Глава 6

Теория симметрии

В этой главе собраны важные математические вопросы, связанные с групповыми свойствами теории относительности. Теория групп формализует интуитивное понимание симметричности (геометрических форм, уравнений, физических процессов) и является исключительно важной в математическом аппарате физика.

В первой части главы мы рассмотрим красивую теорию абстрактных групп и их представлений. Затем изучим различные линейные преобразования, включая преобразования Лоренца. Последние два раздела главы посвящены нелинейным параметрическим группам. Хотя большинство проявлений симметрии в физике имеет линейный характер, рано или поздно, нелинейные обобщения существующих симметрий (с новыми фундаментальными константами!), по всей видимости, будут открыты.

Как обычно, разделы помеченные звездочкой можно пропустить при первом чтении главы. Это не относится к задачам ($\lessdot$ H$_i$), которые необходимо решать сразу, не оставляя их "на потом". Глава достаточно сложна в математическом плане и задачи являются её важной составляющей. Решения задач можно найти на стр. 846, к которой, впрочем, сразу переходить не стоит.

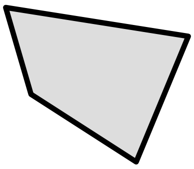
РЕЛЯТИВИСТСКИЙ МИР

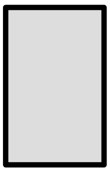
Сергей С. Степанов

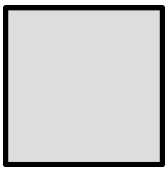
Последняя версия находится на сайте http://synset.com. Все обнаруженные ошибки и замечания просьба присылать по почте: phys@synset.com. (c) 2009-2013. Печать: 2 июля 2013 г.

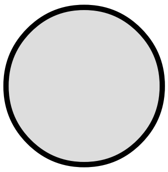
6.1 Что такое симметрия?

• Мы говорим, что квадрат – более симметричная фигура, чем прямоугольник, а окружность симметричнее квадрата. Откуда возникают такие ощущения? Крутя в руках осколок плоской плитки или целые плитки различной формы, мы замечаем что после некоторых манипуляций плитка снова совпадает со своей начальной ориентацией. Чтобы первая фигура на рисунке ниже совпала сама с собой её необходимо для этого повернуть на 360 градусов, и других возможностей нет:





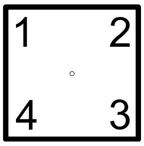




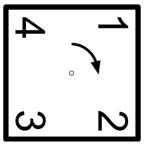
У прямоугольника есть уже больше вариантов. Например, его можно повернуть на 180 или 360 градусов. Для квадрата и круга *преобразований* начального состояния, приводящих к той же ориентации, ещё больше.

Представим лежащую на столе прозрачную квадратную плитку с цифрами в углах. Рассмотрим элементарные *операции* которые можно совершить "одним движением", чтобы изменилось положение цифр, но не ориентация плитки. Прежде всего квадрат можно повернуть на 90, 180 и 270 градусов:

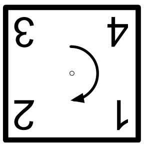
e



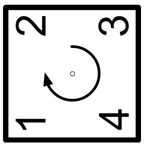
a_1



a_2

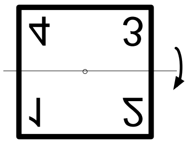


a_3

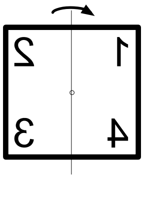


Кроме этого, плитку из исходного состояния "e" можно перевернуть "вверх ногами" вокруг двух осей перпендикулярных сторонам и двух осей проходящих по диагоналям квадрата:

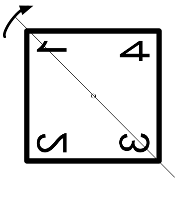
b



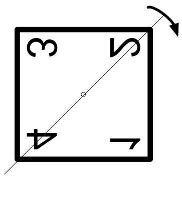
c



d



f



Других возможностей для расположения цифр, при неизменной ориентации квадрата не существует.

Обозначим проделанные манипуляции буквами a_1, a_2, a_3, b, c, d, e f, используя "e" для обозначения операции: "ничего не делаем" (остаёмся в первоначальном состоянии). Такую операцию будем называть *единичной.* Символ "a_1" – это поворот на 90 градусов, "a_2" – на 180, и т.д.

Операции можно проделывать последовательно. Например, повернуть квадрат на 90 градусов (a_1), а затем на 180 градусов (a_2). Такая комбинированная операция эквивалентна одной – повороту на 270 градусов (a_3). Будем этот факт обозначать следующим образом:

$$a_1 \cdot a_2 = a_3.$$

Возможно несколько сложнее проследить, что $b \cdot f$ приводит к a_3. Имеет смысл, вырезав квадрат из бумаги, проделать эти операции руками.

Записывая преобразования друг за другом $x \cdot y$ мы тем самым обозначаем их последовательное выполнение – сначала x, затем y. В результате получается некоторая новая операция $z = x \cdot y$. Такую *композицию операций* будем называть *групповым умножением* или просто умножением. На самом деле, умножение операций, это функция двух аргументов (*бинарная функция*), которая каждому x и y ставит в соответствие некоторый $z = f(x, y)$. Тем не менее эту функцию принято записывать в виде умножения с точкой между операциями ($z = x \cdot y$) или без неё ($z = x\, y$).

Функция группового умножения не всегда симметрична. Так, поворот плитки на 90 градусов (a_1), и последующий переворот (b) эквиваленты одной операции $f = a_1\, b$. Проделав эти же действия в обратном порядке – переворот и поворот мы получим $d = b\, a_1$. В тоже время $a_1\, a_2 = a_2\, a_1 = a_3$, т.е. поворот сначала на 90 градусов, а затем на 180 приводит к такому же результату, как и повороты в обратном порядке. Поэтому, не смотря на привычную алгебраическую запись умножения $x\, y$, необходимо помнить, что x и y это не числа, а некоторые, вообще говоря, не перестановочные действия.

Единичная операция (”ничего не делаем”) выполненная до или после любой операции x, по определению, приводит к ней же, поэтому:

$$e\, x = x\, e = x.$$

Последовательное выполнение некоторых операций может снова приводить к исходному состоянию (единичной операции). Такие операции будем называть обратными друг к другу. Если для x существует обратная операция обозначаемая как x^{-1}, то

$$x\, x^{-1} = x^{-1}\, x = e.$$

Например, $a_1\, a_3 = e$, поэтому $a_3^{-1} = a_1$ и $a_1^{-1} = a_3$. Поворот на 180 обратен сам к себе $a_2\, a_2 = e$, поэтому $a_2^{-1} = a_2$. Аналогично, сами себе обратны операции по переворачиванию плитки b, c, d, f. Обратную операцию иногда также обозначают при помощи черты сверху $a^{-1} = \bar{a}$.

