный вид (по μ сумма от 0 до 3):

$$\gamma^\mu \hat{p}_\mu \psi = m\psi. \tag{9.4}$$

Это уравнение носит имя Поля Антуана Марии Дирака. Четыре матрицы $\gamma^\mu = \{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\} = \{\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}\}$ также названы в честь него:

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \tag{9.5}$$

В уравнении Дирака можно ($\lessdot$ H$_{135}$) явным образом выделить производную по времени, умножив его обе части на γ^0 (учитывая, что $(\gamma^0)^2 = 1$):

$$\imath \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}} + \beta m)\psi, \tag{9.6}$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \{\gamma^0\gamma^1,\, \gamma^0\gamma^2,\, \gamma^0\gamma^3\}$ – введенные выше (9.5) три матрицы и $\beta = \gamma^0$.

Запишем в явном виде все индексы в уравнении Дирака (9.4):

$$\gamma^\mu_{ab}\,\hat{p}_\mu\,\psi_b = m\,\psi_a.$$

По индексу b проводится суммирование от 1 до 4, а по индексу μ от 0 до 3. Часто опускают не только индексы a и b, но и индекс μ, используя ковариантные обозначения 4-векторов: $\gamma^0\hat{p}^0 - \boldsymbol{\gamma}\hat{\mathbf{p}} = \gamma^\mu\hat{p}_\mu = \gamma \cdot \hat{\mathrm{p}}$.

• Кроме дираковского биспинора ψ введём *сопряженный биспинор*:

$$\bar\psi = \psi^+\gamma^0 = \begin{pmatrix}\chi^+ & \xi^+\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = (\xi^+\ \chi^+). \qquad (9.7)$$

Крестик – это эрмитово сопряжение, которое превращает столбик ψ в строку комплексно сопряженных элементов. Матрица γ^0 умножается на эту строку справа, в результате чего снова получается строка. Сопряженный биспинор важен тем, что его свертка с исходным биспинором даёт инвариант относительно преобразований Лоренца:

$$\bar\psi\psi = (\xi^+\ \chi^+)\begin{pmatrix}\chi\\ \xi\end{pmatrix} = \xi^+\chi + \chi^+\xi = \xi^*_{\dot\alpha}\chi^\alpha + \chi^{*\alpha}\xi_{\dot\alpha} = \mathrm{inv}.$$

В этом выражении свёрнуты разнотипные индексы (с точкой и без неё). Однако, так как комплексно сопряженный спинор с точкой преобразуется, по определению, также как без точки, по своим трансформационным свойствам это выражение оказывается инвариантом.

Из аналогичных соображений можно записать следующие соотношения для компонент двух 4-векторов $\mathrm{a} = \{a^0, \mathbf{a}\}$ и $\mathrm{b} = \{a^0, \mathbf{b}\}$:

$$\chi^\alpha\chi^{*\beta} \sim a^{\alpha\dot\beta} \sim \frac{1}{2}\,(a^0 + \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})^{\alpha\beta}, \qquad \xi^*_{\dot\alpha}\xi_{\dot\beta} \sim b_{\dot\alpha\beta} \sim \frac{1}{2}\,(b^0 - \mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}^T)_{\alpha\beta},$$

где тильда обозначает фразу “преобразуется также” (см.стр. 544). Эти выражения можно обратить:

$$a^0 \sim \chi^+\chi, \qquad \mathbf{a} \sim \chi^+\boldsymbol{\sigma}\chi, \qquad b^0 \sim \xi^+\xi, \qquad \mathbf{b} \sim -\xi^+\boldsymbol{\sigma}\xi. \qquad (9.8)$$

Действительно, след матриц Паули нулевой, поэтому суммируя по $\beta = \alpha$, получаем a^0 и b^0 (след единичной матрицы 2x2 равен 2). Вектор $\mathbf{a}$ получается ($\lessdot$ H_{136}) из свертки $\chi^{*\beta}\boldsymbol{\sigma}^{\beta\alpha}\chi^\alpha$ с учетом алгебры матриц Паули (8.6), стр. 508. Аналогичные вычисления проводятся для вектора $\mathbf{b}$.

Из соотношений (9.8) следует, что величина

$$\bar\psi\gamma^\mu\psi \sim a^\mu + b^\mu$$

при преобразованиях Лоренца меняется как 4-вектор. Действительно, её нулевая компонента равна $\psi^+\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^+\psi = \chi^+\chi + \xi^+\xi \sim a^0 + b^0$. Пространственные:

$$\psi^+\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\psi = \psi^+\boldsymbol{\alpha}\psi = (\chi^+\ \xi^+)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & -\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi\\ \xi\end{pmatrix} = \chi^+\boldsymbol{\sigma}\chi - \xi^+\boldsymbol{\sigma}\xi \ \sim\ \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Заметим, что соотношения (9.8) более общие, чем $\bar\psi\gamma^\mu\psi \sim a^\mu + b^\mu$, так в последнем 4-векторы a^μ и b^μ “сливаются” в один, равный их сумме.

• Найдем уравнение которому удовлетворяет сопряженный биспинор. Для этого возьмём эрмитово сопряжение от уравнения Дирака (9.4):

$$-\hat{p}_\mu \psi^+ (\gamma^\mu)^+ = m\psi^+$$

(знак минус появился от мнимой единицы $\hat{p}_\mu = \imath\partial_\mu$). Матрица γ^0 – эрмитово самосопряженная. Эрмитовыми матрицами являются также матрицы Паули. Перемножая матрицы несложно проверить следующее соотношение:

$$\boldsymbol{\gamma}^+ = -\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \gamma^0. \tag{9.9}$$

Так как $(\gamma^0)^2 = 1$ (единичная матрица), имеем следующее правило для эрмитового сопряжения матриц Дирака:

$$(\gamma^\mu)^+ = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \tag{9.10}$$

В результате:

$$-\hat{p}_\mu \psi^+ \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = m\psi^+,$$

Умножая обе части уравнения справа на γ^0 и вводя сопряженный биспинор, получаем уравнение:

$$\hat{p}_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu = -m\bar{\psi}. \tag{9.11}$$

При помощи этого уравнения и исходного уравнения Дирака можно получить уравнение непрерывности. Для этого умножим (9.4) слева на $\bar{\psi}$, а сопряженное уравнение (9.11) справа на ψ и сложим их:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu \hat{p}_\mu \psi + (\hat{p}_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu \psi = \hat{p}_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0.$$

Вспоминая, что $\hat{p}_\mu = \imath\partial_\mu$, приходим к уравнению непрерывности:

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0.$$

Выражение в скобках является 4-вектором $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, поэтому результирующее уравнение – это инвариант относительно преобразований Лоренца.

Обратим внимание, что нулевая компонента 4-плотности тока (“плотность заряда”) $j^0 = \chi^+\chi + \xi^+\xi$ является положительно определенной, а 3-плотность тока – нет. Например, для $j_z = \chi^+\sigma_z\chi - \xi^+\sigma_z\xi$, имеем:

$$j_z = (\chi^{*1}\ \chi^{*2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix} - (\xi^*_{\dot{1}}\ \xi^*_{\dot{2}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{\dot{1}} \\ \xi_{\dot{2}} \end{pmatrix}$$

или, перемножая матрицы:

$$j_z = |\chi^1|^2 - |\chi^2|^2 - |\xi_{\dot{1}}|^2 + |\xi_{\dot{2}}|^2.$$

В зависимости от соотношения компонент спиноров это выражение может быть как положительным, так и отрицательным.

• Уравнение Дирака можно записывать для различных линейных комбинаций спиноров, входящих в биспинор ψ. Пусть, например:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\chi + \xi), \qquad \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\chi - \xi) \tag{9.12}$$

(это уже не спиноры, так как они имеют смешанные индексы). Складывая и вычитая (9.3), для введенных функций, получаем уравнения:

$$(\hat{p}^0 - m)\phi = \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}\,\zeta, \qquad (\hat{p}^0 + m)\zeta = \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}\,\phi, \tag{9.13}$$

или вводя четырехкомпонентную функцию $\tilde{\psi} = (\phi\ \zeta)^T$:

$$\begin{pmatrix} \hat{p}^0 - m & -\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}} & -\hat{p}^0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \zeta \end{pmatrix} = 0.$$

Это уравнение можно переписать в дираковской форме $\tilde{\gamma}^\mu \hat{p}_\mu \tilde{\psi} = m\tilde{\psi}$, если матрицы определить следующим образом:

$$\tilde{\gamma}^0 = \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \tilde{\gamma}^0 \tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.14}$$

Такую запись матриц Дирака называют *стандартным представлением.* Матрицы Дирака в форме (9.5) называют *спинорным представлением.*

В общем случае можно записать следующие линейные преобразования для биспинора и матриц Дирака:

$$\tilde{\psi} = U\psi, \qquad \tilde{\gamma}^\mu = U\gamma^\mu U^{-1}, \tag{9.15}$$

где U – постоянная матрица 4x4. Новая 4-компонентная функция $\tilde{\psi}$ снова удовлетворяет уравнению Дирака (надо слева умножить на U^{-1}):

$$\hat{p}_\mu\,(U\gamma^\mu U^{-1})\,U\psi = m\,U\psi.$$

В частности, преобразование (9.12) соответствует унитарной матрице:

$$U = U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{9.16}$$

которая переводит спинорное представление в стандартное и наоборот. Стоит проверить ($\lessdot$ H$_{137}$), что унитарное преобразование

$$U = U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \sigma_y \\ \sigma_y & -1 \end{pmatrix}$$

переводит стандартное представление в такое, в котором уравнение Дирака становится дифференциальным уравнением с действительными коэффициентами, а, следовательно, распадается на независимые уравнения для действительной и мнимой части ψ (*представление Майораны*).

• Начав в предыдущей главе с кватернионного описания преобразований Лоренца и электродинамики, мы пришли к новому математическому объекту – спинору. Дифференциальное уравнение для спинорного поля естественным образом записывается в терминах биспинора – величины, состоящей из двух спиноров. Можно рассматривать классическую теорию биспинорного поля, аналогично скалярному или векторному полям. Оно отличается от последних только свойствами трансформации при преобразованиях Лоренца. Именно эти свойства, в конечном счёте, и определяют явный вид уравнений поля.

Исторический путь, который привёл Дирака в 1928 г. к его уравнению, был совершенно другим. В это время активно развивалась квантовая механика. Благодаря работам Луи де Бройля и Эрвина Шредингера было записано дифференциальное уравнение в частных производных, которому удовлетворяла *амплитуда вероятности* нахождения частицы в пространстве. Это уравнение прекрасно описывало эффект интерференции частиц, когда они ведут себя подобно волнам. Кроме этого, уравнение Шредингера приводило к верным *дискретным* значениям энергии электрона в атоме водорода. Исходные рассуждения де Бройля и Шредингера основывались на релятивистских соображениях, в результате которых устанавливалась линейная связь $\mathrm{p} = \hbar \mathrm{k}$ между 4-вектором импульса частицы $\mathrm{p} = \{E, \mathbf{p}\}$ и волновым 4-вектором $\mathrm{k} = \{\omega, \mathbf{k}\}$, определяющим явления интерференции. Однако, так как релятивистское уравнение Шредингера не учитывало наличие у электрона спина, оно давало уровни энергии атома водорода с большими ошибками. Поэтому Шредингер перешёл к его нерелятивистскому аналогу, где согласие оказалось существенно выше. В дальнейшем, релятивистское уравнение Шредингера было переоткрыто Клейном, Гордоном, Фоком и другими физиками. Математически оно эквивалентно уравнению классического скалярного комплексного поля $(\partial^2 + m^2)\Psi = 0$. Уравнение непрерывности (сохранение тока) для Ψ приводит к тому, что вероятность нахождения частицы в пространстве (*если* интерпретировать Ψ как амплитуду вероятности) не является положительно определённой (см. стр. 453), что недопустимо.

Надеясь решить эту проблему Дирак искал уравнение, которое имело было бы производную по времени первого порядка, как и нерелятивистское уравнение Шредингера (у которого всё нормально со знаком вероятности). При этом решения такого уравнение должны были удовлетворять и релятивистскому уравнению. Выяснилось, что это можно сделать, если Ψ будет четырёхкомпонентной, а уравнение матричным. Так исторически появился биспинор и матрицы Дирака.

9.2 Алгебра матриц Дирака

• Кроме четырех матриц Дирака γ^0 и $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}$ важную роль играют их произведения:

$$\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}, \qquad \gamma^5 = \imath\, \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

Матрицы можно записывать в различных представлениях $\tilde{\gamma}^\mu = U\gamma^\mu U^{-1}$, которые соответствуют линейным комбинациям биспинора $\tilde{\psi} = U\psi$. Приведем в справочных целях наиболее популярные представления:
спинорное представление:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

стандартное представление или *представление Дирака*:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

представление Вейля:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В спинорном представлении матрица γ^5 определяет так называемые *проекционные матрицы*:

$$\frac{1}{2}\,(1+\gamma^5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}\,(1-\gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

“вырезающие” при действии на биспинор верхний или нижний спиноры. В вейлевском представлении проекционные матрицы меняются местами. Стоит найти матрицу U перехода от спинорного представления к представлению Вейля ($\lessdot$ H_{138}).

Прямым перемножением можно проверить, что для матриц Дирака выполняется следующая алгебра:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \tag{9.17}$$

где $g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ – метрический тензор 4-пространства, который умножается на единичную матрицу. В соотношение (9.17) можно включить и матрицу γ^5 если считать, что $g^{55} = 1$. Достаточно проверить эту алгебру только для одного представления, так как она инварианта относительно преобразования $\tilde{\gamma}^\mu = U\gamma^\mu U^{-1}$. Таким образом, квадрат матриц γ^0 и γ^5 равен 1, а квадрат матриц γ^1, γ^2, γ^3 равен -1. Если индексы μ и ν *различны*, то матрицы *антикоммутируют*: $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$.

Матрицы $\boldsymbol{\alpha}$ обладают похожей алгеброй, но с символом Кронекера:

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}. \tag{9.18}$$

Матрицы γ^5 и $\boldsymbol{\alpha}$ коммутируют, а $\beta = \gamma^0$ с γ^5 и $\boldsymbol{\alpha}$ – антикоммутируют:

$$\boldsymbol{\alpha}\gamma^5 = \gamma^5\boldsymbol{\alpha}, \qquad \beta\gamma^5 = -\gamma^5\beta, \qquad \beta\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}\beta. \tag{9.19}$$

Эти соотношения можно ($\lessdot$ H$_{139}$) уже проверить не перемножая матрицы, а используя алгебру (9.17) и определение $\boldsymbol{\alpha}$ и β.

Нам потребуется также следующий набор из шести матриц:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right) = \gamma^\mu\gamma^\nu - g^{\mu\nu}, \tag{9.20}$$

где второе равенство записано при помощи алгебры (9.17). Заметим, что $\gamma^\mu\gamma^\nu = \sigma^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}$ разбивается на сумму симметричного тензора $g^{\mu\nu}$ (умноженного на единичную матрицу) и антисимметричного матричного тензора $\sigma^{\mu\nu}$.

Обратим внимание, что индексы μ и ν перечисляют матрицы $\sigma^{\mu\nu}$, а не являются номерами их компонент. Антисимметричный матричный тензор $\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$ можно выразить через два матричных вектора. Так, $\sigma^{0i} = \gamma^0\gamma^i = \alpha^i$ или $\boldsymbol{\alpha} = \{\sigma^{01}, \sigma^{02}, \sigma^{03}\}$. Три независимые пространственные компоненты выражаются через векторную матрицу:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \imath\left\{\sigma^{23},\, \sigma^{31},\, \sigma^{12}\right\} = \imath\left\{\gamma^2\gamma^3,\ \gamma^3\gamma^1,\ \gamma^1\gamma^2\right\} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \tag{9.21}$$

где запись через матрицы Паули справедлива для всех приведенных выше представлений (но не для всех возможных!). Через векторные матрицы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$ тензорную матрицу $\sigma^{\mu\nu}$ можно записать следующим образом:

$$\sigma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ -\alpha_x & 0 & -\imath\Sigma_z & \imath\Sigma_y \\ -\alpha_y & \imath\Sigma_z & 0 & -\imath\Sigma_x \\ -\alpha_z & -\imath\Sigma_y & \imath\Sigma_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{9.22}$$

или используя обозначения 3-й главы (стр. 180) $\sigma^{\mu\nu} = (-\boldsymbol{\alpha}, -\imath\boldsymbol{\Sigma})$.

В любом представлении можно проверить ($\lessdot$ H$_{140}$), что

$$\det\gamma^0 = \det\boldsymbol{\gamma} = \det\gamma^5 = \det\boldsymbol{\alpha} = \det\boldsymbol{\Sigma} = 1. \tag{9.23}$$

Определитель инвариантен относительно смены представления:

$$\det(U\Gamma U^{-1}) = \det U \det\Gamma \det U^{-1} = \det\Gamma \det(UU^{-1}) = \det\Gamma,$$

поэтому определители матриц будут равны единице в любом представлении.

• Введём матрицы Дирака с нижним индексом:

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu = \{\gamma^0,\, -\boldsymbol{\gamma}\} = (\gamma^\mu)^+ = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0, \tag{9.24}$$

где крестик – это эрмитово сопряжение. Соотношение $(\gamma^\mu)^+ = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ справедливо для представлений, получающихся из спинорного при помощи *унитарной* матрицы $U^+U = 1$ ($\lessdot\,\mathrm{H}_{141}$). В таких представлениях (все приведенные выше) $\beta = \gamma^0$, γ^5, $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$ являются эрмитовыми матрицами, а ($\lessdot\,\mathrm{H}_{142}$)

$$(\sigma^{\mu\nu})^+ = -\gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0. \tag{9.25}$$

По аналогии с ковариантным тензорным анализом определяется матричный тензор $\sigma_{\mu\nu}$ с нижними индексами, при помощи свертки $\sigma^{\mu\nu}$ с двумя метрическими тензорами. В этом случае нулевые компоненты меняют знак, а пространственные – нет: $\sigma_{\mu\nu} = (\boldsymbol{\alpha}, -\imath\boldsymbol{\Sigma})$.

Во всех приведенных выше представлениях матрицы γ^0 и γ^2 *симметричны*, а γ^1 и γ^3 – *антисимметричны*:

$$(\gamma^0)^T = \gamma^0, \qquad (\gamma^2)^T = \gamma^2, \qquad (\gamma^1)^T = -\gamma^1, \qquad (\gamma^3)^T = -\gamma^3.$$

Подобное свойство выполняется и в других представлениях, которые получаются при помощи *ортогональной* матрицы $U^TU = 1$. (т.е. не во всех представлениях). При помощи матрицы γ^2 эти соотношения можно записать в виде одного (справа индекс внизу!):

$$(\gamma^\mu)^T = \gamma^2\gamma_\mu\gamma^2. \tag{9.26}$$

Кроме этого из $(\gamma^\mu)^+ = (\gamma^\mu)^{*T} = \gamma_\mu$ следует, что при комплексном сопряжении матрицы меняются следующим образом: $(\gamma^\mu)^* = \gamma^T_\mu = \gamma^2\gamma^\mu\gamma^2$.

• При помощи алгебры матриц Дирака (9.17) можно вычислять коммутаторы (напомним, что $[A, B] = AB - BA$). Например ($\lessdot\,\mathrm{H}_{143}$):

$$[\gamma^\alpha,\, \gamma^\mu\gamma^\nu] = 2(g^{\alpha\mu}\gamma^\nu - g^{\alpha\nu}\gamma^\mu). \tag{9.27}$$

Такой же результат получится при коммутировании γ^α с $\sigma^{\mu\nu}$. Свертка коммутатора с $g_{\mu\nu}$ в правой части (9.27) даёт ноль. Это связано с тем, что $g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = \gamma^\mu\gamma_\mu$ пропорциональна единичной матрице. Действительно, при помощи алгебры (9.17) докажем что

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4. \tag{9.28}$$

По определению $\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$ и $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, поэтому:

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = g_{\mu\nu}(-\gamma^\nu\gamma^\mu + 2g^{\mu\nu}) = -\gamma^\mu\gamma_\mu + 2g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}.$$

Перенося $\gamma^\mu\gamma_\mu$ влево и учитывая $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \delta^\mu_\mu = 4$, приходим к (9.28).

• Пусть между свертывающимися матрицами Дирака стоит произведение произвольного числа матриц Дирака: $\gamma^\mu A \gamma_\mu$, где $A = \gamma^{\lambda_1}...\gamma^{\lambda_n}$. Для упрощения таких выражений, одна из сворачивающихся матриц при помощи алгебры (9.17) переносится ко второй, после чего их свертка убирается по (9.28): Например:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\mu + 2g^{\mu\nu}\gamma_\mu = -4\gamma^\nu + 2\gamma^\nu = -2\gamma^\nu. \tag{9.29}$$

Приведём несколько таких свёрток:

$$\begin{gathered}
\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu,\\
\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\rho\gamma_\mu = 4g^{\lambda\rho},\\
\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = -2\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\lambda,\\
\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = 2(\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\lambda).
\end{gathered}$$

Аналогично упрощаются выражения со свертками матриц Дирака, стоящими в произвольных местах. Матрицы с одинаковыми индексами собираются вместе, после чего применяется соотношение (9.28).

• След (сумма диагональных элементов) матриц Дирака γ^μ, γ^5 равен нулю. Для следа произведения матриц Дирака справедливы следующие соотношения (индексы равны $0, ..., 5$ и $g^{00} = g^{55} = 1$):

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = g^{\mu\nu}, \tag{9.30}$$

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) = g^{\lambda\mu}g^{\nu\rho} - g^{\lambda\nu}g^{\mu\rho} + g^{\lambda\rho}g^{\mu\nu}. \tag{9.31}$$

Для доказательства необходимо перенести первую матрицу под следом вправо, при помощи алгебры (9.17), затем, воспользовавшись тем, что под следом можно делать циклическую перестановку, получить исходное выражение. Так:

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = \mathrm{Tr}(-\gamma^\nu\gamma^\mu + 2g^{\mu\nu}) = -\,\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) + 2g^{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}\,1.$$

Так как $\mathrm{Tr}\,1 = 4$, получаем (9.30) и аналогично (9.31). След нечетного произведения матриц Дирака равен нулю (например, $\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda) = 0$, индексы 0...3). Это можно показать ($\lessdot$ H_{144}), умножив выражение под следом на $1 = \gamma^5\gamma^5$ (γ^5 антикоммутирует со всеми матрицами Дирака).

След γ^5 с двумя и четырьмя матрицами Дирака равен ($\lessdot$ H_{145}):

$$\begin{gathered}
\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu) = 0,\\
\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) = 4\imath\,\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho},
\end{gathered}$$

где $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ – тензор Леви-Чевиты ($\varepsilon^{0123} = -1$). Заметим, что матрицу γ^5 можно также записать в виде $\gamma^5 = (\imath/4!)\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho$.

• Матрицы $\gamma^5,\ \sigma^{\mu\nu}$ или $\gamma^5,\ \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\Sigma}$, вместе с единичной матрицей образуют *замкнутую алгебру*, в том смысле, что их произведения выражаются снова через эти же матрицы. Так:

$$\gamma^5\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\gamma^5 = \boldsymbol{\Sigma}, \qquad\qquad \gamma^5\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}\gamma^5 = \boldsymbol{\alpha}. \tag{9.32}$$

Эти формулы проще всего проверить в любом конкретном представлении. Понятно, что при преобразовании $\tilde{\Gamma} = U\Gamma U^{-1}$ эти и им подобные соотношения не изменятся. Для описания алгебры матриц $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$ удобно скалярно умножить их на два произвольных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Снова выбирая, например, спинорное представление и, используя алгебру матриц Паули (стр. 508), получаем:

$$(\mathbf{a}\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{b}\boldsymbol{\alpha}) = (\mathbf{a}\boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{b}\boldsymbol{\Sigma}) = \quad \mathbf{ab} \quad\ + \ \imath[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\,\boldsymbol{\Sigma}. \tag{9.33}$$

$$(\mathbf{a}\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{b}\boldsymbol{\Sigma}) = (\mathbf{a}\boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{b}\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{ab}\,\gamma^5 \ + \ \imath\,[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\,\boldsymbol{\alpha}. \tag{9.34}$$

Обратим внимание, что при умножении матриц $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$ возникает матрица γ^5, поэтому без неё алгебра будет незамкнута. При помощи этих тождеств можно получать различные производные соотношения. Например, опуская вектор $\mathbf{a}$ (он произвольный!) в последнем равенстве, имеем:

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{b}\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{b}\,\gamma^5 + \imath\,[\mathbf{b}\times\boldsymbol{\alpha}], \tag{9.35}$$

где вектор $\mathbf{a}$ был предварительно внесен из векторного произведения (правило выталкивания). Аналогично, тождество (9.34) даёт значение коммутатора:

$$[\mathbf{a}\boldsymbol{\Sigma},\ \mathbf{b}\boldsymbol{\alpha}] = 2\imath\,[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\,\boldsymbol{\alpha}. \tag{9.36}$$

Из (9.33) следуют коммутаторы для векторных матриц между собой:

$$[\mathbf{a}\boldsymbol{\alpha},\ \mathbf{b}\boldsymbol{\alpha}] = [\mathbf{a}\boldsymbol{\Sigma},\ \mathbf{b}\boldsymbol{\Sigma}] = 2\imath\,[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\,\boldsymbol{\Sigma}. \tag{9.37}$$

Если опустить векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то вместо векторного произведение необходимо будет написать символ Леви-Чевиты $\varepsilon_{ijk}\,\boldsymbol{\Sigma}_k$. Матрица γ^5 в соответствии с (9.32) коммутирует с $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$.

В представлениях в которых справедливо правило транспонирования матриц Дирака (9.26), стр. 568 выполняются соотношения ($\lessdot$ H$_{146}$):

$$(\gamma^5)^T = \gamma^5, \qquad\quad \boldsymbol{\alpha}^T = -\gamma^2\boldsymbol{\alpha}\gamma^2, \qquad\quad \boldsymbol{\Sigma}^T = \gamma^2\boldsymbol{\Sigma}\gamma^2 \tag{9.38}$$

Из тождеств (9.33) следует, что для единичного вектора $\mathbf{n}^2 = 1$ имеет место $(\mathbf{n}\boldsymbol{\Sigma})^2 = (\mathbf{n}\boldsymbol{\alpha})^2 = 1$. Поэтому, раскладывая экспоненту в ряд, можно получить следующее соотношение: $e^{\phi\mathbf{n}\boldsymbol{\alpha}} = \operatorname{ch}\phi + \mathbf{n}\boldsymbol{\alpha}\operatorname{sh}\phi$ и аналогичное соотношение для $\boldsymbol{\Sigma}$. Кроме этого $e^{\phi\gamma^5} = \operatorname{ch}\phi + \gamma^5\operatorname{sh}\phi$.

• Любая матрица 2x2 с четырьмя комплексными элементами может быть разложена по базису, состоящему из единичной матрицы и трех матриц Паули $\boldsymbol{\sigma}$. Аналогично, любая матрица 4x4 имеет 16 элементов и может быть разложена по шестнадцати матрицам ($\mu < \nu$):

$$\Gamma_a = \{ \quad 1, \quad \gamma^5, \quad \gamma^\mu, \quad \gamma^\mu\gamma^5, \quad \sigma^{\mu\nu} \quad \},$$

которые составляют базис в пространстве матриц 4x4. Матрицы $\sigma^{\mu\nu}$, как мы видели, эквивалентны двум парам векторных матриц $\boldsymbol{\alpha}$ и $-\imath\boldsymbol{\Sigma}$, которые можно использовать в базисе вместо $\sigma^{\mu\nu}$:

$$\Gamma_a = \{ \quad 1, \quad \gamma^5, \quad \gamma^\mu, \quad \gamma^\mu\gamma^5, \quad \boldsymbol{\alpha}, \quad -\imath\boldsymbol{\Sigma} \quad \}.$$

В спинорном представлении след всех матриц базиса Γ_a, кроме единичной $\Gamma_0 = 1$, равен нулю. След инвариантен относительно унитарного преобразования $\tilde{\Gamma}_a = U\Gamma_a U^+$, поэтому в любом таком представлении:

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,\Gamma_a = \delta_{0a}.$$

При помощи (9.30), (9.31) можно проверить, что

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(\Gamma_a\,\Gamma_b^+) = \delta_{ab}.$$

Следовательно, для произвольной матрицы M всегда можно записать:

$$M = \sum_{a=1}^{16} c_a\Gamma_a, \tag{9.39}$$

где c_a – комплексные коэффициенты разложения (проекции матрицы M на базисные матричные векторы Γ_a) равны:

$$c_a = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(M\Gamma_a^+).$$

Если матрица M нулевая (все элементы нули), то коэффициенты её разложения по базису будут равны нулю.

Можно проверить, что $\Gamma_a\Gamma_b$ всегда представима в форме (9.39), т.е. произведение базисных матриц снова дает некоторую линейную комбинацию базисных матриц. Поэтому, в частности, произведение двух произвольных матриц 4x4, записанных в форме (9.39), снова приведёт к аналогичному разложению.

Заметим также, что девять матриц базиса Γ_a является эрмитовыми: $\{1,\ \gamma^5,\ \gamma^0,\ \boldsymbol{\gamma}\gamma^5,\ \boldsymbol{\alpha}\}$, остальные семь: $\{\gamma^0\gamma^5,\ \boldsymbol{\gamma},\ -\imath\boldsymbol{\Sigma}\}$ – антиэрмитовыми (при эрмитовом сопряжении у них появляется знак минус).

9.3 Преобразование биспинора

Двухкомпонентные спиноры, по определению, преобразуются при помощи матрицы 2x2, с единичным определителем (группа $\mathbf{SL}(2,C)$). Запишем эту матрицу (стр. 542), выделив действительную и мнимую части в её параметрах:

$$\mathbb{S} = c_0 + \imath c_1 + (\mathbf{a} + \imath\mathbf{b})\,\boldsymbol{\sigma}.$$

Так как $\mathbb{S}\bar{\mathbb{S}} = \mathbb{I}$, то существует связь $(c_0 + \imath c_1)^2 - (\mathbf{a} + \imath\mathbf{b})^2 = 1$. Матрица $\mathbb{S}$ преобразует спинор без точки с верхним индексом: $\chi^\mu = \mathbb{S}^\mu{}_\nu \chi^\nu$. Преобразование же спинора с нижним индексом выглядит так:

$$\chi'_\mu = \varepsilon_{\mu\nu}\chi'^\nu = \varepsilon_{\mu\nu}\mathbb{S}^\nu{}_\lambda\,\chi^\lambda = \varepsilon_{\mu\nu}\mathbb{S}^\nu{}_\lambda\,\chi_\tau\varepsilon^{\tau\lambda} = -(\varepsilon\mathbb{S}\varepsilon)_\mu{}^\tau\,\chi_\tau.$$

Спинор с нижним индексом и точкой, преобразуется как комплексное сопряжение спинора без точки:

$$\xi'_{\dot\mu} = -(\varepsilon\mathbb{S}^*\varepsilon)_{\dot\mu}{}^{\dot\tau}\xi_{\dot\tau}$$

(напомним, что ε – действительна). Квадрат матрицы ε равен $\varepsilon^2 = -1$ и $\varepsilon\boldsymbol{\sigma}\varepsilon = \boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}^*$, поэтому:

$$-\varepsilon\mathbb{S}^*\varepsilon = c_0 - \imath c_1 - (\mathbf{a} - \imath\mathbf{b})\,\boldsymbol{\sigma}.$$

Запишем преобразование для биспинора $\psi = (\chi^\nu \;\; \xi_{\dot\mu})^T \equiv (\chi \;\; \xi)^T$:

$$\psi' = \begin{pmatrix}\chi'\\ \xi'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbb{S} & 0\\ 0 & -\varepsilon\mathbb{S}^*\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi\\ \xi\end{pmatrix} = S\psi.$$

Учитывая явный вид матриц в *спинорном* представлении, окончательно, получаем:

$$S = c_0 + \imath c_1\gamma^5 + \mathbf{a}\boldsymbol{\alpha} + \imath\mathbf{b}\boldsymbol{\Sigma}. \tag{9.40}$$

Несложно видеть, что преобразование $\psi' = S\psi$ с такой матрицей справедливо в любом представлении $\tilde\psi = U\psi$, $\tilde\Gamma = U\Gamma U^{-1}$, а не только в спинорном. Обратим внимание на наличие матрицы γ^5. Часто её игнорируют, ограничиваясь только матрицами $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ или их ковариантным аналогом $\sigma^{\mu\nu}$. В случае бустов или пространственных вращений скалярная часть кватернионов преобразований действительна и $c_1 = 0$. Поэтому, в этом случае матрица γ^5 не возникает. Однако уже композиция произвольного буста и вращения приводит к γ^5. Связано это с тем фактом, что $\sigma^{\mu\nu}$ или $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ не образуют замкнутой алгебры относительно умножения. Как было показано в предыдущем разделе такую алгебру, наряду с единичной матрицей, имеют матрицы $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ и γ^5. Поэтому последняя неизбежно появляется в матрице преобразования биспинора относительно общих преобразований Лоренца.

