Глава 8

Спиноры

Спиноры - это более общие математические конструкции по сравнению с "обычными" 4-векторами и тензорами. Они находят широкое применение при описании различных физических объектов. На языке спиноров могут быть выражены все релятивистские соотношения, полученные в предыдущих главах. Кроме этого, спиноры позволяют описать принципиально новый тип полей, которому будет посвящена следующая глава.

Начнем мы с описания математики кватернионов, являющихся частным случаем спиноров второго ранга. Этот инструмент важен сам по себе, так как он изящным образом позволяет описать композицию преобразований Лоренца и поворотов в 3-мерном пространстве. Мы применим полученные формулы к прецессии Томаса и ещё раз выведем динамические уравнения для ускоренного движения спина и стержня. При помощи кватернионов уравнения Максвелла будут записаны в очень красивом и лаконичном виде. Уравнение движения заряда во внешнем поле также примут кватернионную форму. Они будут решены для ряда простых частных случаев. Затем мы рассмотрим тензорный анализ спиноров и его применение к электродинамике.

8.1 Кватернионы

• *Комплексные числа* являются мощным инструментом, который используется в различных физических приложениях. Основным объектом комплексного анализа служит мнимая единица $\imath^2 = -1$, а любое комплексное число z определяется парой действительных чисел a и b:

$$z = \{a, b\} = a + \imath b,$$

где $a = \Re(z)$ – называется *действительной частью* комплексного числа, а $b = \Im(z)$ – *мнимой*. Умножение комплексных чисел (как и действительных), обладает ассоциативностью: $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$ и коммутативностью: $z_1z_2 = z_2z_1$. Его можно проводить по алгебраическим правилам, записывая $z = a + \imath b$ и обращаясь с мнимой единицей "как обычно" (за исключением свойства $\imath^2 = -1$). Напомним, что четыре объекта 1, $\imath$, -1, $-\imath$, перемножаясь, образуют абелеву группу $\mathbf{C}_4$ (стр. 352).

Сопряжением комплексного числа z называется комплексное число с отрицательной мнимой частью $\bar{z} \equiv z^* = \{a, -b\}$. Соответственно, сопряжение мнимой единицы меняет её знак $\imath^* = -\imath$. *Нормой* комплексного числа называется действительное, неотрицательное число:

$$|z|^2 = z\bar{z} = (a + \imath b)(a - \imath b) = a^2 + b^2,$$

квадратный корень из которого $|z|$ называется *модулем*. Любое комплексное число можно записать в тригонометрическом виде:

$$z = |z|\,(\cos\phi + \imath\sin\phi) = |z|\,e^{\imath\phi},$$

где во втором равенстве использовано одно из самых красивых соотношений в математике, полученное Леонардом Эйлером. Тригонометрическое представление позволяет в изящном виде выразить преобразование компонент вектора при вращении декартовой системы координат в 2-мерном пространстве (плоскость). Если координаты x и y являются действительной и мнимой частями комплексного числа $z = x + \imath y$, тогда преобразование поворота выглядит следующим образом:

$$z' = e^{-\imath\phi}z = (\cos\phi - \imath\sin\phi)(x + \imath y) = (x\cos\phi + y\sin\phi) + \imath\,(y\cos\phi - x\sin\phi).$$

Приравнивая действительную и мнимую части $z' = x' + \imath y'$ и $e^{-\imath\phi}z$, находим компоненты вектора x' и y' после вращения, см. (2.37), стр. 124.

Чтобы получить инструмент для описания вращения в 3-мерном пространстве, необходимо обобщить понятие комплексного числа, "добавив ему размерностей". Такой объект называется *кватернионом*.

• Введем "обычную единицу" 1 три 3 "комплексные единицы" $\mathbb{I}_1$,$\mathbb{I}_2$,$\mathbb{I}_3$, называемые *базисными кватернионами* со свойствами:

$$\mathbb{I}_1^2 = \mathbb{I}_2^2 = \mathbb{I}_3^2 = -1. \tag{8.1}$$

Пусть умножение 8 объектов: 1, $\mathbb{I}_1$, $\mathbb{I}_2$, $\mathbb{I}_3$, -1, $-\mathbb{I}_1$, $-\mathbb{I}_2$, $-\mathbb{I}_3$ обладает ассоциативностью, а результат их произведения снова даёт один из этих объектов (ассоциативная замкнутая алгебра). Найдем чему равно $\mathbb{I}_1\mathbb{I}_2$. Результат не может быть равен $\pm\mathbb{I}_1$, $\pm\mathbb{I}_2$ или ±1. Действительно, пусть, например, $\mathbb{I}_1\mathbb{I}_2 = \mathbb{I}_1$. Тогда, умножая слева обе части на $\mathbb{I}_1$, и учитывая (8.1), получим $\mathbb{I}_2 = 1$. Однако, $\mathbb{I}_2$ и 1 – это различные объекты. Поэтому $\mathbb{I}_1\mathbb{I}_2$ может быть равно только $\mathbb{I}_3$ или $-\mathbb{I}_3$. Выберем первый вариант:

$$\mathbb{I}_1\mathbb{I}_2 = \mathbb{I}_3.$$

Возведём это уравнение в квадрат:

$$\mathbb{I}_1\mathbb{I}_2\mathbb{I}_1\mathbb{I}_2 = \mathbb{I}_3^2 = -1$$

и умножим на $\mathbb{I}_2\mathbb{I}_1$. Пользуясь ассоциативностью и свойствами (8.1), получаем $\mathbb{I}_1\mathbb{I}_2 = -\mathbb{I}_2\mathbb{I}_1$. Таким образом, произведение кватернионов *антисимметрично*, т.е при их перестановке появляется знак минус. Это свойство позволяет найти результат произведения остальных пар базисных кватернионов:

$$\mathbb{I}_3\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_1\mathbb{I}_2\mathbb{I}_1 = -\mathbb{I}_2\mathbb{I}_1\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2.$$

Отсюда, возводя $\mathbb{I}_2$ в квадрат, приходим к выводу, что $\mathbb{I}_3$ и $\mathbb{I}_1$ также антикоммутируют, и затем находим $\mathbb{I}_2\mathbb{I}_3$ и т.д.

В результате получаются следующие значения произведений:

$$\mathbb{I}_1\mathbb{I}_2 = \mathbb{I}_3, \qquad \mathbb{I}_3\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2, \qquad \mathbb{I}_2\mathbb{I}_3 = \mathbb{I}_1 \tag{8.2}$$

и свойство антисимметричности произведений пар различных кватернионов:

$$\mathbb{I}_i\mathbb{I}_j = -\mathbb{I}_j\mathbb{I}_i, \qquad i \neq j. \tag{8.3}$$

Символы Леви-Чевиты и Кронекера позволяют соотношения (8.1)-(8.3) объединить в одно:

$$\mathbb{I}_i\mathbb{I}_j = -\delta_{ij} + \varepsilon_{ijk}\,\mathbb{I}_k, \tag{8.4}$$

где по k подразумевается суммирование от 1 до 3. Если индексы i и j одинаковы, символ Леви-Чевиты равен нулю, а символ Кронекера единице. Поэтому, получаются соотношения для квадратов (8.1). При различных индексах, символ Кронекера равен нулю и получаются (8.2). Например: $\mathbb{I}_1\mathbb{I}_2 = \varepsilon_{12k}\mathbb{I}_k = \varepsilon_{123}\mathbb{I}_3 = \mathbb{I}_3$. Антисимметричность символа Леви-Чевиты приводит к свойству (8.3).

• Алгеброй, похожей на кватернионную, обладают *матрицы Паули*:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8.5}$$

Перемножая их, можно проверить ($\lessdot$ H_{110}), что:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbf{1} + \imath \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \tag{8.6}$$

где $\mathbf{1}$ единичная матрица (которую мы будем обычно опускать) и индекс у σ_i обозначает *номер* матрицы, а не её элементы.

Для двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из (8.6) следует ($\lessdot$ H_{111}) тождество:

$$(\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{a}\mathbf{b} + \imath \, [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \, \boldsymbol{\sigma}, \tag{8.7}$$

где скалярное произведение $\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}$ равно матрице $a^1\sigma_1 + a^2\sigma_2 + a^3\sigma_3$.

Несложно видеть, что базисные кватернионы можно выразить через матрицы Паули: $\mathbb{I}_k = -\imath\sigma_k$. В этом случае получится алгебра (8.4). Заметим, что, по своей сути, базисные кватернионы $\mathbb{I}_1$, $\mathbb{I}_2$, $\mathbb{I}_3$ – это абстрактные символы (элементы *кватернионной группы*), наделенные соответствующей алгебраической структурой (8.1)-(8.3). Матрицы Паули 2x2 реализуют *представление* этой группы. Точно также произвольное комплексное число $z = a + \imath b$ можно записать при помощи матриц:

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Матричный коэффициент при мнимой части b является представлением мнимой единицы $\imath$ (проверьте, что его квадрат равен с обратным знаком единичной матрице). В частности, базисные кватернионы $\mathbb{I}_k$ можно выразить не только через матрицы 2x2, но и, например, через матрицы 4x4 с действительными элементами ($\lessdot$ H_{112}). Далее шрифт $\mathbb{I}_k$ будет использоваться как для абстрактных элементов группы, так и для соответствующих им матриц 2x2.

При помощи числа a_0 и компонент 3-вектора $\mathbf{a} = \{a^1,\ a^2,\ a^3\}$ определим произвольный кватернион. Для этого разложим его по единице $\mathbf{1}$ и трём базисным кватернионам. В качестве базиса будут использоваться матрицы Паули (переход от базиса σ_i к базису $\mathbb{I}_i$ сводится к переопределению $\mathbf{a} \mapsto -\imath\mathbf{a}$). В этом базисе, произвольный кватернион с компонентами $\mathbb{A} = \{a_0, \mathbf{a}\}$ имеет вид:

$$\mathbb{A} = a_0 + \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}, \tag{8.8}$$

где $\mathbf{a}$ – *векторная часть* кватерниона, а a_0 – *скалярная часть* (предполагается, что она умножена на единичную матрицу).

Перемножим два кватерниона:

$$\mathbb{AB} = (a_0 + \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})(b_0 + \mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}) = a_0 b_0 + (a_0\mathbf{b} + b_0\mathbf{a})\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{ab} + \imath[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\,\boldsymbol{\sigma},$$

где учтено тождество (8.7). Таким образом, произведение двух кватернионов равно кватерниону с компонентами:

$$\mathbb{AB} = \{a_0 b_0 + \mathbf{ab},\ \ a_0\mathbf{b} + b_0\mathbf{a} + \imath[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\}. \tag{8.9}$$

Умножение ассоциативно и, в общем случае, некоммутативно:

$$(\mathbb{AB})\mathbb{C} = \mathbb{A}(\mathbb{BC}), \qquad\qquad \mathbb{AB} \neq \mathbb{BA}.$$

Коммутатор двух кватернионов не зависит от их скалярных частей и равен нулю только, если векторные части параллельны друг другу:

$$[\mathbb{A},\, \mathbb{B}] = \mathbb{AB} - \mathbb{BA} = 2\imath\,[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\,\boldsymbol{\sigma}. \tag{8.10}$$

Обозначим скалярную часть как $\lfloor\mathbb{A}\rfloor = a_0$. Из (8.9) следует, что:

$$\lfloor\mathbb{AB}\rfloor = \lfloor\mathbb{BA}\rfloor.$$

В общем случае скалярная часть не меняется при циклической перестановке сомножителей ($\lessdot$ H_{113}), например:

$$\lfloor\mathbb{ABC}\rfloor = \lfloor\mathbb{CAB}\rfloor = \lfloor\mathbb{BCA}\rfloor. \tag{8.11}$$

Единичный кватернион имеет единичную скалярную и нулевую векторную части. Мы будем его обозначать как 1 или $\mathbb{I}$, если необходимо подчеркнуть, что это единичная матрица 2x2. Понятно, что $\mathbb{I}^2 = \mathbb{I}$. Кроме этого $\mathbb{I}$ коммутирует с любым кватернионом: $\mathbb{IA} = \mathbb{AI} = \mathbb{A}$.

Для кватерниона $\mathbb{A} = \{a_0,\ \mathbf{a}\}$, вводится *сопряжённый* к нему кватернион при помощи смены знака у векторной части:

$$\bar{\mathbb{A}} = \{a_0,\ -\mathbf{a}\} = a_0 - \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}.$$

Это определение похоже на комплексное сопряжение комплексных чисел. В силу (8.9) справедливо следующее свойство сопряжения ($\lessdot$ H_{114}):

$$\overline{\mathbb{AB}} = \bar{\mathbb{B}}\,\bar{\mathbb{A}}, \tag{8.12}$$

т.е при сопряжении произведения, берутся сопряжения каждого кватерниона и *переставляются* местами. Отметим также соотношения:

$$\frac{1}{2}\,(\mathbb{A}\bar{\mathbb{B}} + \mathbb{B}\bar{\mathbb{A}}) = (a_0 b_0 - \mathbf{ab})\,\mathbb{I}, \tag{8.13}$$

$$\frac{1}{2}\,(\mathbb{A}\bar{\mathbb{B}} - \mathbb{B}\bar{\mathbb{A}}) = (b_0\mathbf{a} - a_0\mathbf{b} - \imath\,\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,\boldsymbol{\sigma}. \tag{8.14}$$

Первое даёт ковариантную свертку двух 4-векторов и не имеет векторной части, а второе приводит к кватерниону без скалярной части.

• Произведение кватерниона на его сопряжение пропорционально квадрату 4-вектора $a^\nu = \{a_0, \mathbf{a}\}$:

$$\mathbb{A}\bar{\mathbb{A}} = \bar{\mathbb{A}}\mathbb{A} = (a_0^2 - \mathbf{a}^2)\,\mathbb{I} = |\mathbb{A}|^2\,\mathbb{I}.$$

Числовой множитель у единичного кватерниона называют *нормой* кватерниона: $|\mathbb{A}|^2 = a_0^2 - \mathbf{a}^2$ (не путать со значком выделения скалярной части $\lfloor\mathbb{A}\rfloor$). Норма произведения равна произведению норм ($\lessdot$ H_{115}):

$$|\mathbb{A}\mathbb{B}|^2 = |\mathbb{A}|^2\,|\mathbb{B}|^2.$$

Для кватерниона с ненулевой нормой существует ему *обратный* ($\lessdot$ H_{116}):

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{\bar{\mathbb{A}}}{|\mathbb{A}|^2}, \qquad \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{A}\,\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}.$$

Норма обратного кватерниона вычисляется по простому правилу:

$$|\mathbb{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbb{A}|}.$$

Из ассоциативности умножения следует, что обратный к произведению кватернионов получается в результате произведения обратных кватернионов в инверсном порядке:

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\,\mathbb{A}^{-1}.$$

Это соотношение доказывается точно также, как и аналогичное тождество для любых матриц ($\lessdot$ H_{117}).

Эрмитово сопряжение кватерниона $\mathbb{A} = \{a_0, \mathbf{a}\}$ получается в результате взятия комплексного сопряжения его компонент:

$$\mathbb{A}^+ = \{a_0^*,\ \mathbf{a}^*\} = a_0^* + \mathbf{a}^*\boldsymbol{\sigma}.$$

Матрицы Паули эрмитовы: $\boldsymbol{\sigma}^+ = \boldsymbol{\sigma}$ (напомним, что эрмитово сопряжение матрицы равно её транспонированию и взятию комплексного сопряжения каждого элемента: $A^+_{ij} = A^*_{ji}$). Поэтому эрмитово сопряжение кватерниона в матричном представлении эквивалентно обычному эрмитовому сопряжению матриц и

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^+ = \mathbb{B}^+\mathbb{A}^+.$$

Кватернионы с действительными компонентами называются *эрмитовыми*: $\mathbb{A}^+ = \mathbb{A}$. Иногда мы будем рассматривать кватернионы у которых скалярная часть действительна, а векторная чисто мнимая: $\mathbb{A} = a_0 + \imath\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}$ (a_0 и $\mathbf{a}$ – действительны). Очевидно, что для *таких* кватернионов эрмитово и обычное сопряжение совпадают: $\mathbb{A}^+ = \bar{\mathbb{A}}$.

• Если компоненты кватерниона $\mathbb{A} = \{a_0,\, \mathbf{a}\}$ действительны, а норма положительна, он может быть записан в *гиперполярной форме*:

$$\mathbb{A} = |\mathbb{A}|\, \bigl(\operatorname{ch}\alpha + (\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\, \operatorname{sh}\alpha\bigr) = |\mathbb{A}|\, e^{\alpha \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}}, \tag{8.15}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ – единичный вектор в направлении векторной части кватерниона и $\operatorname{th}\alpha = |\mathbf{a}|/a_0$ (или $\operatorname{ch}\alpha = a_0/|\mathbb{A}|$, $\operatorname{sh}\alpha = |\mathbf{a}|/|\mathbb{A}|$). Так как для гиперболических функций справедливо тождество $\operatorname{ch}^2\alpha - \operatorname{sh}^2\alpha = 1$ и $|\mathbb{A}|^2 = a_0^2 - \mathbf{a}^2$, несложно видеть, что такая форма совпадает с записью (8.8). Из тождества (8.7) следует, что для единичного вектора $(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})^2 = 1$. Поэтому, возникает второе экспоненциальное равенство в гиперполярной форме. Действительно, раскладывая экспоненту в ряд Тейлора и учитывая, что $(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})^2 = 1$, $(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})^3 = \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$ и т.д., получим разложения гиперболического косинуса при единичной матрице и синуса при матрице $\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$. Из экспоненциального представления немедленно следует правило для вычисления произвольной степени кватерниона:

$$\mathbb{A}^k = |\mathbb{A}|^k\, e^{k\alpha \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}} = |\mathbb{A}|^k\, \bigl(\operatorname{ch}(k\alpha) + (\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\, \operatorname{sh}(k\alpha)\bigr).$$

Для кватерниона имеющего действительную скалярную часть и чисто мнимую векторную: $\mathbb{A} = a_0 + \imath\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}$ (a_0 и $\mathbf{a}$ – действительны), норма всегда неотрицательна: $|\mathbb{A}|^2 = a_0^2 + \mathbf{a}^2$. В этом случае гиперполярная форма переходит в *полярную* с мнимой единицей: $\alpha \mapsto \imath\alpha$ (гиперболические косинус и синус заменятся на обычные косинус и синус, см. стр. 784):

$$\mathbb{A} = |\mathbb{A}|\, \bigl(\cos\alpha + \imath(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\, \sin\alpha\bigr) = |\mathbb{A}|\, e^{\imath\alpha \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}}. \tag{8.16}$$

Возведение такого кватерниона в произвольную степень, аналогично сводится к умножению аргумента в косинусе и синусе на эту же степень. Обратим внимание, что в силу периодичности тригонометрических функций, при извлечении корня (степень $1/k$) возникает k различных кватернионов, k-я степень которых даёт исходный кватернион. Точно также обстоят дела и с обычными комплексными числами.

При помощи компонент матриц Паули любой кватернион $\mathbb{A} = \{a_0, \mathbf{a}\}$ можно записать в явном матричном виде:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - \imath a_2 \\ a_1 + \imath a_2 & a_0 - a_3 \end{pmatrix}.$$

Перемножение таких матриц и выделение элементов $a_0 = (A_{11} + A_{22})/2$, и т.д. приводит к правилу умножения (8.9).

8.2 Вращение

• Применим кватернионы для описания вращения декартовой системы координат. Пусть поворот осуществляется вокруг единичного вектора $\mathbf{n}$ на угол ϕ. Определим следующий кватернион:

$$\mathbb{R} = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \imath \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}. \tag{8.17}$$

Он имеет действительную скалярную часть и чисто мнимую векторную. Норма этого кватерниона равна единице:

$$\mathbb{R}\bar{\mathbb{R}} = 1. \tag{8.18}$$

При помощи компонент радиус вектора $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ и скаляра относительно вращений (например, времени t) определим ещё один кватернион:

$$\mathbb{X} = t + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}. \tag{8.19}$$

Найдём результат следующего преобразования:

$$\mathbb{X}' = \mathbb{R}\,\mathbb{X}\,\mathbb{R}^+. \tag{8.20}$$

Пусть $c = \cos(\phi/2)$, $s = \sin(\phi/2)$. Произведение $\mathbb{R}\,\mathbb{X}\,\mathbb{R}^+$ вычислим при помощи коммутатора (8.10), переставив местами кватернионы $\mathbb{R}$ и $\mathbb{X}$:

$$\mathbb{X}' = (\mathbb{X}\mathbb{R} + 2\imath^2 s[\mathbf{n}\times\mathbf{r}]\boldsymbol{\sigma})\,\mathbb{R}^+ = \mathbb{X} - 2s[\mathbf{n}\times\mathbf{r}]\boldsymbol{\sigma}\,(c - \imath s\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}),$$

где во втором равенстве учтено, что $\mathbb{R}^+ = \bar{\mathbb{R}} = c - \imath s\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$ и из (8.18) следует $\mathbb{R}\mathbb{R}^+ = 1$. Перемножим скобки при помощи (8.7):

$$\mathbb{X}' = \mathbb{X} - 2sc[\mathbf{n}\times\mathbf{r}]\boldsymbol{\sigma} - 2s^2\,[[\mathbf{n}\times\mathbf{r}]\times\mathbf{n}]\boldsymbol{\sigma}$$

и, раскрыв двойное векторное произведение $[\mathbf{n}\times\mathbf{r}]\times\mathbf{n} = \mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{r})$, окончательно, получим:

$$t' + \mathbf{r}'\boldsymbol{\sigma} = t + \big((1-2s^2)\,\mathbf{r} + 2s^2\,\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{r}) - 2sc\,[\mathbf{n}\times\mathbf{r}]\big)\boldsymbol{\sigma}.$$

Скалярная часть кватерниона $\mathbb{X}$ не меняется ($t' = t$). Такая инвариантность сразу следует из правила циклической перестановки (8.11), стр. 509: $\lfloor\mathbb{X}'\rfloor = \lfloor\mathbb{R}\mathbb{X}\mathbb{R}^+\rfloor = \lfloor\mathbb{R}^+\mathbb{R}\mathbb{X}\rfloor = \lfloor\mathbb{I}\mathbb{X}\rfloor = \lfloor\mathbb{X}\rfloor$. Изменение векторной части после применения тригонометрических тождеств соответствует повороту системы координат:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}\,\cos\phi + \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{r})(1-\cos\phi) - [\mathbf{n}\times\mathbf{r}]\sin\phi. \tag{8.21}$$

Это преобразование компонент радиус-вектора при вращении системы координат мы получили на странице 385.

• Норма кватерниона $\mathbb{X} = t + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}$ равна интервалу в 4-мерном пространстве-времени:

$$|\mathbb{X}|^2 = t^2 - \mathbf{r}^2.$$

Вращение оставляет его инвариантным. Поэтому инвариантом будет и $\mathbb{X}\bar{\mathbb{X}} = |\mathbb{X}|^2\,\mathbb{I}$. Продемонстрируем это. Так как $\mathbb{I}^+ = \mathbb{I}$, из $\mathbb{R}\bar{\mathbb{R}} = \bar{\mathbb{R}}\mathbb{R} = \mathbb{I}$ следует, что $\bar{\mathbb{R}}^+\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+\bar{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{I}$. Поэтому, при помощи (8.12), получаем:

$$\mathbb{X}'\bar{\mathbb{X}}' = \mathbb{R}\mathbb{X}\mathbb{R}^+\,\overline{\mathbb{R}\mathbb{X}\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}\mathbb{X}\mathbb{R}^+\,\bar{\mathbb{R}}^+\bar{\mathbb{X}}\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\mathbb{X}\mathbb{I}\bar{\mathbb{X}}\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\mathbb{X}\bar{\mathbb{X}}\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{X}\bar{\mathbb{X}} = inv,$$

где учтено, что $\mathbb{X}\bar{\mathbb{X}} \sim \mathbb{I}$ и, следовательно, он перестановочен с $\mathbb{R}$. Как мы видим, инвариантность нормы $\mathbb{X}$ не связана с явным видом кватерниона $\mathbb{R}$ и справедлива для *любого* кватернионного преобразования с *единичной нормой* ($\mathbb{R}\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{I}$).

Так как векторная часть кватерниона поворотов $\mathbb{R}$ чисто мнимая, а скалярная действительна, то $\mathbb{R}^+ = \bar{\mathbb{R}}$. Следовательно, соответствующая кватерниону матрица является унитарной: $\mathbb{R}\mathbb{R}^+ = \mathbb{I}$. Запишем её явный вид при помощи матриц Паули:

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} c_{\phi/2} + \imath n_z\, s_{\phi/2} & \imath(n_x - \imath n_y)\, s_{\phi/2} \\ \imath(n_x + \imath n_y)\, s_{\phi/2} & c_{\phi/2} - \imath n_z\, s_{\phi/2} \end{pmatrix},$$

где $s_{\phi/2} = \sin(\phi/2)$ и $c_{\phi/2} = \cos(\phi/2)$. Прямым вычислением несложно проверить, что определитель этой матрицы равен единице: $\det\mathbb{R} = 1$, поэтому она принадлежит к группе специальных унитарных матриц 2x2 $\mathbf{SU}(2)$ (стр. 388).

Стоит сравнить преобразование $\mathbb{X}' = \mathbb{R}\mathbb{X}\mathbb{R}^+$ с преобразованием (8.21), записанном в матричном виде: $\mathbf{r}' = \mathbf{R}\mathbf{r}$ с $\mathbf{r} = (x\ y\ z)^T$ и

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} c_\phi + n_x^2(1-c_\phi) & n_x n_y(1-c_\phi) + n_z s_\phi & n_x n_z(1-c_\phi) - n_y s_\phi \\ n_y n_x(1-c_\phi) - n_z s_\phi & c_\phi + n_y^2(1-c_\phi) & n_y n_z(1-c_\phi) + n_x s_\phi \\ n_z n_x(1-c_\phi) + n_y s_\phi & n_z n_y(1-c_\phi) - n_x s_\phi & c_\phi + n_z^2(1-c_\phi) \end{pmatrix},$$

где $s_\phi = \sin\phi$ и $c_\phi = \cos\phi$. Матрица вращения 3x3 выглядит более громоздкой, однако, при преобразовании вектора требуется только умножение матрицы на столбец. Кватернионные матрицы вращения 2x2 проще, но для получения преобразованного кватерниона мы умножаем исходный слева на $\mathbb{R}$ и справа на $\mathbb{R}^+$. Отметим также разницу в аргументах тригонометрических функций обоих матриц. Если в $\mathbf{R}$ они зависят от угла поворота ϕ, то в кватернионе $\mathbb{R}$ стоит половинный угол $\phi/2$.