- Для любых преобразований выполняется свойство ассоциативности:

$$(x\,y)\,z = x\,(y\,z).$$

В математике очень многие действия с двумя объектами (бинарные функции) обладают ассоциативностью, например, умножение или сложение чисел, умножение матриц и т.п. Хотя существуют и неассоциативные функции. Простейший пример – это возведение в степень x^y, для которой $x^{(y^z)} \neq (x^y)^z$. Тем не менее композиция преобразований ассоциативна. Действительно, $(x\,y)\,z$ означает, что сначала выполняют x, затем y и на результат воздействуют операцией z. Вторая возможность $x\,(y\,z)$ состоит в том, что сначала выполняется x, затем находят композицию преобразований $(y\,z)$ и её применяют к результату преобразования x. Понятно, что это просто эквивалентно последовательности действий $x\,y\,z$.

Благодаря ассоциативности можно опускать скобки при записи произвольного числа ”сомножителей”. Часто мы будем использовать сокращение $a^2 = a\,a$ или $a^3 = a\,a\,a$, обращаясь со степенями ”как обычно”. В частности $a\,a^2 = a^2\,a = a^3$. Поэтому, если $a\,a = b$, то этот ”b” будет с ”a” перестановочен: $a\,b = b\,a$.

Именно наличие свойства ассоциативности у функции групповой композиции $z = f(x, y)$ привело к термину “групповое умножение” и к обозначению $z = c \cdot y$.

- Геометрические симметрии наглядны, так как заложены в нашем восприятии пространства. Однако симметрии могут быть не только геометрическими. Определим, например, функцию от 3-х переменных:

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) = \prod_{i<j}^{3}(x_i - x_j).$$

В качестве преобразования рассмотрим операцию по перестановке аргументов функции местами. Например, по любой паре аргументов функция антисимметрична $A(x_2, x_1, x_3) = -A(x_1, x_2, x_3)$. Однако существуют перестановки (операции) которые не изменяют значение функции:

$$A(x_1, x_2, x_3) = A(x_3, x_1, x_2) = A(x_2, x_3, x_1).$$

Не сложно видеть, что это циклические перестановки аргументов вправо $a = (\underrightarrow{x_3, x_1, x_2})$ и влево $\bar{a} = (\underleftarrow{x_2, x_3, x_1})$, от $e = (x_1, x_2, x_3)$ являющегося исходным порядком. Их можно выполнять последовательно:

$$a\,a = \bar{a}, \qquad a\,\bar{a} = \bar{a}\,a = e, \qquad \bar{a}\,\bar{a} = a.$$

Видно, что операции a и $\bar{a}$ обратны друг другу, и их можно выполнять в любом порядка (групповое умножение симметрично).

• Симметричными могут быть уравнения. Рассмотрим систему n частиц расположенных на прямой и взаимодействующих друг с другом при помощи парных сил, зависящих только от расстояния между частицами:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \sum_{j\neq i}^{n} f(|x_i - x_j|).$$

Эти динамические уравнения Ньютона записаны в фиксированной системе отсчёта относительно которой заданы координаты. Рассмотрим другую систему отсчета, которая движется относительно первой с постоянной скоростью $v = const$. Если при $t = 0$ начала систем совпадали, то связь координат в них имеет вид: $x' = x - vt$ (стр. 27). Несложно проверить ($\lessdot$ H$_{51}$), что в движущейся системе отсчёта уравнения движения будут выглядеть точно также. Это преобразование симметрии уравнений является преобразованием Галилея.

Последовательность преобразований Галилея (переход сначала к системе x' движущейся со скоростью v_1, а затем к x'' со скоростью v_2) эквивалентно движению со скоростью $v_1 + v_2$:

$$x'' = x' - v_2t = (x - v_1t) - v_2t = x - (v_1 + v_2)t.$$

Преобразование можно записать в операторном виде, действуя оператором $\hat{G}(v)$ на x *справа*:

$$x' = x\,\hat{G}(v) = x - vt,$$

тогда композиция выражается в виде группового умножения, с "правильной" последовательностью операторов:

$$x'' = x'\hat{G}(v_2) = x\hat{G}(v_1)\hat{G}(v_2) \quad \text{или} \quad \hat{G}(v_1)\,\hat{G}(v_2) = \hat{G}(v_1 + v_2).$$

Обратное преобразование получается обращением скорости:

$$x'' = x' + vt = (x - vt) + vt = x \quad \text{или} \quad \hat{G}^{-1}(v) = \hat{G}(-v).$$

Ассоциативность группового умножения очевидна в силу операторного характера действия $\hat{G}(v)$. Заметим, что в отличие от предыдущих двух симметрий – это симметрия непрерывная, так как преобразования различаются при помощи "непрерывного индекса" – скорости v.

Подведём итоги.

> *Симметрия* – это набор операций по преобразованию системы, которые эту систему или часть её свойств оставляют неизменной.

Математический аппарат, описывающий подобные операции называется *теорией групп*. Рассмотрим её чуть более формально.

• *Группа* – это множество элементов на котором задана всюду определённая бинарная функция $x\,y$ обладающая ассоциативностью; существует единичный элемент e, и каждый элемент имеет обратный:

$$\begin{array}{lll} \triangleright & \text{для любых } x, y \text{ существует } z: & z = x\,y \\ \triangleright & \text{ассоциативность для любых } x,\ y,\ z: & (x\,y)\,z = x\,(y\,z) \\ \triangleright & \text{существует } e, \text{ такой, что для любого } x: & x\,e = e\,x = x \\ \triangleright & \text{для любого } x \text{ существует } x^{-1}: & x\,x^{-1} = x^{-1}\,x = e. \end{array}$$

Количество элементов множества называется *порядком группы.* Группы могут быть *конечными* или *бесконечными.* Бесконечные группы, в свою очередь, бывают *дискретными* или *непрерывными.* Рассмотренная выше группа преобразований квадрата или функции $A(x_1, x_2, x_3)$ – это конечные группы. На множестве целых чисел $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$, мы имеем бесконечную дискретную группу с умножением в виде обычного арифметического сложения и нулём в качестве единичного элемента. Обратными при этом будут одинаковые по модулю и разные по знаку числа. Преобразование Галлилея является бесконечной непрерывной группой.