Обратный кватернион преобразования получается из исходного, сопряжением $\mathbb{S}\bar{\mathbb{S}} = \mathbb{I}$, т.е. сменой знака у векторных компонент. Поэтому, для записи обратной матрицы S^{-1} необходимо изменить знак у векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Действительно, прямым перемножением с учетом тождеств (9.32)-(9.34) и соотношений $c_0^2 - c_1^2 - \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = 1, \quad c_0 c_1 = \mathbf{ab}$, следующих из связи коэффициентов кватерниона, несложно проверить, что:

$$S^{-1} = c_0 + \imath c_1 \gamma^5 - \mathbf{a}\boldsymbol{\alpha} - \imath \mathbf{b}\boldsymbol{\Sigma}. \tag{9.41}$$

Если ввести антисимметричный тензор $\omega_{\mu\nu} = 2(-\mathbf{a}, \ -\mathbf{b})$, компоненты которого определяются действительной и мнимой частью векторных компонент кватерниона и матрицу $\sigma^{\mu\nu} = (-\boldsymbol{\alpha}, -\imath\boldsymbol{\Sigma})$, то матрицы преобразования биспинора можно записать в следующем виде:

$$S = c_0 + \imath c_1 \gamma^5 + \frac{1}{4}\,\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}, \qquad\qquad S^{-1} = c_0 + \imath c_1 \gamma^5 - \frac{1}{4}\,\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \tag{9.42}$$

Для лоренцевского буста со скоростью $\mathbf{v}$ и пространственного вращения на угол ϕ вокруг единичного вектора $\mathbf{n}$ матрицы преобразования биспинора выглядят следующим образом (см.(8.93), стр. 542):

$$L = \mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \mathrm{sh}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\mathbf{m}\boldsymbol{\alpha}, \qquad R = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \imath \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\mathbf{n}\boldsymbol{\Sigma}, \tag{9.43}$$

где $\mathrm{th}\,\alpha = v$, $\mathbf{m} = \mathbf{v}/v$ (не путать параметр α с тройкой матриц $\boldsymbol{\alpha}$). Перемножение матриц L и R при произвольном значении их параметров даст матрицу общего преобразования. Напомним, что при этом дополнительно к матрицам $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$ появится матрица γ^5.

При бесконечно малом преобразовании $\delta\mathbf{v} = \alpha\,\mathbf{m}$ и $\delta\boldsymbol{\phi} = \phi\,\mathbf{n}$ синусы и косинусы в (9.43) можно разложить в ряд и матрицы преобразований принимают вид:

$$L \approx 1 - \frac{1}{2}\,\delta\mathbf{v}\boldsymbol{\alpha}, \qquad\qquad R \approx 1 + \frac{\imath}{2}\,\delta\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\Sigma}.$$

В первом приближении такая композиция лоренцевского буста и поворота выполненная *в любом* порядке, равна:

$$S = LR \approx RL \approx 1 - \frac{1}{2}\,\delta\mathbf{v}\boldsymbol{\alpha} + \frac{\imath}{2}\,\delta\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\Sigma} = 1 + \frac{1}{4}\,\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}, \tag{9.44}$$

где $\omega_{\mu\nu} = (\delta\mathbf{v}, \ -\delta\boldsymbol{\phi})$. *В этом* приближении скалярная часть кватерниона действительна, поэтому, в отличие от (9.42), матрица γ^5 не возникает. В качестве упражнения ($\lessdot$ H$_{147}$) предлагается убедиться, что антисимметричная матрица $\omega^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\nu}$ является матрицей бесконечно малого преобразования 4-векторов: $x'^{\mu} \approx x^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$.

• Найдём связь матрицы S преобразования спинора и матрицы $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ преобразования 4-вектора:

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x') = S\psi(x), \qquad\qquad x^{\mu} \mapsto x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}, \tag{9.45}$$

где $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ является матрицей группы Лоренца (считаем, что $\Lambda^{0}{}_{0} > 0$). Запишем уравнение Дирака в штрихованной системе отсчета:

$$\imath\gamma^{\mu}\partial'_{\mu}\psi'(x') = m\psi'(x').$$

Производная ∂^{μ} преобразуется как и любой 4-вектор в соответствии со вторым соотношением (9.45):

$$\partial'_{\mu} = g_{\mu\alpha}\partial'^{\alpha} = g_{\mu\alpha}\,\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\,\partial^{\beta} = g_{\mu\alpha}\,\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\,g^{\beta\nu}\,\partial_{\nu} = \tilde{\Lambda}_{\mu}{}^{\nu}\,\partial_{\nu}. \tag{9.46}$$

Поэтому в нештрихованной системе уравнение Дирака имеет вид:

$$\imath\gamma^{\mu}\,\tilde{\Lambda}_{\mu}{}^{\nu}\,\partial_{\nu}\,S\psi(x) = m\,S\psi(x).$$

Умножая его слева на S^{-1} и требуя, чтобы получилось исходное уравнение $\imath\gamma^{\nu}\partial_{\nu}\psi = m\psi$, имеем:

$$S^{-1}\gamma^{\mu}S\,\tilde{\Lambda}_{\mu}{}^{\nu} = \gamma^{\nu}.$$

Это соотношение эквивалентно следующей связи S и Λ:

$$S^{-1}\gamma^{\mu}\,S = \Lambda^{\mu}{}_{\lambda}\gamma^{\lambda}, \tag{9.47}$$

что легко проверяется, при помощи условия ортогональности лоренцевской матрицы: $\tilde{\Lambda}_{\mu}{}^{\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\lambda} = \delta^{\nu}_{\lambda}$, см. стр. 139. В качестве полезного упражнения ($\lessdot\,\mathrm{H}_{148}$) предлагается ещё раз найти матрицу S при бесконечно малом преобразовании Лоренца. Для этого её необходимо записать в виде $S \approx 1 + \Omega$, найдя при помощи (9.47) матрицу Ω.

Из инвариантности $\bar{\psi}'\psi' = \psi'^{+}\gamma^{0}\psi' = \psi^{+}S^{+}\gamma^{0}S\psi = \psi^{+}\gamma^{0}\psi$ следует, что $S^{+}\gamma^{0}S = \gamma^{0}$ или

$$S^{-1} = \gamma^{0}S^{+}\gamma^{0}. \tag{9.48}$$

При помощи этого соотношения, стоит проверить (9.41). В представлениях в которых справедливы правила транспонирования (9.38), стр. 570, из (9.40) и эрмитовости матриц, входящих в S несложно получить:

$$S^{+} = -\gamma^{2}S^{T}\gamma^{2}. \tag{9.49}$$

Отметим также, преобразование сопряженного биспинора:

$$\bar{\psi}(x) \mapsto \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}, \tag{9.50}$$

которое непосредственно следует из (9.48) и (9.45).

• Соотношение (9.47) позволяет устанавливать трансформационные свойства различных выражений содержащих спиноры и матрицы Дирака (т.н. *билинейные формы*). Докажем, например, ещё раз, что $\bar\psi\gamma^\mu\psi$ преобразуется как 4-вектор:

$$\bar\psi'\gamma^\mu\psi' = \bar\psi S^{-1}\gamma^\mu S\psi = \Lambda^\mu{}_\nu\, \bar\psi\gamma^\nu\psi.$$

Аналогично, 4-тензором будет выражение в котором между сопряженным спинором и спинором находится произведение произвольного числа матриц Дирака. Например:

$$\bar\psi\gamma^\mu\gamma^\nu\psi \mapsto \bar\psi S^{-1}\gamma^\mu\gamma^\nu S\psi = \bar\psi S^{-1}\gamma^\mu S S^{-1}\gamma^\nu S\psi = \Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\, \bar\psi\gamma^\alpha\gamma^\beta\psi.$$

Последнее равенство является преобразованием 4-тензора второго ранга. В частности $\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi$ является антисимметричным 4-тензором. Очевидно также, что $\bar\psi\psi$ – это скаляр (инвариант преобразований Лоренца).

Матрица S преобразования спинора зависит только от $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{\Sigma}$ и γ^5, с которыми γ^5 коммутирует, поэтому:

$$S\gamma^5 = \gamma^5 S. \tag{9.51}$$

В результате, 4-вектором оказывается следующий *псевдовектор*: $\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi$ (смысл приставки "псевдо" прояснится на стр. 628, при изучении дискретных симметрий). Действительно:

$$\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi \mapsto \bar\psi S^{-1}\gamma^\mu\gamma^5 S\psi = \bar\psi S^{-1}\gamma^\mu S\gamma^5\psi = \Lambda^\mu{}_\nu\, \bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi.$$

Комбинация $\bar\psi\gamma^5\psi$ называется *псевдоскаляром* и, как легко видеть, она инвариантна относительно преобразований Лоренца.

Напомним (стр. 571), что любую матрицу 4х4 можно разложить по базису из 16 матриц $\Gamma_a = \{\ \ 1,\ \ \gamma^5,\ \ \gamma^\mu,\ \ \gamma^\mu\gamma^5,\ \ \sigma^{\mu\nu}\ \}$. Каждая из этих матриц в билинейном выражении $\bar\psi\Gamma_a\psi$ принимает понятный смысл относительно преобразований Лоренца. Поэтому, любая билинейная форма с произвольной матрицей 4х4, находящаяся между $\bar\psi$ и ψ может быть представлена в виде некоторого ковариантного выражения. Коэффициенты разложения такого выражения по базисным матрицам, в свою очередь, являются скалярами, 4-векторами или тензорами.

Используя определение $\bar\psi = \psi^+\gamma^0$ можно записывать билинейные формы и в виде $\psi^+ ... \psi$. Например, так как $\gamma^0\mathbf{\Sigma} = \boldsymbol{\gamma}\gamma^5$, то выражения $\psi^+\gamma^5\psi$ и $\psi^+\mathbf{\Sigma}\,\psi$ являются компонентами 4-вектора.

Отметим также инвариантность выражения:

$$\psi^T\gamma^0\gamma^2\psi = inv,$$

которую несложно доказать при помощи (9.48) и (9.49).

9.4 Лагранжев формализм

• Уравнения поля будут ковариантными, если лагранжиан инвариантен относительно преобразований Лоренца. Как мы выяснили, комбинация $\bar\psi\psi$ является инвариантом, а $\bar\psi\gamma^\mu\psi$ – 4-вектором. Легко проверить, что соотношения (9.8), стр.562 справедливы и для комбинаций вида $\chi^\alpha\tilde\chi^{*\beta}$, где $\tilde\chi^\alpha$ спинор, отличный от χ^α. Поэтому 4-вектором по индексу μ будет и $\bar\psi\gamma^\mu\partial_\nu\psi$ (хотя $\partial_\nu\psi$ отличается от ψ, но он также состоит из двух спиноров). Поэтому инвариантами относительно преобразования Лоренца будут комбинации $\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ и $\bar\psi\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu\psi$, где стрелка над производной означает, что она действует влево (на сопряженный биспинор $\bar\psi$).

Линейные уравнения поля получатся, если лагранжиан будет квадратичен по полям. Наконец, дифференциальные уравнения движения будут первого порядка, если производная входит в лагранжиан линейным образом. Рассмотрим сначала следующий лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \bar\psi(\gamma^\nu\hat p_\nu - m)\psi = \imath\bar\psi\gamma^\nu\partial_\nu\psi - m\bar\psi\psi. \qquad (9.52)$$

Стоит ($\lessdot$ H$_{149}$), его записать в терминах двух спиноров из которых состоит биспинор $\psi = (\chi\ \xi)^T$. Как и в случае комплексного скалярного поля (стр. 452), для получения уравнений Лагранжа необходимо рассматривать все степени свободы поля (т.е. его действительную и мнимые части). Вместо комплексного сопряжения можно взять сопряженный биспинор $\bar\psi = \psi^+\gamma^0$, рассматривая его как независимое поле наряду с исходным биспинором ψ. Уравнения Лагранжа в этом случае имеют вид:

$$\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\psi)}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}, \qquad \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\bar\psi)}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar\psi}.$$

Эти уравнения являются матричными, т.к. индексы у ψ и $\bar\psi$ опущены. Беря производные лагранжиана (9.52), получаем ($\lessdot$ H$_{150}$) уравнение Дирака (9.4) и его сопряженную версию (9.11):

$$(\imath\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0, \qquad \bar\psi(\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0.$$

Если ψ является решением уравнения движения, то лагранжиан (9.52) равен нулю и следовательно экстремальное действие также нулевое.

Лагранжиан инвариантен относительно преобразования группы $\mathbf{U}(1)$ вида $\psi \mapsto e^{\imath\alpha}\psi$, где α – константа. Поэтому, в силу теоремы Нётер (7.55), стр. 452, должен сохранятся *ток*:

$$j^\nu = \imath\bar\psi\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar\psi)} - \imath\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi = \bar\psi\gamma^\mu\psi,$$

который мы ранее получили непосредственно из уравнений движения.

Канонический тензор энергии импульса для биспинорного поля Дирака имеет вид

$$T^{\mu\nu} = \partial^\nu\bar\psi\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar\psi)} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\,\partial^\nu\psi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}.$$

Беря производную от лагранжиана (9.52) и учитывая уравнения движения ($\mathcal{L} = 0$), имеем:

$$T^{\mu\nu} = \imath\bar\psi\gamma^\mu\partial^\nu\psi. \tag{9.53}$$

Этот тензор несимметричен $T^{\mu\nu} \neq T^{\nu\mu}$, и даёт следующие плотность энергии $W = T^{00}$ и импульса $P^i = T^{0i}$:

$$W = \psi^+(\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}} + m\beta)\,\psi, \qquad\qquad \mathbf{P} = \psi^+\hat{\mathbf{p}}\,\psi, \tag{9.54}$$

где снова введен оператор $\hat{\mathbf{p}} = -\imath\nabla$, матрицы $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$, $\beta = \gamma^0$, а для плотности энергии учтено уравнение (9.6), стр. 561.

Лагранжиан, приводящий к уравнению Дирака, можно записать не единственным образом. Например, вместо (9.52) можно взять следующий инвариант:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{\imath}{2}\,\bar\psi\gamma^\mu(\partial_\mu - \overleftarrow{\partial_\mu})\psi - m\bar\psi\psi. \tag{9.55}$$

В отличие от (9.52) соответствующее действие является *действительным*. Лагранжианы (9.52) и (9.55) отличаются на 4-дивергенцию от тока ($\lessdot$ H_{151}):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \frac{\imath}{2}\,\partial_\mu(\bar\psi\gamma^\mu\psi)$$

и приводят к одинаковым уравнениям поля и выражениям для тока. Кроме этого, (9.55) также обращается в ноль на решениях уравнения Дирака. Тем не менее, тензор энергии-импульса лагранжиана (9.55) отличается от (9.53) и равен:

$$T_2^{\mu\nu} = \frac{\imath}{2}\,\bar\psi\gamma^\mu(\partial^\nu - \overleftarrow{\partial^\nu})\psi = T^{\mu\nu} - \frac{\imath}{2}\,\partial^\nu(\bar\psi\gamma^\mu\psi).$$

Несложно видеть, что разница между тензорами автоматически удовлетворяет уравнению непрерывности так как 4-ток $j^\mu = \bar\psi\gamma^\mu\psi$ сохраняется. Плотность энергии и импульса поля для $T_2^{\mu\nu}$ равны:

$$W_2 = W - \frac{\imath}{2}\,\partial^0(\psi^+\psi), \qquad\qquad \mathbf{P}_2 = \mathbf{P} + \frac{\imath}{2}\,\nabla(\psi^+\psi).$$

При интегрировании по всему пространству, в силу сохранения тока, полный заряд (интеграл от $j^0 = \psi^+\psi$) сохраняется (не зависит от времени), поэтому суммарные энергия и импульс лагранжианов (9.52) и (9.55), как это и должно быть, совпадают.

• Найдём при помощи теоремы Нётер тензор спина поля Дирака. Полевой индекс k в общих соотношениях (стр. 447) принимает 8 значений (4 спинорные компоненты и у каждой есть действительная и мнимая части). По-прежнему вместо разбиения биспинора на действительную и мнимую части, рассматриваем биспинор ψ и его сопряжение $\bar{\psi}$ в качестве независимых полей. В этом случае выражение для тензора спина принимает вид:

$$S^{\mu,\alpha\beta} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} Y^{\alpha\beta} + \bar{Y}^{\alpha\beta} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})},$$

где оставшиеся 4 значения индекса k “упрятаны” в матричной записи биспинорного выражения (биспинорами являются величины $Y_{\alpha\beta}$ для каждого значения индексов α и β; производная лагранжиана по $\partial^\mu\psi$ – также биспинор). Учитывая преобразование (9.44), стр. 573 имеем ($\lessdot$ H$_{152}$):

$$Y^{\alpha\beta} = \frac{\partial\psi'}{\partial\omega_{\alpha\beta}} = \frac{\partial(1 + \omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}/4 + ...)\psi}{\partial\omega_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2}\,\sigma^{\alpha\beta}\psi.$$

Используя лагранжиан $\mathcal{L} = \bar{\psi}(\imath\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$, получаем:

$$S^{\mu,\alpha\beta} = \frac{\imath}{2}\,\bar{\psi}\gamma^\mu\sigma^{\alpha\beta}\psi. \tag{9.56}$$

Пространственные по α, β компоненты при $\mu = 0$ дают плотность 3-вектора спина $\mathbf{S} = \{S^{0,23}, S^{0,31}, S^{0,12}\}$:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\,\psi^+\mathbf{\Sigma}\,\psi = \frac{1}{2}\,\bar{\psi}\,\boldsymbol{\gamma}\gamma^5\,\psi = \frac{1}{2}\,\chi^+\boldsymbol{\sigma}\chi + \frac{1}{2}\,\xi^+\boldsymbol{\sigma}\xi, \tag{9.57}$$

где второе равенство записано с учётом соотношения $\gamma^0\mathbf{\Sigma} = \boldsymbol{\gamma}\gamma^5$, а третье – для двухкомпонентных спиноров. Второй 3-вектор от которого зависят нулевые компоненты антисимметричного тензора $S^{0,\alpha\beta}$ имеет проекции $\mathbf{G} = \{S^{0,10},\ S^{0,20},\ S^{0,30}\} = (-\imath/2)\,\psi^+\boldsymbol{\alpha}\psi = (-\imath/2)\,\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi$.

Множитель $1/2$ в выражении для вектора спина играет важную роль. Он приводит к тому, что в квантовой теории поля спин кванта дираковского поля равен $\hbar/2$ (см. стр. 616). Такие частицы с полуцелым спином (в долях постоянной Планка) являются фермионами. Наш мир устроен таким образом, что все фундаментальные частицы материи оказываются фермионами и описываются дираковским биспинорным полем. К ним относятся лептоны (электрон, мюон, тау-лептон), три сорта нейтрино и шесть кварков. Из кварков состоят протоны и нейтроны, а также многочисленные частицы, относящиеся к семейству адронов.

• Тензор спина (9.56) сам по себе не сохраняется. Действительно, возьмём производную

$$\partial_\mu S^{\mu,\alpha\beta} = \frac{\imath}{2}\,(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\sigma^{\alpha\beta}\psi + \frac{\imath}{2}\,\bar{\psi}\gamma^\mu\sigma^{\alpha\beta}\partial_\mu\psi.$$

В первом слагаемом подставим уравнение Дирака для $\bar{\psi}$ (9.11), стр. 563, а во втором переставим местами γ^μ и $\sigma^{\alpha\beta}$ при помощи (9.27) стр. 568 и подставим уравнение Дирака (9.4) для ψ:

$$\partial_\mu S^{\mu,\alpha\beta} = \imath\bar{\psi}(\partial^\alpha\gamma^\beta - \partial^\beta\gamma^\alpha)\psi. \tag{9.58}$$

Таким образом, 4-дивергенция тензора спина не равна нулю. Тем не менее, естественно, сохраняется полный момент, равный сумме спинового и углового момента:

$$J^{\mu,\alpha\beta} = L^{\mu,\alpha\beta} + S^{\mu,\alpha\beta},$$

где угловой момент выражается (см. стр. 450) через канонический тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu} = \imath\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi$ (стр. 577):

$$L^{\mu,\alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha} = \imath\bar{\psi}\gamma^\mu(x^\alpha\partial^\beta - x^\beta\partial^\alpha)\psi. \tag{9.59}$$

Пространственные компоненты этого тензора дают плотность 3-вектора углового момента $\mathbf{L} = \{L^{0,23},\ L^{0,31},\ L^{0,12}\}$ спинорного поля ($\hat{\mathbf{p}} = -\imath\nabla$):

$$\mathbf{L} = \psi^+[\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{p}}]\,\psi. \tag{9.60}$$

Так как $\partial_\mu L^{\mu,\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha}$, подставляя тензор энергии-импульса, получаем (9.58), но с обратным знаком. Поэтому сумма 4-дивергенций углового и спинового момента будет равна нулю.

Если бы мы выбрали лагранжиан $\mathcal{L}_2 = (\imath/2)\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - \overleftarrow{\partial^\mu})\psi - m\bar{\psi}\psi$, то получился бы другой тензор спина ($\bar{Y}^{\alpha\beta} = -\bar{\psi}\sigma^{\alpha\beta}/2$):

$$S_2^{\mu,\alpha\beta} = \frac{\imath}{4}\,\bar{\psi}(\gamma^\mu\sigma^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta}\gamma^\mu)\psi.$$

Используя коммутатор (9.27) для γ^μ и $\sigma^{\alpha\beta}$, это выражение можно переписать в следующем виде:

$$S_2^{\mu,\alpha\beta} = S^{\mu,\alpha\beta} - \frac{\imath}{2}\,(g^{\mu\alpha}j^\beta - g^{\mu\beta}j^\alpha),$$

где $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. Несложно видеть, что пространственная часть $S_2^{\mu,\alpha\beta}$ совпадает с выражением (9.57). Кроме этого, тензор спина $S_2^{\mu,\alpha\beta}$ как и $S^{\mu,\alpha\beta}$ не сохраняется. Связано это с несимметричностью канонических тензоров энергии-импульса, следующих из обоих лагранжианов.

• Найдём симметричный тензор энергии-импульса спинорного поля, пользуясь *процедурой Белифанте* (стр. 455). Для этого выберем тензор $\Phi^{\lambda,\mu\nu}$ со страницы 455 равным тензору спина $S^{\lambda,\mu\nu}$:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\partial_\lambda\,(\Phi^{\lambda,\mu\nu} - \Phi^{\mu,\lambda\nu} - \Phi^{\nu,\lambda\mu}) = T^{\mu\nu} + \frac{\imath}{4}\,\partial_\lambda\,(\bar{\psi}\,G^{\lambda\mu\nu}\,\psi),$$

где $T^{\mu\nu} = \imath\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi$ и введен матричный тензор:

$$G^{\lambda\mu\nu} = \gamma^\lambda\sigma^{\mu\nu} + \gamma^\mu\sigma^{\nu\lambda} + \gamma^\nu\sigma^{\mu\lambda}.$$

Вычислим 4-дивергенцию:

$$\partial_\lambda\,(\bar{\psi}\,G^{\lambda\mu\nu}\,\psi) = \bar{\psi}\overleftarrow{\partial_\lambda}\,G^{\lambda\mu\nu}\,\psi + \bar{\psi}\,G^{\lambda\mu\nu}\,\partial_\lambda\psi,$$

где стрелочка над производной, как и раньше, указывает, что она действует на $\bar{\psi}$. Чтобы можно было воспользоваться уравнениями Дирака, необходимо в первом слагаемом для 4-дивергенции в тензоре $G^{\lambda\mu\nu}$ прижать матрицу γ^λ влево к $\bar{\psi}$, а во втором – вправо к ψ. Подставим в $G^{\lambda\mu\nu}$ определение $\sigma^{\nu\lambda} = \gamma^\nu\gamma^\lambda - g^{\nu\lambda}$, см. (9.22), стр. 567 и аналогичное для $\sigma^{\mu\lambda}$, а затем учтём алгебру матриц Дирака (9.17):

$$G^{\lambda\mu\nu} = \gamma^\lambda\sigma^{\mu\nu} + 2g^{\mu\nu}\gamma^\lambda - g^{\nu\lambda}\gamma^\mu - g^{\mu\lambda}\gamma^\nu.$$

Чтобы прижать γ^λ вправо, переставим её с $\sigma^{\mu\nu}$, воспользовавшись коммутатором (9.27):

$$G^{\lambda\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu}\gamma^\lambda + 2g^{\mu\nu}\gamma^\lambda - 3g^{\nu\lambda}\gamma^\mu + g^{\mu\lambda}\gamma^\nu.$$

После подстановки уравнений Дирака, первые два слагаемых в каждом выражении для $G^{\lambda\mu\nu}$ сокращаются и симметричный тензор энергии-импульса принимает следующий вид:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{\imath}{4}\,\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial^\nu + \gamma^\nu\partial^\mu)\psi - \frac{\imath}{4}\,\bar{\psi}(\overleftarrow{\partial^\mu}\gamma^\nu + \overleftarrow{\partial^\nu}\gamma^\mu)\psi. \qquad (9.61)$$

Этот тензор оказывается не только симметричным, но и действительным. Связанный с ним тензор углового момента включает в себя спиновые составляющие вращения, а тензор спина становится равным нулю:

$$\tilde{L}^{\mu,\alpha\beta} = x^\alpha\tilde{T}^{\mu\beta} - x^\beta\tilde{T}^{\mu\alpha}, \qquad\qquad \tilde{S}^{\mu,\alpha\beta} = 0.$$

Напомним, что несмотря на неоднозначность в определении локальных величин, удовлетворяющих уравнению непрерывности, интегральные физические величины приводят к однозначным результатам. Поэтому использование канонического полного момента (сумма углового и спинового) и углового момента, построенного при помощи симметричного тензора энергии-импульса, эквивалентно по своим физическим следствиям.

Проверим прямым вычислением, что (9.61) сохраняется. Для этого возьмем 4-дивергенцию как производную произведения (один раз со стрелочкой, т.е. от $\bar{\psi}$, а второй раз без стрелочки):

$$\begin{aligned}\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} &= \tfrac{\imath}{4}\,\bar{\psi}(\overleftarrow{\partial_\mu}\partial^\nu\gamma^\mu + \overleftarrow{\partial_\mu}\partial^\mu\gamma^\nu + \partial_\mu\partial^\nu\gamma^\mu + \partial^2\gamma^\nu)\psi \\ &- \tfrac{\imath}{4}\,\bar{\psi}(\overleftarrow{\partial^2}\gamma^\nu + \overleftarrow{\partial_\mu}\overleftarrow{\partial^\nu}\gamma^\mu + \partial_\mu\overleftarrow{\partial^\mu}\gamma^\nu + \partial_\mu\overleftarrow{\partial^\nu}\gamma^\mu)\psi.\end{aligned}$$

Это выражение равно нулю, благодаря уравнениям движения:

$$\imath\gamma^\mu\partial_\mu\psi = m\psi, \qquad \imath\bar{\psi}\gamma^\mu\overleftarrow{\partial^\mu} = -m\bar{\psi}$$

и следующим из них уравнениям второго порядка:

$$\partial^2\psi = -m^2\psi, \qquad \bar{\psi}\overleftarrow{\partial^2} = -m^2\bar{\psi},$$

которые получаются двухкратным применением уравнения Дирака и использованием тождества:

$$(\gamma^\mu\partial_\mu)(\gamma^\nu\partial_\nu) = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)\partial_\mu\partial_\nu = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \partial^2.$$

При помощи сохраняющегося тока $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ симметричный тензор энергии-импульса (9.61) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{\imath}{2}\,\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial^\nu + \gamma^\nu\partial^\mu)\psi - \frac{\imath}{4}\,(\partial^\mu j^\nu + \partial^\nu j^\mu), \tag{9.62}$$

откуда несложно получить выражение для плотности энергии поля:

$$\tilde{W} = \tilde{T}^{00} = \psi^+(\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}} + m\beta)\psi - \frac{\imath}{2}\,\frac{\partial(\psi^+\psi)}{\partial t}.$$

Последнее слагаемое при интегрировании по всему пространству равно нулю. Действительно $\psi^+\psi = j^0$ и в силу уравнения непрерывности $\partial_\mu j^\mu = 0$ интеграл от него не зависит от времени. Поэтому, как и должно быть, суммарная энергия спинорного поля, вычисленная при помощи канонического и симметричного тензора, получается одинаковой.

Заметим, что след (свёртка по обоим индексам) имеет одно и тоже значение, как для симметричного тензора энергии импульса, так и для его несимметричных вариантов:

$$T^\mu_{\ \mu} = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = \imath\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi = m\bar{\psi}\psi,$$

где в (9.62) учтен закон сохранения тока $\partial_\mu j^\mu = 0$ и в последнем равенстве – уравнение Дирака. Естественно, след 4-тензора является инвариантом относительно преобразований Лоренца, т.к. инвариантно выражение $\bar{\psi}\psi$.

9.5 Тензор спиральности

• Как мы видели в предыдущем разделе, канонический тензор спина не сохраняется. Тем не менее, можно построить сохраняющуюся величину тесно связанную со спином. Вычислим для тензора

$$h^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu}\,\bar{\psi}\gamma^{\mu}\sigma^{\alpha\beta}\partial^{\gamma}\psi \tag{9.63}$$

4-дивергенцию по индексу μ:

$$\partial_{\mu}h^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu}\,\bar{\psi}(\overleftarrow{\partial}_{\mu} + \partial_{\mu})\gamma^{\mu}\sigma^{\alpha\beta}\partial^{\gamma}\psi.$$

Во втором слагаемом в скобках переставим местами матрицы γ^{μ} и $\sigma^{\alpha\beta}$, пользуясь коммутатором (9.27), стр. 568:

$$\partial_{\mu}h^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu}\,\{\bar{\psi}(\overleftarrow{\partial}_{\mu}\gamma^{\mu}\sigma^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta}\gamma^{\mu}\partial_{\mu})\partial^{\gamma}\psi + 2\bar{\psi}(g^{\mu\alpha}\gamma^{\beta} - g^{\mu\beta}\gamma^{\alpha})\partial_{\mu}\partial^{\gamma}\psi\}.$$

Первый член в фигурных скобках равен нулю в силу уравнений Дирака для ψ и $\bar{\psi}$. Второй член обнуляется после суммирования с метрическим тензором, так как возникают выражения $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu}\partial^{\alpha}\partial^{\gamma} = 0$ (свёртка антисимметричного тензора $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu}$ по α, γ и симметричного: $\partial^{\alpha}\partial^{\gamma} = \partial^{\gamma}\partial^{\alpha}$). Таким образом:

$$\partial_{\mu}h^{\mu}{}_{\nu} = 0.$$

Важный физический смысл имеет сохраняющийся интеграл от $h^{0}{}_{0}$:

$$h^{0}{}_{0} = h^{00} = \varepsilon_{1230}\,\psi^{+}\sigma^{12}\partial^{3}\psi + \varepsilon_{3120}\,\psi^{+}\sigma^{31}\partial^{2}\psi + \varepsilon_{2310}\,\psi^{+}\sigma^{23}\partial^{1}\psi.$$

Все символы Леви-Чевиты с таким порядком индексов равны -1. Вводя матрицу $\mathbf{\Sigma} = \imath\{\sigma^{23},\,\sigma^{31},\,\sigma^{12}\}$ и оператор $\hat{\mathbf{p}} = \imath\partial^{i} = -\imath\nabla$, получаем:

$$h^{0} = \int h^{00}\,d^{3}\mathbf{x} = \int \psi^{+}\mathbf{\Sigma}\,\hat{\mathbf{p}}\,\psi\,d^{3}\mathbf{x} = const. \tag{9.64}$$

Эта величина называется *спиральностью* (helicity). Так как $\psi^{+}\hat{\mathbf{p}}\,\psi$ является плотностью импульса (канонический тензор энергии-импульса), а $(1/2)\psi^{+}\mathbf{\Sigma}\,\psi$ – плотностью спина поля Дирака, то плотность спиральности имеет смысл проекции направления вектора спина на импульс.

Сохранение тензора спиральности (9.63) связано со специфической инвариантностью уравнения Дирака относительно преобразования:

$$\psi \mapsto \psi' = \psi + \imath a^{\nu}\varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma}\sigma^{\alpha\beta}\partial^{\gamma}\psi, \tag{9.65}$$

где a^{ν} – параметры преобразования. Несложно проверить, что если ψ удовлетворяет уравнению Дирака, то и ψ' , будет ему удовлетворять. При выполнении уравнений движения, относительно преобразования (9.65) будет инвариантен также и лагранжиан $\mathcal{L}$.