• Преимущества кватернионной техники проявляются при рассмотрении композиции преобразований. Рассмотрим два последовательных поворота: $\mathbb{X}_1 = \mathbb{R}_1\mathbb{X}\mathbb{R}_1^+$ и затем $\mathbb{X}_2 = \mathbb{R}_2\mathbb{X}_1\mathbb{R}_2^+$. Подставляя первое преобразование во второе, получаем:

$$\mathbb{X}_2 = (\mathbb{R}_2\mathbb{R}_1)\,\mathbb{X}\,(\mathbb{R}_2\mathbb{R}_1)^+,$$

где учтено тождество $(\mathbb{A}\mathbb{B})^+ = \mathbb{B}^+\mathbb{A}^+$. В произведении $\mathbb{R}_2\mathbb{R}_1$ сначала стоит кватернион второго преобразования, а *затем* первого. Пусть кватернионы равны $\mathbb{R}_2 = c_2 + \imath s_2\mathbf{n}_2\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbb{R}_1 = c_1 + \imath s_1\mathbf{n}_1\boldsymbol{\sigma}$, где $c_i = \cos(\phi_i/2)$ и т.д. Их произведение снова является *поворотом* с кватернионом:

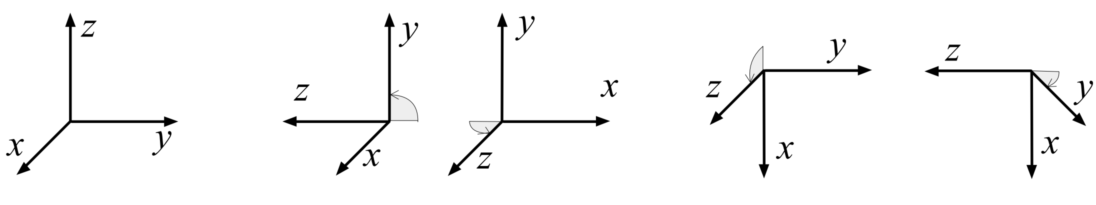
$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_2\mathbb{R}_1 = c_1c_2 - s_1s_2(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2) \;+\; \imath(s_1c_2\,\mathbf{n}_1 + c_1s_2\,\mathbf{n}_2 + s_1s_2\,[\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2])\boldsymbol{\sigma}.$$

Записывая результат как $\mathbb{R} = c + \imath s\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$, несложно выразить итоговый угол поворота ϕ и ось $\mathbf{n}$ через углы и оси исходных поворотов. В частности:

$$\cos\frac{\phi}{2} = \cos\frac{\phi_1+\phi_2}{2} + (1-\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2)\,\sin\frac{\phi_1}{2}\,\sin\frac{\phi_2}{2}. \qquad (8.22)$$

Стоит получить это соотношение непосредственно из (8.21), чтобы в полной мере ощутить преимущество кватернионов перед матрицами 3x3.

Из (8.22) следует, что углы последовательных поворотов складываются только, если оси этих поворотов параллельны: $\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 = 1$. Последовательность поворотов важна, и в общем случае $\mathbb{R}_1\mathbb{R}_2 \neq \mathbb{R}_2\mathbb{R}_1$. Ниже на втором и третьем рисунках приведены повороты системы координат по часовой стрелке на угол $\pi/2$, сначала вокруг оси x, затем вокруг y. На последних двух рисунках эти же повороты выполнены в обратной последовательности. Результат получается различным!



Обратим внимание, что при композиции двух вращений снова получается кватернион, описывающий некоторый поворот. Он имеет единичную норму и чисто мнимую векторную часть. Это утверждение выглядит достаточно тривиальным. Однако, как мы увидим ниже, для преобразований Лоренца это уже не так. Композиция двух лоренцевских преобразований, в общем случае, не приводит снова к обычным преобразованиям Лоренца!

• Кватернионы вращения можно покомпонентно умножать на число и складывать. В общем случае при этом не получится снова кватернион вращения. Выясним когда это всё же происходит. Пусть:

$$\mathbb{R} = \alpha\,\mathbb{R}_1 + \beta\,\mathbb{R}_2, \tag{8.23}$$

где α и β – действительные коэффициенты. Если $\mathbb{R}_1$ и $\mathbb{R}_2$ имеют действительные скалярные и чисто мнимые векторные части, то таким же будет и $\mathbb{R}$. Однако, этого недостаточно. Чтобы результирующий кватернион $\mathbb{R}$ был кватернионом вращения у него должна быть единичная норма:

$$\mathbb{R}\bar{\mathbb{R}} = (\alpha\,\mathbb{R}_1 + \beta\,\mathbb{R}_2)(\alpha\,\bar{\mathbb{R}}_1 + \beta\,\bar{\mathbb{R}}_2) = (\alpha^2+\beta^2)\,\mathbb{I} + \alpha\beta\,(\mathbb{R}_1\bar{\mathbb{R}}_2 + \mathbb{R}_2\bar{\mathbb{R}}_1) = \mathbb{I}.$$

Выражение $\mathbb{R}_1\bar{\mathbb{R}}_2 + \mathbb{R}_2\bar{\mathbb{R}}_1$, в соответствии с тождеством (8.13), стр. 509, пропорционально единичному кватерниону. Коэффициент при $\mathbb{I}$ равен удвоенной скалярной части произведения кватернионов $\mathbb{R}_1\bar{\mathbb{R}}_2$:

$$\lfloor\mathbb{R}_1\bar{\mathbb{R}}_2\rfloor = \lfloor\mathbb{R}_2\bar{\mathbb{R}}_1\rfloor = c_1c_2 + s_1s_2(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2).$$

Поэтому $\mathbb{R}$ будет кватернионом вращения, если:

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\lfloor\mathbb{R}_1\bar{\mathbb{R}}_2\rfloor\alpha\beta = 1. \tag{8.24}$$

Предположим, что из начальной ориентации $\mathbb{X}$ при помощи $\mathbb{R}_0$ и $\mathbb{R}_1$ получены две другие $\mathbb{X}_0 = \mathbb{R}_0\,\mathbb{X}\,\mathbb{R}_0^+$ и $\mathbb{X}_1 = \mathbb{R}_1\,\mathbb{X}\,\mathbb{R}_1^+$ (это не последовательные повороты, а различные повороты, начинающиеся с $\mathbb{X}$). Так как $\mathbb{R}\mathbb{R}^+ = \mathbb{I}$, первое преобразование можно обратить: $\mathbb{R}_0^+\,\mathbb{X}_0\,\mathbb{R}_0 = \mathbb{X}$. Следовательно $\mathbb{X}_1$ получается из $\mathbb{X}_0$ при помощи преобразования:

$$\mathbb{X}_1 = \mathbb{Q}_1\,\mathbb{X}_0\,\mathbb{Q}_1^+, \qquad\qquad \mathbb{Q}_1 = \mathbb{R}_1\,\mathbb{R}_0^+.$$

Найдём кватернион $\mathbb{Q}_t$, зависящий от параметра $t = [0...1]$ и дающий ориентацию $\mathbb{X}_t = \mathbb{Q}_t\mathbb{X}_0\mathbb{Q}_t^+$, которая при $t = 0$ соответствует $\mathbb{X}_0$, а при $t = 1$: $\mathbb{X}_1$. Пусть при этом угол поворота *равномерно* изменяется:

$$\mathbb{Q}_t = \cos(\omega t) + \imath\sin(\omega t)\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} = \cos(\omega t) + \frac{\sin(\omega t)}{\sin\omega}\,(\mathbb{R}_1\,\mathbb{R}_0^+ - \cos\omega),$$

где ось поворота $\mathbf{n}$ выражена через $\mathbb{R}_1\,\mathbb{R}_0^+$ так, что $\mathbb{Q}_0 = 1$ и $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{R}_1\,\mathbb{R}_0^+$. Из первого равенства следует, что $\cos\omega = \lfloor\mathbb{Q}_1\rfloor = \lfloor\mathbb{R}_1\,\mathbb{R}_0^+\rfloor$. От кватерниона $\mathbb{Q}_t$ можно перейти к вращению $\mathbb{R}_t$, стартующему с $\mathbb{X}$: $\mathbb{X}_t = \mathbb{R}_t\,\mathbb{X}\,\mathbb{R}_t^+$. Так как $\mathbb{R}_t = \mathbb{Q}_t\,\mathbb{R}_0$, имеем:

$$\mathbb{R}_t = \frac{\sin(\omega(1-t))}{\sin\omega}\,\mathbb{R}_0 + \frac{\sin(\omega t)}{\sin\omega}\,\mathbb{R}_1. \tag{8.25}$$

Это соотношение называется *сферической линейной интерполяцией* между ориентациями $\mathbb{X}_0$ и $\mathbb{X}_1$. Несложно проверить, что коэффициенты при кватернионах поворотов $\mathbb{R}_0$ и $\mathbb{R}_1$ удовлетворяют условию (8.24).

8.3 Преобразования Лоренца

• Кватернионы позволяют также описывать и преобразования Лоренца. Используя гиперболические косинус, синус и единичный вектор $\mathbf{m}^2 = 1$, определим кватернион *лоренцевского буста* (преобразования Лоренца без вращения):

$$\mathbb{L} = \mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \mathrm{sh}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}. \tag{8.26}$$

Кватернион буста $\mathbb{L}$, как и вращения $\mathbb{R}$, имеет *единичную норму*, так как

$$\mathbb{L}\bar{\mathbb{L}} = (c - s\,\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma})\,(c + s\,\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}) = (c^2 - s^2) = 1$$

(сейчас $c = \mathrm{ch}(\alpha/2)$ и аналогично s). Однако, отсутствие мнимой единицы в векторной части приводит к тому, что матрица $\mathbb{L}$ оказывается уже неунитарной:

$$\mathbb{L}\mathbb{L}^{+} = \mathbb{L}^2 = (c - s\,\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma})^2 = (c^2 + s^2) - 2sc\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{ch}(\alpha) - \mathrm{sh}(\alpha)\,\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma} \neq \mathbb{I}.$$

Запишем аналогично вращению преобразование для $\mathbb{X} = t + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}$:

$$\mathbb{X}' = \mathbb{L}\,\mathbb{X}\,\mathbb{L}^{+}. \tag{8.27}$$

Так как компоненты кватерниона буста действительны, он является эрмитовым: $\mathbb{L}^{+} = \mathbb{L}$. Найдем результат (8.27) при помощи матриц Паули:

$$t' + \mathbf{r}'\boldsymbol{\sigma} = (c - s\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma})(t + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma})(c - s\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}).$$

Перемножая с сохранением порядка сомножителей (матрицы!) и, пользуясь тождеством (8.7), стр. 508, получаем:

$$\mathbb{X}' = (c^2 + s^2)\,t - 2sc\,(\mathbf{rm}) + c^2\,\mathbf{r}\boldsymbol{\sigma} - 2sc\,t\,\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma} + s^2(\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{r}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}).$$

Дважды ещё раз применяя (8.7) и раскрывая двойное векторное произведение, получаем: $(\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{r}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}) = 2(\mathbf{mr})(\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}$, поэтому:

$$t' + \mathbf{r}'\boldsymbol{\sigma} = (c^2 + s^2)\,t - 2sc\,(\mathbf{mr}) + (c^2 - s^2)\,\mathbf{r}\boldsymbol{\sigma} - 2cst\,\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma} + 2s^2\,(\mathbf{mr})(\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}).$$

Приравнивая скалярные и векторные части, приходим к преобразованиям Лоренца:

$$t' = t\,\mathrm{ch}\,\alpha - (\mathbf{mr})\,\mathrm{sh}\,\alpha, \qquad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - t\,\mathbf{m}\;\mathrm{sh}\,\alpha + (\mathrm{ch}\,\alpha - 1)\,(\mathbf{mr})\,\mathbf{m},$$

где учтены гиперболические тождества двойного угла (стр. 784).

Более привычная запись преобразований Лоренца (1.12), стр. 33 получается после переобозначений:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{v}}{v}, \qquad \operatorname{ch}\alpha = \gamma, \qquad \mathbf{m}\operatorname{sh}\alpha = \mathbf{v}\,\gamma, \qquad v = \operatorname{th}\alpha,$$

где, как обычно, $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$, и α называется *быстротой*:

$$\alpha = \operatorname{ath} v = \frac{1}{2}\,\ln\frac{1+v}{1-v}. \tag{8.28}$$

Кватернион буста в матричном представлении

$$\mathbb{L} = \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} c - m_3 s & -(m_1 - \imath m_2)s \\ -(m_1 + \imath m_2)s & c + m_3 s \end{pmatrix}$$

имеет единичный определитель: $\det\mathbb{L} = 1$, как и матрица кватерниона вращений $\mathbb{R}$. Однако, так как он неэрмитов ($\mathbb{L}\mathbb{L}^+ \neq \mathbb{I}$), эта матрица принадлежит к более широкой группе специальных (но в общем случае не унитарных) матриц $\mathbf{SL}(2, C)$ (буква $\mathbf{S}$ означает “специальная”, буква $\mathbf{L}$ – линейная; в скобках первый аргумент сообщает о размерности матрицы, а второй о том, что её элементы комплексны). К этой же группе принадлежат и матрицы общих преобразований Лоренца, которые включают в себя лоренцевский буст и трехмерный поворот. Действительно, т.к. определитель произведения матриц равен произведению их определителей, то определитель композиции вращения и преобразований Лоренца будет единичным: $\det(\mathbb{R}\mathbb{L}) = \det\mathbb{R}\det\mathbb{L} = 1$. Кроме этого $\mathbb{R}\mathbb{L}\overline{\mathbb{R}\mathbb{L}} = \mathbb{R}\mathbb{L}\bar{\mathbb{L}}\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{I}$.

Преобразование, осуществляемое кватернионом с *единичной нормой*:

$$\mathbb{X}' = \mathbb{S}\mathbb{X}\mathbb{S}^+, \qquad \mathbb{S}\bar{\mathbb{S}} = \mathbb{I}$$

всегда оставляет инвариантным кватернион, пропорциональный интервалу $\mathbb{X}\bar{\mathbb{X}} = (t^2 - \mathbf{r}^2)\,\mathbb{I}$ (см. стр. 513). Если коэффициенты $\mathbb{S}$ действительны – это лоренцевские бусты $\mathbb{L}$. Если нулевая часть действительна, а векторная чисто мнимая, то это пространственные вращения $\mathbb{R}$. Остальные варианты соответствуют *смешанным преобразованиям.*

Матрица $\mathbb{S}$ размерности 2x2 с комплексными элементами имеет $8 = 2{\cdot}4$ вещественных параметров. Требование единичности определителя приводит к двум уравнениям (для действительной и мнимой частей). Поэтому существуют 6 независимых вещественных параметра, определяющих общее преобразование Лоренца (3 угла поворота и 3 проекции скорости). Им соответствуют 6 генераторов группы. В качестве упражнения ($\lessdot\,\mathrm{H}_{118}$) стоит записать матрицы вращения и буста при малых значениях *действительных* параметров: $\mathbb{R} = 1 + \phi_i\mathbf{R}_i$, $\mathbb{L} = 1 + \alpha_i\mathbf{L}_i$ и найти алгебру Ли для генераторов группы, сравнив её с алгеброй генераторов матриц 4x4 (стр. 398), действующих на столбики 4-векторов $(t, x, y, z)^T$.

• Рассмотрим два последовательных лоренцевских буста $\mathbb{L}_2\mathbb{L}_1$ (сначала $\mathbb{L}_1$, затем $\mathbb{L}_2$), где $\mathbb{L}_2 = c_2 - s_2\,\mathbf{m}_2\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbb{L}_1 = c_1 - s_1\,\mathbf{m}_1\boldsymbol{\sigma}$:

$$\mathbb{S} = \mathbb{L}_2\mathbb{L}_1 = c_1c_2 + (\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2)\,s_1s_2 - (\mathbf{m}_1\,s_1c_2 + \mathbf{m}_2\,c_1s_2 + \imath[\mathbf{m}_1\times\mathbf{m}_2]\,s_1s_2)\boldsymbol{\sigma}$$

(как обычно $c_1 = \mathrm{ch}(\alpha_1/2)$, и т.д). Векторная часть $\mathbb{S}$, при $\mathbf{m}_1\times\mathbf{m}_2\neq 0$ не является действительной. Поэтому это не лоренцевский буст (8.26). Тем не менее, его можно разложить на композицию буста (8.26) и пространственного вращения (8.17), например, таким образом (сначала буст, затем поворот):

$$\mathbb{L}_2\mathbb{L}_1 = \mathbb{R}\,\mathbb{L}.$$

Найдем произведение вращения $\mathbb{R} = c_\phi + \imath s_\phi\,\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$ и буста $\mathbb{L} = c_\alpha - s_\alpha\,\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}$, где $c_\alpha = \mathrm{ch}(\alpha/2)$, $c_\phi = \cos(\phi/2)$:

$$\mathbb{S} = \mathbb{R}\,\mathbb{L} = c_\alpha c_\phi - \imath\,\mathbf{nm}\,s_\alpha s_\phi + (\imath\mathbf{n}\,c_\alpha s_\phi - \mathbf{m}s_\alpha c_\phi - [\mathbf{m}\times\mathbf{n}]\,s_\alpha s_\phi)\boldsymbol{\sigma}. \quad (8.29)$$

Этот кватернион совпадёт с $\mathbb{L}_2\mathbb{L}_1$ (имеющего действительную скалярную часть), если итоговая скорость и ось вращения будут *перпендикулярны* друг другу ($\mathbf{nm} = 0$). Кроме этого должны выполняться соотношения:

$$\begin{gathered} c_\alpha c_\phi = c_1c_2 + (\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2)\,s_1s_2, \qquad \mathbf{n}\,c_\alpha s_\phi = -[\mathbf{m}_1\times\mathbf{m}_2]\,s_1s_2, \\ \mathbf{m}s_\alpha c_\phi + [\mathbf{m}\times\mathbf{n}]\,s_\alpha s_\phi = \mathbf{m}_1\,s_1c_2 + \mathbf{m}_2\,c_1s_2. \end{gathered} \quad (8.30)$$

Теперь несложно получить связь между параметрами исходных бустов и эквивалентного им буста и поворота. Для этого введём $\mathbf{m}\,\mathrm{sh}\,\alpha = \mathbf{v}\gamma$, и аналогично с индексами для $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Так как векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ единичные и перпендикулярные, то $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$ также является единичным вектором. Возводя в квадрат третье соотношение (8.30), получим выражение для γ. Если умножить третье соотношение векторно на $\mathbf{n}$, и с его же помощью исключить $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$, то получится выражение для вектора $\mathbf{m}$. В результате параметры суммарного буста $\mathbb{L}$ равны ($\lessdot$ H$_{119}$):

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2\,(1 + \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2), \qquad \mathbf{v}\frac{\gamma}{\gamma_2} = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1\gamma_1 + \mathbf{v}_1(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)\frac{\gamma_1 - 1}{v_1^2}. \quad (8.31)$$

Из второго соотношения (8.30) следует, что при $s_\phi > 0$ *единичный* вектор вдоль оси вращения равен $\mathbf{n} = -[\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2]/|\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2|$. Перемножая первое и второе соотношения (8.30), получим выражение для угла ($\lessdot$ H$_{120}$):

$$\mathbf{n}\,\sin\phi = -[\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2]\,\frac{\gamma_1\gamma_2\,(1+\gamma+\gamma_1+\gamma_2)}{(1+\gamma)(1+\gamma_1)(1+\gamma_2)}. \quad (8.32)$$

Угол поворота ϕ называется *углом Вигнера*, а формулу для него в таком виде получил Стапп в 1956 г. [45]. Заметим, что всегда $\phi < \pi/2$.

• Аналогичным образом произведение двух бустов можно разложить и в обратную последовательность (сначала выполняется поворот системы координат, затем происходит переход в новую систему отсчёта – буст):

$$\mathbb{L}_2\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}\mathbb{R}.$$

Выражение для угла поворота ϕ и оси вращения $\mathbf{n}$ (8.32) в этом случае не изменятся. Не поменяется также модуль скорости итогового буста $\mathbb{L}$ (или лоренцевский фактор γ). Однако в выражении для вектора скорости произойдёт перестановка индексов 1 и 2 ($\lessdot$ H$_{121}$):

$$\mathbf{v}\frac{\gamma}{\gamma_1} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\gamma_2 + \mathbf{v}_2(\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1)\frac{\gamma_2 - 1}{v_2^2}. \tag{8.33}$$

Поэтому последовательность буста и поворота важна, и в общем случае:

$$\mathbb{L}\mathbb{R} \neq \mathbb{R}\mathbb{L},$$

так как параметры $\mathbb{L}$ слева и справа должны быть различными. Это свойство является отражением неабелевости группы Лоренца (стр. 396).

• Произвольный кватернион $\mathbb{S} = S_0 + \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}$ с единичной нормой ($\mathbb{S}\bar{\mathbb{S}} = \bar{\mathbb{S}}\mathbb{S} = \mathbb{I}$ или $S_0^2 - \mathbf{S}^2 = 1$ или $\det\mathbb{S} = 1$) и комплексными коэффициентами всегда можно разложить на буст и вращение (с вообще говоря *неортогональными* осями $\mathbf{nm} \neq 0$). Для этого необходимо воспользоваться (8.29):

$$S_0 = c_\alpha c_\phi - \imath\,\mathbf{nm}\,s_\alpha s_\phi, \qquad \mathbf{S} = \imath\mathbf{n}\,c_\alpha s_\phi - \mathbf{m}s_\alpha c_\phi - [\mathbf{m}\times\mathbf{n}]\,s_\alpha s_\phi$$

и выразить единичные векторы $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$ и параметры ϕ, α через действительную и мнимую части кватерниона $\mathbb{S} = \{S_0, \ , \mathbf{S}\}$:

$$\mathbf{n}\frac{s_\phi}{c_\phi} = \frac{\mathbf{S}_I}{S_{0R}}, \qquad c_\alpha = \frac{S_{0R}}{c_\phi}, \qquad \mathbf{m}s_\alpha = [\mathbf{S}_R\times\mathbf{n}]s_\phi - \mathbf{S}_R c_\phi - \mathbf{n}\,S_{0I}\,s_\phi,$$

где $\mathbf{S}_R$, $\mathbf{S}_I$ – действительная и мнимая части вектора $\mathbf{S}$, и т.д. Заметим, что при помощи произвольного кватерниона с единичной нормой можно записать кватернион лоренцевского буста:

$$\mathbb{L} = \frac{\mathbb{S} + \mathbb{S}^+}{|\mathbb{I} + \mathbb{S}\bar{\mathbb{S}}^+|}.$$

Его эрмитовость очевидна, а единичность нормы $\mathbb{L}\bar{\mathbb{L}} = \mathbb{I}$ проверяется прямым перемножением ($\lessdot$ H$_{122}$). Из разложения $\mathbb{S} = \mathbb{R}\mathbb{L}$ несложно найти кватернион $\mathbb{R} = \mathbb{S}\bar{\mathbb{L}}$ ($\lessdot$ H$_{123}$). Однако это не кватернион вращения, т.к. его векторная часть, вообще говоря, не является чисто мнимой.

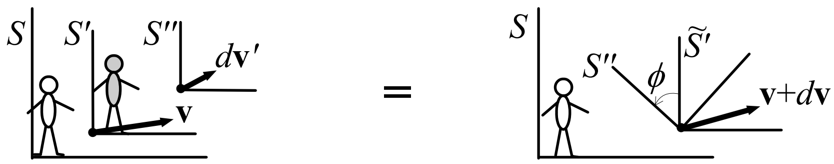
Обратим также внимание, что при перемножении кватерниона вращения $\mathbb{R} = e^{\imath\frac{\phi}{2}\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}}$ и буста $\mathbb{L} = e^{-\frac{\alpha}{2}\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}}$ в экспоненциальном представлении (стр. 511) нельзя складывать показатели экспонент, т.к. матрицы $\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}$ в общем случае не коммутируют.

8.4 Прецессия Томаса

Рассмотрим три системы отсчёта. Пусть S – это *лабораторная* система отсчёта, а S' – инерциальная система, движущаяся относительно лабораторной со скоростью $\mathbf{v}$. Предположим, что неинерциальная система S'', имеющая в данный момент времени такую же скорость $\mathbf{v}$ относительно S, изменяет её на $d\mathbf{v}$ относительно S (или на $d\mathbf{v}'$ относительно S'). Ориентация декартовых осей систем S'' и *сопутствующей* к ней S' совпадают. Изменение скорости на $d\mathbf{v}'$ происходит таким образом, что координатные оси S'' сдвигаются относительно S' "параллельным" образом. Как мы видели в предыдущем разделе, выполнение последовательных преобразований от S к S' со скоростью $\mathbf{v}$ и от S' к S'' со скоростью $d\mathbf{v}'$ не является лоренцевским бустом. Однако их результат может быть представлен в виде композиций буста и следующего за ним поворота:

$$S \mapsto S'': \qquad \mathbb{L}(d\mathbf{v}')\,\mathbb{L}(\mathbf{v}) = \mathbb{R}(\mathbf{n}, d\phi)\,\mathbb{L}(\mathbf{v}+d\mathbf{v}). \tag{8.34}$$

Кватернион буста $\mathbb{L}(\mathbf{v}+d\mathbf{v})$ даёт переход от системы S к некоторой системе $\tilde{S}'$, *которая*, поворачиваясь на угол $d\phi$, приводит к системе S''.