• Для конечных групп закон группового умножения удобно представлять в виде таблицы умножения. Например, пусть множество состоит из 6 элементов $\{e, a, b, c, d, f\}$, из которых e считается единичным. Чтобы задать функцию умножения необходимо перечислить $36 = 6^2$ значений. Представим в табличном виде два варианта группового умножения:

$$\mathbf{D_3}:\quad \begin{array}{c|ccccc|} e & a & b & c & d & f \\ \cline{2-6} a & b & \bullet & d & f & c \\ b & \bullet & a & f & c & d \\ c & f & d & \bullet & b & a \\ d & c & f & a & \bullet & b \\ f & d & c & b & a & \bullet \\ \cline{2-6} \end{array} \qquad \mathbf{C_6}:\quad \begin{array}{c|ccccc|} e & a & b & c & d & f \\ \cline{2-6} a & b & c & d & f & \bullet \\ b & c & d & f & \bullet & a \\ c & d & f & \bullet & a & b \\ d & f & \bullet & a & b & c \\ f & \bullet & a & b & c & d \\ \cline{2-6} \end{array}$$

В заголовках строчек (по вертикали) стоят имена первого сомножителя, в заголовках колонок (по горизонтали) – второго. На пересечении строки и колонки находится значение их произведения. В $\mathbf{D_3}$: $a\,a = b$, $c\,b = d$, и т.д. Если результатом оказывается единичный элемент, то вместо "e" стоит жирная точка, позволяющая легко находить в таблице обратные элементы. В рамку мы обводим часть таблицы умножения не единичных элементов. Приведенные выше группы $\mathbf{D_3}$ и $\mathbf{C_6}$ имеют порядок 6.

Для n элементов возможно $n^{n \cdot n}$ таблиц умножения (бинарных функций). С ростом n количество бинарных функций стремительно растет. Однако очень немногие из них удовлетворяют групповым аксиомам. Так при $n = 6$ возможно 6^{36} таблиц, но только 2 из них будет группами!

• В общем случае симметричность (*коммутативность*) умножения не предполагается: $x\,y \neq y\,x$. Группы с коммутирующим умножением называются *абелевыми.* Группа $\mathbf{C_6}$ – абелева. Группа $\mathbf{D_3}$ – неабелева: $(af = c) \neq (fa = d)$. *Полугруппой* называется всюду определённое ассоциативное умножение (наличие "e" и "x^{-1}" не предполагается).

• Благодаря существованию единичного и обратных элементов, все группы являются *регулярными.* Это означает, что из $z\,x = z\,y$ следует, что $x = y$ (регулярность слева). Чтобы в этом убедиться, достаточно умножить уравнение слева на z^{-1} и, благодаря ассоциативности, получить $x = y$. Аналогично, $x = y$ следует из $x\,z = y\,z$ (регулярность справа). Поэтому в групповых таблицах умножения в любой строке или колонке *ни какой элемент не встречается дважды.* Действительно, для строки с заголовком z и различными колонками x и y элементы $z\,x$ и $z\,y$ стоящие на их пересечениях должны различаться.

• *Единичный элемент в группе всегда один.* Докажем это. Если единичных элементов два: e_1 и e_2, то по определению "единичности" e_1, его умножение на e_2 даст $e_1\,e_2 = e_2$. Это же соотношение, по определению "единичности" e_2, должно дать $e_1\,e_2 = e_1$. От сюда следует, что $e_1 = e_2$.

• *Каждый x имеет только один обратный ему элемент.* Если бы у x было два обратных x_1 и x_2, то умножая $e = x\,x_1$ слева на x_2, получим:

$$x_2 = x_2\,(x\,x_1) = (x_2\,x)\,x_1 = e\,x_1 = x_1.$$

Поэтому в каждой строке, и в каждом столбце таблицы умножения должна стоять *только одна точка* (единичный элемент).

Если x и y не равны единичному, то их произведение $x\,y$ не может быть равно x или y. В противном случае, умножая, например, $x\,y = x$ слева на x^{-1} получим $y = e$. Поэтому в строке или колонке соответствующих некоторому элементу a, он *сам стоять не может*, и находится только в заголовке (см. таблицы для $\mathbf{D_3}$, $\mathbf{C_6}$). В результате, каждая строчка и колонка таблицы, включая их заголовки, является некоторой перестановкой элементов группы.

• Что бы найти элемент обратный произведению двух элементов, достаточно перемножить в обратном порядке обратные к ним элементы:

$$(x\,y)^{-1} = y^{-1}\,x^{-1}.$$

Действительно, используя ассоциативность, имеем:

$$(x\,y)^{-1}\,(x\,y) = (y^{-1}\,x^{-1})\,(x\,y) = y^{-1}\,(x^{-1}\,x)\,y = y^{-1}\,e\,y = y^{-1}y = e.$$

Аналогичное правило справедливо и для произведения нескольких элементов: $(x\,y\,z)^{-1} = z^{-1}\,y^{-1}\,x^{-1}$, и т.д.

• Таблицы умножения – не единственный способ задания группы. Иногда оказывается, что один или несколько элементов перемножаясь, порождают все остальные элементы группы. Такие элементы называются *системой порождающих элементов.* Минимальное количество независимых элементов, необходимых для задания всей таблицы умножения называется *рангом группы.* При помощи порождающих элементов группа записывается в виде угловых скобок, внутри которых до вертикальной черты перечисляются все порождающие элементы (кроме единичного), а после – *определяющие соотношения*, т.е. правила которые необходимо учитывать при порождении других элементов:

$$\mathbf{C_6} = \left\langle a|a^6 = e\right\rangle, \qquad\qquad \mathbf{D_3} = \left\langle a, c|a^3 = e,\ c^2 = e,\ (ac)^2 = e\right\rangle.$$

Так, $\mathbf{C_6}$ означает, что умножение элемента a самого на себя: $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a{\cdot}a{\cdot}a$, и т.д. будет приводить к новым элементам, пока мы не сделаем это шесть раз: $a^6 = e$, получив единичный элемент. Группа замыкается, состоит из 6-ти элементов, имеющих (в обозначениях таблицы $\mathbf{C_6}$ на стр. 348) вид: $\{e, a, a^2 = b, a^3 = c, a^4 = d, a^5 = f\}$.

Алгебра определяющих соотношений для $\mathbf{D_3}$ работает следующим образом. Единичный элемент "e" и два порождающих элемента a и c дают 6 элементов:

$$e, \quad a, \quad a^2 = b, \quad c, \quad ac = d, \quad ca = f.$$

Другие элементы можно было бы получать перемножением $\{a, b, c, d, f\}$. Однако определяющие соотношения блокируют эту деятельность. Например, $d^2 = (ac)^2 = e$, $df = acca = a^2 = b$. Несколько сложнее:

$$f^2 = (ca)(ca) = (ca)(ca)c^2 = c(ac)^2c = c^2 = e.$$

Порядком элемента называется такое наименьшее число k, что $a^k = e$. Из уравнения $a \cdot b = a$ следует, что $b = e$ (умножаем слева на a^{-1}). Поэтому, не может быть такой ситуации, при которой, порождая новые элементы $a, aa, aaa, ...$, мы получим a не достигнув единичного (цикличность через себя же). В результате, каждый элемент конечной группы имеет конечный порядок k, меньший чем порядок самой группы n. Понятно, что при этом $a^{k-1} = a^{-1}$.