Так как тензор $h^{\mu\nu} = g^{\nu\alpha} h^{\mu}{}_{\alpha}$ удовлетворяет уравнению непрерывности по индексу μ, то интеграл по всему пространству от $h^{0\nu}$ является 4-вектором (см.стр. 458). Его нулевой компонентой является спиральность. Найдём пространственные компоненты этого 4-вектора:

$$h^{0}{}_{1} = \varepsilon_{0231}\, \psi^{+} \sigma^{02} \partial^{3} \psi + \varepsilon_{0321}\, \psi^{+} \sigma^{03} \partial^{2} \psi + \varepsilon_{2301}\, \psi^{+} \sigma^{23} \partial^{0} \psi.$$

Аналогично расписываются $h^{0}{}_{2}$ и $h^{0}{}_{3}$. Поднимая нижний индекс вверх ($h^{01} = -h^{0}{}_{1}$) и подставляя компоненты матрицы $\boldsymbol{\alpha} = \{\sigma^{01}, \sigma^{02}, \sigma^{03}\}$, получаем:

$$\{h^{01}, h^{02}, h^{03}\} = \imath \psi^{+} \boldsymbol{\alpha} \times \hat{\mathbf{p}}\, \psi + \psi^{+} \boldsymbol{\Sigma} (\boldsymbol{\alpha} \hat{\mathbf{p}} + \beta m)\, \psi,$$

где во втором слагаемом, вместо $\imath \partial^{0} \psi$ подставлено уравнение Дирака (9.6), стр. 561. Это выражение можно упростить, учитывая тождество для произведения матриц $\boldsymbol{\Sigma}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ (9.35), стр. 570. В результате, сохраняющийся *вектор спиральности* (интеграл от h^{0i}) имеет вид:

$$\mathbf{h} = \int \psi^{+} (\hat{\mathbf{p}}\, \gamma^{5} + m\, \beta\, \boldsymbol{\Sigma})\, \psi\, d^{3}\mathbf{x}. \tag{9.66}$$

Заметим, что $\boldsymbol{\Sigma}\beta = \beta\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\gamma}\gamma^{5}$. Вместе со спиральностью (9.64) 3-вектор $\mathbf{h}$ является компонентами сохраняющегося *4-вектора спиральности* $h^{\nu} = \{h^{0}, \mathbf{h}\}$. Этот вектор действителен. Например, беря эрмитово сопряжение его нулевой компоненты, имеем:

$$(h^{0})^{+} = \Bigl(-\imath \int \psi^{+} \boldsymbol{\Sigma} \nabla \psi\, d^{3}\mathbf{x}\Bigr)^{+} = \imath \int (\nabla \psi^{+}) \boldsymbol{\Sigma} \psi\, d^{3}\mathbf{x} = -\imath \int \psi^{+} \boldsymbol{\Sigma} \nabla \psi\, d^{3}\mathbf{x},$$

где учтена эрмитовость матрицы $\boldsymbol{\Sigma}$ и в последнем равенстве выполнено интегрирование по частям (как обычно, предполагаем, что поля достаточно быстро убывают на бесконечности). Аналогично проверяется действительность вектора $\mathbf{h}$. При этом необходимо принять во внимание, что матрицы γ^{5}, $\boldsymbol{\Sigma}$ и β эрмитовы.

Матрица $\boldsymbol{\Sigma}$ является блочно-диагональной. Поэтому плотность спиральности h^{0} в терминах двухкомпонентных спиноров распадается на две независимы суммы для каждого спинора:

$$\psi^{+} \boldsymbol{\Sigma}\, \hat{\mathbf{p}}\, \psi = \chi^{+} \boldsymbol{\sigma}\, \hat{\mathbf{p}}\, \chi + \xi^{+} \boldsymbol{\sigma}\, \hat{\mathbf{p}}\, \xi. \tag{9.67}$$

Иная ситуация при $m \neq 0$ с вектором $\mathbf{h}$. Его плотность имеет вид:

$$\psi^{+} (\hat{\mathbf{p}} \gamma^{5} + m\, \beta \boldsymbol{\Sigma})\, \psi = \chi^{+} \hat{\mathbf{p}}\, \chi - \xi^{+} \hat{\mathbf{p}}\, \xi + m\, (\chi^{+} \boldsymbol{\sigma}\, \xi + \xi^{+} \boldsymbol{\sigma}\, \chi), \tag{9.68}$$

где матрицы взяты в спинорном представлении. Обратим внимание на последнее слагаемое с “перемешанными” спинорами.

• Продемонстрируем ещё одним способом сохранение спиральности. Это позволит нам связать теорию классического спинорного поля с одночастичной квазирелятивистской квантовой теорией фермионов. Пусть некоторая интегральная величина имеет вид:

$$A = \int \psi^+ \hat{A}\, \psi\, d^3\mathbf{x},$$

где $\hat{A}$ – матричный (и возможно дифференциальный) оператор, действующий на ψ. Пусть $\hat{A}$ не зависит от времени явным образом, тогда:

$$\imath \frac{dA}{dt} = \int \Bigl(\imath \frac{\partial \psi^+}{\partial t}\, \hat{A}\, \psi + \psi^+ \hat{A}\, \imath \frac{\partial \psi}{\partial t} \Bigr)\, d^3\mathbf{x} = 0.$$

Запишем уравнение Дирака (9.6), стр. 561 при помощи оператора $\hat{H}$:

$$\imath \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \qquad\qquad \hat{H} = \boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}} + m\beta.$$

При эрмитовом сопряжении в уравнении появляются знаки минус за счёт мнимых единиц при производных по времени и координатам ($\hat{\mathbf{p}} = -\imath\nabla$):

$$\imath \frac{\partial \psi^+}{\partial t} = \psi^+ (\boldsymbol{\alpha} \overset{\leftarrow}{\hat{\mathbf{p}}} - m\beta),$$

где учтена эрмитовость матриц $\boldsymbol{\alpha}$ и β. При сопряжении, матрицы и вектор ψ переставлены местами, поэтому введен оператор со стрелочкой, который действует на ψ^+. Подставим производные по времени в уравнение для dA/dt и проинтегрируем по частям первое слагаемое, перебросив со знаком минус действие оператора $\hat{\mathbf{p}}$ с ψ^+ на ψ:

$$\int \psi^+ \boldsymbol{\alpha} \overset{\leftarrow}{\hat{\mathbf{p}}}\, \psi\, d^3\mathbf{x} = -\imath \int \nabla(\psi^+)\boldsymbol{\alpha}\, \psi\, d^3\mathbf{x} = -\int \psi^+ \boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}}\, \psi\, d^3\mathbf{x}.$$

В результате

$$\imath \frac{dA}{dt} = \int \psi^+ (-\hat{H}\hat{A} + \hat{A}\hat{H})\, \psi\, d^3\mathbf{x} = 0.$$

Поэтому, интегральная величина A сохраняется, если соответствующий ей оператор $\hat{A}$ коммутирует с $\hat{H}$:

$$[\hat{H},\, \hat{A}] = \hat{H}\hat{A} - \hat{A}\hat{H} = 0. \tag{9.69}$$

В одночастичной квантовой теории биспинор ψ имеет смысл амплитуды вероятности обнаружить частицу в данной точке пространства ($\psi^+\psi$ – это вероятность). Собственные значения операторов определяют наблюдаемые значения физических величин, которые соответствуют этим операторам (см. стр. 602).

Проверим, что оператор спиральности $\hat{h}^0 = \mathbf{\Sigma}\hat{\mathbf{p}}$ коммутирует с гамильтонианом:

$$[\hat{H},\,\hat{h}^0] = [\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{\Sigma}\hat{\mathbf{p}}] + m[\beta, \mathbf{\Sigma}\hat{\mathbf{p}}] = 0.$$

Операторы $\hat{\mathbf{p}}$ – это обычные производные, которые можно вынести за коммутатор матриц, независящих от координат. Первый коммутатор равен нулю в силу тождества (9.36) стр. 570. Второй коммутатор равен нулю, так как $\beta\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}\beta$. Таким образом, спиральность h^0 (интеграл по всему пространству от $\psi^+\hat{h}^0\psi$) сохраняется.

Аналогично с $\hat{H}$ коммутирует оператор $\hat{\mathbf{h}} = \hat{\mathbf{p}}\,\gamma^5 + m\,\beta\mathbf{\Sigma}$:

$$[\hat{H},\,\hat{\mathbf{h}}] = m\,[\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}},\,\beta\mathbf{\Sigma}] + m\hat{\mathbf{p}}[\beta,\,\gamma^5] + m^2[\beta,\,\beta\mathbf{\Sigma}] = 0, \tag{9.70}$$

где сразу учтено, что γ^5 коммутирует с $\boldsymbol{\alpha}$. Последний коммутатор равен нулю, так как β коммутирует с $\mathbf{\Sigma}$. Первый коммутатор вычислим при помощи тождества $[\hat{A},\,\hat{B}\hat{C}] = [\hat{A},\,\hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A},\,\hat{C}]$:

$$[\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}},\,\beta\mathbf{\Sigma}] = [\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}},\,\beta]\mathbf{\Sigma} + \beta[\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}},\,\mathbf{\Sigma}] = -2\beta(\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}})\mathbf{\Sigma} + 2\imath\beta[\boldsymbol{\alpha}\times\hat{\mathbf{p}}] = -2\hat{\mathbf{p}}\beta\gamma^5,$$

где во втором равенстве учтено, что $\boldsymbol{\alpha}\beta = -\beta\boldsymbol{\alpha}$ и подставлен коммутатор (9.36), стр. 570. Третье равенство записано при помощи тождества (9.34). Итог равен с обратным знаком коммутатору $[\beta,\,\gamma^5] = 2\beta\gamma^5$ (второй член в (9.70)). В результате получается ноль.

“Недиагональность” вектора спиральности $\mathbf{h}$ в пространстве спинорных компонент (9.68), приводит к тому, что он не коммутирует с $\hat{h}^0$:

$$[\hat{h}^0,\,\hat{\mathbf{h}}] = 2\imath\,m\beta\,\mathbf{\Sigma}\times\hat{\mathbf{p}},$$

а, следовательно, эти операторы не имеют общих собственных функций. Квадрат оператора $\hat{\mathbf{h}}$ пропорционален единичной матрице:

$$\hat{\mathbf{h}}^2 = \hat{\mathbf{p}}^2 + 3m^2,$$

поэтому он коммутирует со всеми операторами, не зависящими от координат. Оператор $\hat{\mathbf{h}}$ коммутирует $\hat{\mathbf{p}}$ и их собственные функции совпадают. Считая, что $\hat{\mathbf{p}}\psi = \mathbf{p}\psi$, см. стр. 586, несложно ($\lessdot$ H_{153}) найти собственные значения оператора $\hat{\mathbf{h}}$: его проекция на ось x равна $h_x = \pm\sqrt{p_x^2 + m^2}$, и аналогично для осей y и z.

Приведём также значение коммутатора спина и гамильтониана:

$$[\mathbf{\Sigma},\,\hat{H}] = [\mathbf{\Sigma},\,\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}}] = 2\imath\hat{\mathbf{p}}\times\boldsymbol{\alpha}.$$

Его ненулевое значение свидетельствует о несохранении спина. Однако, можно проверить ($\lessdot$ H_{154}), что сохраняется сумма $\mathbf{x}\times\hat{\mathbf{p}}+(1/2)\mathbf{\Sigma}$, которая в квантовой механике соответствует полному моменту частицы (угловой момент + спиновый).

9.6 Импульсное пространство

• Найдем решение уравнения Дирака. Оно линейно и аналогично электромагнитным волнам (стр. 332), можно использовать фурье-разложение:

$$\psi(\mathbf{r},t)=\int\psi(\mathbf{p},t)\,e^{\imath\mathbf{pr}}\,d^3\mathbf{p}.$$

Подставив его в уравнение Дирака (9.6), стр. 561, получим:

$$\imath\frac{\partial\psi(\mathbf{p},t)}{\partial t}=(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}+\beta m)\,\psi(\mathbf{p},t),\tag{9.71}$$

где $\mathbf{p}$ – обычный вектор (без шляпки), появившийся после взятия производной от $e^{\imath\mathbf{pr}}$. Мы его назовём *импульсом* (почему, разъяснится чуть позже). Будем искать решение (9.71) в виде: $\psi(\mathbf{p},t)=u(\mathbf{p})e^{-\imath\lambda t}$, где биспинор $u(\mathbf{p})$ должен удовлетворять уравнению:

$$(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}+\beta m)\,u(\mathbf{p})=\lambda u(\mathbf{p}).$$

Разбивая биспинор на два спинора $u(\mathbf{p})=(\phi_\mathbf{p}\;\zeta_\mathbf{p})^T$ и подставляя явный вид матриц в *стандартном представлении* (стр. 566) получаем:

$$(\lambda-m)\,\phi_\mathbf{p}=\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}\,\zeta_\mathbf{p},\qquad(\lambda+m)\,\zeta_\mathbf{p}=\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}\,\phi_\mathbf{p}.\tag{9.72}$$

Умножим второе уравнение на $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}$. Учитывая первое уравнение и тождество для матриц Паули $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})^2=\mathbf{p}^2$ (см. стр. 508), имеем:

$$(\lambda^2-m^2)\phi_\mathbf{p}=\mathbf{p}^2\phi_\mathbf{p}.$$

Это уравнение выполняется, если $\lambda=\pm\varepsilon_p$, где $\varepsilon_p=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ (не путать с матрицей ε). Общее решение линейного уравнения равно сумме его независимых частных решений, умноженных на произвольные коэффициенты, поэтому:

$$\psi(\mathbf{r},t)=\int(u_1(\mathbf{p})e^{-\imath\varepsilon_p t+\imath\mathbf{pr}}+u_2(\mathbf{p})e^{\imath\varepsilon_p t+\imath\mathbf{pr}})\,d^3\mathbf{p}.$$

Разобьём интеграл на два и сделаем во втором замену $\mathbf{p}\mapsto-\mathbf{p}$ ($\lessdot\,\mathrm{H}_{45}$):

$$\psi(\mathbf{r},t)=\int(u_1(\mathbf{p})e^{-\imath\mathrm{p}\cdot\mathrm{x}}+u_2(-\mathbf{p})e^{\imath\mathrm{p}\cdot\mathrm{x}})\,d^3\mathbf{p},\tag{9.73}$$

где p – 4-вектор $\{\varepsilon_p,\mathbf{p}\}$, а $\mathrm{x}=\{t,\mathbf{r}\}$. Компоненты биспиноров $u_1(\mathbf{p})$ и $u_2(-\mathbf{p})$ связаны уравнениями (9.72):

$$u_1(\mathbf{p})=\begin{pmatrix}\phi_\mathbf{p}\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{\varepsilon+m}\,\phi_\mathbf{p}\end{pmatrix},\qquad u_2(-\mathbf{p})=\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{\varepsilon+m}\,\zeta_{-\mathbf{p}}\\ \zeta_{-\mathbf{p}}\end{pmatrix},\tag{9.74}$$

где для $u_1(\mathbf{p})$ во втором уравнении (9.72) надо подставить $\lambda=\varepsilon_p$, а для $u_2(-\mathbf{p})$ в первом уравнении $\lambda=-\varepsilon_p$ и $\mathbf{p}\mapsto-\mathbf{p}$. Таким образом, решение зависит от двух спинорных функций от импульса $\phi_\mathbf{p}$ и $\zeta_{-\mathbf{p}}$.

Запишем уравнение на собственные значения и векторы матрицы $\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$, где $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ – единичный вектор в направлении $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}\, w^{(s)} = s\, w^{(s)}. \tag{9.75}$$

Стоит решить это матричное уравнение ($\lessdot$ H$_{155}$) и найти явный вид собственных векторов $w^{(1)}$ и $w^{(-1)}$, соответствующих собственным значениям $s = \pm 1$. Собственные векторы эрмитовой матрицы $\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$ ортогональны и их можно нормировать на единицу, так чтобы

$$\overset{+}{w}{}^{(s)}\, w^{(s')} = \delta_{ss'}. \tag{9.76}$$

Введем 4 функции $a_s(\mathbf{p})$, $b^*_s(\mathbf{p})$, являющиеся коэффициентами разложения (по $s = \pm 1$ сумма) спиноров $\phi_{\mathbf{p}}$ и $\zeta_{-\mathbf{p}}$ по базису $w^{(s)}$:

$$\phi_{\mathbf{p}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_p + m}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\varepsilon_p}}\, a_s(\mathbf{p})\, w^{(s)}, \qquad \zeta_{-\mathbf{p}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_p + m}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\varepsilon_p}}\, b^*_s(\mathbf{p})\, w^{(s)}$$

(смысл множителей прояснится ниже). В результате:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int \bigl(a_s(\mathbf{p})\, A_{s,\mathbf{p}}\, e^{-\imath \mathrm{p}\cdot\mathrm{x}} + b^*_s(\mathbf{p})\, B_{s,\mathbf{p}}\, e^{\imath \mathrm{p}\cdot\mathrm{x}}\bigr) \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\varepsilon_p}}, \tag{9.77}$$

где введены биспиноры, компоненты которых следуют из (9.74), если учесть, что $\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}\, w^{(s)} = s|\mathbf{p}|\, w^{(s)} = s\,(\varepsilon_p^2 - m^2)^{1/2}\, w^{(s)}$:

$$A_{s,\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon_p + m}\, w^{(s)} \\ s\sqrt{\varepsilon_p - m}\, w^{(s)} \end{pmatrix}, \qquad B_{s,\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} s\sqrt{\varepsilon_p - m}\, w^{(s)} \\ \sqrt{\varepsilon_p + m}\, w^{(s)} \end{pmatrix}. \tag{9.78}$$

Заметим, что в стандартном представлении $B_{s,\mathbf{p}} = \gamma^5 A_{s,\mathbf{p}}$.

Плоскими спинорными волнами называются биспиноры

$$\psi_+(\mathbf{r}, t) = A_{s,\mathbf{p}}\, e^{-\imath \mathrm{p}\cdot\mathrm{x}}, \qquad \psi_-(\mathbf{r}, t) = B_{s,\mathbf{p}}\, e^{\imath \mathrm{p}\cdot\mathrm{x}}.$$

Они удовлетворяют уравнению Дирака $(\imath\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_\pm = 0$. Первая волна соответствует положительному $\lambda = \varepsilon_p$ и импульсу $\mathbf{p}$. Вторая волна – отрицательным: $\lambda = -\varepsilon_p$ и $-\mathbf{p}$. Кроме этого:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)A_{s,\mathbf{p}} = 0, \qquad (\gamma^\mu p_\mu + m)B_{s,\mathbf{p}} = 0, \tag{9.79}$$

что проверяется в стандартном представлении явной подстановкой (9.78). В пределе малых импульсов $\mathbf{p} \mapsto 0$, $\varepsilon_p \mapsto m$ амплитуды спинорных волн равны:

$$A_{s,\mathbf{p}} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} w^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B_{s,\mathbf{p}} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ w^{(s)} \end{pmatrix}.$$

В спинорном представлении их необходимо умножить на матрицу (9.16) и обе компоненты биспиноров A_s и B_s окажутся отличными от нуля.

• Выразим через амплитуды фурье-разложения $a_s(\mathbf{p})$ и $b_s(\mathbf{p})$ основные физические величины. Для этого нам понадобятся условия ортогональности для биспиноров $A_{s,\mathbf{p}}$ и $B_{s,\mathbf{p}}$. Прямым перемножением (9.78), с учётом (9.76), получаем (для $B_{s,\mathbf{p}}$ можно использовать связь $B_{s,\mathbf{p}} = \gamma^5 A_{s,\mathbf{p}}$):

$$A^+_{s,\mathbf{p}}\, A_{s',\mathbf{p}} = B^+_{s,\mathbf{p}} B_{s',\mathbf{p}} = 2\varepsilon_p\, \delta_{ss'}. \tag{9.80}$$

Кроме этого справедливы соотношения:

$$A^+_{s,\mathbf{p}}\, B_{s',-\mathbf{p}} = B^+_{s,\mathbf{p}}\, A_{s',-\mathbf{p}} = 0. \tag{9.81}$$

Для их доказательства необходимо учесть, что при инверсии вектора $\mathbf{p}$ в уравнении $(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\, w^{(s)} = s\, w^{(s)}$ вектор $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ меняет знак и, следовательно, меняет знак собственное значение s:

$$A^+_{s,\mathbf{p}}\, B_{s,-\mathbf{p}} = \begin{pmatrix}\sqrt{\varepsilon_p + m}\ \overset{+}{w}{}^{(s)} & s\sqrt{\varepsilon_p - m}\ \overset{+}{w}{}^{(s)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-s\sqrt{\varepsilon_p - m}\ w^{(s)}\\ \sqrt{\varepsilon_p + m}\ w^{(s)}\end{pmatrix} = 0.$$

Найдём заряд биспинорного поля (интеграл от $j^0 = \bar\psi\gamma^0\psi = \psi^+\psi$):

$$Q = \int \psi^+(x)\psi(x)\, d^3\mathbf{x}.$$

При подстановке фурье-разложения (9.77) для каждого биспинора ψ^+ и ψ необходимо использовать интегралы со своей переменной интегрирования и суммы по различным индексам s и s':

$$\bigl(a^*_{s\mathbf{p}}\, A^+_{s\mathbf{p}}\, e^{\imath \mathrm{p}\cdot \mathrm{x}} + b_{s\mathbf{p}}\, B^+_{s\mathbf{p}}\, e^{-\imath \mathrm{p}\cdot \mathrm{x}}\bigr)\bigl(a_{s'\mathbf{k}}\, A_{s'\mathbf{k}}\, e^{-\imath \mathrm{k}\cdot \mathrm{x}} + b^*_{s'\mathbf{k}}\, B_{s'\mathbf{k}}\, e^{\imath \mathrm{k}\cdot \mathrm{x}}\bigr)\frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2\varepsilon_p}}\,\frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\varepsilon_k}}\,\frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3}.$$

При перемножении скобок и интегрировании по $d^3\mathbf{x}$ возникают дельта-функции Дирака:

$$\int e^{\imath(\mathrm{p}-\mathrm{k})\mathrm{x}}\, \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} = e^{\imath(\varepsilon_p - \varepsilon_k)t}\int e^{-\imath(\mathbf{p}-\mathbf{k})\mathbf{x}}\,\frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}),$$

где $e^{\imath(\varepsilon_p-\varepsilon_k)t}$ в последнем равенстве опущена, так как при $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ она равна единице, а при $\mathbf{p} \neq \mathbf{k}$ всё выражение равно нулю. Аналогично:

$$\int e^{\imath(\mathrm{p}+\mathrm{k})\mathrm{x}}\,\frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} = \delta(\mathbf{p}+\mathbf{k})\, e^{2\imath\varepsilon_p t}.$$

При интегрировании по $d^3\mathbf{k}$ с $\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})$ интеграл опускается и в подынтегральном выражении происходят замены $\mathbf{k} \mapsto \mathbf{p}$. При интегрировании с $\delta(\mathbf{p}+\mathbf{k})$, соответственно, $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{p}$.

Поэтому, перемножая скобки в выражении для Q и интегрируя сначала по $d^3\mathbf{x}$, а затем по $d^3\mathbf{k}$ с дельта-функциями Дирака, получаем:

$$Q = \int (a^*_{s\mathbf{p}} a_{s\mathbf{p}} + b_{s\mathbf{p}} b^*_{s\mathbf{p}})\, d^3\mathbf{p}, \tag{9.82}$$

где учтены (9.80), (9.81) и по s подразумевается суммирование ($s = \pm 1$).

Для нахождения полной энергии спинорного поля воспользуемся каноническим тензором энергии-импульса:

$$E = \int \psi^+ (\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}} + \beta m)\, \psi\, d^3\mathbf{x} = \imath \int \psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t}\, d^3\mathbf{x},$$

где во втором равенстве подставлено уравнение Дирака (9.6), стр. 561. С учетом этого равенства вычисления полностью аналогичны заряду, за исключением того, что производная по времени даёт дополнительный множитель, равный "энергии" ε_p и знак минус во втором слагаемом:

$$E = \int \varepsilon_p\, (a^*_{s\mathbf{p}} a_{s\mathbf{p}} - b_{s\mathbf{p}} b^*_{s\mathbf{p}})\, d^3\mathbf{p}. \tag{9.83}$$

Аналогично, полный импульс поля (интеграл от $-\imath\psi^+ \nabla\, \psi$) равен:

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{p}\, (a^*_{s\mathbf{p}} a_{s\mathbf{p}} - b_{s\mathbf{p}} b^*_{s\mathbf{p}})\, d^3\mathbf{p}. \tag{9.84}$$

Во всех выражениях амплитуды $|a_{s\mathbf{p}}|^2$ и $|b_{s\mathbf{p}}|^2$ являются интенсивностями вклада в заряд, энергию и импульс мод фурье-разложения, соответствующего тому или иному значению $\mathbf{p}$. В связи с выражением (9.84), естественно назвать такое разложение *импульсным*.

Обратим внимание, что заряд Q получился положительным. В тоже время энергия E оказалась знако-переменной величиной, в отличии от энергии электромагнитного поля. Это на самом деле проблема классического спинорного поля. Она получает изящное решение в теории грассмановых классических (неквантовых) биспиноров (стр. 618) в которой биспинорные функции являются антикоммутирующими величинами, т.е. при перестановке их местами появляется знак минус:

$$b_{s\mathbf{p}}\, b^*_{s'\mathbf{k}} = -b^*_{s'\mathbf{k}}\, b_{s\mathbf{p}}.$$

Переставляя $\hat{b}_{s\mathbf{p}}$ и $\hat{b}^*_{s\mathbf{p}}$ в (9.82)-(9.84), мы получим положительную энергию и знако-переменный заряд. В квантовой теории поля величины $a_{s\mathbf{p}}$ и $b_{s\mathbf{p}}$ становятся антикоммутирующими операторами. Операторы $\hat{a}^*_{s\mathbf{p}}$ является *оператором рождения* фермиона с положительным зарядом, а $\hat{b}^*_{s\mathbf{p}}$ – оператором рождения антифермиона с отрицательным зарядом. Антикоммутаторы приводят к статистике Ферми для квантов биспинорного поля. Подробнее мы рассмотрим эти вопросы в конце главы.

• Кроме заряда, энергии и импульса у спинорного поля сохраняется спиральность (проекция спина на импульс):

$$h^0 = \int \psi^+ \mathbf{\Sigma}\hat{\mathbf{p}}\, \psi\, d^3\, \mathbf{x}.$$

Выразим её через амплитуды фурье-решения уравнения Дирака. Для этого подействуем матрицей $\mathbf{\Sigma p}$ на биспинор $A_{s\mathbf{p}}$:

$$\mathbf{\Sigma p}\, A_{s\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon_p + m}\, w^{(s)} \\ s\sqrt{\varepsilon_p - m}\, w^{(s)} \end{pmatrix} = s\, |\mathbf{p}|\, A_{s\mathbf{p}},$$

где учтено уравнение (9.75). Аналогичное выражение возникает при действии $\mathbf{\Sigma p}$ на $B_{s\mathbf{p}}$. Повторяя выкладки, которые привели нас к выражению для заряда, получаем:

$$h^0 = \int s|\mathbf{p}|\, (a^*_{s\mathbf{p}} a_{s\mathbf{p}} - b_{s\mathbf{p}} b^*_{s\mathbf{p}})\, d^3\mathbf{p}.$$

Обратим внимание, что в суммировании по s принимают участие не только индексы амплитуд фурье-разложения, но и множитель s. Один раз он даёт знак плюс ($s = 1$), а второй – знак минус ($s = -1$).

Заметим, что спиральность частиц (квантов поля Дирака) определяют различным образом. Если $\mathbf{S}$ – спин частицы, а $\mathbf{p}$ – её импульс, то возможны следующие варианты: $\mathbf{Sp}$, $\mathbf{Sp}/|\mathbf{p}|$, $\mathbf{Sp}/|\mathbf{S}||\mathbf{p}|$. В последнем случае спиральность является безразмерной величиной и для фермионов со спином $\hbar/2$ она принимает значение 1 или -1.

Чтобы найти выражение для пространственных компонент тензора спиральности, необходимо вычислить элементы матриц Паули в ортогональном базисе векторов $\omega^{(s)}$ (9.75). Это можно сделать ($\lessdot\,\mathrm{H}_{156}$) при помощи явного вида векторов $\omega^{(s)}$ (стр. 876). Так как матрица $\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$ не коммутирует с $\boldsymbol{\sigma}$, соответствующие элементы недиагональны:

$$\overset{+}{w}{}^{(s)}\, \boldsymbol{\sigma}\, w^{(s')} = \begin{cases} s\mathbf{n}, & s = s' \\ \mathbf{q} - \imath s\, [\mathbf{n} \times \mathbf{q}], & s \neq s' \end{cases}, \tag{9.85}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ – единичный вектор в направлении импульса в сферических координатах имеет компоненты $\mathbf{n} = \{s_\theta c_\phi,\, s_\theta s_\phi,\, c_\theta\}$. Единичный вектор $\mathbf{q} = \{c_\theta c_\phi,\, c_\theta s_\phi,\, -s_\theta\}$ ортогонален $\mathbf{n}$ и повернут относительно него по углу θ на $\pi/2$. Тройка векторов $\mathbf{n}$, $\mathbf{q}$ и $[\mathbf{n} \times \mathbf{q}] = \{-s_\phi,\, c_\phi,\, 0\}$ составляет ортогональный единичный базис. Матрицу $\overset{+}{w}{}^{(s)}\, \boldsymbol{\sigma}\, w^{(s')}$ можно записать при помощи матриц Паули:

$$\overset{+}{w}{}^{(s)}\, \boldsymbol{\sigma}\, w^{(s')} = (\mathbf{q}\, \sigma_x + [\mathbf{n} \times \mathbf{q}]\, \sigma_y + \mathbf{n}\, \sigma_z)^{ss'},$$

где перечисление индексов s и s' идёт в следующем порядке: 1, -1.

Учитывая явный вид матрицы γ^5 в стандартном представлении и связь $B_{s,\mathbf{p}} = \gamma^5 A_{s,\mathbf{p}}$, для амплитуд плоских волн (9.78) получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A^+_{s,\mathbf{p}}\,\gamma^5\,A_{s',\mathbf{p}} &= B^+_{s,\mathbf{p}}\,\gamma^5\,B_{s',\mathbf{p}} &&= 2s|\mathbf{p}|\,\delta_{ss'}, \\ A^+_{s,\mathbf{p}}\,\gamma^5\,B_{s',-\mathbf{p}} &= B^+_{s,\mathbf{p}}\,\gamma^5\,A_{s',-\mathbf{p}} &&= 2m\,\delta_{ss'}. \end{aligned}$$

Кроме этого, используя (9.85), имеем

$$A^+_{s,\mathbf{p}}\,\beta\mathbf{\Sigma}\,A_{s',\mathbf{p}} = -B^+_{s,\mathbf{p}}\,\beta\mathbf{\Sigma}\,B_{s',\mathbf{p}} = 2\varepsilon_p\mathbf{c}_{ss'} = 2\varepsilon_p \begin{cases} s\mathbf{n}m/\varepsilon_p, & s = s' \\ \mathbf{q} - \imath s\,[\mathbf{n}\times\mathbf{q}], & s \neq s' \end{cases}.$$

Запишем в явном виде матричный (2x2) вектор $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}\,m/\varepsilon_p & \mathbf{q} - \imath\,\mathbf{n}\times\mathbf{q} \\ \mathbf{q} + \imath\,\mathbf{n}\times\mathbf{q} & -\mathbf{n}\,m/\varepsilon_p \end{pmatrix} = \mathbf{q}\,\sigma_x + [\mathbf{n}\times\mathbf{q}]\,\sigma_y + \frac{m}{\varepsilon_p}\,\mathbf{n}\,\sigma_z.$$

Эта векторная матрица является безразмерной, эрмитовой и при $\varepsilon_p \to \infty$ ортогональна импульсу. Нам также потребуются следующие выражения:

$$A^+_{s,\mathbf{p}}\,\beta\mathbf{\Sigma}\,B_{s',-\mathbf{p}} = -B^+_{s,\mathbf{p}}\,\beta\mathbf{\Sigma}\,A_{s',-\mathbf{p}} = -2\mathbf{p}\,\delta_{ss'}.$$

При помощи этих соотношений можно найти вектор спиральности (по s и s' суммирование):

$$\mathbf{h} = \int \left[s\,\mathbf{p}\,\frac{|\mathbf{p}|}{\varepsilon_p}\,(a^*_{s\mathbf{p}}a_{s\mathbf{p}} - b_{s\mathbf{p}}b^*_{s\mathbf{p}}) + m\,\mathbf{c}_{ss'}\,(a^*_{s\mathbf{p}}a_{s'\mathbf{p}} - b_{s\mathbf{p}}b^*_{s'\mathbf{p}}) \right] d^3\mathbf{p}. \quad (9.86)$$

Естественно, сохраняющийся вектор $\mathbf{h}$ не зависит от времени. Недиагональный по s второй член (матрица $\mathbf{c}_{ss'}$) связан с некоммутативностью операторов $\hat{\mathbf{p}}\mathbf{\Sigma}$ и $\hat{\mathbf{p}}\gamma^5 + m\beta\mathbf{\Sigma}$, определяющих спиральности h^0 и $\mathbf{h}$. В области больших импульсов им можно пренебречь.

Аналогично, недиагональным будет вектор спина $(1/2)\psi^+\mathbf{\Sigma}\psi$. Так как спин не сохраняется, в его фурье представлении появятся экспоненты $e^{\pm 2\varepsilon_p t}$. Соответствующие вычисления предлагается проделать самостоятельно. Для этого потребуются следующие соотношения:

$$A^+_{s,\mathbf{p}}\,\mathbf{\Sigma}\,A_{s',\mathbf{p}} \;=\; B^+_{s,\mathbf{p}}\,\mathbf{\Sigma}\,B_{s',\mathbf{p}} \;=\; 2m \begin{cases} s\,\mathbf{n}\,\varepsilon_p/m, & s = s' \\ \mathbf{q} - \imath s\,\mathbf{n}\times\mathbf{q}, & s \neq s' \end{cases},$$

$$A^+_{s,\mathbf{p}}\,\mathbf{\Sigma}\,B_{s',-\mathbf{p}} = B^+_{s,\mathbf{p}}\,\mathbf{\Sigma}\,A_{s',-\mathbf{p}} = 2s|\mathbf{p}| \begin{cases} 0, & s = s' \\ \mathbf{q} - \imath s\,\mathbf{n}\times\mathbf{q}, & s \neq s' \end{cases}.$$

Стоит проверить, что при $\mathbf{p} = 0$ ($\mathbf{n} = \{0,0,1\}$, $\mathbf{q} = \{0,1,0\}$) плотность z-й компоненты спина в импульсном пространстве не зависит от времени:

$$\frac{1}{2}\,(a^*_{1\mathbf{0}}a_{1\mathbf{0}} - a^*_{-1\mathbf{0}}a_{-1\mathbf{0}} + b_{1\mathbf{0}}b^*_{1\mathbf{0}} - b_{-1\mathbf{0}}b^*_{-1\mathbf{0}}),$$

а при $\mathbf{p} \neq 0$ существует осциллирующая во времени составляющая.