Воспользуемся формулой Стаппа (8.32), положив $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_2 = d\mathbf{v}'$. Бесконечно малое изменение скорости $d\mathbf{v}'$ уже стоит в векторном произведении (8.32), поэтому в первом порядке малости можно положить $\gamma_2 = 1$, $\gamma = \gamma_1 = \gamma_{\mathbf{v}}$ и синус заменить на угол:

$$\mathbf{n}d\phi = -\frac{\gamma}{1+\gamma}\,[\mathbf{v}\times d\mathbf{v}']. \tag{8.35}$$

Учитывая, что в левой части (8.31) для композиции (8.34) скорость $\mathbf{v}$ это $\mathbf{v}+d\mathbf{v}$, и справедливо ($\lessdot$ H$_{124}$) разложение $\gamma_{\mathbf{v}+d\mathbf{v}} \approx \gamma + \gamma^3\,\mathbf{v}d\mathbf{v}$, где $\gamma = \gamma_{\mathbf{v}}$ имеем:

$$\gamma\,d\mathbf{v} + \gamma^3\,\mathbf{v}\,(\mathbf{v}d\mathbf{v}) \approx d\mathbf{v}' + \mathbf{v}\,(\mathbf{v}d\mathbf{v}')\,\frac{\gamma-1}{v^2}\,.$$

Умножая векторно на $\mathbf{v}$, получаем $\mathbf{v}\times d\mathbf{v}' = \gamma\,\mathbf{v}\times d\mathbf{v}$, или:

$$\mathbf{n}\,d\phi = -\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\,[\mathbf{v}\times d\mathbf{v}], \tag{8.36}$$

где штриха у изменения скорости уже нет (все величины в *правой* части относятся к лабораторной системе S).

Вместо координатного эффекта (8.34), на практике больший интерес представляет неинерциальное движение “жесткого” стержня или небольшого вращающегося гироскопа (частицы), обладающего собственным моментом (спином). Пусть при изменении скорости относительно сопутствующей системы отсчёта, 3-векторы, связанные с этими объектами, переносятся параллельным образом. Возникает вопрос, как подобный вектор выглядит в лабораторной системе отсчета. Иногда считают, что получив кинематическое вращение осей координат, мы автоматически получаем поворот любого вектора, связанного с системой S''. Как следствие, все такие векторы должны поворачиваться единым образом. В частности вектор, соединяющий начало и конец стержня, жёстко связанного с S'' или вектор спина гироскопа неподвижного относительно S'' имеют одинаковую прецессию относительно лабораторной системы отсчёта. Так вот, это неверно!

Во второй главе (стр. 118) мы получили уравнение для стержня (направленный отрезок $\mathbf{s}$), а в третей (стр. 190) уравнение для спина $\mathbf{S}$ частицы, движущейся с ускорением $\mathbf{a}$. Эти уравнения различны:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\gamma^2\,(\mathbf{vs})\,\mathbf{a}, \qquad\qquad \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \gamma^2\,(\mathbf{aS})\,\mathbf{v}.$$

Физическая причина этого состоит в следующем. Синхронное вращение различных 3-векторов происходит при обычном повороте *неподвижной* декартовой системы координат. Однако нас интересует изменение векторов, *движущихся* относительно лабораторной системы. В этом случае необходимо учитывать свойства этих векторов не только при вращении, но и при преобразованиях Лоренца.

Относительно последних, например, проекции спина являются пространственными компонентами 4-вектора. Полный момент импульса – это три из шести компонент 4-тензора. Радиус-вектор, направленный вдоль стержня, – это “координатный” 3-вектор. Все эти векторы одинаково ведут себя по отношению к 3-мерным вращениям, но абсолютно *различно* по отношению к преобразованиям Лоренца. В результате, физические величины, выражаемые через 3-векторы, могут иметь разные уравнения для своего изменения. Например, для наблюдения за стержнем необходимо в каждый момент времени одновременно фиксировать положение всех его точек. При такой фиксации движущийся объект будет определённым образом “деформироваться”. В частности, декартовы оси перпендикулярные для наблюдателей в S'', будут отнюдь не такими относительно лабораторной системы отсчета (стр. 81), а стержень, при изменении скорости, меняет не только свою ориентацию, но и длину.

• Таким образом, применение уравнения прецессии (8.36) для конкретного объекта требует учёта его общих трансформационных свойств. В качестве примера, получим из томасовской прецессии уравнение переноса Ферми, стр. 192 (или BMT-уравнение с $g = 0$, стр. 466). Запишем (8.36) как поворот вектора спина. Любой 3-вектор при вращении системы координат на угол $d\phi$ изменяется следующим образом $d\mathbf{S}' = d\phi\, \mathbf{n} \times \mathbf{S}'$. Подставляя (8.36) и разделив на dt, имеем:

$$\frac{d\mathbf{S}'}{dt} = -\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\,[\mathbf{v}\times\mathbf{a}]\times\mathbf{S}'. \tag{8.37}$$

Под прецессией обычно понимают поворот 3-вектора без изменения им длины. Именно таким является уравнение (8.37) для вектора $\mathbf{S}'$. Однако оно не относится к конкретной системе отсчёта. Скорость $\mathbf{v}$, ускорение $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ и интервал времени dt измеряются в лабораторной системе, тогда как изменение вектора спина $d\mathbf{S}'$ (его поворот) относится к *неинерциальной* системе $\tilde{S}'$, в которой скорость гироскопа равна нулю. Эта система *в каждый* момент времени *связана бустом* с лабораторной системой. Именно этот буст записан в правой части соотношения (8.34).

Запишем преобразование Лоренца для 3-вектора спина $\mathbf{S}$, являющегося пространственной частью 4-вектора $\mathrm{S} = \{S_0,\, \mathbf{S}\}$. Этот 4-вектор ортогонален 4-скорости $\mathrm{V} = \{\gamma,\, \gamma\mathbf{v}\}$ (т.е. $\mathrm{V}\cdot\mathrm{S} = 0$). Следовательно, его нулевая компонента равна $S_0 = \mathbf{vS}$, и соответствующее преобразование Лоренца имеет вид (см. стр. 191):

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} - \frac{\gamma}{\gamma+1}\,(\mathbf{vS})\,\mathbf{v}. \tag{8.38}$$

Это обычное мгновенное преобразование Лоренца с $S_0 = \mathbf{vS}$, в котором скорость $\mathbf{v}$ является функцией времени $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$. Подставляя его в (8.37) и учитывая производную лоренцевского фактора $d\gamma/dt = \gamma^3\,(\mathbf{va})$, имеем:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} - \frac{\gamma}{\gamma+1}\left(\mathbf{v}\frac{d\mathbf{S}}{dt}\right)\mathbf{v} = \gamma\,(\mathbf{aS})\,\mathbf{v}. \tag{8.39}$$

Умножая на $\mathbf{v}$, находим $\mathbf{v}d\mathbf{S}/dt = \gamma^2\mathbf{v}^2(\mathbf{aS})$ и окончательно:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \gamma^2\,(\mathbf{aS})\,\mathbf{v}. \tag{8.40}$$

Все величины теперь полностью относятся к лабораторной системе, а ковариантная запись (8.40) имеет вид уравнения переноса Ферми:

$$\frac{d\mathrm{S}}{d\tau} = -(\mathrm{A}\cdot\mathrm{S})\,\mathrm{V} = -(\mathrm{V}\otimes\mathrm{A})\,\mathrm{S}, \tag{8.41}$$

где $\mathrm{A} = d\mathrm{V}/d\tau$ – 4 ускорение и $d\tau = \sqrt{1-\mathbf{v}^2}dt$ – собственное время. Во втором равенстве $(\mathrm{V}\otimes\mathrm{A})_{\alpha\beta}$ – матрица с элементами $V_\alpha A_\beta$.

Уравнение переноса можно получить из общековариантных соображений (см. стр. 192) без использования томасовской прецессии (8.36). В этом случае, можно пойти в обратном направлении: записав уравнение переноса (8.41), найти такую неинерциальную систему отсчёта, в которой 3-вектор спина будет испытывать прецессию (поворачиваться, не меняя своей длины). Прежде всего заметим, что длина 4-вектора спина остаётся при движении постоянной:

$$\frac{d\mathrm{S}^2}{d\tau} = 2\,\mathrm{S}\cdot\frac{d\mathrm{S}}{d\tau} = -2(\mathrm{A}\cdot\mathrm{S})\,(\mathrm{S}\cdot\mathrm{V}) = 0,$$

так как 4-спин ортогонален 4-скорости. Таким образом $S_0^2 - \mathbf{S}^2 = const$. Так как $S^0 = \mathbf{vS}$, в любой сопутствующей системе отсчёта, в которой гироскоп неподвижен ($\mathbf{v} = 0$ или $S^0 = 0$), длина 3-вектора спина остаётся постоянной $\mathbf{S}^2 = const$. Однако это ещё не означает, что спин прецессирует. В частности, в сопутствующей *инерциальной* системе отсчёта в данный момент времени $\mathbf{v} = 0$ и из (8.40) следует, что $d\mathbf{S}/dt = 0$. Так и должно быть, в силу определения параллельного переноса вектора спина относительно сопутствующей системы.

Чтобы прецессия возникла, сопутствующая спину система должна быть неинерциальной. При помощи лоренцевской матрицы $\Lambda = \Lambda(\tau)$ (не обязательно буста) сделаем преобразование $\mathrm{S}' = \Lambda\cdot\mathrm{S}$. Тогда из (8.41) несложно получить:

$$\frac{d\mathrm{S}'}{d\tau} = \Bigl(\frac{d\Lambda}{d\tau}\cdot\Lambda^{-1} - \Lambda\cdot(\mathrm{V}\otimes\mathrm{A})\cdot\Lambda^{-1}\Bigr)\cdot\mathrm{S}' = \Phi\cdot\mathrm{S}', \qquad (8.42)$$

где Λ^{-1} – обратная к Λ матрица, а через Φ обозначено матричное выражение в круглых скобках. Пусть преобразование Λ соответствует системе в которой $\mathrm{V} = \{1,\,\mathbf{0}\}$, $\mathrm{S}' = \{0,\,\mathbf{S}'\}$. Тогда из (8.42) следует: $S^i\Phi_{ij}S^j = 0$, т.е. пространственные компоненты ($i, j = 1, ..., 3$) матрицы $\Phi_{\alpha\beta}$ антисимметричны ($\Phi_{ij} = -\Phi_{ji}$). Кроме этого, S'^0 всё время будет равно нулю, если $\Phi_{0i} = 0$. Чтобы прецессия 3-вектора $\mathbf{S}'$ возникла, необходимо, чтобы элементы матрицы Φ_{ij} были отличны от нуля. Простейший выбор для матрицы Λ – это лоренцевский буст со скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$:

$$\Lambda^0_0 = \gamma, \qquad \Lambda^0_i = \Lambda^i_0 = -v_i\gamma, \qquad \Lambda^i_j = \delta^i_j + \Gamma v_i v_j. \qquad (8.43)$$

Подставляя эту матрицу в (8.42) мы получим (8.37) (это проще проделать в трёхмерных обозначениях, проведя вычисления предыдущей страницы в обратном порядке). Естественно, подобный выбор неинерциальной системы в которой есть прецессия спина *не единственен.* Любая вращающаяся система отсчёта относительно данной неинерциальной системы будет давать прецессию с некоторой угловой скоростью.

• В качестве второго примера выведем ещё раз уравнение прецессии стержня, связанного с неинерциальной системой S''. Подчеркнём, что, в отличие от спина, стержень является нелокальным объектом и связан не с одной точкой в пространстве, а с двумя (начало и конец стержня). Напомним (стр. 96), что для получения мгновенной формы движущегося тела в момент времени t в системе S необходимо записать преобразования Лоренца, таким образом, чтобы радиус-вектор $\mathbf{r}$ зависел от t и $\mathbf{r}'$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}t + \mathbf{r}' - \frac{\gamma}{\gamma+1}\,\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'). \tag{8.44}$$

Угол $d\phi$ кватерниона вращения определяет поворот, выполняемый *после* лоренцевского буста со скоростью $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Фактор Лоренца для такой скорости равен: $\gamma_{\mathbf{v}+d\mathbf{v}} \approx \gamma + \gamma^3\,(\mathbf{v}d\mathbf{v})$, ($\lessdot$ H_{124}), где $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$. Соответственно, в первом порядке малости по $d\mathbf{v}$, справедливо следующее выражение:

$$\frac{\gamma_{\mathbf{v}+d\mathbf{v}}}{\gamma_{\mathbf{v}+d\mathbf{v}}+1} \approx \frac{\gamma}{\gamma+1} + \frac{\gamma^3\,\mathbf{v}d\mathbf{v}}{(\gamma+1)^2}.$$

Обозначим со штрихами координаты после преобразования с $\mathbf{v}+d\mathbf{v}$ (переход от S к $\tilde{S}'$). Сделав в (8.44) замену $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + d\mathbf{v}$, сохраняя первый порядок малости по $d\mathbf{v}$, получим положение фиксированных точек $\mathbf{r}'$ системы $\tilde{S}'$ в системе S в момент времени $t = 0$ (по часам наблюдателя в S) :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \frac{\gamma}{\gamma+1}\left\{\mathbf{v}(\mathbf{v}\,\mathbf{r}' + d\mathbf{v}\,\mathbf{r}') + d\mathbf{v}(\mathbf{v}\,\mathbf{r}')\right\} - \frac{\gamma^3}{(\gamma+1)^2}\,\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\mathbf{r}')\,(\mathbf{v}d\mathbf{v}). \tag{8.45}$$

Последующий поворот на угол $d\phi$, переводящий $\tilde{S}'$ в S'', осуществляется преобразованием: $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - [\mathbf{n}\times\mathbf{r}']\,d\phi$. Обратное преобразование получается в результате замены $d\phi \mapsto -d\phi$:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'' + [\mathbf{n}\times\mathbf{r}'']\,d\phi,$$

или, используя выражение для угла (8.36), имеем:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'' + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\big\{\mathbf{v}(\mathbf{r}''d\mathbf{v}) - (\mathbf{r}''\mathbf{v})d\mathbf{v}\big\}.$$

Подставляя $\mathbf{r}'$ в (8.45), с сохранением первого порядка по $d\mathbf{v}$, получаем:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'' - \frac{\gamma}{\gamma+1}\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'') - \gamma(\mathbf{v}\mathbf{r}'')d\mathbf{v}, \tag{8.46}$$

Это соотношение даёт значения координат фиксированных точек $\mathbf{r}''$ системы S'' в системе S в момент времени $t = 0$, после *изменения* системой S'' скорости на $d\mathbf{v}$.

Поместим один конец стержня в начало системы S''. До изменения ею скорости (система S') координаты второго конца были равны:

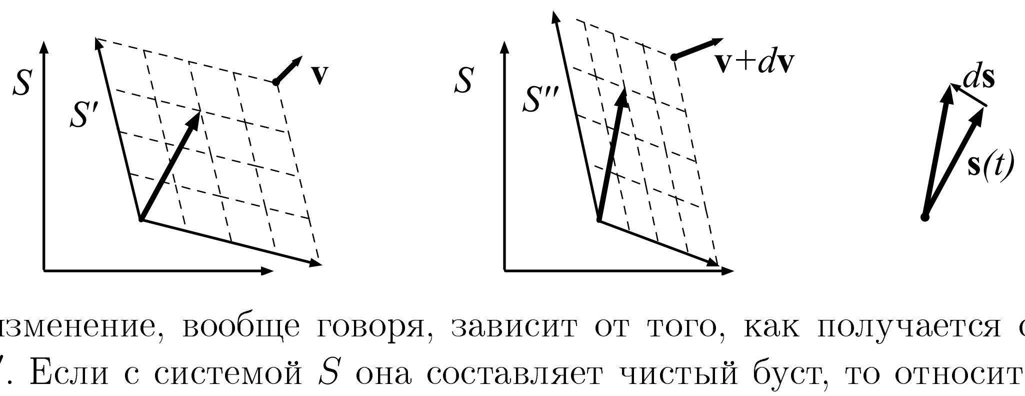
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \frac{\gamma}{\gamma+1}\,\mathbf{v}(\mathbf{v}\,\mathbf{r}'). \tag{8.47}$$

Пусть координаты стержня $\mathbf{r}'$ до изменения скорости и после изменения $\mathbf{r}''$ остались неизменными (относительно S' он *начинает* двигаться без вращения). Для неподвижных наблюдателей в системе S поворот стержня описывается разностью уравнений (8.46) и (8.47). Учитывая $\mathbf{vr} = \mathbf{vr}'/\gamma$, следующее из (8.47), вводя вектор, соединяющий концы стержня $\mathbf{s} = \mathbf{r}$ (начала всех систем при $t = 0$ совпадают) и его изменение $d\mathbf{s} = \mathbf{r}_{(8.47)} - \mathbf{r}_{(8.46)}$, мы снова приходим к уравнению (2.35), стр. 121:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\gamma^2\,(\mathbf{vs})\,\mathbf{a}, \tag{8.48}$$

где $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ – ускорение стержня. Таким образом, применение соотношения (8.36) для прецессии конкретного 3-вектора требует учёта ряда дополнительных факторов (в нашем случае фиксации формы стержня).

Наглядно вращение движущейся с переменной скоростью системы отсчёта изображено ниже на рисунках. Если система S' движется относительно S с произвольной скоростью $\mathbf{v}$, то линии координатной сетки будут определённым образом "сплюснуты" и повёрнуты (первая картинка). Если скорость системы изменяется, то координатная сетка получает новый поворот и деформацию (вторая картинка). Если некоторый *протяженный* вектор (направленный отрезок) имеет фиксированные координаты в движущейся системе отсчёта, то при изменении скорости они изменятся относительно лабораторной системы.



Это изменение, вообще говоря, зависит от того, как получается система S''. Если с системой S она составляет чистый буст, то относительно лабораторной системы вигнеровского вращения нет и поворот будет возникать только в результате эффекта лоренцевского сокращения длины. В случае же, если S'' получается чистым бустом из системы S', то относительно S будет наблюдаться как вигнеровское вращение, так и деформация координатной сетки, обусловленная лоренцевским сокращением длины. Именно второй случай и был рассмотрен выше.

8.5 Кватернионы и 4-векторы

По определению, любой 4-вектор $a^\mu = \{a^0,\, \mathbf{a}\}$ при преобразованиях Лоренца изменяется также как и 4-вектор положения в пространстве-времени $x^\mu = \{t,\, \mathbf{r}\}$. Поэтому с компонентами 4-вектора мы всегда можем связать кватернион

$$\mathbb{A} = a_0 + \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma},$$

изменяющийся при общих преобразованиях Лоренца (включающих буст и поворот) следующим образом:

$$\mathbb{A}' = \mathbb{S}\,\mathbb{A}\,\mathbb{S}^+, \qquad\qquad \mathbb{S}\bar{\mathbb{S}} = \mathbb{I}. \tag{8.49}$$

Например, если $d\tau = dt\sqrt{1-\mathbf{v}^2} = dt/\gamma$ – собственное время частицы, то её *кватернион скорости* равен:

$$\mathbb{U} = \frac{d\mathbb{X}}{d\tau} = \gamma + \gamma\,\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}.$$

Норма кватерниона скорости (квадрат 4-вектора) равна единице:

$$\mathbb{U}\bar{\mathbb{U}} = \mathbb{I}. \tag{8.50}$$

Дифференцируя это соотношение по $d\tau$ и вводя *кватернион ускорения* $\mathbb{A} = d\mathbb{U}/d\tau$, получаем кватернионное соотношение ортогональности скорости и ускорения в виде:

$$\mathbb{U}\bar{\mathbb{A}} + \mathbb{A}\bar{\mathbb{U}} = 0.$$

Кватернион импульса (или энергии-импульса) пропорционален кватерниону скорости, с коэффициентом равным массе частицы:

$$\mathbb{P} = m\mathbb{U} = E + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}.$$

Произведение кватерниона импульса на его сопряжение, в силу стандартной связи между энергией и импульсом или сразу в соответствии с (8.50), пропорциональна квадрату массы:

$$\mathbb{P}\bar{\mathbb{P}} = m^2\,\mathbb{I}.$$

Подобно положению, скорости, ускорению и импульсу несложно определить и другие кватернионные аналоги 4-векторов. Инвариантной свёрткой двух кватернионов $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$, построенных по компонентам 4-векторов $\mathrm{A} = \{A^0,\, \mathbf{A}\}$ и $\mathrm{B} = \{B^0,\, \mathbf{B}\}$ будет следующая комбинация:

$$\mathbb{A}\bar{\mathbb{B}} + \mathbb{B}\bar{\mathbb{A}} = 2(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})\,\mathbb{I},$$

где использовано тождество (8.13), стр. 509.

• Перейдём теперь к антисимметричным 4-тензорам. Определим *кватернион момента импульса*:

$$\mathbb{J} = \frac{1}{2}\,(\mathbb{X}\bar{\mathbb{P}} - \mathbb{P}\bar{\mathbb{X}}) = (\mathbf{G} - \imath\mathbf{L})\boldsymbol{\sigma}. \tag{8.51}$$

Во втором равенстве при помощи (8.14), стр. 509 введены два 3-вектора $\mathbf{G} = E\,\mathbf{r} - t\,\mathbf{p}$ и $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$. Через них выражаются (стр. 184) шесть независимых компонент антисимметричного тензора $J^{\mu\nu} = (\mathbf{G},\,\mathbf{L})$, где $\mathbf{G} = \{J^{10},\,J^{20},\,J^{30}\}$ и $\mathbf{L} = \{J^{23},\,J^{31},\,J^{12}\}$. Кватернион $\mathbb{J}$ не имеет скалярной части, а векторная его часть комплексна. Это общее свойство кватернионов, являющихся аналогами антисимметричных 4-тензоров $J^{\mu\nu}$. После опускания у них индексов вниз, снова получается антисимметричный тензор $J_{\mu\nu} = (-\mathbf{G},\,\mathbf{L})$. Наконец, из тензора $J_{\mu\nu}$ можно построить *дуальный* к нему антисимметричный тензор (стр. 183):

$${}^*J^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}J_{\alpha\beta}.$$

В его компонентах два 3-вектора тензора $J_{\mu\nu}$ меняются друг с другом местами: ${}^*J^{\mu\nu} = (\mathbf{L},\,-\mathbf{G})$ и ${}^*J_{\mu\nu} = (-\mathbf{L},\,-\mathbf{G})$. Несложно видеть, что можно записать следующие правила соответствия между антисимметричными тензорами и кватернионами:

$$J^{\mu\nu} \leftrightarrow\ \mathbb{J}, \qquad J_{\mu\nu} \leftrightarrow\ \bar{\mathbb{J}}^{+}, \qquad {}^*J^{\mu\nu} \leftrightarrow\ \imath\mathbb{J}, \qquad {}^*J_{\mu\nu} \leftrightarrow\ \imath\mathbb{J}^{+}. \tag{8.52}$$

Аналогичные правила для связи контравариантных и ковариантных компонент 4-векторов и кватернионов имеют вид:

$$A^{\mu}\ \leftrightarrow\ \mathbb{A}, \qquad\qquad A_{\mu} \leftrightarrow \bar{\mathbb{A}}. \tag{8.53}$$

Свёртка антисимметричного тензора $J^{\mu\nu} = (\mathbf{G},\,\mathbf{L})$ и произвольного 4-вектора $A^{\mu} = \{A^0,\,\mathbf{A}\}$ даёт 4-вектор с компонентами:

$$J^{\mu\nu}A_{\nu} = \{\,\mathbf{G}\mathbf{A},\ A^0\mathbf{G} + \mathbf{L}\times\mathbf{A}\,\}.$$

Прямым перемножением кватернионов, можно проверить, что такие же компоненты имеет кватернион:

$$J^{\mu\nu}A_{\nu} \leftrightarrow \frac{1}{2}\,(\mathbb{J}\mathbb{A} + \mathbb{A}\mathbb{J}^{+}). \tag{8.54}$$

Отсюда следует, что, например, 4-вектор спина (стр. 188) в кватернионных обозначениях имеет вид:

$$S^{\mu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,J_{\alpha\beta}\,U_{\nu} = {}^*J^{\mu\nu}U_{\nu} \quad\leftrightarrow\quad \frac{\imath}{2}(\mathbb{J}\mathbb{U} - \mathbb{U}\mathbb{J}^{+}).$$

Таким образом, любые соотношения с 4-векторами и антисимметричными 4-тензорами могут быть выражены на языке кватернионов.

• Найдём как преобразуется кватернион момента импульса (и, следовательно, любой антисимметричный 4-тензор) при преобразованиях Лоренца. Так как $\mathbb{X}$ и $\mathbb{P}$ кватернионы, связанные с 4-векторами, имеем:

$$\mathbb{X}'\bar{\mathbb{P}}' = \mathbb{S}\mathbb{X}\mathbb{S}^+\,\overline{\mathbb{S}\mathbb{P}\mathbb{S}^+} = \mathbb{S}\mathbb{X}\mathbb{S}^+\,\bar{\mathbb{S}}^+\bar{\mathbb{P}}\bar{\mathbb{S}} = \mathbb{S}(\mathbb{X}\bar{\mathbb{P}})\bar{\mathbb{S}},$$

где учтено, что $\mathbb{S}\bar{\mathbb{S}} = \mathbb{I}$ или $\mathbb{S}^+\,\bar{\mathbb{S}}^+ = \mathbb{I}$. Аналогично для $\mathbb{P}\bar{\mathbb{X}}$. Поэтому:

$$\mathbb{J}' = \mathbb{S}\,\mathbb{J}\,\bar{\mathbb{S}}. \tag{8.55}$$

Этот закон отличается от закона преобразования (8.49) тем, что справа стоит не эрмитово, а обычно сопряженный кватернион $\mathbb{S}$ (с чертой). То, что $\mathbb{J}$ имеет закон преобразования, отличный от закона преобразования, например, координат $\mathbb{X}$ – неудивительно, т.к. кватернион $\mathbb{J}$ соответствует антисимметричному 4-тензору, а не 4-вектору. При пространственных поворотах $\mathbb{S} = \mathbb{R}$, векторная часть кватерниона $\mathbb{R}$ чисто комплексная, поэтому $\mathbb{R}^+ = \bar{\mathbb{R}}$. Следовательно, в этом случае $\mathbb{J}$, зависящий от комплексного вектора $\mathbf{G} - \imath\mathbf{L}$, преобразуется как и любой 3-вектор. Если же $\mathbb{S}^+ \neq \bar{\mathbb{S}}$ (например, для лоренцевских бустов), применение соотношений (8.49) и (8.55) будет давать различные результаты.