Целое число $n > k$ всегда можно записать в виде $n = k \cdot q + p$, где p и q целые числа. Поэтому $a^n = (a^k)^p \cdot a^q = e^p \cdot a^q = a^q$. Отсюда следует, что порядок k элемента является делителем порядка n группы.

Группа $\mathbf{D_3}$ имеет порядок 6: $\{e, a, b, c, d, f\}$. Порядок её двух *независимых* порождающих элементов равны 3 ($a^3 = e$) и 2 ($c^2 = e$).

• Одна и та же группа в конкретных приложениях может иметь различные реализации, которые называют *представлениями группы*. Рассмотрим, например, множество из четырех элементов $\{e, a, b, c\}$ на котором зададим групповую таблицу умножения $\mathbf{C}_4$ (слева):

$$\mathbf{C}_4:\ \begin{array}{c|ccc|} & a & b & c \\ \hline a & b & c & \bullet \\ b & c & \bullet & a \\ c & \bullet & a & b \\ \hline \end{array} \qquad \Bigg\| \qquad \begin{array}{c|ccc|} & \imath & -1 & \imath^* \\ \hline \imath & -1 & \imath^* & 1 \\ -1 & \imath^* & 1 & \imath \\ \imath^* & 1 & \imath & -1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Эта таблица определяет *абстрактную* абелеву $(x \cdot y = y \cdot x)$ группу, так как она симметрична относительно *главной диагонали* (из левого верхнего угла в правый нижний). Её элементам можно придать различный содержательный смысл. Пусть, например $\{e, a, b, c\} = \{1, \imath, -1, \imath^*\}$, где 1, -1 – обычные числа, $\imath$ – мнимая единица, а $\imath^*$ – её комплексное сопряжение. Групповое умножение в этом случае – это умножение комплексных чисел (вторая таблица выше).

Другое представление можно построить, считая элементы группы целыми числами $\{e, a, b, c\} = \{0, 1, 2, 3\}$. Групповая операция умножения удовлетворяющая таблице $\mathbf{C}_4$ имеет вид:

$$x \cdot y : \quad (x + y) \bmod 4,$$

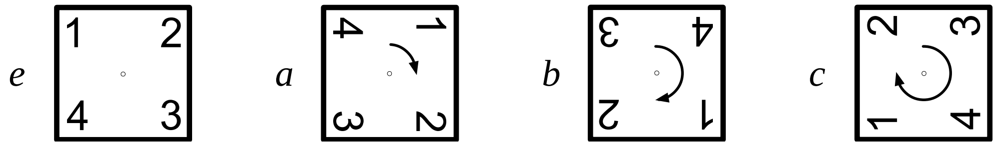
где плюс – обычное арифметическое сложение, а "$z \bmod 4$" – операция получения остатка от деления z на 4.

Группа $\mathbf{C}_4$ имеет также матричное представление:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перемножение этих матриц приводит к той же групповой таблице.

Наконец, для группы $\mathbf{C}_4$ справедливо геометрическое представление, состоящее из рассмотренных ранее поворотов квадрата вокруг центра, без отражений вокруг осей:

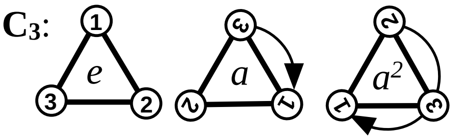


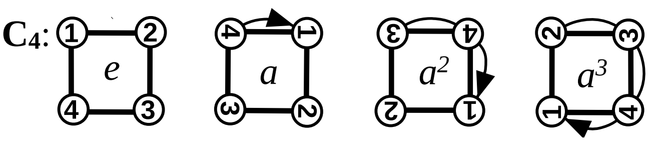
Композиция поворотов $\{a, b, c\}$ снова формирует групповую таблицу $\mathbf{C}_4$.

Развитие теории групп обычно идёт по двум направлениям. Во первых, ищут закономерности в структуре таблиц умножения, на основе которых проводится классификация абстрактных групп. Во вторых, изучаются различные представления групп и следствия, которые возникают из их существования для конкретных теорий.

6.2 Примеры и определения

• Самой простой является группа циклических перестановок n элементов $\mathbf{C_n}$. Пронумеруем углы правильного n-угольника. Пусть его вращают в плоскости на углы $2\pi m/n$, где $m = 0, ..., n-1$ без переворотов. Ниже представлены такие преобразования треугольника ($\mathbf{C_3}$) и квадрата ($\mathbf{C_4}$):





Понятно, что это абелева группа. Поворот m раз на угол $a : 2\pi/n$ *порождает* любой элемент группы. Для именования n элементов группы $\mathbf{C_n}$ удобно использовать следующие обозначения: $\mathbf{C_n} = \{e, a, a^2, a^3, ..., a^{n-1}\}$:

$\mathbf{C_2}$	a
a	•

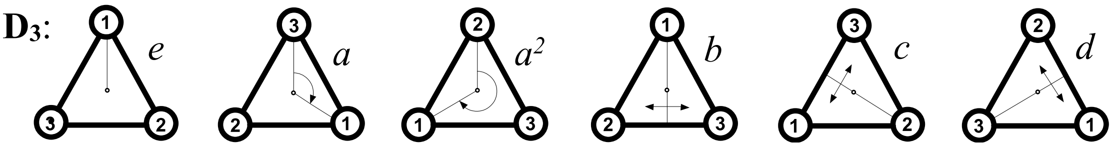
$\mathbf{C_3}$	a	a^2
a	a^2	•
a^2	•	a

$\mathbf{C_4}$	a	a^2	a^3
a	a^2	a^3	•
a^2	a^3	•	a
a^3	•	a	a^2

$\mathbf{D_2}$	a	b	c
a	•	c	b
b	c	•	a
c	b	a	•

Имеется одна группа 2-го ($\mathbf{C}_2$) и одна 3-го порядка ($\mathbf{C}_3$). Для 4-х элементов возможны две группы $\mathbf{C}_4$ и $\mathbf{D}_2$ (см.выше). Для 5-ти – одна ($\mathbf{C}_5$).