9.7 Нейтрино

• Параметр m, введенный для записи уравнения Дирака, после квантовании спинорного поля (стр. 616), приобретает смысл массы фермиона. Для массивных фермионов ($m \neq 0$) спиральность может принимать любое значение. Если она положительна, то спин и импульс направлены "в одну сторону". Такая спиральность называется *правой*. Отрицательная спиральность, соответственно, называется *левой*.

Можно рассмотреть теорию с параметром $m = 0$. У нейтрино, если масса и существует, то она существенно меньше массы электрона, поэтому такое поле называют нейтринным. Уравнение Дирака мы построили рассматривая линейное дифференциальное уравнение первого порядка для двух-компонентного спинора (стр. 560). Если параметр $m = 0$, то введение второго спинора не требуется. Так, для спинора с точкой можно записать ковариантное уравнение:

$$\hat{p}^{\nu\dot{\mu}}\,\xi_{\dot{\mu}} = (\hat{p}^0 + \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}})^{\nu\dot{\mu}}\xi_{\dot{\mu}} = [(\hat{p}^0 + \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}})\xi]^{\nu} = 0.$$

или, опуская индекс

$$(\hat{p}^0 + \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}})\,\xi = \sigma_\mu \hat{p}^\mu\,\xi = 0, \qquad (9.87)$$

где $\hat{p}^\mu = \imath\partial^\mu$ и 4-ка матриц $\sigma_\mu = \{1,\, \boldsymbol{\sigma}\}$ определена на странице 538. Строя фурье-разложение спинора (стр. 586), получаем две плоские волны соответствующие $\lambda = \pm|\mathbf{p}|$. Для плоской волны оператор $\hat{p}^\mu$ заменяется на обычный 4-вектор p^μ. В этом случае уравнение для спинора принимает форму уравнения на собственные значения спиральности с фиксированным *отрицательным* значением (при $m = 0$ имеем $p^0 = \varepsilon_p = |\mathbf{p}|$):

$$\frac{\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{p}|}\,\xi = -\xi.$$

Это же соотношение получится для отрицательных энергий и импульса ($\lambda = -|\mathbf{p}|$, $\mathbf{p} \mapsto -\mathbf{p}$). Такое поле, имеющее всегда левую спиральность, в микромире соответствует *нейтрино*.

Аналогично, для спинора без точки $\chi = \{\chi^1\ \chi^2\}$ имеем следующее безмассовое уравнение:

$$(\hat{p}^0 - \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}})\,\chi = \bar{\sigma}_\mu \hat{p}^\mu\,\chi = 0, \qquad (9.88)$$

где $\bar{\sigma}_\mu = \{1,\, -\boldsymbol{\sigma}\}$. В импульсном пространстве оно имеет вид:

$$\frac{\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{p}|}\,\chi = \chi.$$

Частица со всегда положительной (правой) спиральностью соответствующая этому полю – это *антинейтрино*.

Опыт показывает, что нейтрино и антинейтрино это различные частицы. Для их описания необходимы два независимых спинорных поля (ξ для нейтрино и χ для антинейтрино). Рассматриваемые в этой главе четырех-компонентные биспинорные поля Дирака в физике элементарных частиц описывают массивные фермионы, например, электрон. Нейтрино же соответствует в некотором смысле более фундаментальное двух-компонентное спинорное поле.

Обратим также внимание на явное нарушение симметрии правого и левого в поведении нейтрино и антинейтрино. Нейтрино "закручена" всегда против часовой стрелки (левый винт). Ни в одной реакции не обнаружено нейтрино, которое бы "вращалось" по правому винту. Для антинейтрино всё наоборот. Выше кавычки использованы, чтобы подчеркнуть жаргонность сделанного утверждения. На современном уровне понимания природы микромира, нейтрино и электрон являются бесструктурными ("точечными") образованиями. Их спин всегда равен $\hbar/2$ и не может быть представлен как вращение чего либо, что можно было бы затормозить или ускорить. Впрочем, в рамках неквантовой релятивистской теории (которой посвящена эта книга) вполне можно представлять спин фермионов как некоторую циркуляцию спинорного (для нейтрино) или биспинорного (для электрона) поля. К вопросу о нарушении симметрии между правым и левым мы вернёмся в конце главы.

Заметим, что физическая причина сохранения нейтрино одной и той же спиральности является её безмассовость. Как и фотон, нейтрино движется с фундаментальной скоростью, поэтому её нельзя догнать и обогнать. Следовательно нет возможности "перевернуть" вектор импульса, входящий в определение спиральности, поменяв её знак.

В природе существует 3 *поколения* лептонов. Кроме электрона с массой $m_e = 0.511$ МэВ есть еще два его более тяжелых "близнеца": *мюон* с массой $m_\mu = 207\, m_e$ и *тау-лептон* с $m_\tau = 16.8\, m_\mu$. Каждому массивному лептону соответствует свой тип нейтрино ν_e, ν_μ, ν_τ (электронное, мюонное и таонное нейтрино).

Долгое время считалось, что выполняется закон сохранения *лептонного заряда* (количество лептонов каждого поколения во всех реакциях не меняется). Сравнительно недавно было обнаружено, что нейтрино различных поколений могут переходить друг в друга (*нейтринные осцилляции*), т.е. лептонный заряд сохраняется лишь приближенно. Этот эффект может быть связан с существованием малой, но ненулевой массы нейтрино. Впрочем, её прямого измерения не проделано и вопрос о значении массы нейтрино пока остаётся открытым.

• При описании взаимодействия между электронами и нейтрино удобно рассматривать их единым образом на основе биспинорного поля. Проекционная матрица (стр. 566), вырезает у биспинора нижний или верхний спинор (тильдой помечаем антинейтрино):

$$\frac{1-\gamma^5}{2}\,\psi_\nu = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_1\\\nu_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\nu_2\end{pmatrix}, \qquad \frac{1+\gamma^5}{2}\,\psi_{\tilde\nu} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde\nu_1\\\tilde\nu_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tilde\nu_1\\0\end{pmatrix}.$$

С её помощью лагранжиан свободного нейтринного поля в терминах биспинора можно записать следующим образом:

$$\mathcal{L} = \frac{\imath}{2}\,\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu(1-\gamma^5)\psi = \imath\,\xi^+(\partial_t - \boldsymbol{\sigma}\nabla)\xi, \tag{9.89}$$

где во втором равенстве подставлены компоненты биспинора $\psi = (\chi\ \ \xi)^T$. Заметим, что хотя лагранжиан записан в терминах биспинора, на самом деле он не зависит от "верхнего" спинора χ. Уравнения поля ($\hat p_\mu = \imath\partial_\mu$), следующие из лагранжиана, имеют вид:

$$\gamma^\mu\hat p_\mu(1-\gamma^5)\psi = 0, \tag{9.90}$$

или переходя к спинорам $\psi = (\chi\ \xi)^T$ в спинорном представлении:

$$\begin{pmatrix}0 & \hat p^0 + \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}\\ \hat p^0 - \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\xi\end{pmatrix} = 0 \qquad => \qquad (\hat p^0 + \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}})\,\xi = 0.$$

Уравнение для сопряженного биспинора $\bar\psi = \psi^+\gamma^0$ получается взятием эрмитового сопряжения:

$$\hat p_\mu\bar\psi\gamma^\mu(1+\gamma^5) = 0,$$

где учтено, что γ^5 эрмитовая матрица, а γ^μ при эрмитовом сопряжении переходит в $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ и $\gamma^5\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^5$.

Теорема Нётер приводит к следующему тензору энергии-импульса нейтринного поля, выраженному в терминах биспинора:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\imath}{2}\,\bar\psi\gamma^\mu\partial^\nu(1-\gamma^5)\psi.$$

Плотность энергии $W = T^{00}$ и импульса $P^i = T^{0i}$ равны:

$$W = \frac{1}{2}\,\psi^+(1-\gamma^5)\,\imath\partial^0\psi, \qquad \mathbf{P} = \frac{1}{2}\,\psi^+(1-\gamma^5)\,\hat{\mathbf{p}}\psi.$$

Как и лагранжиан, эти величины зависят только от одного двух компонентного спинорного поля ξ. Сохраняющийся ток, в силу теоремы Нётер, имеет вид:

$$j^\mu = \frac{1}{2}\,\bar\psi\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi = \xi^+\sigma^\mu\xi.$$

Несложно проверить, что благодаря уравнению $\sigma_\mu\partial^\mu\xi = 0$ выполняется уравнение непрерывности $\partial_\mu j^\mu = 0$.

• Свободные поля являются основой построения теорий взаимодействия частиц. Именно тот или иной тип взаимодействия приводит к различным типам реакций превращения частиц при их столкновениях и распадах. Например, за распад мюона:

$$\mu \mapsto e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$

"ответственно" слабое взаимодействие. В первом приближении (теория Ферми) оно может быть описано при помощи суммы лагранжианов свободного электрона и нейтрино к которым добавлен член взаимодействия этих полей:

$$\mathcal{L}_F = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\, J^{\mu+} J_\mu,$$

где $G_F \approx 10^{-5}/m_p^2$ – *константа Ферми* ($m_p = 938$ МэВ – масса протона), а ток, входящий в лагранжиан, имеет вид:

$$J^\alpha = \frac{1}{2}\,\bar{e}\gamma^\alpha(1-\gamma^5)\nu_e + \frac{1}{2}\,\bar{\mu}\gamma^\alpha(1-\gamma^5)\nu_\tau,$$

где e, μ – биспинорные функции соответствующие электрону и мюону, а ν_e и ν_μ – эффективные биспиноры для электронного и мюонного нейтрино.

Относительно инверсии пространственных осей координат (см. стр. 624) эти токи являются разницей "обычного" (полярного) вектора ($\bar{\psi}_e\gamma^\alpha\psi_\nu$) и аксиального вектора ($\bar{\psi}_e\gamma^\alpha\gamma^5\psi_\nu$). Говорят, что ток слабого взаимодействия имеет $V-A$ структуру, в отличии от векторного V тока электромагнитного взаимодействия. Заметим, что хотя слабые токи записаны для спинорного представления (где "работают") проекционные матрицы, при помощи стандартного перехода $\psi \mapsto U\psi$ и $\gamma^\alpha \mapsto U\gamma^\alpha U^{-1}$ их можно использовать в любом представлении.

Теория Ферми явилась первым шагом к построению слабого, а затем объединенного электрослабого взаимодействия. При электромагнитном взаимодействии заряженные частицы "обмениваются" квантами электромагнитного поля (фотонами), которые являются безмассовыми. В слабом взаимодействии аналогом фотонов выступает массивное заряженное векторное поле. Его кванты соответствуют частицам $W^\pm$ с массой 80 ГэВ. Именно массивность этих W-бозонов приводит к тому, что в первом приближении с описанием слабых взаимодействий достаточно хорошо справляется "точечный" (произведение двух токов) лагранжиан Ферми. На самом деле в 1932 г. при его записи Энрико Ферми не мог предположить, что природа не симметрична относительно инверсии пространственных осей. Поэтому тогда в соответствующих токах не было матрицы γ^5.

9.8 Калибровочные теории *

• Рассмотрим *принцип калибровочной инвариантности*, который лежит в основе всех современных теорий взаимодействий. Лагранжиан дираковского биспинора:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(\gamma^\mu \imath \partial_\mu - m)\psi.$$

инвариантен относительно глобального калибровочного преобразования группы $\mathbf{U}(1)$:

$$\psi \mapsto \psi' = e^{\imath\omega}\psi, \qquad \bar{\psi} \mapsto \bar{\psi}' = e^{-\imath\omega}\bar{\psi},$$

где ω – вещественная константа. В силу теоремы Нётер, это приводит к сохранению тока $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. Потребуем, чтобы вместе с глобальной выполнялась также и *локальная калибровочная инвариантность*, при которой фаза преобразования зависит от точки в пространстве и времени: $\omega = \omega(x)$. Сам по себе исходный лагранжиан относительно локального преобразования неинвариантен:

$$\mathcal{L}'_0 = \bar{\psi}e^{-\imath\omega}(\gamma^\mu \imath\partial_\mu - m)e^{\imath\omega}\psi = \mathcal{L}_0 - j^\mu\,\partial_\mu\omega.$$

Чтобы скомпенсировать появившийся член, содержащий $\partial_\mu\omega$, добавим в лагранжиан векторное поле A^μ, "удлинив" производную ∂_μ:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\gamma^\mu \imath(\partial_\mu - \imath e A_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi = \mathcal{L} + e j^\mu A_\mu, \tag{9.91}$$

где e – некоторая константа. Если при калибровочном преобразовании векторное поле изменяется следующим образом:

$$A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\,\partial_\mu\omega, \tag{9.92}$$

то это скомпенсирует неинвариантность дираковского лагранжиана $\mathcal{L}_0$. В результате теория поля, построенная на основе лагранжиана (9.91), будет локально калибровочно инвариантна.

Естественно и для векторного поля необходимо записать уравнения движения и соответствующий лагранжиан. Они также должны быть инварианты относительно *калибровочного преобразования* (9.92). Этому требованию удовлетворяет тензор напряженностей поля

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

который не изменяется при (9.92). Квадрат этого тензора пропорционален лагранжиану свободного электромагнитного поля, который необходимо добавить к общему лагранжиану $\mathcal{L}$. Заметим, что принцип калибровочной инвариантности не позволяет добавить в лагранжиан массовый член $\mu^2 A_\alpha A^\alpha$, который неинвариантен относительно (9.92).

Выбор дираковского биспинорного свободного поля не является принципиальным при построении калибровочной теории электромагнитного взаимодействия. Подходит любое комплексное поле, приводящее к сохраняющемуся току. Например, можно взять комплексное скалярное поле (7.58) стр. 453:

$$\mathcal{L}_0 = (\partial_\mu \Psi^*)(\partial^\mu \Psi) - m^2\, \Psi^* \Psi.$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно глобального калибровочного преобразования $\Psi \mapsto e^{\imath\omega}\Psi$. Чтобы его сделать инвариантным и относительно локального преобразования необходимо "удлинить" производные, введя калибровочное поле:

$$\mathcal{L} = \{(\partial_\mu - \imath e A_\mu)\Psi\}^* \{(\partial^\mu - \imath e A^\mu)\Psi\} - m^2\, \Psi^* \Psi.$$

Калибровочное преобразование (9.92) скомпенсирует производную от фазы локального преобразования $\mathbf{U}(1)$ и лагранжиан будет инвариантным.

Из теоремы Нётер следует, что симметрия лагранжиана $\mathcal{L}_0$ относительно глобального преобразования $\mathbf{U}(1)$ приводит к сохранению тока:

$$J^\mu = \imath\,(\Psi \partial^\mu \Psi^* - \Psi^* \partial^\mu \Psi).$$

Если раскрыть скобки в лагранжиане $\mathcal{L}$ (не забываем, что $\imath^* = -\imath$), то получится следующее выражение:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - e\, J^\mu A_\mu + e^2 A^\mu A_\mu \Psi^* \Psi. \tag{9.93}$$

Второе слагаемое, это стандартный для электродинамики член взаимодействия тока и 4-потенциала поля. Обратим внимание на третий член, который соответствует некоторой модификации массового члена лагранжиана $m^2 \mapsto m^2 - e^2 \mathrm{A}^2$. Для спинорного же лагранжиана (9.91) возникает только член взаимодействия с током. Заметим, что в лагранжиане скалярного и спинорного полей получился различный знак в токовом слагаемом. Понятно, что он зависит от знака константы e и определения самого тока J^μ. Как и в случае с биспинорным полем, для полного описания динамики необходимо к лагранжиану (9.93) добавить лагранжиан свободного электромагнитного поля, построенного при помощи калибровочно инвариантного тензора $F_{\mu\nu}$.

Кроме электромагнитного поля в природе существуют и другие взаимодействия. В настоящее время принцип локальной калибровочной инвариантности является самым мощным эвристическим приемом получения лагранжианов таких взаимодействий. Однако, чтобы возникло нечто существенно отличное от электродинамики необходимо расширить группу локального калибровочного преобразования.

• Рассмотрим *калибровочное поле Янга-Миллса*, порождаемое группой $\mathbf{SU}(2)$ (стр. 388). Матрицы этой группы являются специальными унитарными матрицами 2x2, которые можно выразить через матрицы Паули (стр. 508) следующим образом:

$$\mathrm{U} = e^{\frac{\imath}{2}\boldsymbol{\omega\sigma}} = \cos\frac{\phi}{2} + \imath\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}\,\sin\frac{\phi}{2}, \tag{9.94}$$

где $\boldsymbol{\omega\sigma} = \omega_a\sigma_a$ (сумма по a от 1 до 3), $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{n}\phi$ – три вещественных параметра группы, а $\mathbf{n}$ – единичный вектор, для которого $(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})^2 = \mathbf{1}$. Именно последнее соотношение позволяет записать матрицу группы $\mathbf{SU}(2)$ в экспоненциальной форме (в этом разделе для неё будет выбран нежирный прямой шрифт, а жирный – для тройки матриц Паули $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1,\, \sigma_2,\, \sigma_3\}$). Так как $\mathrm{UU}^+ = 1$, преобразования (9.94) оставляют инвариантным норму двух-компонентного комплексного вектора $\psi^+\psi = \psi^{*1}\psi^1 + \psi^{*2}\psi^2$. Его каждая компонента, в свою очередь, может быть некоторым многокомпонентным объектом, например, спинором. Введем дираковское биспинорное поле, которое кроме спинорных индексов имеет еще 2 индекса:

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi^1\\ \psi^2\end{pmatrix}.$$

Каждая величина $\psi^c \equiv \psi^c_\alpha$ является 4-компонентным биспинором. Поэтому поле ψ имеет 8 комплексных компонент. Запишем лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \bar\psi\gamma^\mu\,\imath\partial_\mu\psi - m\bar\psi\psi$$

и восстановим в нем индексы (по c сумма от 1 до 2, по α, β – от 1 до 4):

$$\mathcal{L} = \psi^{+c}_\alpha\,(\gamma^0\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\,\imath\partial_\mu\,\psi^c_\beta - m\,\psi^{+c}_\alpha\gamma^0_{\alpha\beta}\psi^c_\beta.$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно глобального преобразования $\mathbf{SU}(2)$, параметры которого не зависят от координат и времени:

$$\psi^c_\alpha \mapsto \psi'^c_\alpha = \mathrm{U}_{cb}\psi^b_\alpha, \qquad\qquad U^+_{ac}U_{cb} = U^*_{ca}U_{cb} = \delta_{ab}.$$

Индексы участвующие в $\mathbf{SU}(2)$ преобразовании мы будем называть *цветными* (термин "цвет" к реальному цвету, конечно, отношения не имеет). Они обозначены латинскими буквами a, b, c... и их положение по вертикали в тензорных выражениях несущественно.

Потребуем, чтобы выполнялась не только глобальная, но и локальная калибровочная симметрия, т.е. параметры группы зависели от координат и времени $\omega_a = \omega_a(x)$. Так как для *разных* векторов $\partial_\nu\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}$ их свертки с матрицами Паули $\partial_\nu\boldsymbol{\omega\sigma}$ и $\boldsymbol{\omega\sigma}$ не коммутируют, дифференцировать экспоненциальное представление матрицы U проблематично. Поэтому мы будем работать непосредственно с матрицей U.

Введём векторное поле A^μ, являющееся четырьмя *матрицами* 2x2, т.е. имеющее кроме ковариантного индекса μ два цветных индекса: $\mathrm{A}^\mu \equiv A^\mu_{ab}$. С его помощью запишем удлиненную производную в лагранжиане:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\gamma^\mu\,\imath(\partial_\mu - ig\mathrm{A}_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi,$$

где g – константа взаимодействия спинорного и векторного поля. При калибровочном преобразовании $\psi \mapsto \psi' = \mathrm{U}\psi$:

$$\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}' = \bar{\psi}\gamma^\mu\,\imath\left(\mathrm{U}^+(\partial_\mu \mathrm{U}) + \partial_\mu - \imath g\mathrm{U}^+\mathrm{A}'_\mu\mathrm{U}\right)\psi - m\bar{\psi}\psi$$

получится исходный лагранжиан, если $\imath g\mathrm{U}^+\mathrm{A}'_\mu\mathrm{U} = \mathrm{U}^+(\partial_\mu\mathrm{U}) + \imath g\mathrm{A}_\mu$, или умножая слева на U, а справа на U^+:

$$\mathrm{A}_\mu \mapsto \mathrm{A}'_\mu = \frac{\imath}{g}\,\mathrm{U}\partial_\mu\mathrm{U}^+ + \mathrm{U}\mathrm{A}_\mu\mathrm{U}^+ = \frac{\imath}{g}\,\mathrm{U}\,\mathrm{D}_\mu\,\mathrm{U}^+, \tag{9.95}$$

где учтено тождество $(\partial_\mu\mathrm{U})\mathrm{U}^+ = -\mathrm{U}\partial_\mu\mathrm{U}^+$, следующее из условия унитарности $\mathrm{U}\mathrm{U}^+ = 1$ и введена *удлинённая производная* (это матрица!):

$$\mathrm{D}_\mu = \partial_\mu - \imath g\mathrm{A}_\mu.$$

При калибровочном преобразовании удлинённая производная, действующая на любую матричную функцию $\Psi \equiv \Psi_{ab}(\mathrm{x})$, меняется ($\lessdot\, \mathrm{H}_{157}$) следующим образом:

$$\mathrm{D}_\mu\Psi \mapsto \mathrm{D}'_\mu\Psi' = \mathrm{U}\mathrm{D}_\mu(\mathrm{U}^+\Psi'). \tag{9.96}$$

В отличие от обычных производных ∂_μ, дифференциальные *матричные* операторы D_μ не перестановочны и их коммутатор, действующий на произвольную матричную функцию Ψ равен ($\lessdot\, \mathrm{H}_{158}$):

$$[\mathrm{D}_\mu,\, \mathrm{D}_\nu]\,\Psi = (\mathrm{D}_\mu\mathrm{D}_\nu - \mathrm{D}_\nu\mathrm{D}_\mu)\Psi = -\imath g\,\mathrm{F}_{\mu\nu}\,\Psi,$$

где $\mathrm{F}_{\mu\nu}$ – *матрица* тензоров напряженности:

$$\mathrm{F}_{\mu\nu} = \mathrm{D}_\mu\mathrm{A}_\nu - \mathrm{D}_\nu\mathrm{A}_\mu = \partial_\mu\mathrm{A}_\nu - \partial_\nu\mathrm{A}_\mu - \imath g[\mathrm{A}_\mu, \mathrm{A}_\nu]$$

и квадратные скобки – коммутатор двух матриц. При преобразованиях (9.95), (9.96) этот тензор меняется следующим образом ($\lessdot\, \mathrm{H}_{159}$):

$$\mathrm{F}_{\mu\nu} \mapsto \mathrm{F}'_{\mu\nu} = \mathrm{U}\mathrm{F}_{\mu\nu}\mathrm{U}^+.$$

Поэтому $\mathrm{Tr}(\mathrm{F}_{\mu\nu}\mathrm{F}^{\mu\nu})$ будет калибровочно инвариантным выражением, так как под следом Tr (сумма диагональных элементов) матрицы можно циклически переставлять:

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{U}\mathrm{F}_{\mu\nu}\mathrm{F}^{\mu\nu}\mathrm{U}^+) = \mathrm{Tr}(\mathrm{U}^+\mathrm{U}\mathrm{F}_{\mu\nu}\mathrm{F}^{\mu\nu}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{F}_{\mu\nu}\mathrm{F}^{\mu\nu}),$$

где в последнем равенстве учтено условие унитарности $\mathrm{U}^+\mathrm{U} = 1$.

• Проведенные выше вычисления в равной степени относились к любой группе $\mathbf{U}(n)$. Запишем теперь в явном виде лагранжиан и уравнения движения для полей Янга-Миллса которые соответствуют группе $\mathbf{SU}(2)$. Разложим четверку 2x2 матриц A_μ по матрицам Паули:

$$\mathrm{A}_\mu = \frac{1}{2} A^c_\mu \, \sigma_c = \frac{1}{2} \mathbf{A}_\mu \boldsymbol{\sigma},$$

где для коэффициентов разложения $\mathbf{A}_\mu$ полей Янга-Миллса A_μ используются векторные обозначения $\mathbf{A}_\mu = \{A^1_\mu, A^2_\mu, A^3_\mu\}$. Таким образом, лагранжиан биспинорного поля, инвариантный относительно группы $\mathbf{SU}(2)$, в силу принципа локальной калибровочной симметрии, должен взаимодействовать с тремя векторными полями $\{A^1_\mu, A^2_\mu, A^3_\mu\}$. Эквивалентно можно говорить, что это четыре ($\mu = 0, ..., 3$) 3-вектора в “цветном пространстве” $\mathbf{A}_\mu$. В любом случае это 12-компонентный объект. Вообще говоря, разложение произвольной матрицы 2x2 по базису матриц Паули должно дополнительно содержать единичную матрицу, умноженную на еще одно векторное поле. Однако это поле оказывается обычным электромагнитным полем (группа $\mathbf{U}(1)$ является подгруппой группы $\mathbf{SU}(2)$).

Разложим тензоры напряженности по матрицам Паули:

$$\mathrm{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu \right) \boldsymbol{\sigma} - \frac{\imath g}{4} \, \mathrm{A}^a_\mu \mathrm{A}^b_\mu \, [\sigma_a, \sigma_b] = \frac{1}{2} \, \mathbf{F}_{\mu\nu} \, \boldsymbol{\sigma},$$

где введены три тензора для каждого 4-потенциала Янга-Миллса:

$$F^c_{\mu\nu} = \partial_\mu A^c_\nu - \partial_\nu A^c_\mu + g \varepsilon_{cab} A^a_\mu A^b_\nu$$

и учтено свойство матриц Паули $[\sigma_a, \sigma_b] = 2\imath \varepsilon_{abc} \, \sigma_c$, следующее из алгебры (8.6), стр. 508. В цветных векторных обозначениях тензоры напряженностей имеют более компактный вид:

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu + g \mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu.$$

Заметим, что в силу антисимметричности векторного произведения, этот тензор антисимметричен по индексам μ и ν.

Совместный лагранжиан спинорного и калибровочного поля теперь можно записать следующим образом:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \imath \gamma^\mu (\partial_\mu - \frac{\imath g}{2} \mathbf{A}_\mu \boldsymbol{\sigma}) \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{16\pi} \, \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu}. \qquad (9.97)$$

Напомним, что ψ – это 16 комплексных величин или 2 биспинора. Дираковские матрицы γ^μ действуют на биспинорные индексы, тогда как цветные индексы сворачиваются с матрицами Паули. Так как суммирование по этим всем индексам проводится независимым образом, матрицы Паули и Дирака можно переставлять друг с другом.

Найдем уравнения поля Янга-Миллса. Производные лагранжиана по $(\partial_\alpha A^d_\beta)$ вычисляются аналогично электродинамике и равны $-F^{\alpha\beta}_d/4\pi$. Кроме этого:

$$-\frac{1}{4}\,\frac{\partial(\mathbf{F}^{\mu\nu}\mathbf{F}_{\mu\nu})}{\partial A^d_\beta} = -\frac{1}{2}\,F^{\mu\nu}_c\,\frac{\partial F^c_{\mu\nu}}{\partial A^d_\beta} = g\varepsilon^{dbc}A^b_\alpha F^{\alpha\beta}_c = g[\mathbf{A}_\alpha\times\mathbf{F}^{\alpha\beta}]_c.$$

В результате, уравнения поля имеют вид:

$$\partial_\alpha\mathbf{F}^{\alpha\beta} + g\mathbf{A}_\alpha\times\mathbf{F}^{\alpha\beta} = -4\pi\,\frac{g}{2}\,\bar{\psi}\gamma^\beta\boldsymbol{\sigma}\psi. \tag{9.98}$$

Найдем сохраняющийся ток, соответствующий лагранжиану (9.97). В отличии от электродинамики, в глобальном ($\boldsymbol{\omega} = const$) калибровочном преобразовании участвуют не только два биспинора ψ, но и поля $\mathbf{A}_\mu$. Раскладывая матрицу U преобразования $\psi' = \mathrm{U}\psi$ в ряд, из (9.95) имеем:

$$\psi' \approx (1+\frac{i}{2}\,\boldsymbol{\omega\sigma})\,\psi, \qquad \bar{\psi}' \approx \bar{\psi}(1-\frac{i}{2}\,\boldsymbol{\omega\sigma}), \qquad \mathbf{A}'_\mu \approx \mathbf{A}_\mu + \mathbf{A}_\mu\times\boldsymbol{\omega}.$$

В соответствии с теоремой Нетер (стр. 447) должен сохраняться следующий ток:

$$J^\mu_a = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\,\frac{\partial\psi'}{\partial\omega_a} + \frac{\partial\bar{\psi}'}{\partial\omega_a}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\mathbf{A}_\nu)}\,\frac{\partial\mathbf{A}'_\nu}{\partial\omega_a}\right]_{\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}}.$$

Вычисляя производные лагранжиана (9.97), имеем:

$$\boldsymbol{J}^\mu = -\frac{1}{2}\,\bar{\psi}\gamma^\mu\boldsymbol{\sigma}\psi - \frac{1}{4\pi}\,\mathbf{A}_\alpha\times\mathbf{F}^{\alpha\mu}.$$

При помощи этого тока уравнения Янга-Миллса могут быть записаны в максвелловском виде $\partial_\mu\mathbf{F}^{\mu\nu} = -4\pi\,g\,\mathbf{J}^\nu$. Обратим внимание на второе слагаемое в $\boldsymbol{J}^\mu$, означающее, что поля $\mathbf{A}_\mu$ являются *заряженными.*

Можно определить цветное электрическое $E_i = \{F^{10},\,F^{20},\,F^{10}\}$ и магнитное поле $B_i = \{F^{32},\,F^{23},\,F^{21}\}$. Они нелинейно связаны с потенциалами:

$$\mathbf{E}_i = -\nabla_i\boldsymbol{\phi} - \frac{\partial\mathbf{A}_i}{\partial t} + g\mathbf{A}_i\times\boldsymbol{\phi}, \qquad \mathbf{B}_i = \varepsilon_{ijk}\left(\nabla_j\mathbf{A}_k - \frac{g}{2}\,\mathbf{A}_j\times\mathbf{A}_k\right),$$

где жирным шрифтом помечаются векторы в цветовом пространстве $\mathbf{SU}(2)$, а компоненты векторов в обычном пространстве перечисляются при помощи латинских индексов. Крестик векторного произведения относится к цветным компонентам, а для векторного произведения в обычном пространстве используется символ Леви-Чевита. Множитель 1/2 в магнитном поле появился, так как, например, $\mathbf{A}_2\times\mathbf{A}_3$ записывается так $(1/2)\,\varepsilon_{1ij}\,\mathbf{A}_i\times\mathbf{A}_j = (1/2)\,(\mathbf{A}_2\times\mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_3\times\mathbf{A}_2)$.

9.9 Основы квантовой теории *

Этот и следующий разделы попали в книгу совсем из другого, *квантового мира.* Однако, мы так часто, рассматривая фурье разложение спинорного поля, упоминали о его квантах, что вполне уместно будет сделать соответствующее отступление.

Мир больших скоростей существенно отличается от привычного для нашего повседневного опыта мира классической механики. Квантовые явления микромира ещё сильнее противоречат обыденной интуиции. Тем не менее, Вселенная устроена таким образом, что классическая механика охватывает лишь небольшую часть процессов которые в этой Вселенной происходят. Квантовая механика, как и релятивистская, является *параметрически неполной теорией* (стр. 44). Её основные соотношения определяются фундаментальной константой – *постоянной Планка* $\hbar$.

Опыт показывает, что в микромире многие физические величины принимают дискретные значения. Примером являются спин частиц, момент импульса или энергия электрона в атоме. Кроме этого, часто две физические величины не могут быть одновременно измерены сколь угодно точно. Наиболее адекватным математическим аппаратом, который позволяет всё это описать, оказывается теория линейных операторов, действующих в *гильбертовом пространстве.*

Каждой физической величине (координате частицы, её импульсу, энергии и т.д.) в квантовой теории ставится в соответствие *линейный оператор* $\hat{A}$. Этот оператор действует на векторы комплексного векторного пространства (гильбертово пространство). Будем помечать операторы сверху шляпками, а векторы обозначать большими греческими буквами и, чтобы не путать с полевыми функциями, окружать их прямой и угловой скобкой: $\big|\Psi\big\rangle$. Векторы можно умножать на комплексные числа и складывать друг с другом. В результате этих операций снова получается вектор из этого же пространства: $\alpha\big|\Psi\big\rangle + \beta\big|\Phi\big\rangle$. При действии оператора на вектор получается новый вектор:

$$\hat{A}\big|\Psi\big\rangle = \big|\Phi\big\rangle.$$

Оператор называется *линейным*, если для любых чисел и векторов выполняется соотношение:

$$\hat{A}\left(\alpha\big|\Psi\big\rangle + \beta\big|\Phi\big\rangle\right) = \alpha\,\hat{A}\big|\Psi\big\rangle + \beta\,\hat{A}\big|\Phi\big\rangle, \tag{9.99}$$

т.е. действие оператора на линейную комбинацию векторов эквивалентно линейной комбинации результата действия оператора на каждый вектор.

Иногда при действии оператора на некий вектор получается тот же вектор, умноженные на константу:

$$\hat{A}\big|a\big\rangle = a\big|a\big\rangle.$$

Такое соотношение называется *уравнением на собственные значения.* Соответственно $\big|a\big\rangle$ является собственным вектором, а константа a – собственным значением оператора $\hat{A}$. Данное уравнение обычно имеет несколько решений (различных a и $\big|a\big\rangle$). Все собственные значения оператора $\hat{A}$ является *множеством "разрешенных" значений* физической величины A, которой в квантовой теории соответствует оператор $\hat{A}$.