Тем не менее, несложно проверить, что оба преобразования (8.49) и (8.55) оставляют инвариантной норму кватерниона (стр. 513). Обозначим $\mathbf{J} = \mathbf{G} - \imath\mathbf{L}$, тогда

$$\mathbb{J}\bar{\mathbb{J}} = -(\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}) = -\mathbf{J}^2 = \mathbf{L}^2 - \mathbf{G}^2 + 2\imath\,\mathbf{L}\mathbf{G} = inv,$$

а, следовательно, инвариантными будут независимо действительная и мнимая части:

$$\mathbf{L}^2 - \mathbf{G}^2 = inv, \qquad\qquad \mathbf{L}\mathbf{G} = inv.$$

Эти инварианты были получены ранее другими методами (стр. 181). Любопытно, что они эквивалентны одному соотношению $\mathbf{J}^2 = inv$, но для комплексного вектора.

Убедимся, что соотношение (8.54) в котором происходит перемножение антисимметричного тензора и 4-вектора снова приводит к кватерниону, преобразующемуся как 4-вектор. Подставим законы преобразования каждой величины:

$$\mathbb{J}\mathbb{A} + \mathbb{A}\mathbb{J}^+ \mapsto (\mathbb{S}\mathbb{J}\bar{\mathbb{S}})\,(\mathbb{S}\mathbb{A}\mathbb{S}^+) + (\mathbb{S}\mathbb{A}\mathbb{S}^+)\,(\mathbb{S}\mathbb{J}\bar{\mathbb{S}})^+ = \mathbb{S}(\mathbb{J}\mathbb{A} + \mathbb{A}\mathbb{J}^+)\mathbb{S}^+,$$

где мы воспользовались единичностью нормы кватерниона преобразования $\mathbb{S}$. Таким образом, получилось исходная комбинация кватернионов окруженная кватернионами $\mathbb{S}...\mathbb{S}^+$, что соответствует преобразованию 4-вектора. Заметим, что $\mathbb{J}\mathbb{A}$ также 4-вектор, но комплексный, тогда как приведенная комбинация действительна.

• Соотношение (8.55), применённое к $\mathbb{J} = \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}$, где $\mathbf{J} = \mathbf{G} - \imath\mathbf{L}$ позволяет найти преобразования векторов $\mathbf{G}$ и $\mathbf{L}$ при изменении инерциальной системы отсчёта. Распишем его в явном виде:

$$\mathbf{J}'\boldsymbol{\sigma} = (c - s\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma})\,\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}\,(c + s\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}),$$

где $c = \mathrm{ch}(\alpha/2)$, $s = \mathrm{sh}(\alpha/2)$ и подставлен кватернион $\mathbb{S} = \mathbb{L}$ лоренцевского буста, см. (8.26), стр. 516. Перемножая матрицы, получаем:

$$\mathbf{J}'\boldsymbol{\sigma} = c^2\,\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma} - s^2(\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}) + sc\,[\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}].$$

Вычисляя коммутатор $[\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}]$ при помощи соотношения (8.10), стр. 509, а произведение трех матриц Паули при помощи последовательного применения тождества (8.7), имеем:

$$\mathbf{J}'\boldsymbol{\sigma} = (c^2 + s^2)\,\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma} + 2\imath sc\,[\mathbf{J}\times\mathbf{m}]\,\boldsymbol{\sigma} - 2s^2(\mathbf{J}\mathbf{m})(\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}).$$

Переходя от гиперболических функций с половинными “углами” $\alpha/2$ к функциям, зависящим от α, получаем закон преобразования комплексного вектора $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J}\,\mathrm{ch}\,\alpha - \imath\,\mathrm{sh}\,\alpha[\mathbf{m}\times\mathbf{J}] - (\mathrm{ch}\,\alpha - 1)(\mathbf{m}\mathbf{J})\mathbf{m}.$$

Как и в случае с преобразованиями Лоренца для 4-вектора, более привычная запись преобразования получается после перехода от быстроты α к скорости $\mathbf{v}$, γ-фактору и фактору $\Gamma = (\gamma - 1)/v^2$, см. стр. 517:

$$\mathbf{J}' = \gamma\,(\mathbf{J} - \imath\,\mathbf{v}\times\mathbf{J}) - \Gamma\,\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\mathbf{J}). \tag{8.56}$$

Действительная часть этого соотношения даёт закон преобразования вектора $\mathbf{G}$, а комплексная – вектора $\mathbf{L}$ (см. стр. 185):

$$\begin{aligned} \mathbf{G}' &= \gamma\,(\mathbf{G} - \mathbf{v}\times\mathbf{L}) - \Gamma\,\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{G}),\\ \mathbf{L}' &= \gamma\,(\mathbf{L} + \mathbf{v}\times\mathbf{G}) - \Gamma\,\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{L}). \end{aligned}$$

Как мы видим, преобразование (8.56) для комплексного 3-вектора $\mathbf{J}$, следующее из кватернионной техники, выглядит более компактным по сравнению с преобразованиями для двух векторных компонент антисимметричного тензора $J_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha$.

Вообще, теория относительности, построенная на языке кватернионов, в ряде случаев оказывается более лаконичной, чем при использовании обычных векторных обозначений или тензорного ковариантного аппарата. Платой за это являются матрицы, которые обеспечивают некоммутативную природу кватернионов.

8.6 Кватернионная электродинамика

Уравнения электродинамики в оригинальных работах Джеймса Клерка Максвелла имели достаточно громоздкий внешний вид, так как записывались в не векторных обозначениях. Вместо значков дивергенции и ротора использовались частные производные и каждое уравнение выписывалось покомпонентно. Благодаря Оливеру Хевисайду эти уравнения приобрели существенно более компактный и привычный нам вид, сократившись с восьми уравнений до четырех. После появления теории относительности Герман Минковский придумал как записать уравнения электродинамики в ещё более компактной форме, уменьшив их количество с четырех до двух. Кватернионы дают нам замечательную возможность свести все уравнения Максвелла только к *одному* матричному уравнению. Вот это уравнение:

$$\bar{\mathbb{D}}\mathbb{F} = 4\pi\bar{\mathbb{J}}. \tag{8.57}$$

Разберемся с входящими в него величинами. Компоненты *кватерниона тока* $\mathbb{J}$ являются плотностями заряда ρ и тока $\mathbf{j}$:

$$\mathbb{J} = \rho + \mathbf{j}\boldsymbol{\sigma}, \qquad\qquad \bar{\mathbb{J}} = \rho - \mathbf{j}\boldsymbol{\sigma}, \tag{8.58}$$

где черта над кватернионом – это его сопряжение (смена знака в векторной части). Аналогично определяется *кватернион производной*:

$$\mathbb{D} = \partial_0 - \boldsymbol{\sigma}\nabla, \qquad\qquad \bar{\mathbb{D}} = \partial_0 + \boldsymbol{\sigma}\nabla. \tag{8.59}$$

Обратим внимание на различие знаков в векторной части для $\mathbb{J}$ и $\mathbb{D}$. Напомним, что 4-вектор производной с верхним индексом имеет компоненты $\partial^\nu = \partial/\partial x_\nu = \{\partial_0,\ -\nabla\}$. Так как с любым 4-вектором $A^\nu = \{A^0,\ \mathbf{A}\}$ мы связываем кватернион $\mathbb{A} = A^0 + \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}$, а пространственные компоненты 4-вектора ∂^ν содержат знак минус, он появляется и в векторной части кватерниона $\mathbb{D}$. Норма кватерниона производной равна оператору Д'Аламбера:

$$\mathbb{D}\bar{\mathbb{D}} = \mathbb{I}\partial^2 = \mathbb{I}(\partial_0^2 - \Delta).$$

Наконец, третья величина, входящая в уравнение (8.57) является кватернионом напряженности электромагнитного поля:

$$\mathbb{F} = \mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}. \tag{8.60}$$

Он не имеет скалярной части, а его векторная часть комплексна:

$$\mathbf{f} = \mathbf{E} + \imath\mathbf{B}, \tag{8.61}$$

где $\mathbf{E}$ – электрическое и $\mathbf{B}$ – магнитное поля. Это кватернион соответствует антисимметричному тензору $F^{\mu\nu}$.

Убедимся, что (8.57), действительно содержит в себе все уравнения Максвелла. Подставим в него кватернионы (8.58), (8.59) и (8.60):

$$(\partial_0 + \boldsymbol{\sigma}\nabla)\mathbf{f}\boldsymbol{\sigma} = 4\pi\,(\rho - \mathbf{j}\boldsymbol{\sigma}).$$

Перемножая при помощи (8.7), стр. 508 матрицы Паули, получаем:

$$\partial_0\mathbf{f}\boldsymbol{\sigma} + \nabla\mathbf{f} + \imath[\nabla\times\mathbf{f}]\boldsymbol{\sigma} = 4\pi\rho - 4\pi\mathbf{j}\boldsymbol{\sigma}. \tag{8.62}$$

В предыдущих разделах мы приравнивали по отдельности скалярные и векторные части в кватернионных выражениях. Докажем, что это, вообще говоря, можно делать. След матриц Паули равен нулю. Кроме этого, из тождества (8.6), стр. 508 следует, что

$$\mathrm{Tr}(\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij}.$$

Любое матричное уравнение $A_0 + \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} = 0$ эквивалентно $A_0 = 0$ и $\mathbf{A} = 0$. Действительно, беря след уравнения и учитывая, что $\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\sigma} = 0$, получаем $A_0 = 0$. Умножая уравнение на σ_i и беря след, получаем A^i.

Поэтому, скалярная часть приравнивая в (8.62) приводит к уравнению:

$$\nabla(\mathbf{E} + \imath\mathbf{B}) = 4\pi\rho.$$

Его действительная часть даёт закон Гаусса для электрического поля, а комплексная – закон Гаусса для магнитного поля:

$$\nabla\mathbf{E} = 4\pi\rho, \qquad\qquad \nabla\mathbf{B} = 0.$$

Остальные члены уравнения (8.62) дают:

$$\partial_0(\mathbf{E} + \imath\mathbf{B}) + \nabla\times(\imath\mathbf{E} - \mathbf{B}) = -4\pi\mathbf{j}.$$

Снова разбивая его на действительную и мнимую части, получаем оставшиеся два уравнения Максвелла:

$$\nabla\times\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j} + \partial_0\mathbf{E}, \qquad\qquad \partial_0\mathbf{B} = -\nabla\times\mathbf{E}.$$

Из матричного уравнения поля (8.57) следует следующее соотношение:

$$4\pi\ \mathrm{Tr}(\mathbb{D}\bar{\mathbb{J}}) = \mathrm{Tr}(\mathbb{D}\bar{\mathbb{D}}\mathbb{F}) = \partial^2\,\mathrm{Tr}(\mathbb{I}\mathbb{F}) = \partial^2\mathbf{f}\,\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\sigma} = 0,$$

где учтено, что след матриц Паули равен нулю. Поэтому *уравнение непрерывности* для тока в кватернионных обозначениях имеет вид:

$$\frac{1}{2}\ \mathrm{Tr}(\mathbb{D}\bar{\mathbb{J}}) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\mathbf{j} = 0. \tag{8.63}$$

Второе равенство получается в результате перемножения (8.58) и (8.59), с последующим взятием следа (след единичной матрицы 2x2 равен 2).

• Скалярный φ и векторный $\mathbf{A}$ потенциалы определяют компоненты *кватерниона потенциала*:

$$\mathbb{A} = \varphi + \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}.$$

Кватернион напряженности можно связать с кватернионом потенциала следующим образом:

$$\mathbb{F} \;=\; \frac{1}{2}\,(\mathbb{D}\bar{\mathbb{A}} - \overline{\mathbb{D}\bar{\mathbb{A}}}) \;=\; \frac{1}{2}\,(\mathbb{D}\bar{\mathbb{A}} - \mathbb{A}\overset{\leftarrow}{\bar{\mathbb{D}}}), \tag{8.64}$$

где стрелка над производной означает, что оператор действует справа налево (а не как обычно слева направо). Убедимся, что это определение приводит к выражению $\mathbb{F} = (\mathbf{E} + \imath\mathbf{B})\boldsymbol{\sigma}$. Для этого вычислим матричные произведения:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\bar{\mathbb{A}} &= (\partial_0 - \boldsymbol{\sigma}\nabla)(\varphi - \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}) = \partial\cdot\mathrm{A} + (\mathbf{E} + \imath\mathbf{B})\boldsymbol{\sigma}, \\ \mathbb{A}\overset{\leftarrow}{\bar{\mathbb{D}}} &= (\varphi + \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma})\,(\overset{\leftarrow}{\partial_0} + \boldsymbol{\sigma}\overset{\leftarrow}{\nabla}) = \partial\cdot\mathrm{A} - (\mathbf{E} + \imath\mathbf{B})\boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \tag{8.65}$$

где $\partial\cdot\mathrm{A} = \partial_0\varphi + \nabla\mathbf{A}$ и учтено, что $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial_0\mathbf{A}$ и $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$. Вычитая эти соотношения и деля на 2, получаем $\mathbb{F}$.

Кватернион потенциала, как и 4-потенциал можно изменить, не меняя кватерниона напряженности $\mathbb{F}$. Выполним *калибровочное преобразование*

$$\mathbb{A} \mapsto \mathbb{A}' = \mathbb{A} + \mathbb{D}\Lambda,$$

где Λ произвольная скалярная функция координат. Это преобразование не изменяет тензора электромагнитного поля. Действительно:

$$\mathbb{F}' = \mathbb{F} + \frac{1}{2}\,(\mathbb{D}\bar{\mathbb{D}} - \mathbb{D}\bar{\mathbb{D}})\Lambda = \mathbb{F}. \tag{8.66}$$

В *калибровке Лоренца* $\partial\cdot\mathrm{A} = 0$ (стр. 321) из (8.65) следует, что:

$$\mathbb{D}\bar{\mathbb{A}} = -\mathbb{A}\overset{\leftarrow}{\bar{\mathbb{D}}},$$

поэтому связь потенциалов и напряженностей упрощается:

$$\mathbb{F} = \mathbb{D}\bar{\mathbb{A}}.$$

В этом случае, в силу уравнений Максвелла (8.57), кватернионный потенциал удовлетворяет уравнению:

$$\partial^2\bar{\mathbb{A}} = 4\pi\bar{\mathbb{J}}$$

или аналогичному без черточек сопряжения.

• Определение кватерниона напряженностей $\mathbb{F}$ через кватернион потенциалов $\mathbb{A}$ приводит к выполнению следующего уравнения:

$$\mathbb{D}\mathbb{F}^{+} - \mathbb{F}\overleftarrow{\mathbb{D}} = 0. \tag{8.67}$$

Действительно, кватернионы $\mathbb{D}$ и $\mathbb{A}$ имеют действительные коэффициенты, поэтому они эрмитовы ($\mathbb{D}^{+} = \mathbb{D}$ и $\mathbb{A}^{+} = \mathbb{A}$). Следовательно при *любом* кватернионе $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{D}\mathbb{F}^{+} - \mathbb{F}\overleftarrow{\mathbb{D}} = \frac{1}{2}\,\mathbb{D}(\bar{\mathbb{A}}\overleftarrow{\mathbb{D}} - \bar{\mathbb{D}}\mathbb{A}) - \frac{1}{2}\,(\mathbb{D}\bar{\mathbb{A}} - \mathbb{A}\overleftarrow{\bar{\mathbb{D}}})\overleftarrow{\mathbb{D}} = 0,$$

так как $\mathbb{D}\bar{\mathbb{D}} = \mathbb{I}\partial^2$ и единичная матрица $\mathbb{I}$ перестановочна с $\mathbb{A}$.

Подставляя в (8.67) кватернионы $\mathbb{F} = \mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbb{D} = \partial_0 - \boldsymbol{\sigma}\nabla$ и учитывая тождество (8.7), стр. 508, получаем:

$$\nabla(\mathbf{f} - \mathbf{f}^{*}) = \partial_0(\mathbf{f} - \mathbf{f}^{*})\boldsymbol{\sigma} + \imath\nabla \times (\mathbf{f} + \mathbf{f}^{*})\boldsymbol{\sigma}.$$

Скалярная часть этого уравнения даёт закон Гаусса для магнитного поля $\nabla(\mathbf{f} - \mathbf{f}^{*}) = 2\imath\nabla\mathbf{B} = 0$, а векторная – закон электромагнитной индукции Фарадея: $\partial_0\mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0$. Таким образом, (8.67) эквивалентно ковариантному уравнению Максвелла без токов.

Запишем еще одно уравнение для кватерниона напряженностей:

$$\frac{1}{2}\,(\mathbb{D}\mathbb{F}^{+} + \mathbb{F}\overleftarrow{\mathbb{D}}) = -4\pi\mathbb{J}. \tag{8.68}$$

Если мы учтем, что в соответствии с (8.67) $\mathbb{D}\mathbb{F}^{+} = \mathbb{F}\overleftarrow{\mathbb{D}}$, то из (8.68) следует:

$$\mathbb{F}\overleftarrow{\mathbb{D}} = -4\pi\mathbb{J}. \tag{8.69}$$

Сопряжение этого уравнение даёт (8.57), так как $\bar{\mathbb{F}} = -\mathbb{F}$.

Тем не менее (8.68) является менее общим, чем (8.57), так как оно приводит только к уравнениям Максвелла с источниками (плотностями зарядов и токов). Действительно, подставляя в (8.68) определения кватернионов, получаем:

$$\frac{1}{2}\,(\partial_0(\mathbf{f} + \mathbf{f}^{*})\boldsymbol{\sigma} - \nabla(\mathbf{f} + \mathbf{f}^{*}) + \imath\,[\nabla \times (\mathbf{f} - \mathbf{f}^{*})]\,\boldsymbol{\sigma}) = -4\pi(\rho + \mathbf{j}\boldsymbol{\sigma}).$$

Скалярные члены (без матриц Паули) уравнения дают закон Гаусса для электрического поля: $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{E} = 4\pi\rho$, а векторные (с матрицами Паули) – закон Ампера-Максвелла: $\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j} + \partial_0\mathbf{E}$.

Таким образом, полная система кватернионных уравнений электродинамики состоит или из двух уравнений (8.67) и (8.68), или одного, эквивалентного им уравнения (8.57).

8.7 Движение в электромагнитном поле

• Перейдем теперь к уравнениям движения. В тензорных обозначениях сила Лоренца, действующая на заряд q с массой m, приводит к изменению импульса (или скорости) частицы (стр. 425):

$$m\frac{du^\alpha}{ds} = qF^{\alpha\beta}\,u_\beta, \tag{8.70}$$

где компоненты 4-вектора скорости $u^\alpha = \{u^0,\, \mathbf{u}\}$ связаны с 3-скоростью при помощи стандартных соотношений $u_0 = \gamma = 1/\sqrt{1-\mathbf{v}^2}$ и $\mathbf{u} = \gamma\mathbf{v}$. Обратим внимание, что в этом разделе вектор $\mathbf{u}$ обозначает пространственные компоненты 4-вектора, тогда как обычная скорость $d\mathbf{r}/dt$ обозначается вектором $\mathbf{v}$. Тензор напряженности электромагнитного поля $F^{\alpha\beta}$ считается заданным, а заряд "пробным", в том смысле, что его собственное поле не искажает $F^{\alpha\beta}$ (т.е. мы не учитываем эффекты самодействия, стр. 482).

При помощи кватерниона точки в пространстве-времени $\mathbb{X} = t + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}$ в предыдущем разделе мы определили *кватернион скорости* с единичной нормой:

$$\mathbb{U} = \frac{d\mathbb{X}}{ds} = u_0 + \mathbf{u}\boldsymbol{\sigma}.$$

Интервал ds (он же собственное время заряда) является инвариантом преобразований Лоренца, поэтому производная по нему не нарушает ковариантности кватернионных уравнений. Кватернион скорости эрмитов ($\mathbb{U}^+ = \mathbb{U}$), так как действительны его компоненты. Поэтому, сила Лоренца, пропорциональная произведению скорости и напряженности, также должна быть также эрмитова. В тоже время кватернион $\mathbb{F}$ не является эрмитовым ($\mathbb{F}^+ = \mathbf{f}^*\boldsymbol{\sigma}$). Чтобы правая часть была эрмитовой к произведению $\mathbb{F}\mathbb{U}$ необходимо добавить его эрмитово сопряжение. В результате кватернионные уравнения движение имеют вид:

$$m\,\frac{d\mathbb{U}}{ds} = \frac{q}{2}\,(\mathbb{F}\mathbb{U} + \mathbb{U}\mathbb{F}^+). \tag{8.71}$$

Множитель $1/2$ проверяется повторением стандартных выкладок с матрицами Паули. Скалярная часть (8.71) приводит к уравнению для изменения энергии, а векторная к трёхмерной силе Лоренца (напомним, что кватернион импульса равен $\mathbb{P} = m\mathbb{U} = E + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}$). Заметим, что кватернионное уравнение движения можно сразу получить из (8.70) при помощи правила соответствия (8.54), стр. 527.

• Если есть только магнитное поле $\mathbf{f} = \imath\mathbf{B}$, то кватернион напряженности является *антиэрмитовым* ($\mathbb{F}^+ = -\mathbb{F}$). В этом случае в правой части уравнения (8.71) находится коммутатор напряженности и скорости $[\mathbb{F}, \mathbb{U}] = \mathbb{F}\mathbb{U} - \mathbb{U}\mathbb{F}$. Под знаком выделения скалярной части кватерниона сомножители можно переставлять местами (стр. 509): $\lfloor \mathbb{F}\mathbb{U} \rfloor = \lfloor \mathbb{U}\mathbb{F} \rfloor$. Поэтому скалярная часть коммутатора равна нулю и скалярная часть скорости сохраняется $\lfloor \mathbb{U} \rfloor = const$. Это приводит к сохранению энергии $E = \lfloor \mathbb{P} \rfloor = m\lfloor \mathbb{U} \rfloor$ заряда при движении в *произвольном* магнитном поле.

Найдём общее решение уравнения (8.71). Для этого представим кватернион скорости в следующем виде:

$$\mathbb{U}(s) = e^{\mathbb{G}(s)}\, \mathbb{U}(0)\, e^{\mathbb{G}^+(s)},$$

где $\mathbb{G}(s)$ некоторый кватернион, равный нулевому при $s = 0$ (начальные условия содержатся в $\mathbb{U}(0)$, а эрмитово сопряжение во второй экспоненте поставлено для сохранения эрмитовости скорости). Подставим это выражение в уравнения движения:

$$m\frac{d\mathbb{U}}{ds} = m\frac{d\mathbb{G}}{ds}\,\mathbb{U} + m\mathbb{U}\frac{d\mathbb{G}^+}{ds} = \frac{q}{2}\,(\mathbb{F}\mathbb{U} + \mathbb{U}\mathbb{F}^+).$$

Несложно видеть, что это уравнение выполняется, если кватернион $\mathbb{G}$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d\mathbb{G}}{ds} = \frac{q}{2m}\,\mathbb{F}.$$

Интегрируя его, приходим к следующему представлению решения уравнений движения (8.71):

$$\mathbb{U}(s) = \exp\left(\frac{q}{2m}\int\limits_0^s \mathbb{F}(s)ds\right)\,\mathbb{U}(0)\,\exp\left(\frac{q}{2m}\int\limits_0^s \mathbb{F}^+(s)ds\right). \qquad (8.72)$$

В случае, когда внешние электрическое и магнитное поля *постоянны* $\mathbf{f} = \mathbf{E} + \imath\mathbf{B} = const$, кватернион напряженности $\mathbb{F}$ можно вынести за интеграл и решение имеет принимает вид:

$$\mathbb{U}(s) = \exp\left(\frac{q}{2m}\,\mathbb{F}s\right)\,\mathbb{U}(0)\,\exp\left(\frac{q}{2m}\,\mathbb{F}^+s\right). \qquad (8.73)$$

Обратим внимание, что в показателе экспонент стоят матрицы, поэтому полученные решения несколько формальны. Однако, в ряде случаев их можно записать в полярной или гиперполярной форме (стр. 511), опустив матрицы вниз. Рассмотрим несколько примеров.

• Пусть заряд движется в постоянном электрическом поле $\mathbf{f} = \mathbf{E}$. В этом случае кватернион напряженности эрмитов ($\mathbb{F}^+ = \mathbb{F}$). Простое решение получается, если в начальный момент времени заряд неподвижен и, следовательно, кватернион скорости при $s = 0$ является единичным $\mathbb{U}(0) = \mathbb{I}$ (единичная матрица). Тогда уравнение (8.73) упрощается:

$$\mathbb{U}(s) = \exp\Bigl(\frac{q}{m}\,\mathbb{F}s\Bigr) = \exp\Bigl(\frac{q}{m}\,\mathbf{E}\boldsymbol{\sigma}s\Bigr). \tag{8.74}$$

Используя гиперполярное представление кватерниона (8.15), стр. 511, имеем:

$$\mathbb{U}(s) = \mathrm{ch}(\omega s) + \mathbf{e}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{sh}(\omega s), \tag{8.75}$$

где $\omega = q|\mathbf{E}|/m$ и $\mathbf{e} = \mathbf{E}/|\mathbf{E}|$ – единичный вектор в направлении электрического поля. Выделяя в (8.75) слагаемые без матриц Паули и с ними, получаем:

$$u_0(s) = \mathrm{ch}(\omega s), \qquad\qquad \mathbf{u}(s) = \mathbf{e}\;\mathrm{sh}(\omega s). \tag{8.76}$$

Несложно видеть, что для этого решения выполняется общее соотношение для компонент 4-скорости $u_0^2 - \mathbf{u}^2 = 1$.