Если правильному n-угольнику разрешено вращаться в плоскости вокруг центра симметрии, и переворачиваться вокруг осей симметрии, то получается *группа диэдра* $\mathbf{D_n} = \langle a, b | a^n = e,\ b^2 = e,\ (ab)^2 = e \rangle$ порядка $2n$. К $\mathbf{D_n}$ относят и группу $\mathbf{D}_2$ преобразований прямоугольника ($\lessdot \mathrm{H}_{52}$). Для треугольника ($\mathbf{D_3}$) имеем (для квадрата см.стр. 344):



	a	a^2	b	c	d
a	a^2	•	c	d	b
a^2	•	a	d	b	c
$\mathbf{D_3}$: b	d	c	•	a^2	a
c	b	d	a	•	a^2
d	c	b	a^2	a	•

	a	a^2	a^3	b	c	d	f
a	a^2	a^3	•	f	d	b	c
a^2	a^3	•	a	c	b	f	d
a^3	•	a	a^2	d	f	c	b
$\mathbf{D_4}$: b	d	c	f	•	a^2	a	a^3
c	f	b	d	a^2	•	a^3	a
d	c	f	b	a^3	a	•	a^2
f	b	d	c	a	a^3	a^2	•

Кроме наименьшей неабелевой группы $\mathbf{D_3}$ для 6 элементов существует ещё абелева группа $\mathbf{C_6}$. Группа 7-го порядка одна ($\mathbf{C_7}$); 8-й порядок допускает уже 5 групп, две из которых неабелевы. Это $\mathbf{D_4}$ и группа кватернионов $\mathbf{Q}$ (см.стр. 507).

• В левом верхнем углу таблиц $\mathbf{D_n}$ находится блок, совпадающий с циклической группой. Говорят, что $\mathbf{C_n}$ является подгруппой группы $\mathbf{D_n}$.

Подгруппа $\mathbf{H}$, это подмножество $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$, элементов группы $\mathbf{G}$ для которых выполняются *все* групповые свойства (есть единичный, у каждого элемента – обратный, и при умножении возникают только элементы из подгруппы $\mathbf{H}$: $h_i,\ h_j,\ h_i\,h_j \in \mathbf{H}$). Так, $\mathbf{C}_3 \subset \mathbf{D}_3$.

Единичный элемент $\{e\}$ и сама группа $\mathbf{G}$ являются подгруппами $\mathbf{G}$. Их называют *собственными*. Выявление остальных (*несобственных*) подгрупп данной группы позволяет лучше понять её свойства.

Если $\mathbf{F} \subset \mathbf{H}$, а $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ то $\mathbf{F} \subset \mathbf{G}$ (отношение *транзитивности*). Для обозначения "вложенности" подгрупп иногда переворачивают значок подгруппы: $\mathbf{D_4} \supset \mathbf{C_4} \supset \mathbf{C_2}$. Пересечение подгрупп также является подгруппой (иногда это только $\{e\}$). Стоит найти ($\lessdot$ H$_{53}$) подгруппы группы $\mathbf{D_3}$ и построить ($\lessdot$ H$_{54}$) иерархию подгрупп группы $\mathbf{D_4}$.

• Если у группы $\mathbf{G}$ известна некоторая подгруппа $\mathbf{H}$, то можно попытаться найти другие подгруппы. Для этого, выбирается фиксированный элемент g группы ($g \in \mathbf{G}$), не принадлежащий $\mathbf{H}$ ($g \notin \mathbf{H}$) и строится *сопряжённая подгруппа* $\mathbf{H}' = g\mathbf{H}g^{-1}$, элементы которой получаются умножением всех элементов $\mathbf{H}$ слева на g, а справа на g^{-1}. То, что такое множество элементов образует группу, легко проверяется ($\lessdot$ H$_{55}$). Так, результат умножения остаётся внутри $\mathbf{H}'$:

$$h'_i h'_j = (g\,h_i\,g^{-1})\cdot(g\,h_j\,g^{-1}) = g\,(h_i\,h_j)\,g^{-1} = gh_kg^{-1} = h'_k \in \mathbf{H}'.$$

Например, для $\{e,b\} \subset \mathbf{D_3}$ имеем $a\cdot\{e,b\}\cdot a^{-1} = \{a,c\}\cdot a^2 = \{e,d\} \subset \mathbf{D_3}$.

• Подгруппа $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ называется *инвариантной*, если её сопряжение с *любым* элементом $\mathbf{G}$ снова дает $\mathbf{H}$ (новая подгруппа не возникает). В этом случае для любого $g \in \mathbf{G}$ имеем: $g^{-1}\,h_i\,g = h_j \in \mathbf{H}$ или иначе $h_i\,g = g\,h_j$. Заметим, что при сопряжении элемента h_i получается вообще говоря *другой* элемент h_j инвариантной подгруппы. Несложно видеть, что все подгруппы абелевой группы являются инвариантными.

Группа, не имеющая инвариантных подгрупп (кроме себя самой и единичного элемента) называется *простой*. Группа $\mathbf{D}_3$ не простая, так как $\mathbf{C}_3 \subset \mathbf{D}_3$ инвариантна ($\lessdot$ H$_{56}$). *Полупростой* называется группа у которой все инвариантные подгруппы неабелевы.

Если $\mathbf{H}_1$ инвариантная подгруппа группы $\mathbf{G} \supset \mathbf{H}_1$, а $\mathbf{H}_2$ инвариантная подгруппа группы $\mathbf{H}_1 \supset \mathbf{H}_2$, то в общем случае $\mathbf{H}_2$ не является инвариантной подгруппой группы $\mathbf{G}$ (хотя конечно $\mathbf{H}_2$ является подгруппой $\mathbf{G}$). Т.е. инвариантность подгрупп не обладает транзитивностью.

• Циклическая группа $\mathbf{C_n}$, в отличие от групп диэдра $\mathbf{D_n}$, $n > 3$, является абелевой группой. Естественно это не единственный пример семейства абелевых групп. В циклической группе один производящий элемент генерит все остальные элементы группы. Однако производящих элементов может быть несколько. Рассмотрим, например, группу $\mathbf{C_{n,m}}$, задав её при помощи определяющих соотношений:

$$\mathbf{C_{n,m}} = \langle a, b | \ a^n = e, \quad b^m = e, \quad ab = ba \ \rangle \,.$$

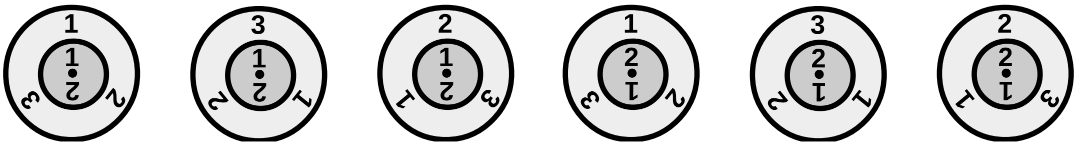
Эта группа имеет порядок $n \cdot m$ и является абелевой, с двумя порождающими элементами. Например:

$\mathbf{C_{2,3}}$:

	a	b	b^2	ab	ab^2
a	•	ab	ab^2	b	b^2
b	ab	b^2	•	ab^2	a
b^2	ab^2	•	b	a	ab
ab	b	ab^2	a	b^2	•
ab^2	b^2	a	ab	•	b

Для наглядности, мы не стали вводить имена для двух новых элементов $c = ab$ и $d = ab^2$, оставив в таблице только производящие элементы. Хорошо видно, что эта группа симметрична относительно *главной диагонали* (из левого верхнего угла в правый нижний).