Операторы и векторы – это абстрактные математические объекты. В зависимости от задачи их можно реализовывать при помощи тех или иных "более привычных" конструкций. Рассмотрим, например, электрон. Эксперимент показывает, что он обладает собственным моментом вращения (спином), проекции которого на координатные оси всегда принимают только *два* значения, равные $\hbar/2$ и $-\hbar/2$. Такое квантование физической величины можно описать при помощи матрицы 2x2, действующей на столбик из двух комплексных чисел. Таким образом, в этом случае оператор является матрицей, в вектор – столбиком:

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}, \qquad \big|\Phi\big\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ – матрицы Паули, стр.508. Возможны два решения уравнения на собственные значения для проекции спина на ось z, соответствующие двум собственным значениям $\pm\hbar/2$:

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Оператор $\hat{S}_x$ (проекция спина на ось x) также имеет два собственных значения $\pm\hbar/2$. Однако, собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям отличаются от $\hat{S}_z$ и равны ($\lessdot\,\mathrm{H}_{160}$):

$$\big|S_x^+\big\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}, \qquad \big|S_x^-\big\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},$$

где плюс соответствует $S_x = \hbar/2$, а минус – $S_x = -\hbar/2$.

Один вектор можно записать в виде линейной комбинации других векторов. Например:

$$\big|S_x^+\big\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big|S_z^+\big\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\big|S_z^-\big\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, \tag{9.100}$$

т.е. собственный вектор проекции $\hbar/2$ спина на ось x равен сумме собственных векторов оператора $\hat{S}_z$ с равными коэффициентами.

• С каждой парой векторов $\big|\Psi\big\rangle$ и $\big|\Phi\big\rangle$ свяжем комплексное число, которое назовём *скалярным произведением* векторов и обозначим угловыми скобками с разделяющей вертикальной чертой: $\big\langle\Psi|\Phi\big\rangle$. Постулируется, что при комплексном сопряжении происходит перестановка векторов

$$\big\langle\Psi|\Phi\big\rangle^* = \big\langle\Phi|\Psi\big\rangle \tag{9.101}$$

и выполняются *свойства линейности* скалярного произведения:

$$\big\langle\Psi\big|\Big(\alpha_1\big|\Phi_1\big\rangle + \alpha_2\big|\Phi_2\big\rangle\Big) = \alpha_1\left\langle\Psi\right|\Phi_1\rangle + \alpha_2\left\langle\Psi\right|\Phi_2\rangle\,, \tag{9.102}$$

где слева в круглых скобках стоит некоторый вектор, скалярное произведение которого с вектором $\big|\Psi\big\rangle$ равно линейной сумме скалярных произведений, записанных в правой части.

Скалярное произведение вектора на себя самого называется *нормой вектора*. Постулируется, что норма всегда неотрицательна $\big\langle\Psi|\Psi\big\rangle \geqslant 0$. Обычно векторы нормируются на единицу: $\big\langle\Psi|\Psi\big\rangle = 1$ (если норма конечна, умножением вектора на число этого всегда можно добиться).

В примере с матричным представлением спина электрона, скалярное произведение определим как умножение столбика вектора на его эрмитово сопряжение (строчку комплексно сопряженных элементов). Например:

$$\big\langle S_x^+|S_z^+\big\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

В частности, именно таким образом получен нормировочный множитель $1/\sqrt{2}$ у векторов $\big|S_x^{\pm}\big\rangle$ при нормировании их на единицу: $\big\langle S_x^+|S_x^+\big\rangle = 1$.

Скалярное произведение является *билинейной* комплексной функцией векторов, см. (9.101) (9.102). Её удобно записывать в терминах *сопряженного гильбертового пространства.* Предполагается, что по-мимо исходных векторов $\big|\Psi\big\rangle$, $\big|\Phi\big\rangle$ существуют сопряженные им $\big\langle\Psi\big|$, $\big\langle\Phi\big|$. Такие векторы называются "*бра*", в отличие от исходных "*кет*" векторов. Эти названия происходят от двух частей английского слова bracket (скобка) и были придуманы Дираком. Между исходным гильбертовым пространством и ему сопряженным существует взаимно-однозначное соответствие. Это соответствие, по аналогии с сопряжением матричных столбиков, можно записать в виде $\big|\Psi\big\rangle^+ = \big\langle\Psi\big|$, или $\big\langle\Psi\big|^+ = \big|\Psi\big\rangle$. В результате скалярное произведение является как бы произведением вектора из сопряженного пространства и вектора из исходного: $\big\langle\Psi\big|\Phi\big\rangle = \big\langle\Psi\big|\big|\Phi\big\rangle$, где для краткости убирается одна вертикальная черта.

• По аналогии с матрицами, эрмитовое сопряжение оператора определяется следующим образом (обозначаем его крестиком):

$$\big\langle\Psi|\hat{A}^{+}|\Phi\big\rangle = \big\langle\Phi|\hat{A}|\Psi\big\rangle^{*}, \tag{9.103}$$

где Ψ и Φ – *произвольные* векторы гильбертового пространства, а звездочка – комплексное сопряжение. Из определения следуют следующие свойства эрмитового сопряжения:

$$(\hat{A}^{+})^{+} = \hat{A}, \qquad (\hat{A}\hat{B})^{+} = \hat{B}^{+}\hat{A}^{+}, \qquad \big\langle\Psi|\hat{A}^{+}\hat{A}|\Psi\big\rangle \geqslant 0. \tag{9.104}$$

Первое доказывается элементарно, а для доказательства остальных необходимо ($\lessdot$ H_{161}) использовать принцип суперпозиции (см. ниже).

Если эрмитовое сопряжение оператора $\hat{A}^{+}$ совпадает с $\hat{A}$, то такой оператор называется *эрмитовым* или *самосопряженным*. В частности, единичный оператор $\hat{A} = \hat{1}$ в силу (9.101) является эрмитовым: $\hat{1}^{+} = \hat{1}$.

Собственные значения эрмитовых операторов *действительны*, а собственные векторы *ортогональны*. Первое утверждение следует из определения сопряжения (9.103), если в качестве состояний Ψ и Φ взять собственный вектор оператора $\hat{A}$:

$$\big\langle a|\hat{A}|a\big\rangle = \big\langle a|\hat{A}|a\big\rangle^{*} \qquad => \qquad a\big\langle a|a\big\rangle = a^{*}\big\langle a|a\big\rangle,$$

где учтена эрмитовость $\hat{A}^{+} = \hat{A}$, уравнение $\hat{A}|a\big\rangle = a|a\big\rangle$ и (9.101). Таким образом $a^{*} = a$. Так как физически измеримые величины действительны, соответствующие им операторы всегда *эрмитовы*. Например, матрица спина эрмитова (так как эрмитовы матрицы Паули).

Утверждение об ортогональности, вообще говоря справедливо для собственных векторов $|a\big\rangle$ и $|a'\big\rangle$, соответствующих *различным* собственным значениям. Действительно, запишем:

$$\big\langle a'|\hat{A}|a\big\rangle = a\big\langle a'|a\big\rangle, \qquad \big\langle a|\hat{A}|a'\big\rangle = a'\big\langle a|a'\big\rangle.$$

Беря комплексное сопряжение второго соотношения ($a'^{*} = a'$, $\hat{A}^{+} = \hat{A}$ и $\big\langle a|a'\big\rangle^{*} = \big\langle a'|a\big\rangle$) и вычитая из первого, получаем $(a - a')\big\langle a'|a\big\rangle = 0$. Таким образом, если $a \neq a'$ – скалярное произведение собственных векторов равно нулю. Так как векторы обычно нормируются на единицу: $\big\langle a|a\big\rangle = 1$, то для собственных векторов, соответствующих различным собственным значениям, записывается условие *ортонормированности*:

$$\big\langle a|a'\big\rangle = \delta_{aa'},$$

где $\delta_{aa'}$ – символ Кронекера для дискретного спектра (дискретные собственные значения) и $\delta-$функция Дирака $\delta(a - a')$ для непрерывного спектра (непрерывное множество собственных значений).

• Вектор гильбертового пространства соответствует тому или иному *состоянию* квантовой системы. Определяя состояние при помощи некоторого вектора $\big|\Psi\big\rangle$, мы полностью характеризуем данную систему. В классической механике для однозначного определения состояния системы, состоящей из частиц, требуется знание текущего значения координат и скоростей этих частиц. В квантовой теории вместо этого нам необходим вектор гильбертового пространства. Обычно термины "вектор" и "состояние" используются как синонимы.

Произвольный вектор $\big|\Psi\big\rangle$ может быть представлен в виде суммы собственных векторов $\big|a\big\rangle$ некоторого оператора $\hat{A}$ по всем его собственным значениям (*принцип суперпозиции*):

$$\big|\Psi\big\rangle = \sum_a \big|a\big\rangle \big\langle a\big|\Psi\big\rangle, \tag{9.105}$$

где комплексные коэффициенты разложения мы обозначили как $\big\langle a\big|\Psi\big\rangle$. Действительно, если вычислить скалярное произведение с фиксированным собственным вектором оператора $\hat{A}$ (умножив равенство слева на $\big\langle a'\big|$), то под суммой получится символ Кронекера $\big\langle a'\big|a\big\rangle = \delta_{aa'}$ (для дискретного спектра). Проводя суммирование мы приходим к тождеству: $\big\langle a'\big|\Psi\big\rangle = \big\langle a'\big|\Psi\big\rangle$. Для непрерывного спектра вместо суммы будет интеграл по da, а символ Кронекера заменится на $\delta-$функцию Дирака. Заметим, что сумму:

$$\sum_a \big|a\big\rangle\big\langle a\big| = \hat{1} \tag{9.106}$$

можно рассматривать как единичный оператор. Его действие на произвольный вектор $\big|\Psi\big\rangle$ в соответствии с (9.105) снова даёт этот вектор.

Квадрат модуля коэффициентов $|\big\langle a\big|\Psi\big\rangle|^2$ равен *вероятности* обнаружить значение a при измерении физической величина A в системе, находящейся в состоянии $\big|\Psi\big\rangle$. Остановимся на этом ключевом для квантовой теории утверждении. Измеряя у электрона проекцию спина на ось x, мы получаем $\hbar/2$ или $-\hbar/2$. Отберем электроны у которых $S_x = \hbar/2$. Тем самым мы подготовим *ансамбль* микрообъектов, находящихся в одном и том же *состоянии*. Это состояние характеризуется собственным вектором $\big|S_x^+\big\rangle$. Если снова измерить значение S_x у любого электрона из этого ансамбля, то всегда будет получаться $\hbar/2$. Иная ситуация наблюдается, если у этих электронов измерить значение проекции спина S_z. В половине случаев получится $\hbar/2$, а во второй половине $-\hbar/2$. Таким образом, в состоянии $\big|S_x^+\big\rangle$ состояния $\big|S_z^+\big\rangle$ и $\big|S_z^-\big\rangle$ находятся равновероятно. Математически это связно с тем, что коэффициенты разложения в (9.100) равны $\big\langle S_z^+\big|S_x^+\big\rangle = \big\langle S_z^-\big|S_x^+\big\rangle = 1/\sqrt{2}$. Квадрат их модуля равен $1/2$.

• Если квантовая система находится в состоянии $|\Psi\rangle$, которое не является собственным вектором оператора $\hat{A}$, то при измерении величины A каждый раз будут получаться различные значения a (принадлежащие множеству собственных значений оператора $\hat{A}$). Одни из этих значений будут получаться чаще, другие – реже. Зная соответствующие вероятности можно вычислить среднее значение физической величины A в состоянии $|\Psi\rangle$. Такое среднее обозначается тремя эквивалентными способами:

$$\langle\Psi|\hat{A}\,|\Psi\rangle = \langle\,\hat{A}\,\rangle = \bar{A}.$$

В первой записи оператор $\hat{A}$ действует на вектор $|\Psi\rangle$. В результате получается новый вектор $\hat{A}|\Psi\rangle$, скалярное произведение которого на исходный вектор состояния $|\Psi\rangle$ дает среднее значение. Второе обозначение для среднего используется когда известно о каком состоянии идет речь (или оно произвольное). Тогда обозначение состояния Ψ убирается и остаются только угловые скобки вокруг оператора. Наконец, среднее можно обозначать чертой над физической величиной. Так как среднее определяется при помощи скалярного произведения – это число, причем для эрмитовых операторов всегда действительное.

Убедимся, что подобные бра-кет обозначения действительно дают значение для среднего. Для этого разложим правый вектор в ряд по собственным значениям оператора $\hat{A}$:

$$\langle\Psi|\hat{A}\,|\Psi\rangle = \sum_a \langle\Psi|\hat{A}|a\rangle\,\langle a|\Psi\rangle = \sum_a a\langle\Psi|a\rangle\,\langle a|\Psi\rangle = \sum_a a|\langle a|\Psi\rangle|^2,$$

где во втором слагаемом мы воспользовались уравнением на собственные значения $\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$ и вынесли a за скобки (линейность скалярного произведения). Наконец в последнем равенстве применено свойство (9.101). В результате получилась сумма по всем значениям a физической величины A, умноженной на вероятности этого значения $|\langle a|\Psi\rangle|^2$. Это по определению и есть среднее значение. Естественно, суммарная вероятность обнаружить любое значение величины a должна равняться единице. Повторяя вычисления для нормы вектора, имеем:

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \sum_a |\langle a|\Psi\rangle|^2 = 1.$$

Именно из этих соображений векторы состояний нормируют на единицу. Если состояние не нормировано, то среднее необходимо вычислять по формуле $\langle\Psi|\hat{A}\,|\Psi\rangle/\langle\Psi|\Psi\rangle$.

• Если двум физическим величинам A и B соответствуют операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$, которые не коммутируют друг с другом, то эти величины не могут быть одновременно измерены. Этот факт выражается при помощи *соотношения неопределенностей*. Пусть:

$$[\hat{A},\, \hat{B}] = \imath \hat{C} \tag{9.107}$$

и система находится в некотором состоянии $|\Psi\rangle$. В этом состоянии средние значения физических величин равны:

$$\bar{A} = \langle \Psi|\hat{A}|\Psi\rangle, \qquad \bar{B} = \langle \Psi|\hat{B}|\Psi\rangle.$$

Введем операторы "отклонения от среднего" $\Delta\hat{A} = \hat{A} - \bar{A}$ и аналогично для $\Delta\hat{B}$. Вычислим среднее, зависящее от действительного числа α:

$$I(\alpha) = \big\langle (\alpha\Delta\hat{A} + \imath\Delta\hat{B})(\alpha\Delta\hat{A} - \imath\Delta\hat{B})\big\rangle = \alpha^2\big\langle (\Delta\hat{A})^2\big\rangle + \alpha\langle \hat{C}\rangle + \big\langle (\Delta\hat{B})^2\big\rangle \geqslant 0,$$

где второе равенство получено перемножением скобок (порядок операторов важен!) при помощи (9.107). Это выражение неотрицательно в силу последнего соотношения (9.104). Найдём его наименьшее значение, взяв производную по параметру α ($\lessdot$ H$_{162}$):

$$\big\langle (\hat{A} - \bar{A})^2\big\rangle \big\langle (\hat{B} - \bar{B})^2\big\rangle \geqslant \frac{1}{4}\langle \hat{C}\rangle^2. \tag{9.108}$$

Средние, стоящие слева, имеют смысл квадратов ошибок измерений величин A и B. Математически это *дисперсии* или среднеквадратичные отклонения от среднего:

$$\big\langle \Psi\big|(\hat{A} - \bar{A})^2\big|\Psi\big\rangle = \sum_a \big\langle \Psi\big|(\hat{A} - \bar{A})^2\big|a\big\rangle\big\langle a\big|\Psi\big\rangle = \sum_a (a - \bar{A})^2 \,\big|\big\langle a\big|\Psi\big\rangle\big|^2.$$

Чем большие отклонения от среднего значения $\bar{A}$ при измерении величины A получаются результаты, тем большим будет значение $\big\langle (\hat{A} - \bar{A})^2\big\rangle$. Отметим, что $\big\langle (\hat{A} - \bar{A})^2\big\rangle = \big\langle \hat{A}^2\big\rangle - \bar{A}^2$ ($\lessdot$ H$_{163}$).

В классической механике также существуют ошибки измерений значений физических величин. Однако их всегда можно сделать сколь угодно малыми. В квантовой теории, если $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ и среднее коммутатора этих операторов отлично от нуля, то произведение дисперсий (квадратов ошибок измерений) всегда больше нуля. Если мы уменьшаем ошибку измерения одной величины, то вырастает ошибка в измерениях другой и наоборот. Подчеркнем, что соотношение неопределенностей – это статистическое утверждение. Оно не применимо для однократных измерений. Среднее значение и дисперсия определяется по совокупности измерений, а не по одному измерению.

• В нерелятивистской квантовой механике координате и импульсу частицы соответствуют операторы $\hat{x}$ и $\hat{p}$. Они не коммутируют друг с другом и постулируется что:

$$[\hat{x},\, \hat{p}] = \imath\,\hbar. \tag{9.109}$$

Для движения в трехмерном пространстве, отличные от нуля коммутаторы будут только для проекций операторов на одну ось $[\hat{x}_i,\, \hat{p}_j] = \imath\hbar\,\delta_{ij}$. Кроме этого $[\hat{x}_i,\, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i,\, \hat{p}_j] = 0$. Используя соотношение неопределенностей (9.108), для ошибок измерений $\Delta x = \left\langle (\Delta\hat{x})^2 \right\rangle^{1/2}$ (без шляпки!), получаем *соотношение неопределенности Гейзенберга*:

$$\Delta x\,\Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}.$$

Если в данном состоянии координата частицы определена точно, т.е. $\Delta x = 0$, то значение её импульса будет произвольным ($\Delta p = \infty$). Говорят, что координата и импульс одновременно (совместно) не измеримы. В частности это означает, что не существует состояния которое одновременно являлось бы собственным состоянием обоих операторов $\hat{x}$ и $\hat{p}$.

В *базисе* собственных векторов некоторого оператора: $\hat{A}\big|a\big\rangle = a\big|a\big\rangle$, любые операторы можно записать в матричном виде. По определению, матричное представление оператора $\hat{B}$ имеет вид $\big\langle a\big|\hat{B}\big|a'\big\rangle$. Если спектр дискретный – это обычная матрица с индексами $B_{aa'}$ (возможно бесконечномерная, если спектр неограничен). Для непрерывного спектра произведение “непрерывных” матриц определяется при помощи интегрирования (а не суммирования) по непрерывному индексу. Действие оператора на вектор $\hat{B}\big|\Psi\big\rangle = \big|\Phi\big\rangle$ в матричном виде записывается так:

$$\big\langle a\big|\Phi\big\rangle = \big\langle a\big|\hat{B}\big|\Psi\big\rangle = \sum_{a'}\big\langle a\big|\hat{B}\big|a'\big\rangle\big\langle a'\big|\Psi\big\rangle.$$

Если в качестве базиса выбираются собственные векторы оператора координаты $\hat{x}\big|x\big\rangle = x\big|x\big\rangle$ с непрерывным спектром, то это называется *координатным представлением*. “Непрерывная” матрица оператора координаты в этом базисе диагональна и имеет вид $x_{xx'} = \big\langle x|\hat{x}|x'\big\rangle = x\delta(x-x')$. В качестве упражнения ($\lessdot$ H$_{164}$) стоит проверить, что из коммутатора (9.109) следует, что $\big\langle x|\hat{p}|x'\big\rangle = -\imath\hbar\,d\delta(x-x')/dx$. При действии такой матрицы на столбик $\big\langle x|\Psi\big\rangle$ функция Дирака снимает суммирование (интегрирование) и оператор импульса можно рассматривать как дифференциальный оператор $\hat{p} = -\imath\hbar\,d/dx$, действующий в пространстве комплексных функций $\Psi(x) = \big\langle x|\Psi\big\rangle$, часто называемых *волновыми функциями*. Квадрат их модуля $|\Psi(x)|^2$ равен плотности вероятности ($|\Psi(x)|^2\,dx$ – вероятность) обнаружить частицу в точке x. Стоит ($\lessdot$ H$_{165}$) найти собственные векторы (функции) оператора импульса $\hat{p} = -\imath\hbar\,d/dx$.

9.10 Кванты поля *

Квантовая теория поля – это объединение релятивистской и квантовой механики. Она успешно описывает множество явлений микромира в которых существенны как большие скорости, так и квантовые эффекты.

Рассмотрим действительное скалярное поле, динамика которого определяется лагранжианом $\mathcal{L} = ((\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2)/2$. Энергия поля (которую мы будем обозначать буквой H) и импульс равны (стр. 496):

$$H = \frac{1}{2}\int (\dot{\varphi}^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2)\, d^3\mathbf{x}, \qquad \mathbf{P} = -\int \dot{\varphi}\,\nabla\varphi\, d^3\mathbf{p},$$

где точка над функцией обозначает частную производную по времени. Решение уравнений поля $(\partial^2 + m^2)\varphi = 0$ можно записать в виде фурье-интеграла. Повторя рассуждения для электромагнитного (стр. 332) или спинорного (стр. 586) полей, имеем:

$$\varphi(\mathbf{x},\, t) = \int (a_{\mathbf{p}} e^{-\imath \mathrm{px}} + a^*_{\mathbf{p}} e^{\imath \mathrm{px}})\, \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\varepsilon_p}}, \tag{9.110}$$

где, как обычно, $\mathrm{p} = \{\varepsilon_p,\, \mathbf{p}\}$ и $\varepsilon_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Так как поле действительно ($\varphi^* = \varphi$), то амплитуды фурье разложения по положительным и отрицательным значениям $\pm\varepsilon_p$ связаны комплексным сопряжением. Подставляя фурье-разложение в полную энергию и импульс поля (стр. 588), получаем ($\lessdot\, \mathrm{H}_{166}$):

$$H = \int \varepsilon_p\, a^*_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}\, d^3\mathbf{p}, \qquad \mathbf{P} = \int \mathbf{p}\, a^*_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}\, d^3\mathbf{p}.$$

В квантовой теории энергии и импульсу должны соответствовать операторы. Поэтому заменим классические величины операторами, поставив над ними шляпки. Так как энергия и импульс зависят от фурье амплитуд разложения поля, то эти амплитуды также являются операторами (естественно и само поле φ – это оператор):

$$\hat{H} = \int \varepsilon_p\, \hat{a}^+_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}\, d^3\mathbf{p}, \qquad \hat{\mathbf{P}} = \int \mathbf{p}\, \hat{a}^+_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}\, d^3\mathbf{p},$$

где вместо звездочки комплексного сопряжения у оператора поставлен значок эрмитового сопряжения. Таким образом, в квантовой теории поля полевые функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$ становятся операторами $\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t)$. Эти операторы зависят от времени и точки в пространстве (фактически это множество операторов, "нумерующихся" при помощи различных значений $\mathbf{x}$).

• В квантовой теории поля постулируется, что операторы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}},\ \hat{a}^{+}_{\mathbf{k}}] = \hbar\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}), \qquad [\hat{a}_{\mathbf{p}},\ \hat{a}_{\mathbf{k}}] = [\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}},\ \hat{a}^{+}_{\mathbf{k}}] = 0. \tag{9.111}$$

Найдём при помощи (9.110) коммутатор оператора $\hat{\varphi}(\mathbf{x},t)$ и его производной по времени $\dot{\hat{\varphi}}(\mathbf{y},t)$ в различных точках пространства $[\hat{\varphi}(\mathbf{x},t),\ \dot{\hat{\varphi}}(\mathbf{y},t)]$:

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\varepsilon_p}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\varepsilon_k}}\, \imath\varepsilon_k \left([\hat{a}_{\mathbf{p}},\ \hat{a}^{+}_{\mathbf{k}}] e^{-\imath \mathrm{px}+\imath \mathrm{ky}} - [\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}},\ \hat{a}_{\mathbf{k}}] e^{\imath \mathrm{px}-\imath \mathrm{ky}} \right),$$

где $x^0 = y^0 = t$, опущены нулевые коммутаторы и множитель $\imath\varepsilon_k$ возник после взятия производной по времени. Подставляя первый коммутатор (9.111) и интегрируя по $d^3\mathbf{k}$ с δ-функцией Дирака, получаем:

$$[\hat{\varphi}(\mathbf{x},t),\ \dot{\hat{\varphi}}(\mathbf{y},t)] = \imath\hbar \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\, e^{\imath \mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = \imath\hbar\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Обозначив $\hat{\pi}(\mathbf{x},t) = \dot{\hat{\varphi}}(\mathbf{x},t)$ ($\hat{\pi}$ – это оператор, а не число $\pi = 3.14...$), получившийся коммутатор можно записать следующим образом:

$$[\hat{\varphi}(\mathbf{x},t),\ \hat{\pi}(\mathbf{y},t)] = \imath\hbar\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{9.112}$$

Это соотношение является обобщением коммутатора для координаты и импульса $[\hat{x}_i,\ \hat{p}_j] = \imath\hbar\,\delta_{ij}$, справедливого для точечной частицы в нерелятивистской квантовой механике. Действительно, в лагранжевом формализме импульс определяется следующим образом (стр. 432):

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial(m\dot{\mathbf{x}}^2/2)}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i.$$

Аналогично, в теории поля мы можем назвать *каноническим импульсом*:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial(\partial\varphi)^2}{\partial\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}.$$

Именно эта аналогия приводит к постулату (9.112). Постулировав (9.112) и выразив операторы фурье-разложения $\hat{a}_{\mathbf{p}}$, $\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}}$ через $\hat{\varphi}(\mathbf{x},t)$ и $\hat{\pi}(\mathbf{x},t)$, несложно ($\lessdot$ H$_{167}$) получить (9.111). Так как $[\hat{x}_i,\ \hat{x}_j] = [\hat{p}_i,\ \hat{p}_j] = 0$, то операторы поля в один момент времени должны коммутировать друг с другом (и аналогично канонические импульсы):

$$[\hat{\varphi}(\mathbf{x},t),\ \hat{\varphi}(\mathbf{y},t)] = 0, \qquad [\hat{\pi}(\mathbf{x},t),\ \hat{\pi}(\mathbf{y},t)] = 0. \tag{9.113}$$

Естественно подобная аналогия с нерелятивистской квантовой механикой является не единственной мотивировкой при выборе (9.112) и (9.113). Рассмотрим еще одну, связанную непосредственно с квантами поля.

• Вычислим коммутатор оператора $\hat{a}^+_{\mathbf{k}}$ и оператора Гамильтона $\hat{H}$, пользуясь тождеством $[\hat{A},\,\hat{B}\hat{C}] = [\hat{A},\,\hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A},\,\hat{C}]$, которое справедливо для любых трёх операторов:

$$[\hat{a}^+_{\mathbf{k}},\,\hat{H}] = \int \varepsilon_p\,[\hat{a}^+_{\mathbf{k}},\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}]\,d^3\mathbf{p} = \int \varepsilon_p\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}}[\hat{a}^+_{\mathbf{k}},\,\hat{a}_{\mathbf{p}}]\,d^3\mathbf{p} = -\varepsilon_k\hat{a}^+_{\mathbf{k}},$$

где в последнем равенстве операторы в коммутаторе переставлены местами (со знаком минус!) и вместо коммутатора подставлена δ-функция Дирака (9.111), которая убирает интеграл по $\mathbf{p}$. Далее в этом разделе мы используем систему единиц в которой не только фундаментальная скорость равна единице ($c = 1$), но и постоянная Планка ($\hbar = 1$). Аналогично вычисляется коммутатор с $a_{\mathbf{k}}$. Таким образом, переобозначая $\mathbf{k} \mapsto \mathbf{p}$, имеем:

$$[\hat{H},\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}}] = \varepsilon_p\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}}, \qquad\qquad [\hat{H},\,\hat{a}_{\mathbf{p}}] = -\varepsilon_p\,\hat{a}_{\mathbf{p}}.$$

Подействуем первым коммутатором на собственный вектор оператора энергии (гамильтониана) $\hat{H}\big|E\big\rangle = E\big|E\big\rangle$:

$$(\hat{H}\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}} - \hat{a}^+_{\mathbf{p}}\,\hat{H})|E\,\rangle = (\hat{H} - E)\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}}|E\,\rangle = \varepsilon_p\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}}|E\,\rangle$$

или

$$\hat{H}\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}}|E\,\rangle = (E + \varepsilon_p)\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}}|E\,\rangle\,.$$

Таким образом, оператор $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$, действуя на собственный вектор оператора энергии, снова даёт собственный вектор, который соответствует энергии, увеличенной на ε_p. Аналогично при действии $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$ на собственный вектор оператора импульса, его собственное значение увеличивается на $\mathbf{p}$. Энергия и импульс релятивистской частицы с массой m связаны следующим образом $\varepsilon_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Поэтому такие увеличения энергии и импульса можно интерпретировать как рождение частицы, движущейся с импульсом $\mathbf{p}$ и энергией ε_p. Соответственно оператор $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$ называется *оператором рождения частицы.* Те же вычисления с оператором $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ приведут к уменьшению энергии и импульса, поэтому его называют *оператором уничтожения частицы.*

Заметим, что $\varepsilon_p = \omega$ и $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ входят в произведение $\mathrm{xp} = \omega t - \mathbf{kx}$. По размерности это частота и волновой вектор (стр.304). Если восстановить константу $\hbar$, то изменение энергии равно $\hbar\omega$, а импульса $\hbar\mathbf{k}$. С этих формул началось создание квантовой механики (теория спектра излучения черного тела и фотоэффект). Любопытно, что фактически первыми изученными квантовыми явлениями были эффекты из квантовой теории поля, а не квантовой нерелятивистской механики.

Так как операторы $\hat{H}$ и $\hat{\mathbf{P}}$ коммутируют (коммутатор равен нулю), они имеют общие собственные векторы. Состояние с наинизшей энергией называется *вакуумом* и обозначается пустыми скобками $|\,\rangle$. Так как, по определению, энергию вакуума уменьшить нельзя, то действие на него оператора уничтожения не должно приводить к новым состояниям:

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}|\,\rangle = 0.$$

Соответственно $\hat{H}|\,\rangle = 0$, т.е. вакуум соответствует нулевой энергии системы. При действии на вакуум оператором рождения мы создаём *одночастичное состояние* с определённым импульсом и энергией:

$$|\,\mathbf{p}\,\rangle = \hat{a}^+_{\mathbf{p}}|\,\rangle\,.$$

Повторное действие оператором рождения дает *двухчастичное состояние*, которое описывает две частицы, с импульсами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$:

$$|\,\mathbf{k},\mathbf{p}\,\rangle = \hat{a}^+_{\mathbf{k}}\hat{a}^+_{\mathbf{p}}|\,\rangle\,.$$

Так как оператор $\hat{a}^+_{\mathbf{k}}$ коммутирует с $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$, то $|\,\mathbf{k},\mathbf{p}\,\rangle = |\,\mathbf{p},\mathbf{k}\,\rangle$, т.е. при перестановке частиц местами состояние не изменяется. Такая тождественность частиц соответствует *статистике Бозе*, а кванты скалярного поля называются *бозонами*.

Можно также ввести *оператор числа частиц*:

$$\hat{N} = \int \hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}\; d^3\mathbf{p}.$$

Он коммутирует с энергией и импульсом. Можно проверить ($\lessdot\,\mathrm{H}_{168}$), что

$$\hat{N}\,\big|\mathbf{p}\big\rangle = \big|\mathbf{p}\big\rangle, \qquad \hat{N}\,\big|\mathbf{p},\,\mathbf{k}\big\rangle = 2\big|\mathbf{p},\,\mathbf{k}\big\rangle$$

и т.д. В теории скалярного поля с лагранжианом в котором есть слагаемые типа φ^4, оператор числа частиц и энергии уже не будут коммутировать. В соответствии с соотношением неопределенности (стр. 608) это означает, что энергия и число частиц не могут быть одновременно измерены и в состоянии с определенной энергией число квантов *свободного* поля из которых “состоит” система неопределено. Таким образом, понятие составного объекта в квантовой теории поля претерпевает изменение, особенно существенное при сильном взаимодействии между частицами.

Отметим, что если при записи выражения для энергии в импульсном пространстве мы бы следили за порядком множителей, то вместо $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}$ получились бы выражения $(\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}^+_{\mathbf{p}})/2$. Перестановка операторов во втором слагаемом при этом приводит к бесконечной константе $\delta(\mathbf{0})$. Для свободного поля это не является проблемой, т.к. “нулевое” значение от которого отсчитывается энергия можно выбрать произвольным образом. Поэтому подобную константу просто отбрасывают.

• Аналогично действительному скалярному полю строится квантовая теория комплексного поля с лагранжианом $\mathcal{L} = (\partial^\mu \Psi^*)(\partial_\mu \Psi) - m^2\, \Psi^* \Psi$ (стр. 453). Фурье-разложение решений уравнения поля $(\partial^2 + m^2)\Psi = 0$ имеет вид:

$$\Psi = \int (\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-\imath \mathrm{px}} + \hat{b}^+_{\mathbf{p}} e^{\imath \mathrm{px}})\, \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\varepsilon_p}}.$$

Так как поле комплексное, то фурье-амплитуды, соответствующие двум знакам $\pm\varepsilon_p$ – это различные функции, которым в квантовой теории поля соответствуют различные операторы ($\hbar = 1$):

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}},\ \hat{a}^+_{\mathbf{k}}] = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}), \qquad [\hat{b}_{\mathbf{p}},\ \hat{b}^+_{\mathbf{k}}] = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}). \tag{9.114}$$

При этом остальные коммутаторы $[\hat{a}_{\mathbf{p}},\ \hat{a}_{\mathbf{k}}]$, $[\hat{a}_{\mathbf{p}},\ \hat{b}_{\mathbf{k}}]$ и т.д. равны нулю.