Так как $u^\mu = \{u_0, \mathbf{u}\} = dx^\mu/ds$, интегрируя по s (8.76), получаем выражения для лабораторного времени и координат заряда:

$$t = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{sh}(\omega s), \qquad\qquad \mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + \frac{\mathbf{e}}{\omega}\,(\mathrm{ch}(\omega s) - 1). \tag{8.77}$$

В первом случае константа интегрирования выбрана равной нулю, так как при $s = 0$ имеем $t = 0$. В выражении для радиус вектора константа подобрана, таким образом чтобы при $s = 0$ вектор $\mathbf{r}(s)$ был равен начальному положению заряда $\mathbf{r}(0)$. При помощи тождества $\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{sh}^2\alpha = 1$ для гиперболических функций можно выразить гиперболический косинус через синус и тем самым перейти от параметрического представления решения (8.77) к явной зависимости координат частицы от лабораторного времени:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \frac{\mathbf{e}}{\omega}\,(\sqrt{1 + (\omega t)^2} - 1).$$

Это решение было получено различными способами ранее (стр. 164, 489).

Если начальная скорость заряда отлична от нуля, кватернион $\mathbb{U}(0)$ не является единичным. Чтобы найти соответствующее решение $\mathbb{U}(s)$ необходимо перемножить кватернионы:

$$\Bigl\{\mathrm{ch}\Bigl(\frac{\omega s}{2}\Bigr) + \mathbf{e}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{sh}\Bigl(\frac{\omega s}{2}\Bigr)\Bigr\}\,\{u_0(0) + \mathbf{u}(0)\boldsymbol{\sigma}\}\,\Bigl\{\mathrm{ch}\Bigl(\frac{\omega s}{2}\Bigr) + \mathbf{e}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{sh}\Bigl(\frac{\omega s}{2}\Bigr)\Bigr\},$$

что, как обычно, проделывается при помощи тождества (8.7), стр. 508.

• Аналогично рассматривается движение в постоянном магнитном поле $\mathbf{f} = \imath\mathbf{B}$. В этом случае кватернион напряженности является антиэрмитовым ($\mathbb{F}^+ = -\mathbb{F}$). При помощи полярного представления кватерниона (8.16), стр. 511, решение (8.73) можно записать в следующем виде:

$$\mathbb{U}(s) = \{\cos(\omega s/2) + \imath\mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}\sin(\omega s/2)\}\,\mathbb{U}(0)\,\{\cos(\omega s/2) - \imath\mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}\sin(\omega s/2)\},$$

где $\omega = q|\mathbf{B}|/m$ и $\mathbf{b} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$. Подставляя кватернион начальной скорости $\mathbb{U}(0) = u_0 + \mathbf{u}_0\boldsymbol{\sigma}$ в решение и перемножая матрицы Паули при помощи тождества (8.7), стр. 508, получаем:

$$\mathbb{U}(s) = u_0 + (\mathbf{u}_0\mathbf{b})(\mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}) + [\mathbf{b}\times[\mathbf{u}_0\times\mathbf{b}]]\,\boldsymbol{\sigma}\,\cos(\omega s) + [\mathbf{u}_0\times\mathbf{b}]\boldsymbol{\sigma}\,\sin(\omega s).$$

Единственный член u_0, без матриц Паули, является константной. Это означает, что нулевая компонента 4-скорости (или энергия движения заряда) не зависит от времени. Члены, пропорциональные матрицам Паули, дают решение (3.21), стр. 167:

$$\mathbf{u}(s) = (\mathbf{u}_0\mathbf{b})\,\mathbf{b} + [\mathbf{b}\times[\mathbf{u}_0\times\mathbf{b}]]\,\cos(\omega s) + [\mathbf{u}_0\times\mathbf{b}]\,\sin(\omega s). \qquad (8.78)$$

Обратим внимание, что на стр. 167 вектор $\mathbf{u}$ – это “обычная” скорость, а не компоненты 4-вектора скорости, как в этом разделе. Однако, так как энергия частицы в магнитном поле (или u_0) постоянна, различие сводится в умножении решения на константу. По этой же причине при движении в магнитном поле интервал связан с 3-скоростью и лабораторным временем простым соотношением:

$$s = \int\limits_0^t \sqrt{1-\mathbf{v}^2(t)}\;dt = t\,\sqrt{1-\mathbf{v}_0^2} = t/u_0,$$

где учтено, что квадрат скорости заряда при его движении остается постоянным $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0$ и корень можно вынести за интеграл.

Окончательно, интегрируя (8.78) по s, получаем зависимость координат заряда от собственного времени $s = t/u_0$ (или лабораторного времени t):

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + (\mathbf{u}_0\mathbf{b})\,\mathbf{b}\,s + \frac{1}{\omega}\,[\mathbf{b}\times[\mathbf{u}_0\times\mathbf{b}]]\,\sin(\omega s) - \frac{1}{\omega}\,[\mathbf{u}_0\times\mathbf{b}]\,(\cos(\omega s) - 1),$$

где константы интегрирования подобраны таким образом, чтобы вектор $\mathbf{r}(0)$ соответствовал начальному положению заряда. Это решение геометрически является спиралью, намотанной на цилиндр радиуса $|\mathbf{u}_0\times\mathbf{b}|/\omega$.

8.8 Ковариантный формализм

Введём дополнительно к трём матрицам Паули, матрицу с нулевым индексом, равную единичной $\sigma_0 = \sigma^0 = 1$. Считая, что индекс μ пробегает значения $0, ..., 3$, определим следующие наборы матриц:

$$\sigma_\mu = \{1,\, \boldsymbol{\sigma}\}, \qquad\qquad \bar{\sigma}_\mu = \{1,\, -\boldsymbol{\sigma}\}. \tag{8.79}$$

Кроме этого, при помощи метрического тензора $g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ определим аналогичные четверки матриц (без черты и с чертой) с верхним индексом: $\sigma^\mu = g^{\mu\nu}\sigma_\nu = \{1,\, -\boldsymbol{\sigma}\}$ и $\bar{\sigma}^\mu = g^{\mu\nu}\bar{\sigma}_\nu = \{1,\, \boldsymbol{\sigma}\}$. Обратим внимание, что большинство 4-векторов определяется таким образом, что векторная часть A^μ содержит 3-вектор со знаком плюс. Исключением является, например, 4-вектор производной для которого $\partial^\mu = \{\partial_0,\, -\nabla\}$. Аналогично σ^μ имеет знак минус перед векторными компонентами.

При помощи введенных матриц, кватернион, связанный с 4-вектором и его сопряжение, можно записать в ковариантном стиле:

$$\mathbb{A} = A^\mu\sigma_\mu = A_\mu\sigma^\mu, \qquad\qquad \bar{\mathbb{A}} = A^\mu\bar{\sigma}_\mu = A_\mu\bar{\sigma}^\mu. \tag{8.80}$$

Любую матрицу 2x2 можно разложить, например, по четырём матрицам σ_μ. Коэффициенты разложения в общем случае будут комплексными числами. След матриц Паули равен нулю, а след единичной матрицы равен 2. Произведение различных матриц Паули снова даёт матрицу Паули. Квадрат же каждой матрицы равен единичной. Поэтому:

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\sigma_\mu = \delta_{\mu 0}, \qquad\qquad \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\sigma_\mu\sigma_\nu) = \delta_{\mu\nu}.$$

Аналогичные соотношения справедливы для матриц с чертой. Более “ковариантный вид” имеют соотношения в которых используются смешанные наборы матриц (с чертой и без неё). Несложно видеть, что в этом случае выполняются следующие условия ортогональности:

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu) = g_{\mu\nu}, \qquad\qquad \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\sigma_\mu\bar{\sigma}^\nu) = \delta^\nu_\mu. \tag{8.81}$$

Записав разложение некоторой матрицы $\mathbb{A} = A^\mu\sigma_\mu$ по базису матриц σ_μ, всегда можно найти коэффициенты такого разложения:

$$A^\mu = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\mathbb{A}\bar{\sigma}^\mu). \tag{8.82}$$

Отметим также следующую алгебру (метрический тензор умножается на единичную матрицу):

$$\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu = 2g_{\mu\nu}, \tag{8.83}$$

проверяемую при помощи свойств матриц Паули $\boldsymbol{\sigma}$ (они антикоммутируют, а квадрат равен единичной матрице).

Изменения компонент любого 4-вектора при преобразованиях Лоренца определяются (стр. 136) элементами матрицы ${\Lambda^\mu}_\nu$:

$$A'^\mu = {\Lambda^\mu}_\nu A^\nu.$$

Запишем закон преобразования кватерниона, связанного с компонентами 4-вектора:

$$\mathbb{A}' = \mathbb{S}\mathbb{A}\mathbb{S}^+ = \mathbb{S}A^\mu\sigma_\mu\mathbb{S}^+ = A'^\nu\sigma_\nu = {\Lambda^\nu}_\mu A^\mu\sigma_\nu.$$

В силу произвольности компонент 4-вектора, получаем следующую связь кватернионных матриц преобразования $\mathbb{S}$ и коэффициентов матрицы лоренцевских преобразований 4x4:

$$\mathbb{S}\,\sigma_\mu\mathbb{S}^+ = \sigma_\nu\,{\Lambda^\nu}_\mu. \tag{8.84}$$

Например, в случае буста $\mathbb{S} = \mathbb{L}$, для нулевого значения индекса μ имеем (см. стр. 516):

$$\Lambda^0{}_0 + \sigma_i\Lambda^i{}_0 = \mathbb{L}\mathbb{L}^+ = \gamma - \gamma\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma},$$

поэтому $\Lambda^0{}_0 = \gamma$ и $\Lambda^i{}_0 = -\gamma v^i$, что стоит сравнить с явным видом матрицы ${\Lambda^\mu}_\nu$ на стр. 137. Абсолютно аналогично можно записать преобразование для сопряженного кватерниона $\bar{\mathbb{A}} = \bar{\mathbb{S}}^+\bar{\mathbb{A}}\bar{\mathbb{S}}$ и получить соотношение:

$$\bar{\mathbb{S}}^+\,\bar\sigma_\mu\,\bar{\mathbb{S}} = \bar\sigma_\nu\,{\Lambda^\nu}_\mu. \tag{8.85}$$

Обратим внимание, что черта над матрицами σ_μ ведёт себя также, как и над кватернионом при его сопряжении.

Свернём теперь антисимметричный 4-тензор $F^{\mu\nu}$ с 4-матрицей Паули и её сопряжением:

$$\mathbb{F} = \frac{1}{2}\,F^{\mu\nu}\sigma_\mu\bar\sigma_\nu. \tag{8.86}$$

Найдём как он изменяется при преобразованиях Лоренца:

$$F'^{\mu\nu}\sigma_\mu\bar\sigma_\nu = {\Lambda^\mu}_\alpha{\Lambda^\nu}_\beta F^{\alpha\beta}\sigma_\mu\bar\sigma_\nu = F^{\alpha\beta}\mathbb{S}\,\sigma_\alpha\mathbb{S}^+\bar{\mathbb{S}}^+\bar\sigma_\beta\bar{\mathbb{S}} = \mathbb{S}F^{\alpha\beta}\sigma_\alpha\bar\sigma_\beta\bar{\mathbb{S}},$$

где учтена единичность нормы кватерниона преобразования $\mathbb{S}$. Таким образом:

$$\mathbb{F}' = \mathbb{S}\,\mathbb{F}\,\bar{\mathbb{S}}. \tag{8.87}$$

Этот результат для кватерниона момента импульса был уже получен на странице 528. В случае тензора напряженности электромагнитного поля имеем:

$$\mathbb{F} = \frac{1}{2}\,F^{\mu\nu}\sigma_\mu\bar\sigma_\nu = (\mathbf{E} + \imath\mathbf{B})\,\boldsymbol{\sigma},$$

где второе равенство получено явной записью сумм по μ и ν с учётом того, что $\mathbf{E} = \{F^{10},\, F^{20},\, F^{30}\}$ и $\mathbf{B} = -\{F^{23},\, F^{31},\, F^{12}\}$.

• Представление (8.86) применимо и к симметричному тензору $T^{\mu\nu}$, однако в силу антикоммутирования матриц Паули оно не будет иметь векторной части и пропорционально ковариантному следу $g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$. В силу того, что $\mathbb{S}\bar{\mathbb{S}} = \mathbb{I}$ из (8.87) будет следовать, что этот след, как и должно быть, инвариантен относительно преобразований Лоренца. Более содержательное описание симметричных тензоров в кватернионных обозначениях мы рассмотрим на примере тензора энергии импульса.

Вычислим произведение тензора напряженностей на его эрмитово сопряжение:

$$\mathbb{F}\mathbb{F}^{+} = (\mathbf{f}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{f}^{*}\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 + 2[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]\,\boldsymbol{\sigma}.$$

Учитывая определения для плотности энергии W и импульса $\mathbf{P}$ электромагнитного поля (стр. 311), имеем следующий кватернион:

$$\mathbb{T}_0 = \frac{\mathbb{F}\mathbb{F}^{+}}{8\pi} = W + \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}. \tag{8.88}$$

Обратим внимание, что W и $\mathbf{P}$ не образуют 4-вектор, поэтому закон преобразования кватерниона $\mathbb{T}_0$ отличен от (8.49) и (8.55). Связано это с тем, что W и $\mathbf{P}$ являются нулевыми компонентами симметричного 4-тензора энергии-импульса:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(g_{\mu\nu}F^{\alpha\mu}F^{\nu\beta} + \frac{1}{4}\,g^{\alpha\beta}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} W & P_x & P_y & P_z \\ P_x & s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ P_y & s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ P_z & s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{pmatrix},$$

где симметричный 3-тензор потока импульса (стр. 312) равен:

$$s_{ij} = s^{ij} = \delta_{ij}\,W - \frac{E_iE_j + B_iB_j}{4\pi}.$$

Этот тензор возникает, в следующей тройке кватернионов:

$$\mathbb{T}^i = \frac{1}{8\pi}\,\mathbb{F}\,\sigma^i\,\mathbb{F}^{+} \;=\; P^i + s^{ij}\sigma_j \tag{8.89}$$

(для проверки этого соотношения удобно его свернуть с произвольным единичным вектором $\mathbf{n}$, а затем воспользоваться тождеством (8.7), стр. 508; напомним также, что $\sigma^i = -\sigma_i$).

Соотношения (8.88) и (8.89) можно объединить в одно:

$$\mathbb{T}^\mu = \frac{1}{8\pi}\,\mathbb{F}\,\sigma^\mu\,\mathbb{F}^{+} = T^{\mu\nu}\sigma_\nu \tag{8.90}$$

Эта четвёрка кватернионов является выражением симметричного тензора энергии-импульса в матричном виде.

При преобразованиях Лоренца кватернионы $\mathbb{T}^\nu$ изменяются подобно 4-вектору, к компонентам которого дополнительно применено кватернионное преобразование:

$$\mathbb{T}'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, \mathbb{S}\mathbb{T}^\nu\mathbb{S}^+.$$

Отметим также, что

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\mathbb{T}^\mu\bar{\sigma}^\nu),$$

где учтены условия ортогональности матриц Паули (8.81).

Получим закон сохранения энергии-импульса в кватернионной форме. Для этого умножим уравнение Максвелла (8.57), стр. 530 слева на $\sigma^\mu\mathbb{F}^+$. Затем возьмем эрмитово сопряжение (8.57) и умножим его справа на $\mathbb{F}\sigma^\mu$:

$$\sigma^\mu\mathbb{F}^+\bar{\mathbb{D}}\mathbb{F} = 4\pi\,\sigma^\mu\,\mathbb{F}^+\,\bar{\mathbb{J}}, \qquad\qquad \mathbb{F}^+\overleftarrow{\bar{\mathbb{D}}}\,\mathbb{F}\,\sigma^\mu = 4\pi\,\bar{\mathbb{J}}\,\mathbb{F}\,\sigma^\mu.$$

Возьмем след этих уравнений и сложим их:

$$\mathrm{Tr}(\sigma^\mu\,\mathbb{F}^+\bar{\mathbb{D}}\mathbb{F} + \mathbb{F}^+\overleftarrow{\bar{\mathbb{D}}}\,\mathbb{F}\,\sigma^\mu) = 4\pi\ \mathrm{Tr}(\sigma^\mu\,\mathbb{F}^+\,\bar{\mathbb{J}} + \bar{\mathbb{J}}\,\mathbb{F}\,\sigma^\mu).$$

Под следом матрицы можно циклическим образом переставлять. Поэтому в левой части получается производная произведения:

$$\mathrm{Tr}(\bar{\mathbb{D}}_{\mathbb{F}}\mathbb{F}\sigma^\mu\mathbb{F}^+ + \bar{\mathbb{D}}_{\mathbb{F}^+}\,\mathbb{F}\,\sigma^\mu\,\mathbb{F}^+) = \mathrm{Tr}(\bar{\mathbb{D}}(\mathbb{F}\,\sigma^\mu\,\mathbb{F}^+)),$$

где индексы у производных указывают на какую матрицу они действует. В результате получаем следующее уравнение:

$$\mathrm{Tr}(\bar{\mathbb{D}}\mathbb{T}^\mu) = \frac{1}{2}\ \mathrm{Tr}(\bar{\mathbb{J}}\,\sigma^\mu\,\mathbb{F}^+ + \mathbb{F}\,\sigma^\mu\,\bar{\mathbb{J}}). \tag{8.91}$$

При $\mu = 0$ оно эквивалентно теореме Пойнтинга:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla\mathbf{P} + \mathbf{E}\mathbf{j} = 0. \tag{8.92}$$

Действительно, перемножая матрицы Паули, имеем:

$$\bar{\mathbb{D}}\mathbb{T}^0 = \partial_0 W + \nabla\mathbf{P} + (\partial_0\mathbf{P} + \nabla W + \imath\nabla\times\mathbf{P})\,\boldsymbol{\sigma}$$

и

$$\frac{1}{2}\,(\bar{\mathbb{J}}\,\mathbb{F}^+ + \mathbb{F}\,\bar{\mathbb{J}}) = -\mathbf{j}\mathbf{E} + (\rho\mathbf{E} - \mathbf{j}\times\mathbf{B})\,\boldsymbol{\sigma}.$$

След матриц Паули равен нулю, поэтому из (8.91) следует (8.92). Аналогично при $\mu = i$ получается закон сохранения потока импульса.

8.9 Спиноры

Запишем ещё раз матрицы кватернионов пространственного вращения и преобразований Лоренца, стр. 512,516:

$$\mathbb{R} = \cos\frac{\phi}{2} + \imath \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}\,\sin\frac{\phi}{2}, \qquad \mathbb{L} = \mathrm{ch}\,\frac{\alpha}{2} - \mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{sh}\,\frac{\alpha}{2}, \tag{8.93}$$

где $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ – матрицы Паули. Вращение системы координат $\mathbb{R}$ происходит вокруг единичного вектора $\mathbf{n}$ на угол ϕ. Лоренцевский кватернион $\mathbb{L}$ содержит единичный вектор $\mathbf{m} = \mathbf{v}/v$ в направлении скорости $\mathbf{v}$ и $\alpha = \mathrm{ath}\, v$. Их композиция $\mathbb{S} = \mathbb{RL}$ приводит к матрицам 2x2 с комплексными коэффициентами, образующим группу $\mathbf{SL}(2, C)$:

$$\mathbb{S} = s_0 + \mathbf{s}\boldsymbol{\sigma}, \qquad \mathbb{S}^{-1} = s_0 - \mathbf{s}\boldsymbol{\sigma}. \tag{8.94}$$

Эти матрицы имеют единичный определитель:

$$\det\mathbb{S} = s_0^2 - \mathbf{s}^2 = 1. \tag{8.95}$$

В результате этой связи на комплексные коэффициенты $\{s_0, \mathbf{s}\}$ существует только 6=8-2 независимых *действительных* параметров, определяющих $\mathbb{S}$. Ими могут быть проекции скорости и углы вращения системы координат. В общем случае матрица $\mathbb{S}$ неунитарна (хотя это так для пространственных вращений, имеющих действительную скалярную часть s_0 и чисто мнимую векторную $\mathbf{s}$).

Преобразование $\mathbb{X}' = \mathbb{SXS}^{+}$ кватернионов похоже на преобразование "обычного" тензора второго ранга, так как матрица преобразований $\mathbb{S}$ стоит два раза. Разберемся какой объект получится, если при подобных преобразованиях будет присутствовать только одна матрица. Будем считать, что матрицы группы $\mathbf{SL}(2, C)$ действуют на некоторые векторы, в результате чего получаются новые векторы. Эти векторы можно представить в виде столбика из двух комплексных чисел ψ^1, ψ^2 (вверху стоят индексы, а не степень). Эта пара чисел называется *спинором*:

$$\psi'^{\alpha} = S^{\alpha}_{\ \beta}\,\psi^{\beta}, \qquad \psi = \begin{pmatrix}\psi^1\\ \psi^2\end{pmatrix}, \qquad \mathbb{S} = \begin{pmatrix}S^1_{\ 1} & S^1_{\ 2}\\ S^2_{\ 1} & S^2_{\ 2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}. \tag{8.96}$$

Таким образом, спинор – это объект, преобразующийся при вращениях и бустах при помощи матриц (8.93) или их композиции (8.94).

Спиноры выглядят достаточно абстрактными математическими сущностями. Однако, как и многие подобные построения, они реализуются в природе (точнее оказываются адекватным математическим описанием физической реальности). Так, волновая функция электрона (и любой частицы с нецелым спином) в квантовой механике является спинором. В теории поля такие частицы описываются спинорным полем.

• Равенство единице определителя преобразований приводит к тому, что для двух спиноров ψ и χ инвариантна следующая комбинация:

$$\psi^1\chi^2 - \psi^2\chi^1 = inv.$$

Действительно, прямым вычислением несложно проверить ($\lessdot$ H$_{125}$), что

$$\psi'^1\chi'^2 - \psi'^2\chi'^1 = (AD - BC)(\psi^1\chi^2 - \psi^2\chi^1) = \psi^1\chi^2 - \psi^2\chi^1,$$

где выражение $AD - BC$ равно определителю $\det \mathbb{S} = 1$, см.(8.96).

Введем *ковариантные компоненты* спинора (или *коспинор*), которые будем помечать нижним индексом ψ_α:

$$\psi_1 = \psi^2, \qquad \psi_2 = -\psi^1. \tag{8.97}$$

Придадим этому определению тензорную форму (по β сумма от 1 до 2):

$$\psi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\,\psi^\beta, \qquad \psi^\alpha = \psi_\beta\,\varepsilon^{\beta\alpha}, \tag{8.98}$$

где введена ортогональная матрица:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.99}$$

со следующими свойствами:

$$\varepsilon^2 = -1, \qquad \varepsilon^T = -\varepsilon, \qquad \varepsilon\boldsymbol{\sigma}\varepsilon = \boldsymbol{\sigma}^T. \tag{8.100}$$

Обратим внимание на обратный порядок индексов у $\varepsilon^{\alpha\beta}$ во втором соотношении (8.98). Инвариантная комбинация теперь имеет вид:

$$\psi^\alpha\chi_\alpha = \psi^\alpha\,\varepsilon_{\alpha\beta}\,\chi^\beta = \psi^1\chi^2 - \psi^2\chi^1 = inv.$$

Матрица $\varepsilon_{\alpha\beta}$ антисимметрична, поэтому ($\lessdot$ H$_{126}$):

$$\psi^\alpha\chi_\alpha = -\psi_\alpha\chi^\alpha, \qquad \psi^\alpha\psi_\alpha = 0, \tag{8.101}$$

т.е. перестановка суммационных индексов по высоте, в отличие от обычного тензорного анализа, приводит к *смене знака* выражения!

При помощи закона преобразования спинора (8.96) и определения (8.97) можно найти ($\lessdot$ H$_{127}$) как преобразуется коспинор:

$$\begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -C \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \qquad \psi'_\alpha = \tilde{S}_\alpha{}^\beta\psi_\beta. \tag{8.102}$$

Несложно проверить, что:

$$\tilde{\mathbb{S}} = -\varepsilon\mathbb{S}\varepsilon, \qquad \mathbb{S}^{-1} = \tilde{\mathbb{S}}^T, \qquad \det\tilde{\mathbb{S}} = 1. \tag{8.103}$$

Если тильдой пометить коспинор, то в матричном виде преобразования спинора $\psi \equiv \psi^\alpha$ и коспинора $\tilde{\psi} = \varepsilon\psi \equiv \psi_\alpha$ записываются следующим образом: $\psi' = \mathbb{S}\,\psi$ и $\tilde{\psi}'^T = \tilde{\psi}^T\mathbb{S}^{-1}$, а инвариант равен $\psi^T\,\tilde{\chi} = \psi^T\varepsilon\,\chi = inv.$

• *Спинорным тензором* называется величина с верхними и/или нижними индексами, преобразующаяся также как произведение спинорных и коспинорных компонент. Например, спинорный тензор второго ранга, по определению, преобразуется следующим образом:

$$\psi'^{\alpha}{}_{\beta} = S^{\alpha}{}_{\mu}\,\tilde{S}_{\beta}{}^{\nu}\,\psi^{\mu}{}_{\nu}.$$

Аналогично записывается преобразование для спинорных тензоров с произвольным числом индексов.