Аналогично можно определить абелеву группу с тремя, и т.д. порождающими элементами. Они имеют наглядное представление в виде дисков открывающих замок в сейфе или камере хранения. Так, элементы группы $\mathbf{C_{2,3}}$ могут быть представлены при помощи следующих картинок (два диска замка нарисованы один в другом):



Вращение дисков независимы друг от друга, и это собственно и приводит к абелевости группы. Если мы имеем n дисков, с количеством цифр k_1,...,k_n, то порядок такой группы $\mathbf{C_{k_1 \dots k_n}}$ будет равен $k_1 \cdot \ldots \cdot k_n$. Любой элемент группы $\mathbf{C}_{\mathbf{k}_1 \dots k_n}$ раскладывается на коммутирующие множители порождающих элементов: $a_1^{m_1} \cdot \ldots a_n^{m_n}$, где $m_i < k_i$.

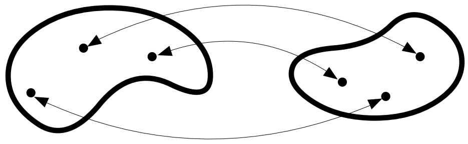
Эти группы покрывают все возможные абелевы группы. Простые циклические группы являются их вырожденным случаем, когда порождающий элемент единственен или k_i – *взаимопростые.*

• Две группы называются *изоморфными*, если с точностью до переобозначения элементов их таблицы умножения совпадают. Сравним таблицы группы $\mathbf{C_{2,3}}$ и циклической группы $\mathbf{C_6}$ (см. ниже). Так как порядки порождающих элементов взаимопростые, можно сделать такие соответствия от группы $\mathbf{C_{2,3}}$ к группе $\mathbf{C_6}$: $a \mapsto a^3$ и $b \mapsto a^2$ (их 2-я и 3-я степени дают единичный элемент). Аналогично $ab \mapsto a^3 \cdot a^2 = a^5$, и т.д. В результате между элементами групп $\mathbf{C_{2,3}}$ и $\mathbf{C_6}$ устанавливается взаимооднозначное соответствие, *сохраняющее* групповое умножение, что обозначается следующим образом: $\mathbf{C_{2,3}} \approx \mathbf{C_6}$. Это соответствие записано ниже справа в виде функции:

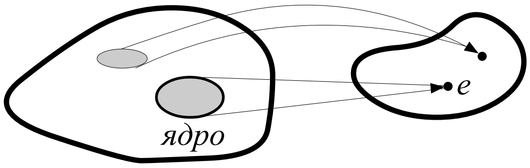
$$\mathbf{C_6}:\quad \begin{array}{c|ccccc|} & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 \\ \hline a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & \bullet \\ a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & \bullet & a \\ a^3 & a^4 & a^5 & \bullet & a & a^2 \\ a^4 & a^5 & \bullet & a & a^2 & a^3 \\ a^5 & \bullet & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ \hline \end{array}, \qquad \Psi\begin{pmatrix} a \\ b \\ b^2 \\ ab \\ ab^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 \\ a^2 \\ a^4 \\ a^5 \\ a \end{pmatrix}.$$

Две группы $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}'$ является *гомоморфными* если существует соответствие между их элементами, т.е. всюду определённая функция Ψ из $\mathbf{G}$ в $\mathbf{G}'$: $g'_k = \Psi(g_i)$ *сохраняющая умножения*: $\Psi(g_i\, g_j) = \Psi(g_i)\Psi(g_j)$. Множество $\mathbf{G}'$ называется *образом* отображения: $\mathbf{G}' = \Psi(\mathbf{G})$. Иногда пишут $\mathbf{G}' = \operatorname{Im}\Psi$. Если функция Ψ имеет обратную, т.е. соответствие взаимно-однозначно, то это изоморфизм. Поэтому изоморфизм является частным случаем гомоморфизма, когда отображение групп существует в обе стороны. Наглядно это можно представить в следующем виде:

Изоморфизм



Гомоморфизм



В качестве примера рассмотрим множество несингулярных (с ненулевыми определителями) матриц nxn. Они имеют обратные, а, следовательно, их умножение удовлетворяет групповым аксиомам. Определитель произведения $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$ устанавливает гомоморфное отображение из группы матриц в группу ненулевых вещественных чисел.

Множество элементов переходящих при гомоморфизме $\mathbf{G}' = \Psi(\mathbf{G})$ в единичный элемент $e' \in \mathbf{G}'$ называется *ядром гомоморфизма* и обозначается $\ker \Psi$. В примере с матрицами ядром является множество всех матриц с единичным определителем. Они образуют группу $\mathbf{SL}(n, C)$.

6.3 Группа перестановок *

• Рассмотрим ещё один важный класс групп. Пусть имеется n упорядоченных объектов, пронумерованных цифрами от 1 до n. Эти объекты можно переставить местами $n! = 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ способами (на первое место поставим один их n предметов; для *каждой* из этих n возможностей, на второе место поставим один из $(n-1)$ оставшихся предметов, и т.д.). Например, для трёх объектов возможно 6 перестановок:

$$e = (1\,2\,3),\quad a = (\underline{2}\,\underline{1}\,3),\quad b = (1\,\underline{3}\,\underline{2}),\quad c = (\underline{3}\,2\,\underline{1}),\quad d = (\underrightarrow{3\,1\,2}),\quad f = (\underleftarrow{2\,3\,1}).$$

Каждой перестановке мы присвоили имя "a-f", и будем её считать операцией, переводящей первоначальный порядок $e = (1\ 2\ 3)$ в некоторый другой. Перестановки $\{a,\ b,\ c\}$ задействуют только пары элементов, оставляя третий неизменным. Оставшиеся две являются циклическим сдвигом вправо $\{d\}$ и влево $\{f\}$.

Композиция двух последовательных перестановок, снова является перестановкой. Представим все возможные композиции перестановок трёх объектов при помощи таблицы умножения. Ясно, что если мы переставим первый и второй объект, а затем повторим эту операцию, то получится исходный порядок. Поэтому $a^2 = b^2 = c^2 = e$. Сдвинув исходный порядок вправо (d), а затем повторив этот сдвиг мы получим $f = d^2$. Аналогично рассуждая дальше, сформируем таблицу умножения:

$$\mathbf{S_3}:\quad \begin{array}{c|ccc|cc|} & a & b & c & d & f \\ \cline{2-6} a & \bullet & f & d & c & b \\ b & d & \bullet & f & a & c \\ c & f & d & \bullet & b & a \\ \cline{2-6} d & b & c & a & f & \bullet \\ f & c & a & b & \bullet & d \\ \cline{2-6} \end{array}$$

Эта группа называется *группой перестановок* или *симметрической группой* и обозначается как $\mathbf{S_3}$. Очевидно, что она не абелева. Например: $(a\,b = f) \neq (b\,a = d)$. Аналогично строится группа перестановок n объектов $\mathbf{S_n}$. Она имеет порядок $n!$ и при $n > 2$ также является не абелевой.