Энергия и импульс в импульсном пространстве имеют вид ($\lessdot\, \mathrm{H}_{169}$):

$$\hat{H} = \int \varepsilon_p\, (\hat{a}^+_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{b}^+_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}})\, d^3\mathbf{p}, \qquad \hat{\mathbf{P}} = \int \mathbf{p}\, (\hat{a}^+_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{b}^+_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}})\, d^3\mathbf{p}.$$

Повторяя вычисления, проделанные для действительного скалярного поля, мы приходим к коммутаторам

$$[\hat{H},\, \hat{a}^+_{\mathbf{p}}] = \varepsilon_p\, \hat{a}^+_{\mathbf{p}}, \qquad [\hat{H},\, \hat{b}^+_{\mathbf{p}}] = \varepsilon_p\, \hat{b}^+_{\mathbf{p}}.$$

Операторы $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$ и $\hat{b}^+_{\mathbf{p}}$ различны, поэтому из этих коммутаторов следует, что возможны два вида квантов поля. Их ассоциируют с частицами и античастицами. Они обладают одинаковой зависимостью энергии $\varepsilon_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ от импульса $\mathbf{p}$, однако имеют различный заряд. Действительно, комплексное поле является калибровочно инвариантным (симметрия лагранжиана $\Psi \mapsto e^{\imath\alpha}\Psi$), что приводит к сохраняющемуся заряду (см. компоненту J^0 в (7.59), стр. 453). Этот заряд в фурье-представлении имеет вид ($\lessdot\, \mathrm{H}_{170}$):

$$\hat{Q} = \int (\hat{a}^+_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} - \hat{b}^+_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}})\, d^3\mathbf{p}.$$

Это выражение похоже на операторы энергии и импульса. Однако знак минус приводит к тому, что при рождении частицы заряд увеличивается, а при рождении античастицы – уменьшается. В частности:

$$\hat{Q}\, \hat{a}^+_{\mathbf{p}} \big|\big\rangle = \hat{a}^+_{\mathbf{p}} \big|\big\rangle, \qquad \hat{Q}\, \hat{b}^+_{\mathbf{p}} \big|\big\rangle = -\hat{b}^+_{\mathbf{p}} \big|\big\rangle.$$

Операторы энергии $\hat{H}$, импульса $\hat{\mathbf{P}}$ и заряда $\hat{Q}$ коммутируют друг с другом, поэтому имеют общие собственные функции. Соответственно собственное значение заряда для одночастичного состояния $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\big|\big\rangle$ имеет значение $Q = 1$, а для состояния $\hat{b}^+_{\mathbf{p}}\big|\big\rangle$ – $Q = -1$.

Для свободного скалярного поля заряд является лишь абстрактным квантовым числом. Его физический смысл проявляется, когда рассматривается взаимодействие этого поля с другими полями. Например, в соответствии с принципом локальной калибровочной инвариантности, можно рассмотреть лагранжиан с векторным полем A^μ:

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \Psi^*)(\partial_\mu \Psi) - m^2\, \Psi^* \Psi - eJ^\mu A_\mu + e^2 A^\mu A_\mu \Psi^* \Psi - \frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

где $J^\mu = \imath(\Psi \partial^\mu \Psi^* - \Psi^* \partial^\mu \Psi)$ – ток скалярного поля, интеграл по всему пространству от нулевой компоненты которого равен заряду Q.

В квантовой теории поля калибровочное поле A^μ также является оператором, а его кванты соответствуют фотонам. Так как это поле действительно, оно не имеет заряда и его частицы и античастицы совпадают (аналогично действительному скалярному полю). Массового члена типа $\mu^2 \mathrm{A}^2$ в лагранжиане свободного электромагнитного поля $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}/16\pi$ нет. Поэтому фотоны не имеют массы и их энергия равна $\varepsilon_p = |\mathbf{p}|$.

Член в лагранжиане $J^\mu A_\mu$ описывает взаимодействие частиц и античастиц (квантов скалярного поля) с фотонами. На квантовом уровне частицы и античастицы как бы “обмениваются” фотонами. В результате этого возникает наблюдаемое (в том числе и на классическом уровне) взаимодействие положительных и отрицательных зарядов.

Для описания этих и других эффектов используют различные математические методы. Наиболее разработанной является теория возмущений по константе e, в том случае когда она мала. Если $e = 0$ имеются несвязанные свободные поля, квантование которых мы рассмотрели в этом разделе. Разложение в ряд по e различных физических величин позволяет описать многие эффекты, наблюдаемые в мире элементарных частиц с очень высокой точностью. В первую очередь это относится к квантовой электродинамике в которой $e^2/\hbar c \approx 1/137$.

Выше упоминалось, что при квантовании свободного поля в выражении для энергии возникает аддитивная бесконечная константа. Если для свободного поля это не проблема, то при построении теории взаимодействующих полей подобные бесконечности уже доставляют немало хлопот. Тем не менее, развиты методы позволяющие получать осмысленные конечные выражения для физических величин не смотря на появление таких бесконечностей.

Кванты комплексного скалярного поля Ψ и векторного поля A^μ, как и действительного скалярного поля φ являются бозонами. Перейдем теперь к квантованию спинорного поля, кванты которого имеют другую природу, являясь *фермионами*.

• Квантование биспинорного дираковского поля, рассмотренного в этой главе, отличается от поля скалярного. Запишем в импульсном пространстве (стр. 589) энергию и импульс. При этом будем следить за порядком произведения операторов рождения и уничтожения (по $s = \pm 1$ сумма):

$$\hat{H} = \int \varepsilon_p \, (\hat{a}^+_{s\mathbf{p}} \hat{a}_{s\mathbf{p}} - \hat{b}_{s\mathbf{p}} \hat{b}^+_{s\mathbf{p}}) \, d^3\mathbf{p}, \qquad \hat{\mathbf{P}} = \int \mathbf{p} \, (\hat{a}^+_{s\mathbf{p}} \hat{a}_{s\mathbf{p}} - \hat{b}_{s\mathbf{p}} \hat{b}^+_{s\mathbf{p}}) \, d^3\mathbf{p}.$$

Эти выражения отличаются от скалярного поля знаком минус перед вторыми слагаемыми под интегралом. Оператор заряда, наоборот, вместо минуса перед операторами античастиц имеет знак плюс:

$$\hat{Q} = \int (\hat{a}^+_{s\mathbf{p}} \hat{a}_{s\mathbf{p}} + \hat{b}_{s\mathbf{p}} \hat{b}^+_{s\mathbf{p}}) \, d^3\mathbf{p}.$$

Если для операторов $\hat{a}_{s\mathbf{p}}$ и $\hat{b}_{s\mathbf{p}}$ мы выберем коммутационные соотношения подобные (9.114), то получатся физически неудовлетворительные результаты. Античастицы будут иметь положительный заряд и *отрицательную* энергию. Решением этой проблемы является постулирование следующих *антикоммутационных* соотношений

$$\{\hat{a}_{s\mathbf{p}}, \; \hat{a}^+_{\lambda\mathbf{k}}\} = \delta_{s\lambda} \, \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}), \qquad \{\hat{b}_{s\mathbf{p}}, \; \hat{b}^+_{\lambda\mathbf{k}}\} = \delta_{s\lambda} \, \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}), \tag{9.115}$$

где фигурные скобки обозначают антикоммутатор $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$. Аналогично антикоммутируют на ноль однотипные операторы:

$$\{\hat{a}_{s\mathbf{p}}, \; \hat{a}_{\lambda\mathbf{k}}\} = 0, \qquad \{\hat{b}_{s\mathbf{p}}, \; \hat{b}_{\lambda\mathbf{k}}\} = 0 \tag{9.116}$$

и их эрмитовые спряжения. Посмотрим к чему приводят такие правила. При перестановке антикоммутирующих величин появляется знак минус. Поэтому (отбрасывая для энергии бесконечную константу) получаем:

$$\hat{H} = \int \varepsilon_p \, (\hat{a}^+_{s\mathbf{p}} \hat{a}_{s\mathbf{p}} + \hat{b}^+_{s\mathbf{p}} \hat{b}_{s\mathbf{p}}) \, d^3\mathbf{p}, \qquad \hat{\mathbf{P}} = \int \mathbf{p} \, (\hat{a}^+_{s\mathbf{p}} \hat{a}_{s\mathbf{p}} + \hat{b}^+_{s\mathbf{p}} \hat{b}_{s\mathbf{p}}) \, d^3\mathbf{p}$$

и

$$\hat{Q} = \int (\hat{a}^+_{s\mathbf{p}} \hat{a}_{s\mathbf{p}} - \hat{b}^+_{s\mathbf{p}} \hat{b}_{s\mathbf{p}}) \, d^3\mathbf{p}.$$

Эти выражения выглядят уже более физичными. Чтобы убедиться, что возникают правильные собственные значения для энергии-импульса и заряда необходимо вычислить коммутаторы типа $[\hat{H}, \, \hat{a}^+_{s\mathbf{p}}]$ и $[\hat{H}, \, \hat{b}^+_{s\mathbf{p}}]$. Делается это аналогично скалярному полю, однако при этом необходимо пользоваться тождеством

$$[\hat{A}, \, \hat{B}\hat{C}] = \{\hat{A}, \, \hat{B}\} \, \hat{C} - \hat{B} \, \{\hat{A}, \, \hat{C}\},$$

в котором справа стоят не коммутаторы, а антикоммутаторы. Это тождество проверяется раскрытием определений коммутатора и антикоммутатора в левой и правой части.

Проводя несложные вычисления, получаем как и раньше:

$$[\hat{H},\,\hat{a}^+_{s\mathbf{p}}] = \varepsilon_p\,\hat{a}^+_{s\mathbf{p}}, \qquad\qquad [\hat{H},\,\hat{b}^+_{s\mathbf{p}}] = \varepsilon_p\,\hat{b}^+_{s\mathbf{p}}.$$

Аналогичные коммутаторы справедливы для оператора импульса $\hat{\mathbf{P}}$:

$$[\hat{\mathbf{P}},\,\hat{a}^+_{s\mathbf{p}}] = \mathbf{p}\,\hat{a}^+_{s\mathbf{p}}, \qquad\qquad [\hat{\mathbf{P}},\,\hat{b}^+_{s\mathbf{p}}] = \mathbf{p}\,\hat{b}^+_{s\mathbf{p}}.$$

Для оператора заряда $\hat{Q}$ в коммутаторе с $\hat{b}^+_{s\mathbf{p}}$ в правой части получится знак минус:

$$[\hat{Q},\,\hat{a}^+_{s\mathbf{p}}] = \hat{a}^+_{s\mathbf{p}}, \qquad\qquad [\hat{Q},\,\hat{b}^+_{s\mathbf{p}}] = -\hat{b}^+_{s\mathbf{p}}.$$

Повторяя рассуждения для скалярного поля, мы приходим к выводу, что оператор $\hat{a}^+_{s\mathbf{p}}$ является оператором рождения частицы с положительной энергией и зарядом, а оператор $\hat{b}^+_{s\mathbf{p}}$ рождает античастицу с положительной энергией и отрицательным зарядом.

Антикоммутирование операторов рождения приводит к тому, что перестановка местами двух частиц меняет знак у вектора состояния:

$$\big|s,\mathbf{p};\,\lambda\,,\mathbf{k}\big\rangle = \hat{a}^+_{s\mathbf{p}}\hat{a}^+_{\lambda\mathbf{k}}\big|\big\rangle = -\hat{a}^+_{\lambda\mathbf{k}}\hat{a}^+_{s\mathbf{p}}\big|\big\rangle = -\big|\lambda,\mathbf{k};\,s,\mathbf{p}\big\rangle.$$

Подобная “антисимметричная тождественность” для системы свободных квантов биспинорного поля приводит к статистике Ферми и такие частицы называют *фермионами.*

Используя антикоммутатор для операторных фурье-коэффициентов, можно найти как антикоммутирует биспинорное поле $\psi(\mathbf{x},t)$ (стр. 587):

$$\hat{\psi}(\mathbf{x},t) = \int \big(\hat{a}_{s\mathbf{p}}\,A_{s,\mathbf{p}}\,e^{-\imath \mathrm{p}\cdot \mathrm{x}} + \hat{b}^+_{s\mathbf{p}}\,B_{s,\mathbf{p}}\,e^{\imath \mathrm{p}\cdot \mathrm{x}}\big)\,\frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\varepsilon_p}}, \tag{9.117}$$

и его эрмитово сопряжение ψ^+:

$$\{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x},\,t),\,\hat{\psi}^+_\beta(\mathbf{y},\,t)\} = \delta_{\alpha\beta}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad\qquad \{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x},\,t),\,\hat{\psi}_\beta(\mathbf{y},\,t)\} = 0,$$

где явным образом выписаны спинорные индексы $\alpha,\beta = 1...4$. Обратим внимание, что в правой части разложения (9.117) операторами являются только $\hat{a}_{s\mathbf{p}}$ и $\hat{b}^+_{s\mathbf{p}}$. Остальные величины являются обычными функциями. Эрмитово сопряжение биспинорного поля, умноженное на мнимую единицу, является каноническим импульсом, так как:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = \frac{\partial(\bar{\psi}\gamma^\nu \imath\partial_\nu\psi)}{\partial\dot{\psi}} = \imath\psi^+.$$

Однако этот импульс антикоммутирует с полевым оператором, а не коммутирует, как это было в случае скалярного поля.

9.11 Грассмановы переменные

• Классические поля являются первым шагом к построению квантовой теории поля, лежащей в основе теории элементарных частиц. Опыт показывает, что все частицы делятся на два класса: бозоны и фермионы. Бозоны имеют целый спин (в долях постоянной Планка), а фермионы – полуцелый. У них различные статистические свойства: несколько тождественных бозонов могут находится в одном состоянии, тогда как несколько фермионов – нет.

Как мы видели выше, бозонам соответствуют квантовые скалярные и векторные (а также тензорные) поля. Например, коммутационные соотношения ($[\hat{A},\ \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$) для фурье-коэффициентов действительного скалярного поля имеют вид:

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}},\ \hat{a}_{\mathbf{k}}] = 0, \qquad [\hat{a}^+_{\mathbf{p}},\ \hat{a}^+_{\mathbf{k}}] = 0, \qquad [\hat{a}_{\mathbf{p}},\ \hat{a}^+_{\mathbf{k}}] = \hbar\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}),$$

где $\hbar$ – постоянная Планка. В релятивистской классической (не квантовой) теории необходимо положить $\hbar \to 0$. В этом пределе все коммутаторы равны нулю, и операторы поля переходят в "обычные" функции. При записи произведения таких функций можно не учитывать их порядок, считая, что $AB = BA$. Таким образом, классическая теория бозонных полей является теорией вещественных или комплексных функций, удовлетворяющих тем или иным дифференциальным уравнениям.

Несколько иная ситуация со спинорными полями, описывающими (после квантования) фермионы. До сих пор мы рассматривали спиноры и биспиноры как обычные 2-х и 4-х компонентные функции определенным образом изменяющиеся при преобразованиях Лоренца. В квантовой теории поля им соответствуют операторы. Однако в отличии от бозонных полей, спинорные (фермионные) операторы удовлетворяют антикоммутационным ($\{\hat{A},\ \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$) соотношениям. Например, коэффициенты фурье-разложения антикоммутируют следующим образом:

$$\{\hat{a}_{s\mathbf{p}},\ \hat{a}^+_{s'\mathbf{k}}\} = \hbar\,\delta_{ss'}\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}), \qquad \{\hat{b}_{s\mathbf{p}},\ \hat{b}^+_{s'\mathbf{k}}\} = \hbar\,\delta_{ss'}\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}).$$

Даже в классическом пределе $\hbar \to 0$ эти антикоммутаторы остаются антикоммутаторами. Подобные антикоммутирующие величины называются *грассмановыми.*

Таким образом, *классическая* теория спинорного поля должна строится как теория антикоммутирующих грассмановых функций, перестановка которых в их произведении приводит к появлению знака минус: $AB = -BA$.

• Рассмотрим сначала конечный набор из n величин $\psi_1, ..., \psi_n$, попарно антикоммутирующих друг с другом:

$$\psi_i\psi_j = -\psi_j\psi_i.$$

Понятно, что квадрат такой грассмановой величины равен нулю: $\psi^2 = 0$. Это приводит к тому, что многие обычные функции, которые могут быть разложены в ряд Тейлора, оказываются конечными простыми полиномами грассмановой величины:

$$\exp(\psi) = 1 + \psi, \qquad \ln(1+\psi) = \psi, \qquad \sin(\psi) = \psi, \qquad \cos(\psi) = 1.$$

Аналогично обрываются ряды функций нескольких переменных. Так, для произвольной функции двух грассмановых величин, имеем:

$$f = f(\psi_1, \psi_2) = f_0 + f_1\,\psi_1 + f_2\,\psi_2 + f_{12}\,\psi_1\psi_2.$$

Эта функция определяется четверкой комплексных коэффициентов разложения f_0, f_1, f_2 и f_{12}. При перемножении таких функций:

$$fg = (f_0 + f_1\,\psi_1 + f_2\,\psi_2 + f_{12}\,\psi_1\psi_2)(g_0 + g_1\,\psi_1 + g_2\,\psi_2 + g_{12}\,\psi_1\psi_2)$$

снова получается полином второй степени. Действительно, перемножая, скобки и отбрасывая $\psi_1^2 = \psi_2^2 = 0$, имеем:

$$fg = f_0g_0 + (f_0g_1 + f_1g_0)\psi_1 + (f_0g_2 + f_2g_0)\psi_2 + (f_0g_{12} + f_1g_2 - f_2g_1 + f_{12}g_0)\psi_1\psi_2.$$

Обратим внимание на знак минус в последнем слагаемом, возникшем при упорядочивании индексов: $\psi_2\psi_1 = -\psi_1\psi_2$. Для однозначности описания функции такое упорядочивание предполагается всегда. В общем случае, ряд для функции n грассмановых величин $f = f(\psi_1, ..., \psi_n)$ записывается следующим образом:

$$f = f_0 + \sum_i f_i\,\psi_i + \sum_{i<j} f_{ij}\,\psi_i\psi_j + \sum_{i<j<k} f_{ijk}\,\psi_i\psi_j\psi_k + ... + f_{1..n}\psi_1, ..., \psi_n.$$

Такая функция n переменных определяется 2^n коэффициентами разложения ($\lessdot$ H_{171}).

Произведения четного числа грассмановых величин всегда коммутируют друг с другом:

$$(\psi_1\psi_2)(\psi_3\psi_4) = -\psi_1\psi_3\psi_2\psi_4 = \psi_1\psi_3\psi_4\psi_2 = -\psi_3\psi_1\psi_4\psi_2 = (\psi_3\psi_4)(\psi_1\psi_2).$$

Произведения нечетного числа величин – антикоммутируют. Четного и нечетного числа – коммутируют:

$$(\psi_1\psi_2\psi_3)(\psi_4\psi_5\psi_6) = -(\psi_4\psi_5\psi_6)(\psi_1\psi_2\psi_3), \qquad \psi_1(\psi_2\psi_3) = (\psi_2\psi_3)\psi_1.$$

Можно сказать, что произведение четного числа грассмановых величин становится “обычным” алгебраическим объектом, в то время как нечетное произведение остается грассмановым.

• Для определения частных производных функций по грассмановым переменным необходимы некоторые ухищрения. Естественно считать, что если в произведении от которого берется производная по ψ_1 нет этой величины, то производная равна нулю, а производная от самой величины равна 1:

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial\psi_1} = \frac{\partial(\psi_2\psi_3)}{\partial\psi_1} = 0, \qquad\qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial\psi_1} = 1.$$

Однако производная по ψ_1 от произведения $\psi_1\psi_2$ требует доопределения. Действительно, если при взятии производной просто вычеркнуть из выражения переменную дифференцирования, то можно получить противоречие. Например, беря таким образом производную по ψ_1 от антикоммутатора $\psi_1\psi_2 + \psi_2\psi_1 = 0$ мы получим $2\psi_2 = 0$. Для избежания подобных проблем вводят следующее правило:

> При взятии производной, сначала необходимо переменную дифференцирования перенести влево, а только затем её вычеркнуть.

Такую производную называют *производной слева*. Приведем несколько примеров:

$$\frac{\partial(\psi_1\psi_2)}{\partial\psi_1} = \psi_2, \qquad \frac{\partial(\psi_1\psi_2)}{\partial\psi_2} = -\frac{\partial(\psi_2\psi_1)}{\partial\psi_2} = -\psi_1.$$

Теперь производная от антикоммутатора $\psi_1\psi_2 + \psi_2\psi_1 = 0$ даст в обоих частях равенства ноль. Аналогично определяется *производная справа*, которая действует справа налево:

> При взятии производной справа, необходимо переменную дифференцирования перенести вправо, а затем её вычеркнуть.

Производная справа помечается стрелочкой. Например:

$$(\psi_1\psi_2)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\psi_2} = \psi_1, \qquad (\psi_1\psi_2)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\psi_1} = -(\psi_2\psi_1)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\psi_1} = -\psi_2.$$

Грассмановы величины не являются обычными числами для которых существует понятие малости. Тем не менее, производную можно записать аналогично обычным функциям в виде разности. Например, введем "малую" грассманову величину $\Delta\psi_2$ и возьмем производную слева от $\psi_1\psi_2$ по ψ_2:

$$\Delta\psi_2^{-1}\big(\psi_1(\psi_2 + \Delta\psi_2) - \psi_1\psi_2\big) = \Delta\psi_2^{-1}\psi_1\Delta\psi_2 = -\psi_1\Delta\psi_2^{-1}\Delta\psi_2 = -\psi_1,$$

где предполагается, что $\Delta\psi_2^{-1}$ является *обратной слева* к $\Delta\psi_2$, так, что справедливо соотношение: $\Delta\psi_2^{-1}\,\Delta\psi_2 = 1$. Аналогично можно провести вычисления для производной справа.

Одноименные производные (левые с левыми или правые с правыми) антикоммутируют друг с другом:

$$\frac{\partial}{\partial\psi_1}\frac{\partial}{\partial\psi_2}\,f=-\frac{\partial}{\partial\psi_2}\frac{\partial}{\partial\psi_1}\,f,\qquad\qquad f\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\psi_1}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\psi_2}=-f\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\psi_2}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\psi_1}.$$

Функция f для левых производных записывается, как обычно справа от значков производных. В случае с правыми производными, её можно записывать как слева, так и справа. Стрелочка над производной всегда напоминает о какой производной идёт речь. В частности разноименные производные коммутируют друг с другом. Это можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial\psi_1}\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\psi_2}\,f=\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\psi_2}\,\frac{\partial}{\partial\psi_1}\,f.$$

Все эти правила перестановок производных легко проверить для функции $f=\psi_1\psi_2$. Производя соответствующие переносы грассмановых величин ψ_i влево и вправо от выражения в которое они входят, можно проверить выполнимость правил перестановки производных и в общем случае. В качестве упражнения стоит вычислить повторные производные по ψ_1 и ψ_2 для функций $f=\psi_1\psi_2\psi_3$ и $f=\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4$.

Так как данная грассманова величина входит в произведение только один раз, повторная производная по одной и той же переменной всегда будет равна нулю.

Рассмотрим две грассмановы величины φ и ψ антикоммутирующие друг с другом. Для них справедлива “трансляционная формула”:

$$f(\varphi+\psi)=\exp\Bigl(\varphi\frac{\partial}{\partial\psi}\Bigr)\,f(\psi). \tag{9.118}$$

Доказывается она, как и её аналог для обычных вещественных переменных, разложением в ряд экспоненты. Для грассмановых величин это ряд состоит из двух слагаемых:

$$\exp\Bigl(\varphi\frac{\partial}{\partial\psi}\Bigr)=1+\varphi\frac{\partial}{\partial\psi},$$

так как $\varphi^2=0$. Записывая для произвольной функции одной переменой ряд $f(\psi)=f_0+f_1\psi$, несложно проверить (9.118). Более сложным будет доказательство соотношения (по индексу i суммирование от 1 до n):

$$f(\psi+\varphi)=\exp\Bigl(\varphi_i\,\frac{\partial}{\partial\psi_i}\Bigr)\,f(\psi),$$

где ψ_i и φ_i два набора n грассмановых величин, которые антикоммутируют друг с другом (т.е. не только $\psi_i\psi_j=-\psi_j\psi_i$, но и $\psi_i\varphi_j=-\varphi_j\psi_i$).

• *Грассмановы поля* $\psi_i(\mathbf{x},\,t)$ "перечисляются" не только дискретным индексом, но и при помощи вещественных аргументов. Так, например, $\psi_1(\mathbf{x},\,t)\psi_1(\mathbf{x},\,t)=0$. Если же отличны индексы *или* аргументы функций, то такое произведение, вообще говоря, отлично от нуля. Подчеркнем, что $\mathbf{x}$ и t – это обычные вещественные величины. "Грассмановость" полевой функции возникает из-за наличия в ней грассмановых переменных. Например, линейная функция времени может быть записана следующим образом $\psi(t)=\psi_1+\psi_2\,t$, где ψ_1 и ψ_2 – грассмановы величины.

Вычислим дифференциал произведения двух грассмановых функций. Используя обычное определение дифференциала, имеем:

$$d(\psi_1\psi_2)=(\psi_1+\partial_\mu\psi_1\,dx^\mu)(\psi_2+\partial_\nu\psi_2\,dx^\nu)-\psi_1\psi_2=(\psi_1\partial_\mu\psi_2+\partial_\mu\psi_1\,\psi_2)\,dx^\mu.$$

Таким образом, производные функций стоят на тех же местах на которых стояли сами функции. Так как эти производные являются грассмановыми функциями $[(\partial_\mu\psi_1)\,\psi_2\;=\;-\psi_2\,\partial_\mu\psi_1]$, перенесение их в начало выражения требует использования антикоммутационного правила. Несложно видеть, что при этом справедливо следующее общее соотношение:

$$dF=\sum_i\partial_\mu\psi_i\,\frac{\partial F}{\partial\psi_i}\,dx^\mu=\sum_i\frac{\overleftarrow{\partial}F}{\partial\psi_i}\,\partial_\mu\psi_i\,dx^\mu. \tag{9.119}$$

Обратим внимание, что производные $\partial_\mu\psi_i$ у левой производной от функции F стоят слева от неё, а у правой производной (второе равенство), соответственно, справа.

Вариационный принцип для антикоммутирующих функций строится аналогично обычным функциям. Для этого к грассмановым функциям ψ_k на которых действие экстремально (стр.431) прибавляются также грассмановы функции ϕ_k, обращающиеся в ноль в начальных условиях, умноженные на обычное вещественное число ε:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int\mathcal{L}(\psi_k+\varepsilon\phi_k,\partial_\alpha\psi_k+\varepsilon\partial_\alpha\phi_k)d^4x=\int\left[\phi_k\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_k}+\partial_\alpha\phi_k\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\psi_k)}\right]d^4x=0.$$

При этом производные от лагранжиана считаются левыми и ϕ_k, аналогично (9.119) стоят слева от них. Далее, повторяя рассуждения на странице 431, получаем обычные уравнения Лагранжа:

$$\partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha\psi_k\right)}\right)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_k}, \tag{9.120}$$

в которых производные лагранжиана берутся слева. Такие же уравнения справедливы для производных справа.

При выводе выражения для тензора энергии-импульса в случае грассмановых полей, необходимо следить за порядком производных. Так, если используется дифференцирование слева, имеем:

$$\partial_\nu \mathcal{L} = \partial_\nu \Psi_k \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_k} + \partial_\nu(\partial_\mu \Psi_k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_k)}$$

или, используя уравнения Лагранжа:

$$\partial_\mu \left(\partial_\nu \Psi_k \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_k)} - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) = 0.$$

Биспинор ψ и его сопряжение $\bar{\psi}$ (или ψ^+) – это независимые динамические переменные. Поэтому выше в сумме по k содержится 8 слагаемых: $\Psi_k = \{\bar{\psi}_a, \psi_a\}$. Две суммы можно выделить явным образом:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\nu \bar{\psi}_a \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi}_a)} + \frac{\overleftarrow{\partial} \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_a)} \, \partial^\nu \psi_a - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \qquad (9.121)$$

где во втором слагаемом производная поля и лагранжиана переставлены местами и производная лагранжиана сделана правой (9.119).

Рассматривая в этой главе биспинорное поле, в силу его матричного характера, мы всегда выдерживали порядок биспиноров. Сопряженный биспинор $\bar{\psi}$ стоял слева, а ψ справа. Например, выражение для тензора энергии-импульса было записано (стр. 577) в матричном виде (без биспинорного индекса):

$$T^{\mu\nu} = \partial^\nu \bar{\psi} \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \, \partial^\nu \psi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \qquad (9.122)$$

В первом слагаемом производная сопряженного спинора $\partial^\nu \bar{\psi}$ стоит слева от производной лагранжиана, а во втором, $\partial^\nu \psi$ стоит справа. Напомним, что в матричных обозначениях $\bar{\psi}$ является строчкой. Если справа на неё умножить марицу, то снова получится строчка. Соответственно ψ, $\gamma^\mu \psi$ – это столбики. В матричной записи строки стоят всегда левее столбиков и их свёртка даёт число. Пусть, например, находится тензор энергии-импульса лагранжиана: $\mathcal{L} = (\imath/2)\,(\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - m\bar{\psi}\psi$. Взятие производной $\partial \mathcal{L}/\partial(\partial_\mu \bar{\psi})$ даёт столбик, поэтому в выражении для $T^{\mu\nu}$ она стоит правее матричной строки $\partial^\nu \bar{\psi}$. Во втором слагаемом $T^{\mu\nu}$ ситуация обратная. Благодаря такому упорядочиванию, выражение для тензора энергии-импульса, взятое по "правильной" для грассмановых полей формуле (9.121) даст такой же результат, как и работа с обычными матричными функциями по формуле (9.122). Аналогична ситуация для других соотношений, полученных в этой главе.

9.12 PTC-симметрии

• В главе 5 мы изучили (стр. 294), как изменяется электромагнитное поле при отражении координатных осей (P – *инверсия*), смене направления течения времени (T – *инверсия*) и изменении знака зарядов (*зарядовое сопряжение* или C – *инверсия*). В этом разделе мы рассмотрим как эти преобразования изменяют биспинорное поле. Существует теорема, доказываемая в рамках квантовой теории поля, о том, что совместное применение этих трёх преобразований должно оставить все процессы неизменными. В тоже время, отдельные симметрии в тех или иных взаимодействиях могут нарушаться (т.е. соответствующие лагранжианы оказываются не инвариантны). Например, нейтрино имеет фиксированную спиральность (всегда "закручено" в одну сторону). Поэтому реакции в которых участвует нейтрино (слабое взаимодействие) неинвариантны относительно P – симметрии. Большинство таких реакций инвариантны относительно последовательного инвертирования координатных осей и перестановки частиц с античастицам (т.н. *комбинированная четность* или PC – инверсия) Наконец, все известные реакции инвариантны относительно комбинации всех трех PTC – преобразований. Это означает, что если "смотреть" на зеркальное отражение процесса, "прокручивать" его в обратном направлении по времени и при этом поменять частицы и античастицы местами, то получится исходный процесс.

Для установления законов изменений биспинора при P, T и C преобразованиях будем требовать, чтобы физические величины, связанные с биспинорным полем, преобразовывались "естественным" образом. Например, заряд, ток, энергия и импульс поля являются интегралами по $d^3\mathbf{x}$ от следующих величин:

$$j^0 = \psi^+\psi, \qquad \mathbf{j} = \psi^+\boldsymbol{\alpha}\,\psi, \qquad T^{00} = \psi^+(\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}} + m\beta)\,\psi, \qquad T^{0i} = \psi^+\hat{\mathbf{p}}^i\,\psi.$$

При инверсии пространственных осей, заряд и энергия не должны измениться, тогда как ток и импульс меняют свой знак (см. стр. 294). Пусть биспинорное поле при инверсии перемешивает свои компоненты при помощи некоторой матрицы U с постоянными элементами, так, что при $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$ мы имеем $\psi \mapsto \psi' = U\psi$. Заряд не изменится, если матрица U является унитарной ($U^+U = 1$):

$$j^0 \mapsto \psi'^+\psi' = \psi^+U^+U\psi = \psi^+\psi.$$

Так как $\hat{\mathbf{p}} = -\imath\nabla$, при инверсии этот дифференциальный оператор меняет свой знак $\hat{\mathbf{p}} \mapsto -\hat{\mathbf{p}}$. Поэтому плотность импульса поля T^{0i} изменяет свой знак, как и интеграл от неё по $d^3\mathbf{x}$.