Так как компоненты спиноров и матриц преобразования это комплексные числа, удобно ввести еще две спинорные компоненты, которые помечаются точкой над индексом. По определению, они преобразуются как комплексное сопряжение спинора ψ^{α} и коспинора ψ_{α}:

$$\begin{pmatrix}\psi'^{\dot 1}\\ \psi'^{\dot 2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A^* & B^*\\ C^* & D^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi^{\dot 1}\\ \psi^{\dot 2}\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}\psi'_{\dot 1}\\ \psi'_{\dot 2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}D^* & -C^*\\ -B^* & A^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_{\dot 1}\\ \psi_{\dot 2}\end{pmatrix}.$$

Соответственно могут быть тензоры с верхними или нижними индексами, с точкой или без них: $\psi_{\alpha\dot\beta}$, $\psi_{\alpha\beta}{}^{\dot\gamma}$, ... Для утверждения, что $\psi_{\dot\alpha}$ преобразуется как ψ^*_{α} используется следующая запись:

$$\psi_{\dot\alpha} \sim \psi^*_{\alpha}, \qquad \psi^{\dot\alpha} \sim \psi^{*\alpha}, \qquad \psi_{\alpha\dot\beta} \sim \psi_{\alpha}\psi^*_{\beta}. \qquad (8.104)$$

При получении инвариантных комбинаций *можно* сворачивать (суммировать) верхний и нижний индекс *одного типа* (точки с точками, и т.д.). Но *нельзя* сворачивать индексы *разного типа*. Так, выражение $\psi^{\alpha}\chi_{\dot\alpha}$ – неинвариантно относительно (8.94). Действительно, обозначим $\dot\chi = (\chi^{\dot 1}\ \chi^{\dot 2})^T$, тогда, учитывая, что $\varepsilon\mathbb{S}^T\varepsilon = -\mathbb{S}^{-1}$, см. (8.103), имеем:

$$\psi'^{\alpha}\chi'_{\dot\alpha} = \psi'^T\varepsilon\,\dot\chi\,' = \psi^T\mathbb{S}^T\varepsilon\,\mathbb{S}^*\dot\chi = -\psi^T\varepsilon\varepsilon\,\mathbb{S}^T\varepsilon\,\mathbb{S}^*\dot\chi = \psi^T\varepsilon\,(\mathbb{S}^{-1}\mathbb{S}^*)\,\dot\chi \neq \psi^T\varepsilon\dot\chi,$$

так как $\mathbb{S}^{-1}\mathbb{S}^*$ не равно единичной матрице. Заметим ($\lessdot$ H_{129}), что *если* преобразование унитарно $\mathbb{S}^{+}\mathbb{S} = \mathbb{I}$ (например, при вращениях), то инвариантом будет такая свертка: $\psi^{\dot\alpha}\chi^{\alpha} = \psi^{\dot 1}\chi^1 + \psi^{\dot 2}\chi^2$.

Таким образом, записывая инварианты, мы всегда будем сворачивать только однотипные индексы. Поэтому нет необходимости следить за порядком чередования индексов разного типа, и по определению:

$$\psi_{\alpha\dot\beta} = \psi_{\dot\beta\alpha}, \qquad \psi_{\alpha\beta\dot\gamma} = \psi_{\alpha\dot\gamma\beta} = \psi_{\dot\gamma\alpha\beta}.$$

Но при этом, конечно, порядок индексов одного типа важен и в общем случае $\psi_{\alpha\beta} \neq \psi_{\beta\alpha}$.

С помощью $\varepsilon_{\alpha\beta}$ из некоторого тензора $\psi^{\alpha\beta}$ можно получить *другие* тензоры с иным расположением индексов:

$$\psi^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \psi_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}, \tag{8.105}$$

$$\psi_{\alpha}{}^{\beta} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}, \qquad \psi^{\alpha}{}_{\beta} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}. \tag{8.106}$$

Например $\psi_{\alpha}{}^{\beta} = \varepsilon_{\alpha\gamma}\,\psi^{\gamma\beta}$ получается прямым умножением матрицы ε на $\psi^{\alpha\beta}$. Для $\psi^{\alpha}{}_{\beta}$ необходимо записать $\varepsilon_{\beta\gamma}\,\psi^{\alpha\gamma} = -\psi^{\alpha\gamma}\varepsilon_{\gamma\beta}$, и т.д. Не стоит забывать, что для тензора с верхними индексами $\varepsilon^{\mu\nu}$ используется обратный порядок свертки и $\psi^{\alpha\beta} = \psi_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\alpha}\varepsilon^{\nu\beta} = -\varepsilon^{\alpha\mu}\psi_{\mu\nu}\varepsilon^{\nu\beta}$.

Если $b = c$, то тензоры $\psi^{\alpha\beta}$ и $\psi_{\alpha\beta}$ являются симметричными. Симметричными будут и $\psi_{\beta}{}^{\alpha}$ и $\psi^{\alpha}{}_{\beta}$ в том смысле, что $\psi_{\beta}{}^{\alpha} = \psi^{\alpha}{}_{\beta} = \psi^{\alpha}_{\beta}$. Например $\psi^{1}{}_{2} = -a = \psi_{2}{}^{1}$ (первый индекс по горизонтали – номер строки, второй – номер столбца). Поэтому для *симметричного* тензора 2-го ранга можно писать индексы друг под другом (будем считать, что верхний индекс – это номер строки, а нижний – столбца). Однако, при этом $\psi^{\alpha}_{\beta} \neq \psi^{\beta}_{\alpha}$.

Антисимметричность тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ приводит к тому, что (по α сумма):

$$\psi^{\alpha}{}_{\alpha} = -\psi_{\alpha}{}^{\alpha}, \quad \text{и если} \;\; \psi_{\alpha\beta} = \psi_{\beta\alpha}, \quad \text{то} \qquad \psi^{\alpha}_{\alpha} = 0.$$

Величина $\varepsilon^{\alpha\beta}$ является спинорным тензором, компоненты которого не меняются при преобразованиях с единичным детерминантом:

$$\varepsilon'^{\alpha\beta} = S^{\alpha}{}_{\mu} S^{\beta}{}_{\nu}\,\varepsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det\mathbb{S}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon^{\alpha\beta}.$$

Повышать и понижать индексы при помощи $\varepsilon^{\alpha\beta}$ можно и у самого спинорного тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$. Так $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\mu}\varepsilon_{\beta\nu}\varepsilon^{\mu\nu} = (\varepsilon\varepsilon\varepsilon^{T})_{\alpha\beta} = (-\varepsilon^{T})_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}$.

Если инвариант спинорных преобразований обозначить следующим образом $[ab] = a^{\alpha}b_{\alpha} = a^{\alpha}\varepsilon_{\alpha\beta}b^{\beta} = a^{1}b^{2} - a^{2}b^{1}$, то для четырех спиноров прямой подстановкой можно проверить справедливость тождества:

$$[ab][cd] + [ac][db] + [ad][bc] = 0.$$

Так как спинор a^{α} произволен, отсюда следует такое соотношение:

$$b^{\alpha}[cd] + c^{\alpha}[db] + d^{\alpha}[bc] = 0.$$

Беря производную по компонентам спиноров ($\lessdot$ H_{128}), получаем:

$$\varepsilon_{\mu\nu}\,\delta^{\alpha}_{\sigma} + \varepsilon_{\sigma\mu}\,\delta^{\alpha}_{\nu} + \varepsilon_{\nu\sigma}\,\delta^{\alpha}_{\mu} = 0. \tag{8.107}$$

Понятно, что все вышесказанное по работе с тензором $\varepsilon^{\mu\nu}$ в равной степени относится как к индексам без точки, так и к индексам с точкой.

8.10 Спиноры и 4-тензоры

• Матрица пространственных вращений $\mathbb{R}$ (8.93) является унитарной $\mathbb{R}^{+}\mathbb{R} = \mathbb{I}$ (подгруппа $\mathbf{SU}(2) \subset \mathbf{SL}(2, C)$). Относительно *этих* преобразований инварианта *длина* спинора и коспинора:

$$\psi^{+}\psi = \begin{pmatrix} \psi^{*1} & \psi^{*2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^{1} \\ \psi^{2} \end{pmatrix} = |\psi^{1}|^{2} + |\psi^{2}|^{2},$$

или в более общем случае $\chi^{\dot{\alpha}}\psi^{\alpha}$ ($\lessdot$ H_{129}). Преобразования Лоренца длину спинора не сохраняют и она различна в разных инерциальных системах отсчета.

Для унитарных преобразований $\mathbb{R}^{+} = \mathbb{R}^{-1}$ и (см. (8.102), (8.103)):

$$\mathbb{R}^{*} = \mathbb{R}^{+T} = (\mathbb{R}^{-1})^{T} = \begin{pmatrix} D & -C \\ -B & A \end{pmatrix}.$$

Поэтому компоненты коспинора $\{\psi_1, \psi_2\}$ *при вращениях* преобразуются также как $\{\psi^{*1}, \psi^{*2}\}$ или как $\{\psi^{\dot{1}}, \psi^{\dot{2}}\}$.

Компоненты векторов при повороте на угол 2π не меняются. В отличие от этого, компоненты спинора (и коспинора) при повороте (8.93) на угол 2π меняют свой знак ($\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$). В исходное значение компоненты спинора возвращаются после поворота на 4π. Это принципиально отличает спинор первого ранга (с одним индексом) и “обычный” вектор или тензор. Такое свойство спинора очень необычно. Мы привыкли к тому, что при повороте на 360 градусов система координат “возвращается” в исходное положение, поэтому все геометрические величины не должны измениться. Однако для спиноров это не так и они при таком повороте меняют знак. И только двойное вращение на 720 градусов не меняет “ориентации” спинора.

Для спиноров второго ранга матрица преобразования оказывается в квадрате и они не меняются при повороте на 2π. Поэтому между спинорами второго ранга и 4-векторами существует непосредственная связь. При помощи кватернионов мы записали преобразования группы Лоренца $\mathbb{X}' = \mathbb{S}\mathbb{X}\mathbb{S}^{+}$ или в индексах:

$$X^{\alpha\beta} = S^{\alpha}{}_{\gamma}\, X^{\gamma\delta}\, (S^{+})_{\delta}{}^{\beta} = S^{\alpha}{}_{\gamma}\, (S^{*})^{\beta}{}_{\delta}\, X^{\gamma\delta},$$

где, в силу определения эрмитового сопряжения, проведено комплексное сопряжение и переставлены местами строки и столбцы. Данное преобразование есть ни что иное, как преобразование спинора $\psi^{\alpha\dot{\beta}}$, второй индекс которого взят с точкой.

• Компоненты кватерниона $\mathbb{A} = a_0 + \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}$ преобразуется также как и 4-вектор $\mathrm{A} = \{A^0, \mathbf{A}\}$. Поэтому произвольный спинор 2-го ранга со смешанными индексами $a^{\alpha\dot{\mu}}$ эквивалентен 4-вектору (преобразуется также):

$$a^{\alpha\dot{\mu}} = \begin{pmatrix} A^0 + A^3 & A^1 - \imath A^2 \\ A^1 + \imath A^2 & A^0 - A^3 \end{pmatrix} = A^0 + \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} \ \equiv \mathbb{A}. \tag{8.108}$$

Используя формулы (8.105) можно аналогично записать смешанный спинорный тензор с нижними индексами:

$$a_{\alpha\dot{\mu}} = \begin{pmatrix} A^0 - A^3 & -A^1 - \imath A^2 \\ -A^1 + \imath A^2 & A^0 + A^3 \end{pmatrix} = A^0 - \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}^T \equiv \bar{\mathbb{A}}^T. \tag{8.109}$$

Знак минус перед векторной частью по определению даёт сопряжение кватерниона (черта над ним). Матрицу $a_{\alpha\dot{\mu}}$ можно получить непосредственной работой с матрицами Паули:

$$a_{\alpha\dot{\mu}} = \varepsilon_{\alpha\beta}\,\varepsilon_{\dot{\mu}\dot{\nu}}\,a^{\beta\dot{\nu}} = -(\varepsilon\mathbb{A}\varepsilon)_{\alpha\dot{\mu}},$$

где $\mathbb{A} \equiv a^{\alpha\dot{\beta}}$ – спинорный тензор (кватернион) с верхними индексами. Поэтому, учитывая свойства $\varepsilon^2 = -1$ и $\varepsilon\boldsymbol{\sigma}\varepsilon = \boldsymbol{\sigma}^T$, стр. 543 имеем:

$$-\varepsilon\mathbb{A}\varepsilon = -\varepsilon(A^0 + \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma})\varepsilon = A^0 - \mathbf{A}\varepsilon\boldsymbol{\sigma}\varepsilon = A^0 - \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}^T = \bar{\mathbb{A}}^T. \tag{8.110}$$

Свертка спинорного тензора с верхними и нижними индексами пропорциональна норме соответствующего кватерниона:

$$a^{\alpha\dot{\gamma}}\,a_{\beta\dot{\gamma}} = a^{\alpha\dot{\gamma}}\,a^T_{\dot{\gamma}\beta} = (\mathbb{A}\bar{\mathbb{A}})^{\alpha}{}_{\beta} = (A_0^2 - \mathbf{A}^2)\,\delta^{\alpha}_{\beta},$$

где во втором равенстве с учетом (8.109) транспонированный тензор с нижними индексами заменён на матрицу сопряженного кватерниона. Таким образом:

$$a^{\alpha\dot{\gamma}}\,a_{\beta\dot{\gamma}} = \mathrm{A}^2\,\delta^{\alpha}_{\beta}, \qquad\qquad a^{\gamma\dot{\alpha}}\,a_{\gamma\dot{\beta}} = \mathrm{A}^2\,\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}, \tag{8.111}$$

где $\mathrm{A}^2 = A_0^2 - \mathbf{A}^2$. Аналогично:

$$a^{\alpha\dot{\gamma}}\,b_{\beta\dot{\gamma}} \equiv \mathbb{A}\bar{\mathbb{B}} = \mathrm{A}\cdot\mathrm{B} + (B_0\mathbf{A} - A_0\mathbf{B} - \imath\,\mathbf{A}\times\mathbf{B})\,\boldsymbol{\sigma}, \tag{8.112}$$

где 4-вектор $\mathrm{B} = \{B_0, \mathbf{B}\}$ связан со спинором $b^{\alpha\dot{\beta}}$ и $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B} = A^0B^0 - \mathbf{AB}$.

Несложно видеть, что при пространственных вращениях на угол 2π спинорные тензоры с *нечетным* числом индексов (независимо от их типа) меняют свой знак. Спинорные тензоры с четным числом индексов знака не меняют (матрица поворота в четной степени). Это трансформационное свойство связано с общим правилом – спинорные тензоры с четным числом индексов могут быть связаны с 4-тензорами того или иного ранга; для спинорных тензоров с нечетным числом индексов такой связи нет.

• *Симметричный спинорный тензор* с двумя однотипными индексами (например, $f^{\alpha\beta} = f^{\beta\alpha}$) имеет 3 независимые комплексные компоненты (f^{11}, f^{22} и $f^{12} = f^{21}$) или 6 действительных. Антисимметричный действительный 4-тензор $F^{\mu\nu}$ также имеет 6 компонент. Построим тензор:

$$f^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,(a^{\mu\dot{\sigma}}\,b^{\nu}{}_{\dot{\sigma}} + a^{\nu\dot{\sigma}}\,b^{\mu}{}_{\dot{\sigma}}) \tag{8.113}$$

со сверткой по индексам с точкой и симметризацией по индексам без точки. Опустим при помощи ε индекс ν вниз и запишем тензор в матричном виде ($\mathbb{A} \equiv a^{\alpha\dot{\beta}}$, $\mathbb{B} \equiv b^{\alpha\dot{\beta}}$):

$$f^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{2}\,(a^{\mu\dot{\sigma}}\,b_{\nu\dot{\sigma}} - a_{\nu\dot{\sigma}}\,b^{\mu\dot{\sigma}}) = \frac{1}{2}\,(\mathbb{A}\bar{\mathbb{B}} - \mathbb{B}\bar{\mathbb{A}})^{\mu}{}_{\nu} = (\mathbb{F})^{\mu}_{\nu}. \tag{8.114}$$

Минус в первом равенстве появился после перестановки по вертикали суммационного индекса $\dot{\sigma}$, см. (8.101), стр. 543. Во втором равенстве переставлены местами индексы во вторых сомножителях и учтено (8.109). Компоненты тензора $\mathbb{F}$ получаются перемножением $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ (8.13), стр. 509:

$$\mathbb{F} = (B_0\mathbf{A} - A_0\mathbf{B} - \imath\mathbf{A}\times\mathbf{B})\,\boldsymbol{\sigma}. \tag{8.115}$$

Антисимметричный 4-тензор $F^{\mu\nu}$ преобразуется как антисимметризованное произведение двух 4-векторов: $F^{\mu\nu} = A^{\mu}B^{\nu} - A^{\nu}B^{\mu}$. Его можно выразить через два 3-вектора $\mathbf{a} = \{F^{10}, F^{20}, F^{30}\}$ и $\mathbf{b} = \{F^{23}, F^{31}, F^{12}\}$ (не путать со спинорами a и b). При помощи комплексного вектора $\mathbf{f} = \mathbf{a} - \imath\mathbf{b}$ трансформационная связь (8.115) записывается в компактном виде:

$$\mathbb{F} = \mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}, \tag{8.116}$$

где $\mathbf{a} = B_0\mathbf{A} - A_0\mathbf{B}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}$. Тензоры f^{μ}_{ν} и $f^{\mu\nu} = (\mathbb{F}\varepsilon)^{\mu\nu}$ имеют следующие элементы:

$$f^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} f_z & f_x - \imath f_y \\ f_x + \imath f_y & -f_z \end{pmatrix}, \qquad f^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f_x + \imath f_y & f_z \\ f_z & f_x + \imath f_y \end{pmatrix}.$$

Инвариант получается сверткой по обоим индексам, см.(8.105). стр. 545:

$$f^{\mu\nu}f_{\mu\nu} = 2\det f^{\mu\nu} = -2\mathbf{f}^2 = -2(\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2) + 4\imath\mathbf{a}\mathbf{b}. \tag{8.117}$$

Аналогично строится симметричный спинорный тензор с точками:

$$f^{\dot{\mu}\dot{\nu}} = \frac{1}{2}\,(a^{\sigma\dot{\mu}}\,b_{\sigma}{}^{\dot{\nu}} + a^{\sigma\dot{\nu}}\,b_{\sigma}{}^{\dot{\mu}}) = f^{*\,\mu\nu}, \tag{8.118}$$

где во втором равенстве компоненты тензора $F^{\mu\nu}$ (вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$) считаются действительными. Как и должно быть, спинорный тензор $f^{\dot{\mu}\dot{\nu}}$ преобразуются также, как и комплексное сопряжение $f^{\mu\nu}$.

• Симметричный (по каждому типу индексов) тензор $\psi^{\alpha_1\dots\alpha_m\dot{\mu}_1\dots\dot{\mu}_n}$ имеет $(m+1)(n+1)$ независимых компонент ($\lessdot$ H_{130}). Сверткой однотипных индексов такие тензоры не могут быть сведены к тензорам более низкого ранга. Так, $\psi^{\alpha}{}_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^{\alpha\beta} = 0$ (свертка антисимметричного и симметричного тензора всегда равна нулю). Говорят, что симметричный спинорный тензор ранга (m, n) реализует *неприводимое представление* собственной группы Лоренца.

Найдем связь симметричного спинорного тензора ранга (2,2) и произвольного 4-тензора $T^{\mu\nu}$ второго ранга. Для этого определим тензор

$$c^{\alpha\beta\dot{\mu}\dot{\nu}} = \frac{1}{4}\left(a^{\alpha\dot{\mu}}b^{\beta\dot{\nu}} + a^{\beta\dot{\mu}}b^{\alpha\dot{\nu}} + a^{\alpha\dot{\nu}}b^{\beta\dot{\mu}} + a^{\beta\dot{\nu}}b^{\alpha\dot{\mu}}\right),$$

в котором по обоим парам индексов α, β и $\dot{\mu}, \dot{\nu}$ проведена симметризация. Распишем, например, $c^{12\dot{1}\dot{2}}$:

$$c^{12\dot{1}\dot{2}} = \frac{1}{4}\left(a^{1\dot{1}}b^{2\dot{2}} + a^{2\dot{1}}b^{1\dot{2}} + a^{1\dot{2}}b^{2\dot{1}} + a^{2\dot{2}}b^{1\dot{1}}\right).$$

Выразим компоненты тензоров $a^{\alpha\dot{\mu}}$ и $b^{\alpha\dot{\mu}}$ через компоненты соответствующих 4-векторов (8.108):

$$a^{1\dot{1}} = A^0 + A^3, \quad a^{1\dot{2}} = A^1 - \imath A^2, \quad a^{2\dot{1}} = A^1 + \imath A^2, \quad a^{2\dot{2}} = A^0 - A^3$$

и аналогично для $b^{\alpha\dot{\mu}}$. Перемножая компоненты спинорных тензоров и вводя 4-тензор $T^{\alpha\beta} = A^{\alpha}B^{\beta}$, получаем искомую связь. Аналогично расписываются остальные компоненты. Всего возможно $(2+1)(2+1) = 9$ различных компонент. Они равны (точнее: “преобразуются также”):

$$\begin{aligned}
&c^{12\dot{1}\dot{2}} = T^{00} - T^{33} - \tfrac{T}{2},\\
&c^{11\dot{1}\dot{1}} = T^{00} + T^{33} + T^{03} + T^{30},\\
&c^{22\dot{2}\dot{2}} = T^{00} + T^{33} - T^{03} - T^{30},\\
&c^{11\dot{2}\dot{2}} = (c^{22\dot{1}\dot{1}})^* = T^{11} - T^{22} - \imath\,(T^{12} + T^{21}),\\
&c^{12\dot{1}\dot{1}} = (c^{11\dot{1}\dot{2}})^* = \frac{T^{01}+T^{10}}{2} + \frac{T^{13}+T^{31}}{2} + \imath\,\frac{T^{02}+T^{20}}{2} + \imath\,\frac{T^{23}+T^{32}}{2},\\
&c^{12\dot{2}\dot{2}} = (c^{22\dot{1}\dot{2}})^* = \frac{T^{01}+T^{10}}{2} - \frac{T^{13}+T^{31}}{2} - \imath\,\frac{T^{02}+T^{20}}{2} + \imath\,\frac{T^{23}+T^{32}}{2},
\end{aligned}$$

где выделен инвариант $T = g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = T^{00} - T^{11} - T^{22} - T^{33}$ (след тензора). Комплексное сопряжение меняет тип индексов (с точками и без точек). Первые три компоненты симметричны относительно этой операции, поэтому они действительны. Остальные 6 компонент имеют мнимую часть и связаны комплексным сопряжением с другими компонентами (считаем $T^{\mu\nu}$ действительными). Например: $(c^{12\dot{1}\dot{1}})^* = c^{\dot{1}\dot{2}11} = c^{11\dot{1}\dot{2}}$.

8.11 Спиноры и уравнения Максвелла *

Уравнения физики, ковариантные относительно преобразований Лоренца, можно записывать не только при помощи 4-тензоров. Эквивалентным математическим аппаратом является спинорный анализ. Ранее мы привели основные соотношения электродинамики на языке кватернионов. Запишем их теперь при помощи спинорного тензорного анализа.

Для 4-потенциала поля $\mathrm{A} = \{\varphi, \mathbf{A}\}$ и плотности 4-тока $\mathrm{j} = \{\rho, \mathbf{j}\}$ введем спинорные тензоры со смешанными индексами:

$$a^{\alpha\dot{\mu}} \equiv \mathbb{A} = \varphi + \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}, \qquad j^{\alpha\dot{\mu}} \equiv \mathbb{J} = \rho + \mathbf{j}\boldsymbol{\sigma}.$$

Определим также тензор производной. Так как $\partial^{\nu} = \{\partial_0,\ -\nabla\}$, необходимо поставить минус перед пространственными компонентами:

$$\partial^{\alpha\dot{\mu}} \equiv \mathbb{D} = \partial_0 - \boldsymbol{\sigma}\nabla. \tag{8.119}$$

Для любого тензора $a^{\alpha\dot{\mu}} = \mathbb{A}$ справедливо соотношение $a_{\dot{\mu}\alpha} = \bar{\mathbb{A}}$, т.е. опускание и перестановка индексов приводит к сопряженному кватерниону, см. (8.109). Рассмотрим два кватерниона $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ и соответствующие им спинорные тензоры второго ранга со смешанными индексами. Мы будем часто вычислять следующую свёртку:

$$\frac{1}{2}\, a^{\alpha\dot{\mu}}\, b_{\alpha\dot{\mu}} = \frac{1}{2}\, a^{\alpha\dot{\mu}}\, b_{\dot{\mu}\alpha} = \frac{1}{2}\ \mathrm{Tr}(\mathbb{A}\bar{\mathbb{B}}) = a^{\nu} b_{\nu} = a^0 b^0 - \mathbf{ab}. \tag{8.120}$$

Обратим внимание, что во втором равенстве индексы α и $\dot{\mu}$ переставлены местами. Так как это смешанные индексы, их порядок в тензорном выражении роли не играет. Однако этот порядок важен в безиндексной матричной форме, к которой мы перешли в третьем равенстве. Свертка двух индексов $\dot{\mu}$ соответствует умножению матриц $\mathbb{A}$ и $\bar{\mathbb{B}}$, а свёртка по индексу α – это взятие суммы диагональных элементов получившейся матрицы (т.е. её след).

Так, квадрат производной пропорционален оператору Д'Аламбера:

$$\frac{1}{2}\, \partial^{\alpha\dot{\mu}}\, \partial_{\alpha\dot{\mu}} = \frac{1}{2}\ \mathrm{Tr}(\mathbb{D}\bar{\mathbb{D}}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

Аналогично, свертка спинора ковариантной производной и спинора:

$$\frac{1}{2}\, \partial^{\alpha\dot{\mu}} j_{\alpha\dot{\mu}} = \frac{1}{2}\ \mathrm{Tr}(\mathbb{D}\bar{\mathbb{J}}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\mathbf{j} = 0 \tag{8.121}$$

дает *уравнение непрерывности*, см. (8.111), стр. 547.