Обратим внимание на блок 2x2 в правом нижнем углу состоящий из элементов f и d. Это подгруппа $\mathbf{C_3} \subset \mathbf{S_3}$. Понятно, что циклические сдвиги вправо или влево вместе с единичным порядком являются замкнутыми операциями и образуют группу $\mathbf{C_3} = \{e, d, f\}$. Она является инвариантной (проверьте).

Группа $\mathbf{S}_3$ изоморфна $\mathbf{D}_3$. Действительно, номера вершин треугольника на рисунке $\mathbf{D}_3$ (стр. 352), перечисляемые по часовой стрелки, начиная с верхней, являются перестановками трёх чисел (так, только при $n = 3$).

• Перестановки можно считать всюду определёнными обратимыми целочисленными функциями $x(i)$, где i – позиция элемента, а $x(i)$ – его номер. Результат композиции двух последовательных перестановок $z = x{\cdot}y$ равен:

$$z(i) = x\bigl(y(i)\bigr).$$

Обратная $\bar{x}$ к x перестановка удовлетворяет уравнению:

$$\bar{x}\bigl(x(i)\bigr) = x\bigl(\bar{x}(i)\bigr) = i.$$

Соответственно, единичная перестановка – это "'линейная функция" $e(i) = i$.

• При вычислении результата композиции двух перестановок можно поступать следующим образом. Рассмотрим, например $a \cdot f = b$. Запишем первую перестановку, поставив у номера объекта индекс равный его текущему положению в списке:

$$\overbrace{(2_1\ 1_2\ 3_3)}^{a} \cdot \overbrace{(2\ 3\ 1)}^{f} = \overbrace{(1\ 3\ 2)}^{b},$$

На первом месте в f стоит 2. Это означает, что f применённая к уже сделанной a, должна на первое место поставить второй элемент a, т.е. "1". Аналогично третий элемент ("3") идёт на второе место, и первый ("2") на третье. Таким образом для записи композиции $x \cdot y$ необходимо взять второй список, и вместо его цифр $y = (i, j, k, ...)$ записать элементы первого списка с индексами $i, j, k, ...$:

$$(...\,x_i\,...y_j...z_k...) \cdot (i\ j\ k\ ...) = (x\,y\,z\,....).$$

Например, выполним более длинное умножения двух перестановок девяти объектов:

$$(8_1\ 2_2\ 1_3\ 4_4\ 5_5\ 6_6\ 7_7\ 3_8\ 9_9) \cdot (1\ 7\ 3\ 4\ 5\ 2\ 9\ 8\ 6) = (8\ 7\ 1\ 4\ 5\ 2\ 9\ 3\ 6).$$

• Чтобы для данной перестановки записать обратную к ней, необходимо *значение номера позиции* элемента поставить на место номера этого элемента:

$$(...\,x_i\,...y_j...z_k...)^{-1} = (...\,i_x\,...j_y...k_z...).$$

Для этого достаточно переставить местами число и его индекс, и после этого отсортировать по возрастанию индекса. Например

$$d^{-1} = (3_1\ 1_2\ 2_3)^{-1} = (1_3\ 2_1\ 3_2) = (2\ 3\ 1) = f.$$

В результате: $d \cdot d^{-1} = (3_1\ 1_2\ 2_3)\ (2\ 3\ 1) = (1\ 2\ 3) = e$.

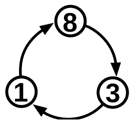
• Любую перестановку можно характеризовать по числу одновременно задействованных в ней объектов. Так, в $\mathbf{S_3}$ элемент "$a = (2\ 1\ 3)$" переставляет местами первые два объекта, а положение третьего оставляет неизменным. Замкнутые группы переставляемых объектов называются *циклами.* В перестановке может быть несколько циклов:

$$p = (8_1\ 7_2\ 1_3\ 4_4\ 5_5\ 2_6\ 9_7\ 3_8\ 6_9) = [8\ 3\ 1] \cdot [7\ 9\ 6\ 2]$$

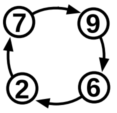
Чтобы их найти, берём первый элемент, номер которого не совпадает с номером позиции (8) и идём на 8-е место. Там стоит 3. Поэтому идём на 3-е место. Там 1, и так как на первом месте стоит 8-ка с которой мы начали, цикл [8 3 1] замыкается.

Цикл записывают опуская индексы, так как их всегда можно восстановить. Для этого необходимо в качестве индекса ставить номер *предыдущего* объекта в списке цикла, считая предыдущим для первого элемента – последний:

$$[8\,3\,1] = (8_1\,3_8\,1_3)$$



$$[7\,9\,6\,2] = (7_2\,9_7\,6_9\,2_6)$$



При таком алгоритме записи циклов любые циклические перестановки [8 3 1], [1 8 3], [3 1 8] являются одной и той же перестановкой. Смысл цикла состоит в круговой перестановке объектов – 8 идёт на третье место, 3 идёт на первое, а 1 на восьмое. Заметим, что мы различаем обозначения для цикла (квадратные скобки) и для перестановки (круглые).

Если два цикла, например [8 3 1] и [7 9 6 2] не имеют пересекающихся элементов, то произведение содержащих им перестановок можно выполнять в любом порядке:

$$\begin{aligned}(\mathbf{8}_1\ 2_2\ \mathbf{1}_3\ 4_4\ 5_5\ 6_6\ 7_7\ \mathbf{3}_8\ 9_9) \cdot (1\ \mathbf{7}\ 3\ 4\ 5\ \mathbf{2}\ \mathbf{9}\ 8\ \mathbf{6}) &= (8\ 7\ 1\ 4\ 5\ 2\ 9\ 3\ 6),\\ (1_1\ \mathbf{7}_2\ 3_3\ 4_4\ 5_5\ \mathbf{2}_6\ \mathbf{9}_7\ 8_8\ \mathbf{6}_9) \cdot (\mathbf{8}\ 2\ \mathbf{1}\ 4\ 5\ 6\ 7\ \mathbf{3}\ 9) &= (8\ 7\ 1\ 4\ 5\ 2\ 9\ 3\ 6).\end{aligned}$$

Таким образом, выявление циклов позволяет разбить перестановку на композицию более простых перестановок.