Плотность энергии при инверсии преобразуется следующим образом:

$$T^{00} \mapsto \psi'^{+}(-\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}} + m\beta)\,\psi' = \psi^{+}U^{+}(-\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}} + m\beta)\,U\psi.$$

Она останется неизменной, если матрица U удовлетворяет соотношениям: $U^{+}\boldsymbol{\alpha}\,U = -\boldsymbol{\alpha}$ и $U^{+}\beta\,U = \beta$, умножая которые слева на U, имеем:

$$\beta U = U\beta, \qquad \boldsymbol{\alpha}U = -U\boldsymbol{\alpha}.$$

Им удовлетворяет матрица $\beta = \gamma^0$ (9.19), стр. 567, вообще говоря, умноженная на некоторую константу: $U = \mu\,\gamma^0$. В силу условия унитарности $\mu^*\mu = 1$, поэтому $U = e^{\imath\phi}\,\gamma^0$. Выбор аргумента ϕ комплексного числа μ произволен (но одинаков для всех биспиноров). Для согласия инверсий спиноров и *полярных* векторов (см. ниже), принимается $\phi = \pi/2$:

$$P: \qquad \psi(t,\mathbf{r}) \mapsto \psi'(t,\mathbf{r}') = \imath\gamma^0\psi(t,-\mathbf{r}). \tag{9.123}$$

Обратим внимание, что при преобразовании биспинора изменяется не только его компоненты (умножающиеся на матрицу $\imath\gamma^0$), но и аргумент у функции. В качестве упражнения ($\lessdot\,\mathrm{H}_{172}$) стоит проверить, что уравнение Дирака при инверсии (9.123) остается неизменным.

Запишем в явном виде P – преобразование для 2-х компонентных спиноров, входящих в дираковский биспинор $\psi = (\chi^\alpha\ \xi_{\dot{\beta}})^T$. Используя γ^0 в спинорном представлении (9.5), стр. 561, имеем:

$$\chi^\alpha \mapsto \imath\xi_{\dot{\alpha}}, \qquad \xi_{\dot{\alpha}} \mapsto \imath\chi^\alpha,$$

или, опуская и поднимая индексы (стр. 543):

$$\chi^1 \mapsto \imath\xi^{\dot{2}}, \qquad \chi^2 \mapsto -\imath\xi^{\dot{1}}, \qquad \xi^{\dot{1}} \mapsto -\imath\chi^2, \qquad \xi^{\dot{2}} \mapsto \imath\chi^1.$$

Так как $\chi^\alpha\xi^{\dot{\beta}}$ преобразуется как спинорный тензор $a^{\alpha\dot{\beta}}$, получаем:

$$a^{1\dot{1}} \mapsto a^{2\dot{2}}, \qquad a^{2\dot{2}} \mapsto a^{1\dot{1}}, \qquad a^{1\dot{2}} \mapsto -a^{1\dot{2}}, \qquad a^{2\dot{1}} \mapsto -a^{2\dot{1}}.$$

Если выразить компоненты спинорного тензора $a^{\alpha\dot{\beta}}$ через компоненты 4-вектора $A^\mu = \{A^0,\,\mathbf{A}\}$ (стр. 547), то это преобразование имеет вид:

$$P: \qquad a^{\mu\dot{\nu}} = \begin{pmatrix} A^0 + A^3 & A^1 - \imath A^2 \\ A^1 + \imath A^2 & A^0 - A^3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A^0 - A^3 & -A^1 + \imath A^2 \\ -A^1 - \imath A^2 & A^0 + A^3 \end{pmatrix}.$$

При этом пространственная часть 4-вектора меняет знак: $A^\nu \mapsto \{A^0,\,-\mathbf{A}\}$. Пространственные компоненты большинства 4-векторов являются полярными векторами. Впрочем, нам встречались и аксиальные 4-векторы. Например, 4-вектор спина (стр. 188,462) при инверсии меняется следующим образом: $S^\nu \mapsto \{-S^0, \mathbf{S}\}$. Такому вектору соответствует выбор фазы $\phi = 0$. Для дальнейшего выбор между $\phi = \pi/2$ и $\phi = 0$ несущественен.

• При T – *инверсии* заряд, энергия, ток и импульс ведут себя также, как и при инверсии координат. Пусть снова преобразование биспинора имеет вид $\psi \mapsto \psi' = U\psi$. Тогда из инвариантности заряда имеем условие унитарности $U^+U = 1$. Однако, так как плотность импульса явным образом не зависит от времени, подобное преобразование не изменит знака у импульса. Поэтому добавим к матричному перемешиванию операцию комплексного сопряжения компонент биспинора:

$$T: \qquad \psi(t,\,\mathbf{r}) \mapsto \psi'(t',\,\mathbf{r}) = U\psi^*(-t,\,\mathbf{r}).$$

Тогда для унитарной матрицы U смена знака импульса произойдёт после интегрирования его по частям. Существует, правда, одна тонкость. Биспинорные поля являются грассмановыми и их перестановка меняет знак выражения (стр. 618). Поэтому дополнительно постулируем, что операция инверсии времени, действуя на произведение нескольких биспиноров, переставляет их местами:

$$\hat{T}(\psi_1\psi_2) = \hat{T}(\psi_2)\,\hat{T}(\psi_1). \tag{9.124}$$

В этом случае преобразование импульса выглядит следующим образом:

$$\int \hat{T}(\psi_a^*\,\hat{\mathbf{p}}\,\psi_a)\,d^3\mathbf{x} = \int \hat{T}(\hat{\mathbf{p}}\psi_a)\,\hat{T}(\psi_a^*)\,d^3\mathbf{x} = \int (\hat{\mathbf{p}}\,U_{ab}\psi_b^*)\,(U_{ac}^*\psi_c)\,d^3\mathbf{x},$$

где в явном виде выписаны биспинорные индексы. Так как $U^*_{ac} = U^+_{ca}$, свертка матриц даёт единичную $U^+_{ca}U_{ab} = \delta_{cb}$. Интегрирование по частям с оператором набла $\hat{\mathbf{p}} = -\imath\nabla$ приведет к исходному выражению, имеющему обратный знак и “правильный” порядок биспиноров: $-\psi^+\hat{\mathbf{p}}\,\psi$.

Билинейная форма $\psi^+M\psi$, где M – некоторая матрица, при инверсии времени переходит ($\lessdot$ H$_{173}$) в следующее выражение: $\psi^+(U^+M\,U)^T\psi$. Поэтому, ток изменит знак, а энергия (член $m\,\psi^+\beta\,\psi$) нет, если:

$$U^+\boldsymbol{\alpha}\,U = -\boldsymbol{\alpha}^T, \qquad U^+\beta\,U = \beta^T.$$

На страницах 568 и 570 мы установили правила транспонирования матриц Дирака: $\beta^T = \beta$ и $\boldsymbol{\alpha}^T = -\gamma^2\boldsymbol{\alpha}\gamma^2$, поэтому:

$$U^+\boldsymbol{\alpha}\,U = \gamma^2\boldsymbol{\alpha}\gamma^2, \qquad U^+\beta\,U = \beta.$$

Этим соотношениям можно удовлетворить ($\lessdot$ H$_{174}$), если $U = \imath\gamma^3\gamma^1$, или:

$$T: \qquad \psi(t,\,\mathbf{r}) \mapsto \psi'(t',\,\mathbf{r}) = \imath\gamma^3\gamma^1\,\psi^*(-t,\,\mathbf{r}), \tag{9.125}$$

где множитель $\imath$ выбран так, чтобы сделать матрицу не только унитарной, но и эрмитовой: $U^+ = U$ или $U^2 = 1$ ($\lessdot$ H$_{175}$). Инверсия времени, как и координат, явный вид уравнения Дирака не изменяет ($\lessdot$ H$_{176}$).

• При зарядовом сопряжении (*C – инверсия*) заряд и ток должны изменить знак, а энергии и импульс – нет. Аналогично T – преобразованию, перемешаем не только компоненты биспинора, но и возьмём их комплексное сопряжение:

$$C: \qquad \psi(t,\,\mathbf{r}) \mapsto \psi'(t,\,\mathbf{r}) = U\psi^*(t,\,\mathbf{r}).$$

Однако при этом не будем изменять порядок биспиноров:

$$\hat{C}(\psi_1\psi_2) = \hat{C}(\psi_1)\,\hat{C}(\psi_2). \tag{9.126}$$

Тогда для унитарной матрицы ($U^+U = 1$) заряд изменится в силу грассмановости биспиноров ($\psi'^+ = \psi^T U^+$):

$$\psi^+\psi \mapsto \psi'^+\psi' = \psi^T U^+ U\psi^* = \psi^T\psi^* = -\psi^{*T}\psi = -\psi^+\psi.$$

Аналогичные вычисления для импульса (после интегрирования по частям и перестановки грассмановых биспиноров) приводят к неизменности его знака. Ток при зарядовом сопряжении должен меняться, а энергия – нет. С учетом грассмановости, это достигается ($\lessdot$ H$_{177}$), если:

$$U^+\boldsymbol{\alpha}\,U = \boldsymbol{\alpha}^T = -\gamma^2\boldsymbol{\alpha}\gamma^2, \qquad\qquad U^+\beta\,U = -\beta^T = -\beta.$$

Эти соотношения имеют обратный знак по сравнению с матрицей U для T – инверсии. Они выполняются, если U пропорциональна матрице γ^2, так как $(\gamma^2)^+ = -\gamma^2$ Таким образом, окончательно:

$$C: \qquad \psi(t,\,\mathbf{r}) \mapsto \psi'(t,\,\mathbf{r}) = \gamma^2\psi^*(t,\,\mathbf{r}), \tag{9.127}$$

где, вообще говоря, произвольный фазовый множитель матрицы U выбран равным единице. Зарядовое сопряжение, как и остальные симметрии, явный вид уравнения Дирака не изменяет ($\lessdot$ H$_{178}$).

Последовательное выполнение рассмотренных преобразований имеет вид (PT обозначает сначала T, затем P – преобразование):

$$\begin{array}{rcccccl}
PT: & \psi(t,\,\mathbf{r}) & \mapsto & \psi'(t',\,\mathbf{r}') & = & \imath\gamma^2\gamma^5 & \psi^*(-t,\,-\mathbf{r}),\\
PC: & \psi(t,\,\mathbf{r}) & \mapsto & \psi'(t\;,\,\mathbf{r}') & = & \imath\gamma^0\gamma^2 & \psi^*(\;\;t,\,-\mathbf{r}),\\
TC: & \psi(t,\,\mathbf{r}) & \mapsto & \psi'(t',\,\mathbf{r}\;) & = & -\gamma^0\gamma^5 & \psi^*(-t,\;\;\;\mathbf{r}),\\
PTC: & \psi(t,\,\mathbf{r}) & \mapsto & \psi'(t',\,\mathbf{r}') & = & -\imath\gamma^5 & \psi\;(-t,\,-\mathbf{r}).
\end{array}$$

Выбранные фазовые множители преобразований приводят к тому, что порядок выполнения P и C инверсий роли не играет: $P\,C = CP$. Аналогично $TC = C\,T$, но при этом $P\,T = -TP$.

• Пусть M – некоторая матрица 4x4 и $\bar\psi = \psi^+\gamma^0$. Тогда билинейная форма $\bar\psi M\psi$ при инверсиях преобразуется следующим образом ($\lessdot$ H$_{179}$):

$$\begin{aligned} P:&\quad \bar\psi M\psi \;\mapsto\; \bar\psi\,(\gamma^0 M\gamma^0)\,\psi,\\ T:&\quad \bar\psi M\psi \;\mapsto\; \bar\psi\,(\gamma^0\gamma^1\gamma^3 M^T\gamma^0\gamma^3\gamma^1)\,\psi,\\ C:&\quad \bar\psi M\psi \;\mapsto\; \bar\psi\,(\gamma^0\gamma^2 M^T\gamma^0\gamma^2)\,\psi. \end{aligned} \tag{9.128}$$

Используя эти правила, несложно выяснить как при инверсиях меняются различные ковариантные выражения. Так, $\bar\psi\psi$ является скаляром, а $\bar\psi\gamma^5\psi$ – посевдоскаляром, т.е. его знак меняется при отражении осей:

$$\begin{array}{lll} P,T: & \bar\psi\psi\mapsto\bar\psi\psi, & \bar\psi\gamma^5\psi\mapsto-\bar\psi\gamma^5\psi,\\ C: & \bar\psi\psi\mapsto\bar\psi\psi, & \bar\psi\gamma^5\psi\mapsto\;\;\bar\psi\gamma^5\psi, \end{array}$$

где учтено, что $(\gamma^5)^T = \gamma^5$ и перечисление инверсий через запятую, означат что преобразования справедливы для каждой из них. Аналогично для тока ($(\gamma^0)^T=\gamma^0$ и $\boldsymbol{\gamma}^T = -\gamma^2\boldsymbol{\gamma}\gamma^2$):

$$\begin{array}{lll} P,T: & \bar\psi\gamma^0\psi\mapsto\;\;\bar\psi\gamma^0\psi, & \bar\psi\boldsymbol{\gamma}\psi\mapsto-\bar\psi\boldsymbol{\gamma}\psi.\\ C: & \bar\psi\gamma^0\psi\mapsto-\bar\psi\gamma^0\psi, & \bar\psi\boldsymbol{\gamma}\psi\mapsto-\bar\psi\boldsymbol{\gamma}\psi \end{array}$$

и псевдотока:

$$\begin{array}{lll} P: & \bar\psi\gamma^0\gamma^5\psi\mapsto-\bar\psi\gamma^0\gamma^5\psi, & \bar\psi\boldsymbol{\gamma}\gamma^5\psi\mapsto\;\;\bar\psi\boldsymbol{\gamma}\gamma^5\psi,\\ T: & \bar\psi\gamma^0\gamma^5\psi\mapsto\;\;\bar\psi\gamma^0\gamma^5\psi, & \bar\psi\boldsymbol{\gamma}\gamma^5\psi\mapsto-\bar\psi\boldsymbol{\gamma}\gamma^5\psi,\\ C: & \bar\psi\gamma^0\gamma^5\psi\mapsto\;\;\bar\psi\gamma^0\gamma^5\psi, & \bar\psi\boldsymbol{\gamma}\gamma^5\psi\mapsto\;\;\bar\psi\boldsymbol{\gamma}\gamma^5\psi \end{array}$$

(псевдоток при P инверсии ведёт себя также, как и 4-вектор спина S^ν). Похожим образом изменяются компоненты антисимметричного тензора $\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi$. Его "временные" компоненты выражаются через матрицу $\boldsymbol{\alpha}$, а "пространственные" через $-\imath\boldsymbol{\Sigma}$:

$$\begin{array}{lll} P: & \bar\psi\boldsymbol{\alpha}\psi\mapsto-\bar\psi\boldsymbol{\alpha}\psi, & \bar\psi\boldsymbol{\Sigma}\psi\mapsto\;\;\bar\psi\boldsymbol{\Sigma}\psi,\\ T: & \bar\psi\boldsymbol{\alpha}\psi\mapsto\;\;\bar\psi\boldsymbol{\alpha}\psi, & \bar\psi\boldsymbol{\Sigma}\psi\mapsto-\bar\psi\boldsymbol{\Sigma}\psi,\\ C: & \bar\psi\boldsymbol{\alpha}\psi\mapsto-\bar\psi\boldsymbol{\alpha}\psi, & \bar\psi\boldsymbol{\Sigma}\psi\mapsto-\bar\psi\boldsymbol{\Sigma}\psi, \end{array}$$

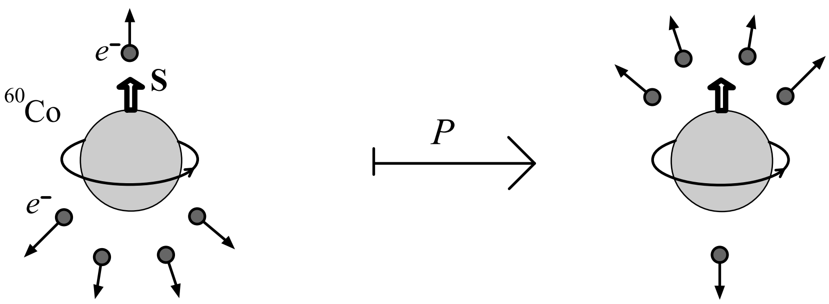
где учтено, что $\boldsymbol{\alpha}^T = -\gamma^2\boldsymbol{\alpha}\gamma^2$ и $\boldsymbol{\Sigma}^T = \gamma^2\boldsymbol{\Sigma}\gamma^2$ (9.38) стр.570. При P и T инверсиях *антисимметричного псевдотензора* $\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\gamma^5\psi$ знаки меняются местами по сравнению с $\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi$, так как $\boldsymbol{\alpha}\gamma^5 = \boldsymbol{\Sigma}$ и $\boldsymbol{\Sigma}\gamma^5 = \boldsymbol{\alpha}$ (см. стр. 570).

В качестве упражнения ($\lessdot$ H$_{180}$) стоит проверить, что член взаимодействия в калибровочно инвариантном лагранжиане электромагнитного поля $\bar\psi\gamma^\mu\psi\,A_\mu$ инвариантен относительно каждой из рассмотренных симметрий.

• Долгое время считалось, что отличия между правым и левым быть не может (природа P-инвариантна). И это действительно так в электромагнитных и сильных взаимодействиях. Однако, в 1957 г. обнаружилось, что слабые взаимодействия не обладают P-инвариантностью. В частности, в опыте Ву изучался распад ядер кобальта:

$$^{60}\mathrm{Co} \to {}^{60}\mathrm{Ni} + e^- + \bar{\nu}_e.$$

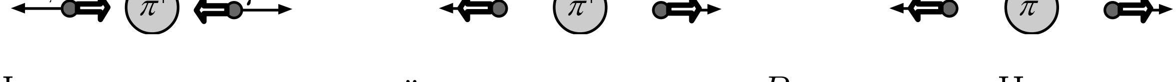
При помощи магнитного поля спины ядер ориентировались параллельно друг другу и измерялось угловое распределение появившихся в результате распада электронов. Оказалось, что электроны испускаются преимущественно в направлении противоположном спину. Скорость (импульс) электронов это полярный вектор, меняющий свой знак при зеркальном отражении осей координат (стр. 296). Спин, как и момент импульса, это аксиальный вектор и его направление при таком отражении не меняется. Поэтому асимметрия такого распада свидетельствует о нарушении P-инвариантности:



Другой пример – это распад π-мезона на мюон и мюонное нейтрино:

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu, \qquad \pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu.$$

Спин π-мезона равен нулю, поэтому спины нейтрино и мюона направлены в противоположные стороны. В первом распаде всегда рождается мюон и нейтрино только с левой спиральностью (спин направлен против импульса), см. первый рисунок:



На втором рисунке, к этой реакции применена P – инверсия. Наконец, на третьем частицы и античастицы переставлены местами (C – инверсия). В результате получился распад $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ с правильными спиральностями частиц. Таким образом, в этих распадах сохраняется *комбинированная четность*, т.е. выполняется PC-инвариантность. Это означает, что если одновременно с отражением всех осей мы заменим частицы на античастицы, то получится существующая в природе реакция.

IX Биспиноры

• $\mathbf{H}_{134}$ *Уравнение Дирака* (стр. 561)

Распишем сумму по индексу μ в уравнении Дирака:

$$\gamma^\mu \hat{p}_\mu \psi = (\gamma^0 \hat{p}_0 + \gamma^i \hat{p}_i)\psi = (\gamma^0 \hat{p}_0 - \boldsymbol{\gamma}\hat{\mathbf{p}})\psi = m\psi.$$

Подставляя матрицы, имеем:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \hat{p}_0 \\ \hat{p}_0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\hat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma} \\ \hat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix}.$$

• $\mathbf{H}_{135}$ *Уравнение Дирака с выделенной производной по t* (стр. 561)

Уравнение Дирака: $(\gamma^0 \hat{p}_0 - \boldsymbol{\gamma}\hat{\mathbf{p}})\psi = m\psi$ умножим справа на γ^0:

$$(\gamma^0\gamma^0 \hat{p}_0 - \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}\hat{\mathbf{p}})\psi = m\gamma^0\psi.$$

Прямым умножением матриц убеждаемся, что $\gamma^0\gamma^0 = 1$. Вводя три матрицы $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$, записанные аналогично матрицам Паули как вектор, получаем (9.6), стр. 561.

• $\mathbf{H}_{136}$ *Соотношение* $\mathbf{a} \sim \chi^+\boldsymbol{\sigma}\chi$ (стр. 562)

$$\chi^+\boldsymbol{\sigma}\chi = \chi^{*\beta}\boldsymbol{\sigma}^{\beta\alpha}\chi^\alpha = \frac{1}{2}(a^0 + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{a})^{\alpha\beta}\boldsymbol{\sigma}^{\beta\alpha} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}((a^0 + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{a})\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{a},$$

так как след одной матрицы Паули равен нулю, и $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbf{1} + \imath\varepsilon_{ijk}\sigma_k$, поэтому $\mathrm{Tr}(\sigma_i a_i \sigma_j) = \delta_{ij} a_j\,\mathrm{Tr}\,\mathbf{1} = 2a_j$.

• $\mathbf{H}_{137}$ *Представление Майораны* (стр. 564)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix},\ \gamma^1 = \begin{pmatrix} \imath\sigma_z & 0 \\ 0 & \imath\sigma_z \end{pmatrix},\ \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix},\ \gamma^3 = \begin{pmatrix} -\imath\sigma_x & 0 \\ 0 & -\imath\sigma_x \end{pmatrix}.$$

Ненулевые элементы матриц чисто мнимые и $\imath\gamma^\mu\partial_\mu$ – действительно.

• $\mathbf{H}_{138}$ *Переход к представлению Вейля* (стр. 566)

Из $\tilde{\gamma}^\mu = U\gamma^\mu U^{-1}$ следует, что $\tilde{\gamma}^\mu U = U\gamma^\mu$. Поэтому, записывая U при помощи 4-х произвольных матричных блоков 2x2 и подставляя явный вид матриц γ^μ и $\tilde{\gamma}^\mu$, несложно найти значения этих блоков. В частности, при переходе от спинорного представления к представлению Вейля (и обратно) используется следующая матрица:

$$U = U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этим же способом можно доказать, что γ^0 ни в каком представлении не может быть равна единичной матрице.

• $\mathbf{H}_{139}$ *Алгебра матриц Дирака* (стр. 567)

$$\gamma^5\boldsymbol{\alpha} = \gamma^5\gamma^0\boldsymbol{\gamma} = -\gamma^0\gamma^5\boldsymbol{\gamma} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}\gamma^5 = \boldsymbol{\alpha}\gamma^5,$$
$$\beta\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\gamma^0\boldsymbol{\gamma} = -\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\gamma^0 = -\boldsymbol{\alpha}\beta,$$

где учтено антикоммутирование матриц с различными индексами.

• $\mathbf{H}_{140}$ *Определитель матриц Дирака* (стр. 567)

Матрицы Дирака – это матрицы 4x4. Поэтому в спинорном представлении $\det\gamma^0 \neq 0\cdot 0 - 1\cdot 1$, а

$$\det\gamma^0 = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = (-1)\cdot(+1)\cdot(0\cdot 0 - 1\cdot 1) = 1.$$

• $\mathbf{H}_{141}$ *Унитарные представления* (стр. 568)

$$(\tilde{\gamma}^\mu)^+ = (U\gamma^\mu\overset{+}{U})^+ = U(\gamma^\mu)^+\overset{+}{U} = U\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\overset{+}{U} = U\gamma^0\overset{+}{U}U\gamma^\mu\overset{+}{U}U\gamma^0U^+ = \tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^0.$$

• $\mathbf{H}_{142}$ *Сопряжение $\sigma^{\mu\nu}$* (стр. 568)

$$(\sigma^{\mu\nu})^+ = \frac{1}{2}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)^+ = \frac{1}{2}\,(\gamma^{\nu+}\gamma^{\mu+} - \gamma^{\mu+}\gamma^{\nu+}) = \frac{1}{2}\,\gamma^0(\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu)\gamma^0.$$

• $\mathbf{H}_{143}$ *Коммутатор γ^α и $\gamma^\mu\gamma^\nu$* (стр. 568)

Пользуясь алгеброй (9.17) стр. 566, переставим γ^α и γ^μ:

$$\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu = (2g^{\alpha\mu} - \gamma^\mu\gamma^\alpha)\gamma^\nu = 2g^{\alpha\mu}\gamma^\nu - \gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu.$$

Еще раз переставляя в последнем слагаемом γ^α и γ^ν, получаем:

$$\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha = 2(g^{\alpha\mu}\gamma^\nu - g^{\alpha\nu}\gamma^\mu).$$

• $\mathbf{H}_{144}$ *След произведения нечетного числа матриц* (стр. 569)

Рассмотрим след от 3-х матриц Дирака (индексы равны 0...3)

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda) = \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^5\gamma^5) = -\,\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^5) = -\,\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda),$$

где во втором равенстве мы перенесли одну матрицу γ^5, используя свойство $\gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu$, а в третьем равенстве, оставшуюся матрицу циклическим образом переставили в начало (это всегда можно сделать под следом). Так как $(\gamma^5)^2 = 1$ получается исходное выражение со знаком минус, что возможно только, если оно равно нулю.

• $\mathbf{H}_{145}$ *След γ^5 с чётным числом матриц Дирака* (стр. 569)

Первое тождество проверяется перебором всех значений индексов μ и ν, с учетом определения $\gamma^5 = \imath\,\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Во втором тождестве вычислим

$$\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = \imath\,\mathrm{Tr}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = -4\imath,$$

собирая вместе одинаковые матрицы. Затем проверяем, что тождество равно 0 при одинаковых индексах и антисимметрично при различных.

• $\mathbf{H}_{146}$ *Транспонирование γ^5, $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$* (стр. 570)

Во всех представлениях на странице 566 матрица γ^5 симметрична, поэтому $(\gamma^5)^T = \gamma^5 = \gamma^2\gamma^5\gamma^2 = -\gamma^2\gamma^2\gamma^5 = \gamma^5$. Транспонирование $\boldsymbol{\alpha}$ вычисляем по её определению:

$$\boldsymbol{\alpha}^T = (\gamma^0\boldsymbol{\gamma})^T = \boldsymbol{\gamma}^T\gamma^0 = -\gamma^2\boldsymbol{\gamma}\gamma^2\gamma^0 = \gamma^2\boldsymbol{\gamma}\gamma^0\gamma^2 = -\gamma^2\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\gamma^2 = -\gamma^2\boldsymbol{\alpha}\gamma^2.$$

Аналогично вычисляем транспонирование для $\boldsymbol{\Sigma}$. Например, для x и y составляющих матрицы имеем:

$$-\imath\Sigma_x^T = (\gamma^2\gamma^3)^T = (\gamma^3)^T(\gamma^2)^T = (\gamma^2\gamma^3\gamma^2)(\gamma^2\gamma^2\gamma^2) = \gamma^2(\gamma^2\gamma^3)\gamma^2,$$
$$-\imath\Sigma_y^T = (\gamma^3\gamma^1)^T = (\gamma^1)^T(\gamma^3)^T = (\gamma^2\gamma^1\gamma^2)(\gamma^2\gamma^3\gamma^2) = \gamma^2(\gamma^3\gamma^1)\gamma^2.$$

• $\mathbf{H}_{147}$ *Тензор бесконечно малых преобразований Лоренца* (стр. 573)

Запишем в первом порядке малости преобразования Лоренца (1.12), стр. 33:

$$t' \approx t - \delta\mathbf{v}\,\mathbf{r}, \qquad \mathbf{r}' \approx \mathbf{r} - \delta\mathbf{v}t$$

и малые вращения на угол ϕ вокруг единичной оси $\mathbf{n}$ (6.25), стр. 385:

$$t' = t, \qquad \mathbf{r}' \approx \mathbf{r} + [\mathbf{r}\times\mathbf{n}]\,\phi.$$

Им соответствуют матрицы ($\delta\boldsymbol{\phi} = \{n_x\phi,\, n_y\phi,\, n_z\phi\}$):

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta v_x & -\delta v_y & -\delta v_z \\ -\delta v_x & 1 & 0 & 0 \\ -\delta v_y & 0 & 1 & 0 \\ -\delta v_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta\phi_z & -\delta\phi_y \\ 0 & -\delta\phi_z & 0 & \delta\phi_x \\ 0 & \delta\phi_y & -\delta\phi_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Их произведение в любом порядке равно $\delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ или, опуская индекс вниз: $\omega_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}\omega^\alpha{}_\nu$, приходим к матрице:

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta v_x & -\delta v_y & -\delta v_z \\ \delta v_x & 0 & -\delta\phi_z & \delta\phi_y \\ \delta v_y & \delta\phi_z & 0 & -\delta\phi_x \\ \delta v_z & -\delta\phi_y & \delta\phi_x & 0 \end{pmatrix} = (\delta\mathbf{v},\ -\delta\boldsymbol{\phi}).$$

• $\mathbf{H}_{148}$ *Бесконечно малое преобразование для биспинора* (стр. 574)
Подставим $S \approx 1 + \Omega$ и $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} \approx \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}$ в соотношение (9.47):

$$S^{-1}\gamma^{\mu}S = (1-\Omega)\gamma^{\mu}(1+\Omega) = \Lambda^{\mu}{}_{\lambda}\gamma^{\lambda} = \gamma^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu},$$

где учтено, что с точностью до первого порядка малости $S^{-1} \approx 1 - \Omega$, что проверяется прямым перемножением с $S \approx 1 + \Omega$. Раскроем скобки:

$$\gamma_{\mu}\Omega - \Omega\gamma_{\mu} = \omega_{\mu\nu}\gamma^{\nu}.$$

Умножим это уравнение слева на γ^{μ}, просуммировав по μ:

$$4\Omega - \gamma^{\mu}\Omega\gamma_{\mu} = \omega_{\mu\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} = \omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu},$$

где учтено тождество $\gamma^{\mu}\gamma_{\mu} = 4$ (стр. 568) и антисимметричность $\omega_{\mu\nu}$. Матрица Ω может быть разложена по базису 16 матриц Γ_a (стр. 571): $\Omega = a_5\gamma^5 + a_{\lambda}\gamma^{\lambda} + b_{\lambda}\gamma^{\lambda}\gamma^5 + c_{\lambda\tau}\sigma^{\lambda\tau}$ (единичная матрица выделена в S). Подставим это разложение и проведём свертки $\gamma^{\mu}...\gamma_{\mu}$ (стр. 569):

$$8a_5\gamma^5 + 6a_{\lambda}\gamma^{\lambda} + 2b_{\lambda}\gamma^{\lambda}\gamma^5 + (4c_{\lambda\tau} - \omega_{\lambda\tau})\sigma^{\lambda\tau} = 0.$$

Поэтому $a_5 = 0$, $a_{\lambda} = b_{\lambda} = 0$ и $c_{\lambda\tau} = (1/4)\omega_{\lambda\tau}$.

• $\mathbf{H}_{149}$ *Лагранжиан для спиноров* (стр. 576)

$$\mathcal{L} = \chi^{+}(\hat{p}_0 - \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}})\chi + \xi^{+}(\hat{p}_0 + \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}})\xi - m\,(\chi^{+}\xi + \xi^{+}\chi).$$

• $\mathbf{H}_{150}$ *Получение уравнение Дирака из уравнений Лагранжа* (стр. 576)
Производные лагранжиана имеют вид (порядок символов важен, так как это матрицы):

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = -m\bar{\psi}, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = (\imath\gamma^{\nu}\partial_{\nu} - m)\psi, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}\psi)} = \bar{\psi}\imath\gamma^{\nu}, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}\bar{\psi})} = 0.$$

Имеет смысл восстановить индексы у ψ, $\bar{\psi}$ и γ^{μ} в лагранжиане и взять эти производные не в матричном, а индексном виде.

• $\mathbf{H}_{151}$ *Разность двух лагранжианов* (стр. 577)

$$\partial_{\mu}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi) = (\partial_{\mu}\bar{\psi})\gamma^{\mu}\psi + \bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}\psi) = \bar{\psi}\gamma^{\mu}(\overleftarrow{\partial}_{\mu} + \partial_{\mu})\psi.$$

• $\mathbf{H}_{152}$ *Производная $\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}$ по $\omega_{\mu\nu}$* (стр. 578)

$$\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} = 2(\sigma^{01}\omega_{01} + \sigma^{02}\omega_{02} + \sigma^{03}\omega_{03}) + 2(\sigma^{12}\omega_{12} + \sigma^{13}\omega_{13} + \sigma^{23}\omega_{23}),$$

где 2-ки появились от остальных комбинаций произведений двух антисимметричных тензоров. Поэтому при взятии производной появится 2-ка. Следовательно, например $\partial(\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu})/\partial\omega_{01} = 2\sigma^{01}$.

• $\mathbf{H}_{153}$ *Собственные значения оператора* $\hat{\mathbf{h}}$ (стр. 585)

Уравнение на собственные значения в спинорном представлении:

$$\hat{\mathbf{h}}\begin{pmatrix}\chi\\ \xi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{p} & m\boldsymbol{\sigma}\\ m\boldsymbol{\sigma} & -\mathbf{p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi\\ \xi\end{pmatrix} = \mathbf{h}\begin{pmatrix}\chi\\ \xi\end{pmatrix},$$

где $\mathbf{h} = \{h_x,\, h_y,\, h_z\}$ – собственные значения и $\mathbf{p} = \{p_x,\, p_y,\, p_z\}$ являются числами. Для x-вой проекции вектора получаем:

$$(h_x - p_x)\chi = m\sigma_x\xi, \qquad (h_x + p_x)\xi = m\sigma_x\chi.$$

Подставляя одно уравнение в другое получаем $m^2 = h_x^2 - p_x^2$ или $h_x = \pm\sqrt{p_x^2 + m^2}$. Аналогично для остальных проекций.

• $\mathbf{H}_{154}$ *Коммутатор гамильтониана и углового момента* (стр. 585)

$$[\mathbf{x}\times\hat{\mathbf{p}},\, \boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}}]_i = \varepsilon_{ijk}[x_j\hat{p}_k, \hat{p}_l]\alpha_l = \varepsilon_{ijk}[x_j, \hat{p}_l]\hat{p}_k\alpha_l = \imath\varepsilon_{ijk}\delta_{jl}\hat{p}_k\alpha_l = \imath[\boldsymbol{\alpha}\times\hat{\mathbf{p}}]_k,$$

где учтено, что $[x_j, \hat{p}_l] = -[\hat{p}_l, x_j] = \imath[\partial_l, x_j] = \imath\delta_{lj}$.