• При помощи спинорных тензоров потенциалов определим тензоры напряженности электромагнитного поля без точек и с точками:

$$f^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,(\partial^{\mu\dot{\sigma}}\,a^{\nu}{}_{\dot{\sigma}} + \partial^{\nu\dot{\sigma}}\,a^{\mu}{}_{\dot{\sigma}}), \qquad f^{\dot{\mu}\dot{\nu}} = \frac{1}{2}\,(\partial^{\sigma\dot{\mu}}\,a_{\sigma}^{\dot{\nu}} + \partial^{\sigma\dot{\nu}}\,a_{\sigma}^{\dot{\mu}}). \tag{8.122}$$

Эти тензоры симметричны, поэтому опуская один индекс вниз и записывая их друг под другом (см. стр. 545), имеем:

$$f^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{2}\,(\partial^{\mu\dot{\sigma}}\,a_{\nu\dot{\sigma}} - \partial_{\nu\dot{\sigma}}\,a^{\mu\dot{\sigma}}) = \frac{1}{2}\,(\mathbb{D}\bar{\mathbb{A}} - \mathbb{A}\overleftarrow{\bar{\mathbb{D}}})^{\mu}_{\nu} = (\mathbb{F})^{\mu}_{\nu}. \tag{8.123}$$

Обратим внимание на появившийся знак минус. Напомним, что в отличие от “обычного” тензорного анализа, в спинорном анализе перестановка местами двух индексов по которым проводится свёртка всегда даёт знак минус $\psi^{\alpha}\xi_{\alpha} = -\psi_{\alpha}\xi^{\alpha}$. Второе равенство (8.123) записано аналогично (8.120), однако, для получения правильного порядка индексов (μ сверху нумерует строки, а ν снизу – столбцы), матрицы $\bar{\mathbb{D}}$ и $\mathbb{A}$ переставлены местами. Аналогично

$$f^{\dot{\mu}}{}_{\dot{\nu}} = \frac{1}{2}\,(\partial^{\sigma\dot{\mu}}\,a_{\sigma\dot{\nu}} - \partial_{\sigma\dot{\nu}}\,a^{\sigma\dot{\mu}}) = \frac{1}{2}\,(\mathbb{D}^{T}\bar{\mathbb{A}}^{T} - \mathbb{A}^{T}\overleftarrow{\bar{\mathbb{D}}}^{T})^{\dot{\mu}}{}_{\dot{\nu}} = (\mathbb{F}^{*})^{\dot{\mu}}{}_{\dot{\nu}}, \tag{8.124}$$

где звездочка обозначает комплексное спряжение элементов матрицы напряженностей: $\mathbb{F}^{*} = \mathbb{F}^{+T}$. Это сопряжение появилось так как транспонирование произведения во втором равенстве можно вынести за скобку, переставляя местами сомножители. Затем, для восстановления их обратного порядка берём эрмитово сопряжение и учитываем, что $\mathbb{A}^{+} = \mathbb{A}$, $\mathbb{D}^{+} = \mathbb{D}$. Кватернион напряженностей электромагнитного поля равен $\mathbb{F} = \mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}$, где $\mathbf{f} = \mathbf{E} + \imath\mathbf{B}$ и при $\mathbf{B} \neq 0$ не является эрмитовым

Спинорный тензор напряженностей инвариантен относительно *калибровочного преобразования* тензоров потенциалов:

$$a^{\mu\dot{\nu}} \mapsto a'^{\mu\dot{\nu}} = a^{\mu\dot{\nu}} + \partial^{\mu\dot{\nu}}\Lambda,$$

где Λ произвольная скалярная функция координат. Действительно, подставляя связь тензора f^{μ}_{ν} и потенциалов (8.123), имеем:

$$f'^{\mu}_{\nu} = f^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{2}\,(\partial^{\mu\dot{\sigma}}\,\partial_{\nu\dot{\sigma}} - \partial_{\nu\dot{\sigma}}\,\partial^{\mu\dot{\sigma}})\Lambda = f^{\mu}_{\nu}. \tag{8.125}$$

В качестве упражнения ($\lessdot$ H_{131}) предлагается убедиться, что в калибровке Лоренца $\partial^{\mu\dot{\nu}}\,a_{\mu\dot{\nu}} = 0$ справедливо соотношение:

$$\partial^{\mu\dot{\sigma}}\,a^{\nu}{}_{\dot{\sigma}} = \partial^{\nu\dot{\sigma}}\,a^{\mu}{}_{\dot{\sigma}},$$

В такой калибровке выражения для тензоров напряженности (8.122) упрощаются: $f^{\mu\nu} = \partial^{\mu\dot{\sigma}}\,a^{\nu}{}_{\dot{\sigma}}$ и $f^{\dot{\mu}\dot{\nu}} = \partial^{\sigma\dot{\mu}}\,a_{\sigma}^{\dot{\nu}}$.

• Запишем в спинорной форме уравнения поля. Ковариантное уравнение Максвелла без источников имеет вид:

$$\partial^{\mu\dot{\alpha}} f^{\dot{\nu}}{}_{\dot{\alpha}} \;-\; \partial^{\alpha\dot{\nu}} f^{\mu}{}_{\alpha} = 0. \qquad (8.126)$$

Убедимся, что при любом спинорном тензоре $a_{\mu\dot{\nu}}$ это уравнение тождественно выполняется. Подставим определения тензоров напряженности:

$$\partial^{\mu\dot{\alpha}}\,(\partial^{\sigma\dot{\nu}}\,a_{\sigma\dot{\alpha}} - \partial_{\sigma\dot{\alpha}}\,a^{\sigma\dot{\nu}}) - \partial^{\alpha\dot{\nu}}\,(\partial^{\mu\dot{\sigma}}\,a_{\alpha\dot{\sigma}} - \partial_{\alpha\dot{\sigma}}\,a^{\mu\dot{\sigma}}) = 0.$$

Раскрывая скобки и переставляя второе и третье слагаемое, имеем:

$$\partial^{\mu\dot{\alpha}}\,\partial^{\sigma\dot{\nu}}\,a_{\sigma\dot{\alpha}} - \partial^{\alpha\dot{\nu}}\,\partial^{\mu\dot{\sigma}}\,a_{\alpha\dot{\sigma}} - \partial^{\mu\dot{\alpha}}\,\partial_{\sigma\dot{\alpha}}\,a^{\sigma\dot{\nu}} + \partial^{\alpha\dot{\nu}}\,\partial_{\alpha\dot{\sigma}}\,a^{\mu\dot{\sigma}} = 0.$$

Первые два слагаемых сокращаются, если во втором переставить производные и переименовать суммационные индексы α и σ, переставив их местами. Для третьего слагаемого, имеем:

$$\partial^{\mu\dot{\alpha}}\,\partial_{\sigma\dot{\alpha}} = \delta^{\mu}_{\sigma}\,(\partial_0^2 - \Delta),$$

где учтено тождество (8.111), стр. 547. Аналогичное выражение получается и для четвертого слагаемого, поэтому последние два слагаемых сокращаются и получается ноль в не зависимости от значений компонент тензора $a_{\mu\dot{\nu}}$.

Несложно записать уравнения Максвелла без источников (8.126) в матричном виде:

$$\partial^{\mu\dot{\alpha}} f^{\dot{\nu}}{}_{\dot{\alpha}} - \partial^{\alpha\dot{\nu}} f^{\mu}{}_{\alpha} = \partial^{\mu\dot{\alpha}} f^{\dot{\nu}}{}_{\dot{\alpha}} - f^{\mu}{}_{\alpha}\,\overleftarrow{\partial}^{\alpha\dot{\nu}} = (\mathbb{D}\mathbb{F}^{*T} - \mathbb{F}\overleftarrow{\mathbb{D}})^{\mu\dot{\nu}},$$

где в последнем равенстве в первом слагаемом поставлен значок транспонирования, чтобы добиться правильного порядка индексов при записи умножения матриц (для наглядности нижние индексы у f сдвинуты вправо, так как они нумеруют столбцы матриц). В результате, учитывая определение эрмитового сопряжения матрицы, окончательно, имеем:

$$\mathbb{D}\mathbb{F}^{+} - \mathbb{F}\overleftarrow{\mathbb{D}} = 0.$$

Стрелка над $\mathbb{D}$, как обычно, означает, что производная действует справа налево. Это уравнение уже было записано при рассмотрении кватернионной формулировки электродинамики (стр. 533).

• Второе ковариантное уравнение (с токами) имеет следующий вид:

$$\frac{1}{2}\,(\partial^{\mu\dot\sigma} f^{\dot\nu}_{\ \dot\sigma} + \partial^{\sigma\dot\nu} f^{\mu}_{\ \sigma}) = -4\pi\, j^{\mu\dot\nu}. \tag{8.127}$$

Воспользовавшись (8.126), его можно переписать только через один тензор напряженности, например:

$$\partial^{\sigma\dot\nu} f^{\mu}_{\sigma} = -4\pi\, j^{\mu\dot\nu}. \tag{8.128}$$

Подставляя кватернионные матрицы, имеем:

$$\mathbb{F}\overleftarrow{\mathbb{D}} = -4\pi\, \mathbb{J}. \tag{8.129}$$

Чтобы поставить производную на привычное место слева от $\mathbb{F}$, можно взять сопряжение этого уравнения. При сопряжении поменяется порядок сомножителей, и так как кватернион $\mathbb{F} = \mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}$ не имеет скалярной части $\bar{\mathbb{F}} = -\mathbb{F}$. Поэтому сопряженное к (8.129) уравнение имеет вид:

$$\bar{\mathbb{D}}\mathbb{F} = 4\pi\, \bar{\mathbb{J}}. \tag{8.130}$$

Как мы видели (стр. 533), уравнение (8.130) эквивалентно *всем* уравнениям Максвелла. Связано это с использованием (8.126) при записи (8.128). Исходное же уравнение (8.127) даёт только уравнения Максвелла с плотностью заряда и тока.

Перейдем к уравнениям движения (силе Лоренца). Кватернион скорости $\mathbb{U} = d\mathbb{X}/ds$ является матричной записью спинорного тензора второго ранга $u^{\mu\dot\nu}$. В левой части уравнения Лоренца должна стоять производная скорости по интервалу, умноженная на массу $m\, du^{\mu\dot\nu}/ds$. Из симметричных тензоров напряженностей $f^{\mu\nu}$ и $f^{\dot\mu\dot\nu}$ и тензора скорости $u^{\mu\dot\nu}$ необходимо сформировать линейную комбинацию с двумя смешанными индексами. Вариантов немного, и уравнения движения выглядят следующим образом:

$$m\frac{du^{\mu\dot\nu}}{ds} = \frac{q}{2}\,(u^{\mu\dot\alpha} f^{\dot\nu}_{\ \dot\alpha} + u^{\alpha\dot\nu} f^{\mu}_{\alpha}), \tag{8.131}$$

где m – масса частицы, q – её заряд. Несложно убедится, что матричная запись этого уравнения имеет форму (8.71), стр. 534:

$$m\,\frac{d\mathbb{U}}{ds} = \frac{q}{2}\,(\mathbb{U}\mathbb{F}^{+} + \mathbb{F}\mathbb{U}).$$

Таким образом, переход от матричной формы уравнений поля и движения к тензорной и обратно не представляет особых затруднений. Тем не менее матричная запись электродинамики выглядит более компактной и в ряде случаев оказывается удобнее.

8.12 Лагранжев подход **

• Разберемся с лагранжевым подходом к спинорным уравнениям. Лагранжиан электромагнитного поля в обычных ковариантных обозначениях имеет вид (стр. 435):

$$\mathcal{L} = -A^{\alpha} j_{\alpha} - \frac{1}{16\pi}\, F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}.$$

Инвариант $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ равен (стр. 428):

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2).$$

В тоже время для спинорного тензора:

$$f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} = -f^{\mu}_{\ \nu} f^{\nu}_{\ \mu} = -\,\mathrm{Tr}(\mathbb{F}\mathbb{F}) = -\,\mathrm{Tr}(\mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}) = -2\mathbf{f}^2,$$

где двойка появляется в результате вычисления следа единичной матрицы 2x2. Аналогичное выражение получается для $f^{\dot\mu\dot\nu} f_{\dot\mu\dot\nu} = -\,\mathrm{Tr}(\mathbb{F}\mathbb{F})^* = -2\mathbf{f}^{*2}$. Их сумма даёт $2F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$, так как $\mathbf{f} = \mathbf{E} + \imath\mathbf{B}$. Поэтому лагранжиан можно записать в спинорных обозначениях следующим образом:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\, a^{\alpha\dot\beta} j_{\alpha\dot\beta} - \frac{1}{32\pi}\,(f^{\mu\nu}f_{\mu\nu} + f^{\dot\mu\dot\nu}f_{\dot\mu\dot\nu}). \qquad (8.132)$$

Очевидно, что он является действительным. Комплексное сопряжение ставит над индексами без точек точки и наоборот. В результате получается исходное выражение.

Уравнения Лагранжа для любого тензорного поля $a^{\alpha\dot\beta}$ выводятся абсолютно аналогично ковариантному формализму и имеют вид:

$$\partial^{\mu\dot\nu}\, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu\dot\nu} a^{\alpha\dot\beta})} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a^{\alpha\dot\beta}}. \qquad (8.133)$$

Так как $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (аналог метрического тензора) *антисимметричен*, взятие производной от лагранжиана требует определенной аккуратности. Необходимо, при помощи тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ все индексы поднять вверх и только после этого вычислять производную. Запишем сначала производную:

$$\frac{\partial(\partial^{\tau\dot\gamma} a^{\sigma\dot\delta})}{\partial(\partial^{\mu\dot\nu} a^{\alpha\dot\beta})} = \delta^{\tau}_{\mu}\, \delta^{\dot\gamma}_{\dot\nu}\, \delta^{\sigma}_{\alpha}\, \delta^{\dot\delta}_{\dot\beta}.$$

Если все индексы попарно совпадают получается единица, если же хотя бы одна пара индексов (один в числителе, а второй под ним в знаменателе) различны, то частная производная будет равна нулю.

Вычислим производную от спинорного тензора напряженностей поля. Для этого поднимем все индексы вверх:

$$\frac{\partial f^{\tau\sigma}}{\partial(\partial^{\mu\dot{\nu}}a^{\alpha\dot{\beta}})} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\bigl(\partial^{\tau\dot{\gamma}}\,a^{\sigma\dot{\delta}} + \partial^{\sigma\dot{\gamma}}\,a^{\tau\dot{\delta}}\bigr)}{\partial(\partial^{\mu\dot{\nu}}a^{\alpha\dot{\beta}})}\,\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\delta}} = \frac{1}{2}\,\bigl(\delta^{\tau}_{\mu}\,\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\nu}}\,\delta^{\sigma}_{\alpha}\,\delta^{\dot{\delta}}_{\dot{\beta}} + \delta^{\sigma}_{\mu}\,\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\nu}}\,\delta^{\tau}_{\alpha}\,\delta^{\dot{\delta}}_{\dot{\beta}}\bigr)\,\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\delta}}.$$

Сворачивая суммы с символом Кронекера, имеем

$$\frac{\partial f^{\tau\sigma}}{\partial(\partial^{\mu\dot{\nu}}a^{\alpha\dot{\beta}})} = \frac{1}{2}\,\bigl(\delta^{\tau}_{\mu}\,\delta^{\sigma}_{\alpha} + \delta^{\sigma}_{\mu}\,\delta^{\tau}_{\alpha}\bigr)\,\varepsilon_{\dot{\nu}\dot{\beta}}.$$

Полученный результат позволяет найти производную от инвариантного квадрата тензора напряженностей. Для этого поднимаем все индексы

$$\frac{\partial(f^{\tau\sigma}f_{\tau\sigma})}{\partial(\partial^{\mu\dot{\nu}}a^{\alpha\dot{\beta}})} = \frac{\partial(f^{\tau\sigma}f^{\gamma\delta})}{\partial(\partial^{\mu\dot{\nu}}a^{\alpha\dot{\beta}})}\,\varepsilon_{\tau\gamma}\varepsilon_{\sigma\delta}$$

и берем производную, как производную произведения:

$$\frac{\partial(f^{\tau\sigma}f_{\tau\sigma})}{\partial(\partial^{\mu\dot{\nu}}a^{\alpha\dot{\beta}})} = \frac{1}{2}\,\Bigl(\bigl(\delta^{\tau}_{\mu}\,\delta^{\sigma}_{\alpha} + \delta^{\sigma}_{\mu}\,\delta^{\tau}_{\alpha}\bigr)\,f^{\gamma\delta} + f^{\tau\sigma}\,\bigl(\delta^{\gamma}_{\mu}\,\delta^{\delta}_{\alpha} + \delta^{\delta}_{\mu}\,\delta^{\gamma}_{\alpha}\bigr)\Bigr)\,\varepsilon_{\tau\gamma}\,\varepsilon_{\sigma\delta}\,\varepsilon_{\dot{\nu}\dot{\beta}}.$$

Опуская индексы при помощи $\varepsilon_{\tau\gamma}$, $\varepsilon_{\sigma\delta}$:

$$\frac{\partial(f^{\tau\sigma}f_{\tau\sigma})}{\partial(\partial^{\mu\dot{\nu}}a^{\alpha\dot{\beta}})} = \frac{1}{2}\,\Bigl(\bigl(\delta^{\tau}_{\mu}\,\delta^{\sigma}_{\alpha} + \delta^{\sigma}_{\mu}\,\delta^{\tau}_{\alpha}\bigr)\,f_{\tau\sigma} + f_{\gamma\delta}\,\bigl(\delta^{\gamma}_{\mu}\,\delta^{\delta}_{\alpha} + \delta^{\delta}_{\mu}\,\delta^{\gamma}_{\alpha}\bigr)\Bigr)\,\varepsilon_{\dot{\nu}\dot{\beta}}$$

и сворачивая с символами Кронекера, окончательно, получаем:

$$\frac{\partial(f^{\tau\sigma}f_{\tau\sigma})}{\partial(\partial^{\mu\dot{\nu}}a^{\alpha\dot{\beta}})} = 2f_{\mu\alpha}\,\varepsilon_{\dot{\nu}\dot{\beta}}.$$

Аналогично берутся производные от тензора напряженности с точками:

$$\frac{\partial f^{\dot{\tau}\dot{\sigma}}}{\partial(\partial^{\mu\dot{\nu}}a^{\alpha\dot{\beta}})} = \frac{1}{2}\,\left(\delta^{\dot{\tau}}_{\dot{\nu}}\,\delta^{\dot{\sigma}}_{\dot{\beta}} + \delta^{\dot{\sigma}}_{\dot{\nu}}\,\delta^{\dot{\tau}}_{\dot{\beta}}\right)\,\varepsilon_{\mu\alpha}, \qquad \frac{\partial(f^{\dot{\tau}\dot{\sigma}}f_{\dot{\tau}\dot{\sigma}})}{\partial(\partial^{\mu\dot{\nu}}a^{\alpha\dot{\beta}})} = 2f_{\dot{\nu}\dot{\beta}}\,\varepsilon_{\mu\alpha}.$$

Эти выражения могут быть получены сразу, взятием комплексного сопряжения от производных от $f^{\tau\sigma}$. Подставляя все производные в уравнения Лагранжа (8.133), приходим к уравнениям Максвелла:

$$\frac{1}{2}\,(\partial^{\dot{\mu}}_{\alpha}f_{\dot{\mu}\dot{\beta}} + \partial^{\mu}_{\dot{\beta}}f_{\mu\alpha}) = -4\pi\,j_{\alpha\dot{\beta}},$$

где знак минус появился так как $\partial^{\mu\dot{\nu}}f_{\mu\alpha}\varepsilon_{\dot{\nu}\dot{\beta}} = -\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\nu}}\partial^{\mu\dot{\nu}}f_{\mu\alpha} = -\partial^{\mu}_{\dot{\beta}}f_{\mu\alpha}$ и аналогично для f с точками.

• Выведем закон сохранения энергии-импульса поля в спинорной форме. Для этого запишем уравнения Максвелла (8.128) и их сопряженный аналог:

$$\partial^{\alpha\dot{\mu}} f_{\alpha\beta} = -4\pi\, j^{\dot{\mu}}_{\beta}, \qquad\qquad \partial^{\alpha\dot{\mu}} f_{\dot{\mu}\dot{\nu}} = -4\pi\, j^{\alpha}_{\dot{\nu}}.$$

Умножим первое уравнение на $f_{\dot{\mu}\dot{\nu}}$, свернув по индексу $\dot{\mu}$, а второе на $f_{\alpha\beta}$, свернув по α. После этого уравнения сложим:

$$f_{\dot{\mu}\dot{\nu}}\, \partial^{\alpha\dot{\mu}} f_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta}\, \partial^{\alpha\dot{\mu}} f_{\dot{\mu}\dot{\nu}} = \partial^{\alpha\dot{\mu}}(f_{\alpha\beta}\, f_{\dot{\mu}\dot{\nu}}) = -4\pi\, (f_{\dot{\mu}\dot{\nu}}\, j^{\dot{\mu}}_{\beta} + f_{\alpha\beta}\, j^{\alpha}_{\dot{\nu}}),$$

где во втором равенстве записана производная произведения. Введя спинорный тензор энергии-импульса:

$$t_{\alpha\beta\dot{\mu}\dot{\nu}} = \frac{1}{4\pi}\, f_{\alpha\beta}\, f_{\dot{\mu}\dot{\nu}},$$

полученное уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\partial^{\alpha\dot{\mu}}\, t_{\alpha\beta\dot{\mu}\dot{\nu}} = -j^{\dot{\sigma}}_{\beta}\, f_{\dot{\sigma}\dot{\nu}} - f_{\beta\sigma}\, j^{\sigma}_{\dot{\nu}}.$$

Оно является спинорным аналогом уравнения (7.36), стр. 440.

Выражая компоненты спинорных тензоров напряженности через электромагнитные поля и используя выражения для 4-тензора энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ можно ($\lessdot$ H_{132}) связать компоненты спинорного тензора $t^{\alpha\beta\dot{\mu}\dot{\nu}}$ и симметричного 4-тензора $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. Так как спинорные тензоры напряженности поля симметричны, они имеют по 3 компоненты (комплексные). Соответственно у $t^{\alpha\beta\dot{\mu}\dot{\nu}}$ различных компонент будет 9:

$$\begin{aligned}
t^{12\dot{1}\dot{2}} &= T^{00} - T^{33}\\
t^{11\dot{1}\dot{1}} &= T^{00} + T^{33} + 2T^{03}\\
t^{22\dot{2}\dot{2}} &= T^{00} + T^{33} - 2T^{03}\\
t^{11\dot{2}\dot{2}} &= (t^{22\dot{1}\dot{1}})^{*} = T^{11} - T^{22} - 2\imath T^{12}\\
t^{12\dot{2}\dot{2}} &= (t^{22\dot{1}\dot{2}})^{*} = T^{01} + T^{13} + \imath\,(T^{23} + T^{02})\\
t^{12\dot{1}\dot{1}} &= (t^{11\dot{1}\dot{2}})^{*} = T^{01} - T^{13} + \imath\,(T^{23} - T^{02}).
\end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что произвольный симметричный тензор $T^{\mu\nu}$ имеет 10 независимых компонент. Тогда как у $t_{\alpha\beta\dot{\mu}\dot{\nu}}$ их только 9. Однако, тензор энергии-импульса зависит от двух 3-векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, а, следовательно, имеет 9 независимых компонент. Это проявляется в существовании дополнительного условия на тензор энергии-импульса – его след равен нулю: $g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = T^{00} - T^{11} - T^{22} - T^{33} = 0$.

• Получим тензор энергии-импульса из лагранжиана. Фактически необходимо повторить те-же выкладки, что и для его построения при помощи обычного 4-тензорного анализа (стр. 438). Возьмём спинорную производную от лагранжиана:

$$\partial_{\nu\dot\nu}\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a^{\sigma\dot\tau}}\,\partial_{\nu\dot\nu}a^{\sigma\dot\tau} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu\dot\mu}a^{\sigma\dot\tau})}\,\partial_{\nu\dot\nu}\partial^{\mu\dot\mu}a^{\sigma\dot\tau}.$$

В правой части в первом слагаемом подставим уравнения движения (8.133):

$$\partial_{\nu\dot\nu}\mathcal{L} = \partial^{\mu\dot\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu\dot\mu}a^{\sigma\dot\tau})}\right)\partial_{\nu\dot\nu}a^{\sigma\dot\tau} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu\dot\mu}a^{\sigma\dot\tau})}\,\partial_{\nu\dot\nu}\partial^{\mu\dot\mu}a^{\sigma\dot\tau}$$

и соберём всё в полную производную произведения:

$$\partial_{\nu\dot\nu}\mathcal{L} = \partial^{\mu\dot\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu\dot\mu}a^{\sigma\dot\tau})}\,\partial_{\nu\dot\nu}a^{\sigma\dot\tau}\right).$$

В результате получается уравнение непрерывности $\partial^{\mu\dot\mu}t_{\mu\nu\dot\mu\dot\nu} = 0$ для тензора

$$t_{\mu\nu\dot\mu\dot\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu\dot\mu}a^{\sigma\dot\tau})}\,\partial_{\nu\dot\nu}a^{\sigma\dot\tau} \;-\; \varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{\dot\mu\dot\nu}\,\mathcal{L}, \tag{8.134}$$

где в отличие от (7.32), стр. 438 множителем у лагранжиана стоит не метрический тензор, а произведение антисимметричных тензоров ε. Подставляя вычисленные уже производные, для лагранжиана в отсутствии источников и поднимая индексы, имеем:

$$t^{\mu\nu\dot\mu\dot\nu} = \frac{1}{16\pi}\left(f^{\mu\sigma}\,\partial^{\nu\dot\nu}a^{\dot\mu}_{\sigma} + f^{\dot\mu\dot\tau}\,\partial^{\nu\dot\nu}a^{\mu}_{\dot\tau}\right) \;+\; \frac{1}{32\pi}\,\varepsilon^{\mu\nu}\varepsilon^{\dot\mu\dot\nu}\left(f^{\sigma\tau}f_{\sigma\tau} + f^{\dot\sigma\dot\tau}f_{\dot\sigma\dot\tau}\right).$$

Для симметризации этого выражения по каждой паре индексов необходимо прибавить спинорную дивергенцию от тензоров:

$$\tilde t^{\mu\nu\dot\mu\dot\nu} = t^{\mu\nu\dot\mu\dot\nu} + \partial_{\gamma\dot\gamma}(\Psi^{\gamma\mu\nu\,\dot\gamma\dot\mu\dot\nu} + \Phi^{\gamma\mu\nu\,\dot\gamma\dot\mu\dot\nu}),$$

первый из которых симметричен по γ,μ и антисимметричен по $\dot\gamma,\dot\mu$, а для второго наоборот ($\lessdot$ H$_{133}$).