• $\mathbf{H}_{155}$ *Собственные векторы и значения матрицы* $\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$ (стр. 587)

Из уравнения $\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}w = sw$ следует $(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})^2 w = s\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}w = s^2 w$. Так как для единичного вектора $(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})^2 = 1$, то $s^2 = 1$ или $s = \pm 1$. Пусть $s = 1$:

$$\begin{pmatrix} n_z & n_x - \imath n_y\\ n_x + \imath n_y & -n_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix},$$

откуда $w_1 = n_z w_1 + (n_x - \imath n_y)w_2$ или $w_1 = w_2(n_x - \imath n_y)/(1 - n_z)$. Введём два угла сферической системы координат $\mathbf{n} = \{s_\theta c_\phi,\ s_\theta s_\phi, c_\theta\}$. Тогда

$$w_1 = \frac{e^{-\imath\phi}\sin\theta}{1 - \cos\theta}\, w_2 = \frac{e^{-\imath\phi}}{\mathrm{tg}(\theta/2)}\, w_2.$$

Нормируя собственный вектор $w^+ w = |w_1|^2 + |w_2|^2 = 1$, получаем $|w_2|^2 = \sin^2(\theta/2)$. При извлечении корня фазу можно выбрать любой и для симметрии между w_1 и w_2 удобно считать, что $w_2 = e^{\imath\phi/2}\sin(\theta/2)$. Поэтому:

$$w^{(1)} = \begin{pmatrix} e^{-\imath\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}\\ e^{+\imath\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}, \qquad w^{(-1)} = \begin{pmatrix} -e^{-\imath\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}\\ e^{+\imath\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},$$

где $w^{(-1)}$ находится аналогично (с $s = -1$). Заметим, что $w^{(1)+}w^{(-1)} = 0$.

• $\mathbf{H}_{156}$ *Матричные элементы* $\overset{+}{w}{}^{(s)}\,\boldsymbol{\sigma}\,w^{(s')}$ (стр. 590)

Для вычисления элементов матрицы необходимо перебрать 4 комбинации индексов s и s', пользуясь явным выражением $\omega^{(s)}$ из задачи ($\lessdot$ H_{155}). Умножим $\boldsymbol{\sigma}$ на *произвольный* вектор $\mathbf{k} = \{k_x,\, k_y,\, k_z\}$. Тогда для $s = s' = 1$ имеем:

$$\overset{+}{w}{}^{(1)}\,\boldsymbol{\sigma}\,w^{(1)} = \begin{pmatrix} e^{\imath\frac{\phi}{2}}c_{\frac{\theta}{2}} & e^{-\imath\frac{\phi}{2}}s_{\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_z & k_x - \imath k_y \\ k_x + \imath k_y & -k_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\imath\frac{\phi}{2}}c_{\frac{\theta}{2}} \\ e^{\imath\frac{\phi}{2}}s_{\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix},$$

что равно $k_z c_\theta + s_\theta\,(k_x c_\phi + k_y s_\phi)$. Опуская вектор $\mathbf{k}$ (положив $k_x = k_y = 0$, $k_z = 1$ и т.д.), приходим к $\overset{+}{w}{}^{(1)}\,\boldsymbol{\sigma}\,w^{(1)} = \{s_\theta c_\phi,\, s_\theta s_\phi,\, c_\theta\} = \mathbf{n}$. Вектор $\omega^{(-1)}$ получается из $\omega^{(1)}$ заменой $\theta \mapsto \theta+\pi$, что приводит к $\overset{+}{w}{}^{(-1)}\,\boldsymbol{\sigma}\,w^{(-1)} = -\mathbf{n}$. Аналогично вычисляются остальные элементы.

• $\mathbf{H}_{157}$ *Калибровочное преобразование длинной производной* (стр. 599)

Запишем преобразование (штрих у Ψ опустим):

$$\mathrm{D}'_\mu\Psi = (\partial_\mu - \imath g\,\mathrm{A}')\,\Psi = (\partial_\mu - \imath g\,\mathrm{U}\mathrm{A}_\mu\mathrm{U}^+ + \mathrm{U}(\partial_\mu\mathrm{U}^+))\,\Psi.$$

С другой стороны, беря производную произведения $\partial_\mu(\mathrm{U}^+\psi)$:

$$\mathrm{U}(\partial_\mu - \imath g\,\mathrm{A}_\mu)\mathrm{U}^+\Psi = (\mathrm{U}\partial_\mu\mathrm{U}^+)\Psi + \partial_\mu\Psi - \imath g\mathrm{U}\mathrm{A}_\mu\mathrm{U}^+\,\Psi.$$

• $\mathbf{H}_{158}$ *Коммутатор* $[\mathrm{D}_\mu,\, \mathrm{D}_\nu]$ (стр. 599)

Запишем двойную производную $\mathrm{D}_\mu\mathrm{D}_\nu\Psi$:

$$(\partial_\mu - \imath g\mathrm{A}_\mu)(\partial_\nu - \imath g\mathrm{A}_\nu)\Psi = \partial_\mu\partial_\nu\Psi - \imath g\partial_\mu(\mathrm{A}_\nu\Psi) - \imath g\mathrm{A}_\mu\partial_\nu\Psi - g^2\mathrm{A}_\mu\mathrm{A}_\nu\Psi.$$

Раскроем производную произведения во втором слагаемом и вычтем аналогичное соотношение с переставленными индексами:

$$[\mathrm{D}_\mu,\, \mathrm{D}_\nu]\,\Psi = -\imath g\,(\partial_\mu\mathrm{A}_\nu - \partial_\nu\mathrm{A}_\mu - \imath g[\mathrm{A}_\mu,\, \mathrm{A}_\nu])\,\Psi = -\imath g\,\mathrm{F}_{\mu\nu}\,\Psi.$$

Обратим внимание, что функция Ψ умножается на матрицу $\mathrm{F}_{\mu\nu}$, но производные на неё уже не действуют.

• $\mathbf{H}_{159}$ *Калибровочное преобразование* $\mathrm{F}_{\mu\nu}$ (стр. 599)

$$\mathrm{F}_{\mu\nu} \mapsto \mathrm{D}'_\mu\mathrm{A}'_\nu - \mathrm{D}'_\nu\mathrm{A}'_\mu = \frac{\imath}{g}\,\mathrm{U}\mathrm{D}_\mu(\mathrm{D}_\nu\mathrm{U}^+) - \frac{\imath}{g}\,\mathrm{U}\mathrm{D}_\nu(\mathrm{D}_\mu\mathrm{U}^+) = \frac{\imath}{g}\,\mathrm{U}\,[\mathrm{D}_\mu,\, \mathrm{D}_\nu]\,\mathrm{U}^+,$$

где подставлены преобразования (9.95), (9.96), стр. 599. Коммутатор длинных производных равен $-\imath g\,\mathrm{F}_{\mu\nu}$, что и требовалось доказать.

• $\mathbf{H}_{160}$ *Уравнения на собственные значения оператора* $\hat{S}_x$ (стр. 603)

Решая уравнения на собственные значения для $S_x = \hbar/2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

получаем $\beta = \alpha$. Поэтому собственный вектор равен

$$\big|S_x^+\big\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Выбор коэффициента $\alpha = 1/\sqrt{2}$ называется нормировкой вектора (см. стр.604). Аналогично, для значения $S_x = -\hbar/2$ получаем $\beta = -\alpha$.

• $\mathbf{H}_{161}$ *Свойства эрмитового сопряжения* (стр. 605)

Соотношение $(\hat{A}^+)^+ = \hat{A}$ непосредственно следует из определения эрмитового сопряжения:

$$\big\langle \Psi \big| (\hat{A}^+)^+ \big| \Phi \big\rangle = \big\langle \Phi \big| \hat{A}^+ \big| \Psi \big\rangle^* = \big\langle \Psi \big| \hat{A} \big| \Phi \big\rangle^{**} = \big\langle \Psi \big| \hat{A} \big| \Phi \big\rangle.$$

Тождество $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+$ хорошо известно для матриц и может быть доказано аналогично. Для этого разложим вектор $\hat{B}\big|\Psi\big\rangle$ по собственным векторам некоторого оператора $\hat{C}$, вставив между операторами единичный оператор (9.106), стр.606, построенный по векторам $\big|c\big\rangle$:

$$\big\langle \Psi \big| (\hat{A}\hat{B})^+ \big| \Phi \big\rangle = \big\langle \Phi \big| \hat{A}\hat{B} \big| \Psi \big\rangle^* = \sum_c \big\langle \Phi \big| \hat{A} \big| c \big\rangle^* \big\langle c \big| \hat{B} \big| \Psi \big\rangle^*.$$

Для каждого оператора воспользуемся определением эрмитового сопряжения:

$$= \sum_c \big\langle c \big| \hat{A}^+ \big| \Phi \big\rangle \big\langle \Psi \big| \hat{B}^+ \big| c \big\rangle = \sum_c \big\langle \Psi \big| \hat{B}^+ \big| c \big\rangle \big\langle c \big| \hat{A}^+ \big| \Phi \big\rangle = \big\langle \Psi \big| \hat{B}^+\hat{A}^+ \big| \Phi \big\rangle,$$

где в последнем равенстве убран единичный оператор.

Последнее соотношение $\big\langle \Psi \big| \hat{A}^+\hat{A} \big| \Psi \big\rangle \geqslant 0$ доказывается аналогично:

$$\sum_c \big\langle \Psi \big| \hat{A}^+ \big| c \big\rangle \big\langle c \big| \hat{A} \big| \Psi \big\rangle = \sum_c \big\langle c \big| \hat{A} \big| \Psi \big\rangle^* \big\langle c \big| \hat{A} \big| \Psi \big\rangle = \sum_c \big| \big\langle c \big| \hat{A} \big| \Psi \big\rangle \big|^2 \geqslant 0.$$

Квадрат модуля комплексного числа всегда неотрицателен. Неотрицательной будет и их сумма.

• $\mathbf{H}_{162}$ *Соотношение неопределенности* (стр. 608)

Находим экстремум выражения $I(\alpha) = \alpha^2 \big\langle(\Delta\hat{A})^2\big\rangle + \alpha\big\langle\hat{C}\big\rangle + \big\langle(\Delta\hat{B})^2\big\rangle$, взяв производную по α и приравняв ее нулю. В результате получаем $\alpha_0 = -\big\langle\hat{C}\big\rangle/2\big\langle(\Delta\hat{A})^2\big\rangle$. Поэтому:

$$I(\alpha_0) = -\frac{\big\langle\hat{C}\big\rangle}{4\big\langle(\Delta\hat{A})^2\big\rangle} + \big\langle(\Delta\hat{B})^2\big\rangle \geqslant 0,$$

откуда следует соотношение неопределенности.

• $\mathbf{H}_{163}$ *Дисперсия* (стр. 608)

Возведем $\big\langle(\hat{A}-\bar{A})^2\big\rangle$ под знаком среднего в квадрат: $\big\langle\hat{A}^2 - 2\hat{A}\bar{A} + \bar{A}^2\big\rangle$. Константу $\bar{A}$ можно выносить за знак среднего (свойство линейности стр. 602). Поэтому: $\big\langle\hat{A}\bar{A}\big\rangle = \bar{A}\big\langle\hat{A}\big\rangle = (\bar{A})^2$ и $\big\langle(\bar{A})^2\big\rangle = (\bar{A})^2\big\langle 1\big\rangle = (\bar{A})^2$.

• $\mathbf{H}_{164}$ *Координатное представление* (стр. 609)

Коммутационное соотношение $\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = \imath\hbar$ умножаем справа на $\big|x'\big\rangle$, а слева на сопряженный вектор $\big\langle x\big|$. Учитывая уравнения на собственные значения $\hat{x}\big|x'\big\rangle = x'\big|x'\big\rangle$ и его “сопряженный” вариант $\big\langle x\big|\hat{x} = x\big\langle x\big|$ (эрмитовый оператор $\hat{x}^+ = \hat{x}$ в нем действует налево), получаем:

$$(x - x')\big\langle x|\hat{p}|x'\big\rangle = \imath\hbar\big\langle x\big|x'\big\rangle = \imath\hbar\delta(x - x').$$

Это равенство удовлетворяется, если $\big\langle x|\hat{p}|x'\big\rangle = -\imath\hbar\,\delta'(x-x')$, где $\delta'(x) = d\delta(x)/dx$. Матрица оператора сворачивается с вектором, суммированием (интегрированием) по всем x (от $-\infty$ до ∞). Поэтому соотношение $x\delta'(x) = -\delta(x)$ проверяется интегрированием по частям с произвольной функцией $\Psi(x) = \big\langle x\big|\Psi\big\rangle$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\frac{d\delta(x)}{dx}\Psi(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\Psi(x)d\delta(x) = x\Psi(x)\delta(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x)(x\Psi)'\,dx.$$

Первое слагаемое в последнем равенстве равно нулю так $\delta(\pm\infty) = 0$. Во втором слагаемом под интегралом берем производную $(x\Psi)' = \Psi + x\Psi'$. Так как всегда $\delta(x)x = 0$, получаем после интегрирования $-\Psi(0)$, что и требовалось показать.

Действие матрицы $\big\langle x|\hat{p}|x'\big\rangle$ на любую функцию $\Psi(x) = \big\langle x\big|\Psi\big\rangle$, т.е. суммирование $\sum_{x'}\big\langle x|\hat{p}|x'\big\rangle\big\langle x'\big|\Psi\big\rangle$ можно вычислить следующим образом:

$$-\imath\hbar\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\delta(x-x')}{\partial x}\Psi(x')\,dx' = -\imath\hbar\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x')\,\Psi(x')\,dx' = -\imath\hbar\frac{d\Psi(x)}{dx}.$$

Поэтому, интегралы можно не писать и для импульса использовать оператор $\hat{p} = -\imath\hbar\,d/dx$, действующий на функции $\Psi(x)$.

• $\mathbf{H}_{165}$ *Собственные функции оператора импульса* (стр. 609)

Используем матрицу импульса как дифференциальный оператор:

$$-\imath\hbar\,\frac{d\Psi_p(x)}{dx} = p\,\Psi_p(x).$$

Это уравнение элементарно интегрируется:

$$\Psi_p(x) = \langle x|p\rangle = \frac{e^{\frac{\imath}{\hbar}\,px}}{\sqrt{2\pi\hbar}}.$$

Константа интегрирования $1/\sqrt{2\pi\hbar}$ (нормировочный множитель) выбирается таким образом, чтобы обеспечить ортонормированность собственных функций на δ-функцию:

$$\langle p'|p\rangle = \sum_x \langle p'|x\rangle\langle x|p\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi^*_{p'}(x)\Psi_p(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{\imath}{\hbar}\,(p-p')x}}{2\pi\hbar}\,dx = \delta(p-p'),$$

где последнее равенство получается после замены $x \mapsto \hbar x$.

• $\mathbf{H}_{166}$ *Энергия и импульс скалярного поля* (стр. 610)

Запишем импульс скалярного поля, равный интегралу от $-\dot\varphi\nabla\varphi$. Подставляя для каждого сомножителя отдельный интеграл по $d^3\mathbf{p}$ и $d^3\mathbf{q}$, имеем: $\mathbf{P} =$

$$\int (\imath\varepsilon_p\,a_{\mathbf{p}}e^{-\imath\mathrm{px}} - \imath\varepsilon_p\,a^*_{\mathbf{p}}e^{\imath\mathrm{px}})\,(\imath\mathbf{q}\,a_{\mathbf{q}}e^{-\imath\mathrm{qx}} - \imath\mathbf{q}\,a^*_{\mathbf{q}}e^{\imath\mathrm{qx}})\,\frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\varepsilon_p}}\,\frac{d^3\mathbf{q}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\varepsilon_q}}\,d^3\mathbf{x}.$$

Перемножим скобки:

$$\mathbf{q}\,\varepsilon_p\left(a_{\mathbf{p}}a^*_{\mathbf{q}}\,e^{\imath(\mathrm{q}-\mathrm{p})\mathrm{x}} + a^*_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}\,e^{\imath(\mathrm{p}-\mathrm{q})\mathrm{x}} - a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}\,e^{-\imath(\mathrm{p}+\mathrm{q})\mathrm{x}} - a^*_{\mathbf{p}}a^*_{\mathbf{q}}\,e^{\imath(\mathrm{p}+\mathrm{q})\mathrm{x}}\right).$$

При интегрировании этого выражения по $d^3\mathbf{x}/(2\pi)^3$ в первых двух слагаемых получаем вместо экспонент функции Дирака $\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q})$, см. стр. 588. В последних двух слагаемых появляется $\delta(\mathbf{p}+\mathbf{q})$. Интегрируя по $d^3\mathbf{q}$, получаем:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\int \mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a^*_{\mathbf{p}} + a^*_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}}a_{-\mathbf{p}}\,e^{-2\imath\,\varepsilon_p\,t} + a^*_{\mathbf{p}}a^*_{-\mathbf{p}}\,e^{2\imath\,\varepsilon_p\,t}\right)d^3\mathbf{p}.$$

Последние слагаемые – это четные функции (не меняются при $\mathbf{q} \mapsto -\mathbf{q}$). Так как они умножаются на нечётную функцию $\mathbf{q}$, результат будет нечетной функцией, интеграл от которой равен нулю. Поэтому окончательно:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\int \mathbf{p}\left(a_{\mathbf{p}}a^*_{\mathbf{p}} + a^*_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}\right)d^3\mathbf{p}.$$

• $\mathbf{H}_{167}$ *Получение коммутационных соотношений* (стр. 611)

Умножим разложение скалярного поля

$$\varphi(\mathbf{x},\, t) = \int (a_{\mathbf{p}} e^{-\imath p x} + a^*_{\mathbf{p}} e^{\imath p x}) \,\frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\varepsilon_p}},$$

на экспоненту $e^{-\imath \mathbf{q}\mathbf{x}}$ и проинтегрируем по $d^3\mathbf{x}/(2\pi)^{3/2}$. Справа возникнут δ-функции Дирака. Интегрируя с ними по $d^3\mathbf{p}$, имеем:

$$\int \varphi(\mathbf{x},\, t)\, e^{-\imath \mathbf{q}\mathbf{x}}\, \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_q}}\, (a_{\mathbf{q}}\, e^{-\imath\varepsilon_q t} + a^*_{-\mathbf{q}} e^{\imath\varepsilon_q t}).$$

Возьмём производную по времени от этого выражения:

$$\int \dot\varphi(\mathbf{x},\, t)\, e^{-\imath \mathbf{q}\mathbf{x}}\, \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}} = \imath\sqrt{\frac{\varepsilon_q}{2}}\, (-a_{\mathbf{q}}\, e^{-\imath\varepsilon_q t} + a^*_{-\mathbf{q}} e^{\imath\varepsilon_q t}).$$

Из этих двух выражений можно исключить $a^*_{\mathbf{q}}$:

$$a_{\mathbf{q}} = \int (\imath\dot\varphi + \varepsilon_q \varphi)\, e^{\imath q x}\, \frac{d^3\mathbf{x}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2\varepsilon_q}}.$$

Переходя к операторам и используя коммутатор (9.112), стр.611, несложно получить теперь $[\hat a_{\mathbf{p}},\, \hat a^+_{\mathbf{q}}] = \hbar\, \delta(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ (при взятии эрмитового сопряжения, учитываем, что поле действительно, а $\imath^+ = \imath^* = -\imath$).

• $\mathbf{H}_{168}$ *Оператор числа частиц* (стр. 613)

Пользуясь коммутационными соотношениями, имеем ($\hbar = 1$)

$$\hat N\big|\mathbf{p}\big\rangle = \int a^+_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}\, a^+_{\mathbf{p}} \big|\big\rangle\, d^3\mathbf{q} = \int a^+_{\mathbf{q}} (a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{q}} + \delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}))\big|\big\rangle\, d^3\mathbf{q} = a^+_{\mathbf{p}}\big|\big\rangle = \big|\mathbf{p}\big\rangle,$$

где учтено, что $a_{\mathbf{q}}\big|\big\rangle = 0$. Аналогично вычисляется действие оператора $\hat N$ на $\big|\mathbf{p}\,,\mathbf{q}\big\rangle$. Для этого необходимо дважды используя коммутационные соотношения "перенести" оператор уничтожения к вакуумному состоянию.

• $\mathbf{H}_{169}$ *Тензор энергии-импульса комплексного поля* (стр. 614)

В соответствии с общим определением (7.33), стр.438, имеем:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \Psi \partial^\nu \Psi^* + \partial^\mu \Psi^* \partial^\nu \Psi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}$$

Соответственно интегралы от T^{00} и T^{0i} равны:

$$H = \int (\dot\Psi^*\dot\Psi + \nabla\Psi^*\nabla\Psi + m^2\Psi^*\Psi)\, d^3\mathbf{x}, \qquad \mathbf{P} = -\int (\dot\Psi^*\nabla\Psi + \dot\Psi\nabla\Psi^*)\, d^3\mathbf{x}.$$

Заряд комплексного скалярного поля равен:

$$Q = \imath\int (\Psi\dot\Psi^* - \Psi^*\dot\Psi)\, d^3\mathbf{x}.$$

• $\mathbf{H}_{170}$ *Оператор заряда комплексного скалярного поля* (стр. 614)

В выражение для плотности заряда $\hat{J}^0 = \imath(\hat{\Psi}\partial^0\hat{\Psi}^+ - \hat{\Psi}^+\partial^0\hat{\Psi})$ подставим фурье-разложение: В результате возникнет произведение скобок:

$$(\hat{a}_{\mathbf{p}}e^{-\imath px}+\hat{b}^+_{\mathbf{p}}e^{\imath px})\,\varepsilon_q(-\hat{a}^+_{\mathbf{q}}e^{\imath qx}+\hat{b}_{\mathbf{q}}e^{-\imath qx})-(\hat{a}^+_{\mathbf{p}}e^{\imath px}+\hat{b}_{\mathbf{p}}e^{-\imath px})\,\varepsilon_q(\hat{a}_{\mathbf{q}}e^{-\imath qx}-\hat{b}^+_{\mathbf{q}}e^{\imath qx}).$$

Перемножая скобки и интегрируя по $d^3\mathbf{x}/(2\pi)^3$, $d^3\mathbf{p}/\sqrt{2\varepsilon_p}$ и $d^3\mathbf{q}/\sqrt{2\varepsilon_q}$, получаем требуемое выражение (интеграл по $d^3\mathbf{x}$ даёт δ-функции Дирака, которые "уходят" после интегрирования по $d^3\mathbf{q}$).

• $\mathbf{H}_{171}$ *Количество коэффициентов у грассмановой функции* (стр. 619)

Если функция зависит от n грассмановых величин ψ_1, ... ψ_n, то в разложении в ряд Тейлора один коэффициент (f_0) соответствует отсутствию величин, n коэффициентов, если есть одна величина: $f_1\psi_1 + ... + f_n\psi_n$, затем $(n^2-n)/2$ штук по 2 величины: $f_{12}\psi_1\psi_2$, $f_{13}\psi_1\psi_3$, ..., $f_{n-1,n}\psi_{n-1}\psi_n$, и т.д. Перечислить все варианты можно при помощи бинарного числа, состоящего из последовательности n нулей и единиц (если на i-ом месте стоит 0, то ψ_i отсутствует, а если 1, то она есть). Количество таких чисел равно 2^n (2 варианта: 0 или 1 на первом месте; для каждого из них 2 варианта на втором месте, и т.д.: $2\cdot 2\cdot ...\cdot 2 = 2^n$).

• $\mathbf{H}_{172}$ *Инвариантность уравнения Дирака при P – инверсии* (стр. 625)

В уравнении Дирака $\imath(\gamma^0\partial_0 + \boldsymbol{\gamma}\nabla)\psi = m\psi$ сделаем замены $\mathbf{r}\mapsto -\mathbf{r}$ (или $\nabla\mapsto -\nabla$) и $\psi\mapsto \imath\gamma^0\psi$:

$$\imath(\gamma^0\partial_0 - \boldsymbol{\gamma}\nabla)\,\gamma^0\psi = m\,\gamma^0\psi.$$

Умножим его слева на γ^0. Учитывая, что $(\gamma^0)^2 = \gamma^0$ и $\gamma^0\boldsymbol{\gamma} = -\boldsymbol{\gamma}\gamma^0$, получаем исходное уравнение Дирака.

• $\mathbf{H}_{173}$ *Изменение билинейной формы при инверсии времени* (стр. 626)

Запишем в индексном виде T – преобразование для выражения $\psi^+M\psi$:

$$\hat{T}(\psi^*_a M_{ab}\,\psi_b) = \hat{T}(\psi_b)M_{ab}\,\hat{T}(\psi^*_a) = U_{bc}\psi^*_c M_{ab}U^*_{ad}\psi_d = \psi^*_c U^T_{cb}M^T_{ba}U^*_{ad}\psi_d,$$

где в последнем равенстве индексы упорядочены так, что их теперь можно опустить: $\psi^+U^TM^TU^*\psi$. Так как $U^* = U^{+T}$ и при транспонировании матрицы меняются местами, окончательно, имеем $\psi^+(U^+M\,U)^T\psi$.

• $\mathbf{H}_{174}$ *Матрица U при T-инверсии* (стр. 626)

Соотношение для $\beta = \gamma^0$ проверяется элементарно:

$$(\gamma^1)^+(\gamma^3)^+\gamma^0\gamma^3\gamma^1 = \gamma^1\gamma^3\gamma^0\gamma^3\gamma^1 = \gamma^1\gamma^3\gamma^3\gamma^1\gamma^0 = -\gamma^1\gamma^1\gamma^0 = \gamma^0.$$

В соотношении для $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$ удобно выделить матрицу $\gamma^5 = \imath\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, умножив слева и справа на γ^2 и затем слева на γ^0.

$$\gamma^0\gamma^2(\gamma^1\gamma^3)\gamma^0\boldsymbol{\gamma}(\gamma^3\gamma^1)\gamma^2 = \boldsymbol{\gamma}.$$

Упорядочивая в левой части равенства матрицы, получаем $-\gamma^5\boldsymbol{\gamma}\gamma^5 = \boldsymbol{\gamma}$ или $\gamma^5\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}\gamma^5 = 0$, см. стр. 566.

• $\mathbf{H}_{175}$ *Эрмитовость T-инверсии* (стр. 626)

При взятии эрмитового сопряжения $U = \imath\gamma^3\gamma^1$ матрицы переставляются местами и $\boldsymbol{\gamma}^+ = -\boldsymbol{\gamma}$:

$$U^+ = -\imath(\gamma^1)^+(\gamma^3)^+ = -\imath\gamma^1\gamma^3 = \imath\gamma^3\gamma^1 = U.$$

• $\mathbf{H}_{176}$ *Инвариантность уравнения Дирака при T – инверсии* (стр. 626)

Возьмём комплексное сопряжение уравнения: $\imath(\gamma^0\partial_0 + \boldsymbol{\gamma}\nabla)\psi = m\psi$:

$$-\imath(\gamma^0\partial_0 + \gamma^2\boldsymbol{\gamma}\gamma^2\,\nabla)\psi^* = m\psi^*,$$

где учтено, что $(\gamma^0)^* = \gamma^0$, $\boldsymbol{\gamma}^* = \gamma^2\boldsymbol{\gamma}\gamma^2$. Делая преобразования $t \mapsto -t$ (или $\partial_0 \mapsto -\partial_0$) и

$$\psi^* \mapsto -\imath(\gamma^3\gamma^1)^*\psi = -\imath\,(\gamma^2\gamma^3\gamma^2)\,(\gamma^2\gamma^1\gamma^2)\,\psi = -\imath\gamma^3\gamma^1\,\psi.$$

В результате:

$$-\imath(-\gamma^0\partial_0 + \gamma^2\boldsymbol{\gamma}\gamma^2\,\nabla)\,\gamma^3\gamma^1\psi = m\,\gamma^3\gamma^1\psi.$$

Умножая слева на $\gamma^1\gamma^3$, получаем:

$$\imath(\gamma^1\gamma^3\gamma^0\gamma^3\gamma^1\,\partial_0 - \gamma^1\gamma^3\gamma^2\boldsymbol{\gamma}\gamma^2\gamma^3\gamma^1\,\nabla)\,\psi = m\,\psi.$$

В первом слагаемом в скобках переставляем γ^3 и γ^1 с матрицей γ^0, откуда $\gamma^1\gamma^3\gamma^0\gamma^3\gamma^1 = \gamma^0$. Аналогично поступая для каждой компоненты матрицы $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}$ во втором слагаемом, получаем $-\boldsymbol{\gamma}$ и, следовательно, исходное уравнение Дирака.

• $\mathbf{H}_{177}$ *Условия на матрицу U при C-инверсии* (стр. 627)

Для тока имеем преобразование:

$$\mathbf{j} \mapsto \psi_a(U^+\boldsymbol{\alpha}\,U)_{ab}\psi^*_b = -\psi^*_b(U^+\boldsymbol{\alpha}\,U)_{ab}\psi_a = -\psi^+(U^+\boldsymbol{\alpha}\,U)^T\psi,$$

откуда $(U^+\boldsymbol{\alpha}\,U)^T = \boldsymbol{\alpha}$ или $U^+\boldsymbol{\alpha}\,U = \boldsymbol{\alpha}^T$. Аналогично для $\psi^+\beta\psi$.

• $\mathbf{H}_{178}$ *Инвариантность уравнения Дирака при* C *– инверсии* (стр. 627)

Выполним преобразование уравнения Дирака (координаты и время неизменны): $\imath\,\gamma^\mu\partial_\mu(U\psi^*) = m\,U\psi^*$ и возьмём его комплексное сопряжение:

$$-\imath\,\gamma^{*\mu}\,\partial_\mu\,U^*\psi = mU^*\psi.$$

Умножая на U^{*-1}, получим исходное уравнение, если $U^{*-1}\gamma^{*\mu}U^* = -\gamma^\mu$. Беря комплексное сопряжения и заменяя для унитарной матрицы U^{-1} на U^+, имеем:

$$U^+\gamma^\mu U = -\gamma^{*\mu} = -\gamma^2\gamma^\mu\gamma^2 = (\gamma^2)^+\gamma^\mu\gamma^2,$$

где учтено соотношение (9.26) стр. 568 и антиэрмитовость матрицы γ^2.

• $\mathbf{H}_{179}$ *Преобразования билинейных форм* (стр. 628)

Для P – инверсии $\psi\mapsto\imath\gamma^0\psi$ и $\psi^+\mapsto -\imath\psi^+\gamma^0$ (т.к. $(\gamma^0)^+=\gamma^0$), поэтому:

$$\bar\psi M\psi = \psi^+\gamma^0 M\psi \mapsto \psi^+\gamma^0\gamma^0 M\gamma^0\psi = \bar\psi\,\gamma^0 M\gamma^0\,\psi.$$

Пусть для T – инверсии $U=\imath\gamma^3\gamma^1$. При преобразовании $\hat T(\psi^*_a(\gamma^0M)_{ab}\psi_b)$, переставляем местами биспиноры (9.124), стр. 626:

$$\hat T(\psi_b)\,(\gamma^0M)_{ab}\,\hat T(\psi^*_a) = U_{bd}\psi^*_d\,(\gamma^0M)_{ab}\,U^*_{ae}\psi_e = \psi^+\,U^T(\gamma^0M)^T U^*\,\psi.$$

При транспонировании γ^0 не меняется, а γ^1 и γ^3 меняют знак. При комплексном сопряжении эти три матрицы неизменны, поэтому:

$$\hat T(\bar\psi M\psi) = \psi^+\,\gamma^1\gamma^3M^T\gamma^0\gamma^3\gamma^1\,\psi = \bar\psi\,\gamma^0\gamma^1\gamma^3M^T\gamma^0\gamma^3\gamma^1\,\psi.$$

Для C – инверсии $\psi\mapsto\gamma^2\psi^*$ и $\psi^+\mapsto -\psi^T\gamma^2$, поэтому

$$\psi^+(\gamma^0M)\psi\mapsto -\psi_a(\gamma^2\gamma^0M\gamma^2)_{ab}\psi^*_b = \psi^+(\gamma^2\gamma^0M\gamma^2)^T\psi = \psi^+\gamma^2M^T\gamma^0\gamma^2\psi,$$

где переставлены местами ψ^*_b и ψ_a со знаком минус и учтены правила транспонирования матриц. Вставляя перед ψ^+ единичную матрицу $\gamma^0\gamma^0$, получаем требуемое соотношение.

• $\mathbf{H}_{180}$ P, T, C *инвариантность электродинамики* (стр. 628)

В главе 5 на стр. 294 мы установили как при дискретных симметриях изменяется 4-потенциал электромагнитного поля $A^\mu=\{\varphi,\,\mathbf{A}\}$:

$$P,T:\qquad A^\mu\mapsto\{\varphi,\,-\mathbf{A}\},\qquad C:\qquad A^\mu\mapsto\{-\varphi,\,-\mathbf{A}\}.$$

При P и T инверсиях нулевая компонента 4-тока $\bar\psi\gamma^\mu\psi$ не меняется, а пространственные компоненты меняют свой знак. Поэтому свертка $\bar\psi\gamma^\mu\psi\,A_\mu$ остаётся неизменной для каждой из этих инверсий. Аналогично, при зарядовом сопряжении происходит изменение знака всех компонент 4-тока и 4-потенциала, следовательно, их свертка также остается без изменений.