Тогда эта дивергенция будет автоматически удовлетворяет уравнению непрерывности с производной по $\partial_{\mu\dot\mu}$.

Таким образом, спинорный тензорный анализ позволяет описывать ковариантные уравнения также эффективно, как и обычный анализ на основе 4-тензоров. Для электродинамики последний оказывается несколько проще и удобнее. Однако, существуют поля которые могут быть описаны только при помощи спиноров. Мы их рассмотрим в следующей главе.

VIII Спиноры

- $\mathbf{H}_{110}$ *Алгебра матриц Паули* (стр. 508)

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \imath & 0 \\ 0 & -\imath \end{pmatrix} = \imath\sigma_3.$$

В тоже время $\varepsilon_{12k}\sigma_k = \varepsilon_{123}\sigma_3 = \sigma_3$, т.к. антисимметричный тензор Леви-Чевиты отличен от нуля только для различных индексов, и $\varepsilon_{123} = 1$.

- $\mathbf{H}_{111}$ *Тождество с матрицами Паули* (стр. 508)

Сворачивая (8.6) с a_i и b_j и учитывая определение векторного произведения $[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]_k = \varepsilon_{ijk}a_ib_j = \varepsilon_{kij}a_ib_j$, получаем требуемое тождество.

- $\mathbf{H}_{112}$ *Матричное представление кватернионов* 4x4 (стр. 508)

Обычную мнимую единицу $\imath$ можно представить в матричной форме:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Её квадрат равен единичной матрице с обратным знаком $\varepsilon^2 = -1$. Кватернионы выражаются через матрицы Паули $\mathbb{I}_k = -\imath\,\sigma_k$. Их можно записать в виде матриц 4x4, если вместо мнимой единицы поставить матрицу ε, а вместо 1 – единичную матрицу 2x2:

$$\mathbb{I}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Прямым перемножением матриц $\mathbb{I}_1$, $\mathbb{I}_2$, $\mathbb{I}_3$ проверяется справедливость алгебры: $\mathbb{I}_i\mathbb{I}_j = -\delta_{ij} + \varepsilon_{ijk}\,\mathbb{I}_k$. Запишем также их явный вид:

$$\mathbb{I}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $\mathbf{H}_{113}$ *Циклическая перестановка кватернионов* (стр. 509)

Так как для скалярной части произведения $\lfloor\mathbb{AB}\rfloor = \lfloor\mathbb{BA}\rfloor$, то в силу ассоциативности: $\lfloor\mathbb{ABC}\rfloor = \lfloor(\mathbb{AB})\mathbb{C}\rfloor = \lfloor\mathbb{C}(\mathbb{AB})\rfloor = \lfloor\mathbb{CAB}\rfloor$.

• $\mathbf{H}_{114}$ *Свойство сопряжения* $\overline{\mathbb{A}\mathbb{B}} = \bar{\mathbb{B}}\,\bar{\mathbb{A}}$ (стр. 509)

Так как $\bar{\mathbb{B}} = \{b_0,\ -\mathbf{b}\}$, $\bar{\mathbb{A}} = \{a_0,\ -\mathbf{a}\}$, то:

$$\bar{\mathbb{B}}\,\bar{\mathbb{A}} = \{a_0 b_0 + \mathbf{ab}, -a_0\mathbf{b} - b_0\mathbf{a} + \imath\mathbf{b}\times\mathbf{a}\}.$$

Переставляя местами множители в $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$, имеем: $\bar{\mathbb{B}}\,\bar{\mathbb{A}} = \overline{\mathbb{A}\mathbb{B}}$, так как у векторной части по сравнению с $\mathbb{A}\mathbb{B}$ появляется знак минус.

• $\mathbf{H}_{115}$ *Тождество* $|\mathbb{A}\mathbb{B}|^2 = |\mathbb{A}|^2\,|\mathbb{B}|^2$ (стр. 510)

Воспользуемся тем, что $\mathbb{A}\bar{\mathbb{A}} = |\mathbb{A}|^2\,\mathbb{I}$. Подставим вместо $\mathbb{A}$ произведение $\mathbb{A}\mathbb{B}$, т.е. $\mathbb{A}\mathbb{B}\,\overline{\mathbb{A}\mathbb{B}} = |\mathbb{A}\mathbb{B}|^2\,\mathbb{I}$ и возьмём скалярную часть, циклически переставив сомножители:

$$|\mathbb{A}\mathbb{B}|^2 = \lfloor\mathbb{A}\mathbb{B}\overline{\mathbb{A}\mathbb{B}}\rfloor = \lfloor\mathbb{A}\mathbb{B}\bar{\mathbb{B}}\bar{\mathbb{A}}\rfloor = \lfloor\bar{\mathbb{A}}\mathbb{A}\mathbb{B}\bar{\mathbb{B}}\rfloor = |\mathbb{A}|^2\,|\mathbb{B}|^2\,\lfloor\mathbb{I}\,\mathbb{I}\rfloor = |\mathbb{A}|^2\,|\mathbb{B}|^2.$$

• $\mathbf{H}_{116}$ *Обратный кватернион* (стр. 510)

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \frac{\mathbb{A}\bar{\mathbb{A}}}{|\mathbb{A}|^2} = \frac{|\mathbb{A}|^2\mathbb{I}}{|\mathbb{A}|^2} = \mathbb{I}.$$

• $\mathbf{H}_{117}$ *Тождество* $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\,\mathbb{A}^{-1}$ (стр. 510)

Используя свойство ассоциативности, запишем:

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = (\mathbb{A}\mathbb{B})(\mathbb{B}^{-1}\,\mathbb{A}^{-1}) = \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{B}^{-1})\,\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}\mathbb{I}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}.$$

Аналогично проверяется обратный порядок перемножения.

• $\mathbf{H}_{118}$ *Алгебра Ли* (стр. 517)

Разложим вращение и буст в ряд по малым параметрам $(\mathbf{n}\phi, \mathbf{m}\alpha)$:

$$\mathbb{R} \approx 1 + \frac{\imath\phi}{2}\,\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}, \qquad \mathbb{L} \approx 1 - \frac{\alpha}{2}\,\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}.$$

Обозначим генераторы при помощи 2-х троек матриц $\{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3\}$ и $\{\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3\}$, которые стоят при *действительных* бесконечно малых параметрах преобразования. Тогда

$$\mathbf{R}_i = (\imath/2)\sigma_i, \qquad\qquad \mathbf{L}_i = -(1/2)\sigma_i.$$

Используя алгебру матриц Паули (8.6),стр. 508, несложно получить коммутатор $[\sigma_i, \sigma_j] = 2\imath\varepsilon_{ijk}\sigma_k$, поэтому алгебра Ли для генераторов группы с *действительными* структурными константами имеет вид:

$$[\mathbf{R}_i,\,\mathbf{R}_j] = -\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{R}_k, \qquad [\mathbf{L}_i,\,\mathbf{L}_j] = \varepsilon_{ijk}\,\mathbf{R}_k, \qquad [\mathbf{L}_i,\,\mathbf{R}_j] = -\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{L}_k.$$

• $\mathbf{H}_{119}$ *Результирующий буст произведения двух бустов* (стр. 518)
Из того факта, что $\mathbf{nm}=0$ и соотношений

$$c_\alpha c_\phi = c_1c_2 + (\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2)\, s_1s_2, \qquad \mathbf{n}\, c_\alpha s_\phi = -[\mathbf{m}_1\times\mathbf{m}_2]\, s_1s_2,$$

$$\mathbf{m}s_\alpha c_\phi + [\mathbf{m}\times\mathbf{n}]\, s_\alpha s_\phi = \mathbf{m}_1\, s_1c_2 + \mathbf{m}_2\, c_1s_2.$$

найдём α и $\mathbf{m}$. Так как $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ перпендикулярны, то $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$ является единичным вектором. Возводя третье соотношение в квадрат, имеем:

$$s_\alpha^2c_\phi^2 + s_\alpha^2s_\phi^2 = s_\alpha^2 = s_1^2c_2^2 + c_1^2s_2^2 + 2\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2\, s_1c_1s_2c_2.$$

Так как $s_\alpha = \operatorname{sh}(\alpha/2)$ – гиперболический синус, то $\operatorname{ch}\alpha = 1+2s_\alpha^2$:

$$\operatorname{ch}\alpha = 1+2s_1^2c_2^2+2c_1^2s_2^2+4(\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2)s_1c_1s_2c_2 = \operatorname{ch}\alpha_1\operatorname{ch}\alpha_2+(\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2)\operatorname{sh}\alpha_1\operatorname{sh}\alpha_2,$$

где учтено, что $1+2s_1^2c_2^2+2c_1^2s_2^2 = (c_1^2+s_1^2)(c_2^2+s_2^2)$. Умножая третье соотношение векторно на $\mathbf{n}$, учитывая, что $\mathbf{n}\times[\mathbf{m}\times\mathbf{n}]=\mathbf{m}$ для $\mathbf{nm}=0$ и исключая $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$ (при помощи опять же третьего соотношения), находим:

$$\mathbf{m}\, s_\alpha = \mathbf{m}_1s_1c_2c_\phi + \mathbf{m}_2c_1s_2c_\phi + [\mathbf{n}\times\mathbf{m}_1]s_1c_2s_\phi + [\mathbf{n}\times\mathbf{m}_2]c_1s_2s_\phi.$$

Подставляя из первого соотношения c_ϕ, а из второго $\mathbf{n}s_\phi$, получаем:

$$\mathbf{m}\operatorname{sh}\alpha = \mathbf{m}_1\operatorname{sh}\alpha_1\operatorname{ch}\alpha_2 + \mathbf{m}_2\operatorname{sh}\alpha_2 + \mathbf{m}_1(\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2)\operatorname{sh}\alpha_2(\operatorname{ch}\alpha_1-1).$$

• $\mathbf{H}_{120}$ *Угол и ось поворота произведения двух бустов* (стр. 518)
Найдём угол ϕ и ось $\mathbf{n}$ поворота из соотношений

$$c_\alpha c_\phi = c_1c_2 + (\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2)\, s_1s_2, \qquad \mathbf{n}\, c_\alpha s_\phi = -[\mathbf{m}_1\times\mathbf{m}_2]\, s_1s_2.$$

Из второго соотношения следует, что $\mathbf{n}\sim -\mathbf{m}_1\times\mathbf{m}_2$, а так как $\mathbf{n}$ единичный вектор, то при $s_\phi>0$ (c_α, s_1, s_2 всегда больше нуля) имеем: $\mathbf{n} = -[\mathbf{m}_1\times\mathbf{m}_2]/|\mathbf{m}_1\times\mathbf{m}_2|$. Перемножая первое и второе соотношения, получаем:

$$\mathbf{n}\, c_\alpha^2c_\phi s_\phi = -[\mathbf{m}_1\times\mathbf{m}_2]\,(s_1c_1s_2c_2 + \mathbf{m}_1\mathbf{m}_2\, s_1^2s_2^2).$$

Умножая это выражение на 4 и учитывая, что для $c_\alpha = \operatorname{ch}(\alpha/2)$ справедливы тождества $2c_\alpha^2 = \operatorname{ch}\alpha+1$, $2s_\alpha^2 = \operatorname{ch}\alpha-1$, находим:

$$\mathbf{n}\,\sin\phi\,(\operatorname{ch}\alpha+1) = -[\mathbf{m}_1\times\mathbf{m}_2]\,(\operatorname{sh}\alpha_1\operatorname{sh}\alpha_2 + \mathbf{m}_1\mathbf{m}_1\,(\operatorname{ch}\alpha_1-1)(\operatorname{ch}\alpha_2-1)).$$

Подставляя скорости $\mathbf{m}\operatorname{sh}\alpha = \mathbf{v}\gamma$, $\operatorname{ch}\alpha=\gamma$, получаем:

$$\mathbf{n}\,\sin\phi = -[\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2]\,\frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma+1}\,\left(1+\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\,\frac{\gamma_1\gamma_2}{(\gamma_1+1)(\gamma_2+1)}\right).$$

Осталось исключить $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2$ при помощи формулы $\gamma = \gamma_1\gamma_2(1+\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)$.

• $\mathbf{H}_{121}$ *Обратное произведение* $\mathbb{L}\mathbb{R} = (c_\alpha - s_\alpha\, \mathbf{m}\boldsymbol{\sigma})\,(c_\phi + \imath s_\phi\, \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})$ (стр. 519)

Перемножая кватернионы, имеем:

$$\mathbb{L}\,\mathbb{R} = c_\alpha c_\phi - \imath\, \mathbf{mn}\, s_\alpha s_\phi, + (\imath\mathbf{n}\, c_\alpha s_\phi - \mathbf{m} s_\alpha c_\phi + [\mathbf{m}\times\mathbf{n}]\, s_\alpha s_\phi)\boldsymbol{\sigma}.$$

Сравнивая с $\mathbb{L}_2\mathbb{L}_1$ (стр. 518), получаем, что итоговая скорость и ось вращения *перпендикулярны* ($\mathbf{nm} = 0$) и справедливы следующие уравнения:

$$c_\alpha c_\phi = c_1 c_2 + (\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2)\, s_1 s_2, \qquad \mathbf{n}\, c_\alpha s_\phi = -[\mathbf{m}_1\times\mathbf{m}_2]\, s_1 s_2,$$

$$\mathbf{m} s_\alpha c_\phi - [\mathbf{m}\times\mathbf{n}]\, s_\alpha s_\phi = \mathbf{m}_1\, s_1 c_2 + \mathbf{m}_2\, c_1 s_2.$$

Они совпадут с соотношениями из задачи ($\lessdot\, \mathrm{H}_{119}$), если вектор $\mathbf{n}$ обратить $\mathbf{n}\mapsto -\mathbf{n}$, а индексы 1, 2 у α_i, $\mathbf{m}_i$ переставить местами. В результате выражения для оси $\mathbf{n}$, угла поворота ϕ и быстроты α (или γ) не поменяются. Однако в выражении для скорости итогового буста $\mathbf{v}$ (или вектора $\mathbf{m}$) необходимо поменять местами скорости.

• $\mathbf{H}_{122}$ *Выполнение условия* $\mathbb{L}\bar{\mathbb{L}} = \mathbb{I}$ (стр. 519)

Вычислим произведение числителей, учитывая, что $\mathbb{S}\bar{\mathbb{S}} = \bar{\mathbb{S}}\mathbb{S} = \mathbb{I}$ и аналогично для эрмитового сопряжения:

$$(\mathbb{S} + \mathbb{S}^+)(\bar{\mathbb{S}} + \bar{\mathbb{S}}^+) = 2\mathbb{I} + \mathbb{S}^+\bar{\mathbb{S}} + \mathbb{S}\bar{\mathbb{S}}^+.$$

С другой стороны для знаменателя имеем:

$$(\mathbb{I} + \mathbb{S}\bar{\mathbb{S}}^+)\,\overline{(\mathbb{I} + \mathbb{S}\bar{\mathbb{S}}^+)} = (\mathbb{I} + \mathbb{S}\bar{\mathbb{S}}^+)\,(\mathbb{I} + \mathbb{S}^+\bar{\mathbb{S}}) = 2\mathbb{I} + \mathbb{S}^+\bar{\mathbb{S}} + \mathbb{S}\bar{\mathbb{S}}^+ = |\mathbb{I} + \mathbb{S}^+\bar{\mathbb{S}}|^2\mathbb{I},$$

что и требовалось доказать.

• $\mathbf{H}_{123}$ *Кватернион* $\mathbb{R} = \mathbb{S}\bar{\mathbb{L}}$ (стр. 519)

$$\mathbb{R} = \mathbb{S}\bar{\mathbb{L}} = \frac{\mathbb{S}(\bar{\mathbb{S}} + \bar{\mathbb{S}}^+)}{|\mathbb{I} + \mathbb{S}\bar{\mathbb{S}}^+|} = \frac{\mathbb{I} + \mathbb{S}\bar{\mathbb{S}}^+}{|\mathbb{I} + \mathbb{S}\bar{\mathbb{S}}^+|}.$$

То, что этот кватернион не имеет чисто мнимой векторной части проверяется прямым перемножением:

$$\mathbb{S}\bar{\mathbb{S}}^+ = (S_0 + \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma})(S_0^* - \mathbf{S}^*\boldsymbol{\sigma}) = |S_0|^2 - \mathbf{SS}^* + (\mathbf{S}S_0^* - \mathbf{S}^*S_0)\boldsymbol{\sigma} - \imath[\mathbf{S}\times\mathbf{S}^*]\boldsymbol{\sigma}$$

(последний член в этом выражении действителен). Кроме этого, очевидно, что знаменатель в $\mathbb{R}$ действителен (см. $\lessdot\, \mathrm{H}_{122}$).

• $\mathbf{H}_{124}$ *Фактор Лоренца* (стр. 524)

$$\gamma_{\mathbf{v}+d\mathbf{v}} = (1 - (\mathbf{v} + d\mathbf{v})^2)^{-1/2} \approx (1 - \mathbf{v}^2 - 2\mathbf{v}d\mathbf{v})^{-1/2} \approx \gamma + \gamma^3\mathbf{v}d\mathbf{v}.$$

• $\mathbf{H}_{125}$ *Спинорный инвариант* (стр. 543)

Подставим преобразования для спинора (8.96), стр. 542:

$$\psi'^1\chi'^2 - \psi'^2\chi'^1 = (A\psi^1 + B\psi^2)(C\chi^1 + D\chi^2) - (C\psi^1 + D\psi^2)(A\chi^1 + B\chi^2).$$

Перемножая скобки, получаем $(AD - BC)(\psi^1\chi^2 - \psi^2\chi^1)$.

• $\mathbf{H}_{126}$ $\psi^\alpha\chi_\alpha = -\psi_\alpha\chi^\alpha$ (стр. 543)

$$\psi^\alpha\chi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^\alpha\chi^\beta = -\varepsilon_{\beta\alpha}\psi^\alpha\chi^\beta = -\psi_\beta\chi^\beta.$$

• $\mathbf{H}_{127}$ *Преобразование коспинора* (стр. 543)

$$\psi'_1 = \ \psi'^2 = \ C\psi^1 + D\psi^2 = -C\psi_2 + D\psi_1,$$

$$\psi'_2 = -\psi'^1 = -A\psi^1 - B\psi^2 = A\psi_2 - B\psi_1.$$

• $\mathbf{H}_{128}$ *Связь* δ^α_β *и* $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (стр. 545)

Запишем в явном виде:

$$b^\alpha[cd] + c^\alpha[db] + d^\alpha[bc] = \varepsilon_{\beta\gamma}\, b^\alpha c^\beta d^\gamma + \varepsilon_{\beta\gamma}\, c^\alpha d^\beta b^\gamma + \varepsilon_{\beta\gamma}\, d^\alpha b^\beta c^\gamma = 0.$$

Беря производную по b^μ, имеем:

$$\varepsilon_{\beta\gamma}\delta^\alpha_\mu c^\beta d^\gamma + \varepsilon_{\beta\gamma}c^\alpha d^\beta\delta^\gamma_\mu + \varepsilon_{\beta\gamma}d^\alpha\delta^\beta_\mu c^\gamma = 0.$$

Аналогично берутся производные по c^ν и d^σ.

• $\mathbf{H}_{129}$ *Инвариант унитарного преобразования* $\mathbb{S}^+\mathbb{S} = \mathbf{1}$ (стр. 546)

$$\psi'^{\dot\alpha}\chi'^\alpha = \dot\psi'^T\chi' = \dot\psi^T\mathbb{S}^{*T}\mathbb{S}\,\chi = \dot\psi^T\,(\mathbb{S}^+\mathbb{S})\,\chi = \dot\psi^T\chi = inv.$$

• $\mathbf{H}_{130}$ *Число компонент симметричного тензора* (стр. 549)

В тензоре $\psi_{\alpha_1...\alpha_m\dot\mu_1...\dot\mu_n}$ первые m индексов симметричны. Каждый индекс принимает значения 1 или 2. В последовательности чисел $\alpha_1...\alpha_m$ могут быть все двойки или одна единица (на любом месте), или две единицы, и т.д. Всего получается $m+1$ возможных неэквивалентных (с учетом симметричности относительно перестановок) комбинаций. Аналогично, для каждой из таких $m+1$ комбинаций возможно $n+1$ комбинаций для симметричных индексов $\dot\mu_1...\dot\mu_n$. В результате, всего возможно $(m+1)(n+1)$ различных компонент симметричного тензора.

• $\mathbf{H}_{131}$ *В калибровке Лоренца* $\partial^{\mu\dot\sigma} a^{\nu}_{\dot\sigma} = \partial^{\nu\dot\sigma} a^{\mu}_{\dot\sigma}$ (стр. 551)

Для $\mu = \nu$ это соотношение очевидно. Если индексы различны, то:

$$\partial^{1\dot\sigma} a^{2}{}_{\dot\sigma} - \partial^{2\dot\sigma} a^{1}{}_{\dot\sigma} = -\partial^{1\dot\sigma} a_{1\dot\sigma} - \partial^{2\dot\sigma} a_{2\dot\sigma} = -\partial^{\nu\dot\sigma} a_{\nu\dot\sigma} = 0,$$

где мы воспользовались общим определением $\psi_1 = \psi^2$ и $\psi_2 = -\psi^1$.

• $\mathbf{H}_{132}$ *Компоненты спинорного тензора энергии-импульса* (стр. 556)

Распишем, например, $t^{12\dot1\dot2}/4\pi$. Используя компоненты тензоров, приведенных на стр. 548, выраженные через вектор $\mathbf{f} = \mathbf{E} + \imath\mathbf{B}$, имеем:

$$t^{12\dot1\dot2} = \frac{1}{4\pi} f_z f_z^* = \frac{1}{4\pi} |E_z + \imath B_z|^2 = \frac{1}{4\pi} (E_z^2 + B_z^2).$$

Аналогично:

$$t^{11\dot1\dot1} = \frac{1}{4\pi} (-f_x + \imath f_y)(-f_x^* - \imath f_y^*) = \frac{1}{4\pi} (E_x^2 + E_y^2 + B_x^2 + B_y^2 + 2(E_x B_y - E_y B_x)).$$

Проводя такие вычисления для остальных компонент, получаем:

$$\begin{aligned}
t^{12\dot1\dot2} &= \frac{1}{4\pi} (E_z^2 + B_z^2) \\
t^{11\dot1\dot1} &= \frac{1}{4\pi} (E_x^2 + E_y^2 + B_x^2 + B_y^2 + 2[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]_z) \\
t^{22\dot2\dot2} &= \frac{1}{4\pi} (E_x^2 + E_y^2 + B_x^2 + B_y^2 - 2[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]_z) \\
t^{11\dot2\dot2} &= t^{*22\dot1\dot1} = \frac{1}{4\pi} (E_y^2 - E_x^2 + B_y^2 - B_x^2 + 2\imath E_x E_y + 2\imath B_x B_y) \\
t^{12\dot1\dot1} &= t^{*11\dot1\dot2} = \frac{1}{4\pi} (-E_x E_z - B_x B_z + [\mathbf{E}\times\mathbf{B}]_x + \imath\,[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]_y - \imath E_y E_z - \imath B_y B_z) \\
t^{12\dot2\dot2} &= t^{*22\dot1\dot2} = \frac{1}{4\pi} (\ \ E_x E_z + B_x B_z + [\mathbf{E}\times\mathbf{B}]_x - \imath\,[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]_y - \imath E_y E_z - \imath B_y B_z).
\end{aligned}$$

Связь с тензором $T^{\mu\nu}$ получится, если учесть, что:

$$T^{00} = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi}, \quad T^{0i} = T^{i0} = \frac{[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]_i}{4\pi}, \quad T^{ij} = \delta_{ij} T^{00} - \frac{E_i E_j + B_i B_j}{4\pi}.$$

• $\mathbf{H}_{133}$ *К симметризации тензора энергии-импульса* (стр. 557)

Заметим, что следующая дивергенция приводит к лагранжинау:

$$\frac{1}{4}\,\partial_{\gamma\dot\gamma}\,(a^{\dot\gamma}_{\alpha} f^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\mu\nu}\varepsilon^{\dot\mu\dot\nu}) = \frac{1}{2}\,(\partial_{\gamma\dot\gamma}\, a^{\dot\gamma}_{\alpha} + \partial_{\alpha\dot\gamma}\, a^{\dot\gamma}_{\gamma})\, f^{\alpha\gamma}\varepsilon^{\mu\nu}\varepsilon^{\dot\mu\dot\nu} = -f_{\alpha\gamma} f^{\alpha\gamma}\,\varepsilon^{\mu\nu}\varepsilon^{\dot\mu\dot\nu},$$

а несвёрнутое произведение тензоров напряженности даёт выражение

$$\partial_{\gamma\dot\gamma}\,((a^{\gamma\dot\mu}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\nu} + a^{\gamma\dot\nu}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\mu}) f^{\mu\nu}) = -2 f^{\dot\mu\dot\nu} f^{\mu\nu} + a^{\gamma\dot\mu}\partial^{\dot\nu}_{\gamma} f^{\mu\nu} + a^{\gamma\dot\nu}\partial^{\dot\mu}_{\gamma} f^{\mu\nu}.$$

Отметим также тензор автоматически (без симметризаций) удовлетворяюший уравнению непрерывности по $\partial_{\mu\dot\mu}$:

$$\partial_{\gamma\dot\gamma}\,(f^{\gamma\mu} a^{\nu\dot\nu}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\mu}).$$