Циклы состоящие из двух объектов называются *транспозициями.* Двойное применение транспозиции даёт единичную перестановку. Аналогично, тройное применение цикла длинной 3 даёт исходный порядок:

$$\begin{aligned}[8\ 3\ 1]^2 &= (8_1\ 3_8\ 1_3)\,(8_1\ 3_8\ 1_3) = (3_1\ 1_8\ 8_3)\\ [8\ 3\ 1]^3 &= (3_1\ 1_8\ 8_3)\,(8_1\ 3_8\ 1_3) = (1_1\ 8_8\ 3_3) = e\end{aligned}$$

Понятно, что если цикл имеет длину n, то его n-я степень даст единичную перестановку (мы n раз по кругу переставим объекты, вернувшись к исходному порядку).

• Изоморфизм групп иногда приобретает очень любопытные формы. Пронумеруем элементы $\{e, a, b, c\}$ группы $\mathbf{D_2}$ цифрами от 1 до 4. Представим каждую строку таблицы умножения в виде списка номеров элементов, поставив первым номер элемента в заголовке строки:

$$\mathbf{D_2}:\quad \begin{array}{cc|c|cc|} 1 & e & a & b & c \\ \cline{3-5} 2 & a & \bullet & c & b \\ \cline{3-5} 3 & b & c & \bullet & a \\ 4 & c & b & a & \bullet \\ \cline{3-5} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} p_e = (1\ 2\ 3\ 4) \\ p_a = (2\ 1\ 4\ 3) \\ p_b = (3\ 4\ 1\ 2) \\ p_c = (4\ 3\ 2\ 1) \end{array}$$

В каждой строке, включая её заголовок, элемент встречается один и только один раз. Поэтому строки таблицы умножения (вместе с единичной p_e) являются перестановками четырех элементов. Так как в этом случае возможно 24 перестановки, то p_e, p_a, p_b, p_c – лишь некоторое подмножество из группы $\mathbf{S_4}$. Однако это подмножество перестановок замечательным образом оказывается группой с той же таблицей, что и у $\mathbf{D_2}$! Например,

$$\begin{aligned} p_a\,p_b &= (2_1\ 1_2\ 4_3\ 3_4)\,(3\ 4\ 1\ 2) = (4\ 3\ 2\ 1) = p_c, \\ p_a\,p_a &= (2_1\ 1_2\ 4_3\ 3_4)\,(2\ 1\ 4\ 3) = (1\ 2\ 3\ 4) = p_e. \end{aligned}$$

Этот эффект возникает благодаря *теореме Кэли*:

> *Любая конечная группа* $\mathbf{G}$ *изоморфна некоторой подгруппе группы перестановок* $\mathbf{S_n}$.

Действительно, рассмотрим группу с n элементами $\mathbf{G} = \{g_1, ..., g_n\}$. Каждому элементу g_i поставим в соответствие перестановку исходного порядка (строка с заголовком g_i):

$$p_i = (g_i\,g_1,\ g_i\,g_2,\ ..., g_i\,g_n).$$

Единичной (исходной) перестановкой будем считать упорядоченные по индексу элементы $p_e = (g_1,\ g_2,\ , ...,\ g_n)$. Рассмотрим композицию двух перестановок p_i и p_j, созданных при помощи g_i и g_j:

$$p_i\,p_j = (g_i\,g_1,\ ..., g_i\,g_n)\,(g_j\,g_1,\ ..., g_j\,g_n) = (g_i\,g_j\,g_1,\ ..., g_i\,g_j\,g_n) = p_k.$$

Действительно, пусть $g_j\,g_1 = g_s$. При умножении перестановок, мы должны на первое место результата поставить элемент из списка p_i под номером s. В силу упорядоченности в p_i по второму индексу – это $g_i\,g_s$ или $g_i\,g_j\,g_1$. Аналогично для остальных элементов списка. Следовательно, перестановка $p_k = p_i\,p_j$ получается при помощи $g_k = g_i\,g_j$ и таблица умножения перестановок p_i изоморфна группе $\mathbf{G}$. □

6.4 Еще немного определений *

• Рассмотрим подгруппу $\mathbf{H}$ группы $\mathbf{G}$. Возьмём некоторый элемент $g \in \mathbf{G}$, *не принадлежащий* $\mathbf{H}$, и образуем новое множество элементов:

$$g\,\mathbf{H} = \{g\,h_1,\ g\,h_2,\ ...,\ g\,h_n\}, \qquad\qquad g \notin \mathbf{H},$$

которое называется *левым смежным классом* подгруппы $\mathbf{H}$ (аналогично определяются *правые смежные классы* $\mathbf{H}g$, совпадающие с левыми для инвариантной подгруппы $g\,\mathbf{H} = \mathbf{H}\,g$). Все элементы класса *различны* (если $g\,h_i = g\,h_j$, умножив на g^{-1}, получим $h_i = h_j$) и ни один его элемент $g\,\mathbf{H}$ *не принадлежит* $\mathbf{H}$ (если $g\,h_i = h_j$, то $g = h_j\,h_i^{-1} \in \mathbf{H}$, что противоречит условию $g \notin \mathbf{H}$). Поэтому $g\,\mathbf{H}$ – это множество имеющее *столько же* элементов, что и у подгруппы $\mathbf{H}$, и *не пересекающееся* с ней.

Это свойство можно использовать для разбиения группы на *смежные классы* (подмножества). Действительно, если объединение $\mathbf{H}$ и $g\,\mathbf{H}$ не даёт ещё всех элементов $\mathbf{G}$, возьмём g' не принадлежащий ни $\mathbf{H}$, ни $g\,\mathbf{H}$, и образуем третье множество $g'\,\mathbf{H}$. Его элементы, также как и элементы $g\,\mathbf{H}$ не принадлежат $\mathbf{H}$. Более того, они не принадлежат и $g\,\mathbf{H}$ (если бы $g'\,h_i = g\,h_j$, то $g' = g \cdot (h_j\,h_i^{-1})$, и это противоречит тому, что g' не принадлежит $g\,\mathbf{H}$, т.к. $h_i h_j^{-1} \in \mathbf{H}$). В результате, при помощи подгруппы $\mathbf{H}$ порядка n, возникает разбиение группы $\mathbf{G}$, на m *непересекающихся* смежных классов (используют знак плюс, вместо объединения $\cap$):

$$\mathbf{G} = \mathbf{H} + g\,\mathbf{H} + g'\,\mathbf{H} + ... = g_1\,\mathbf{H} + g_2\,\mathbf{H} + ... + g_m\,\mathbf{H},$$

где $g_1 = e$. Число m называется *индексом* подгруппы $\mathbf{H}$ в группе $\mathbf{G}$. Порядок группы $\mathbf{G}$ оказывается равным $n = h \cdot m$, и порядок h подгруппы $\mathbf{H}$ является его делителем. Поэтому справедлива *теорема Лагранжа*:

> *Порядок любой подгруппы* $\mathbf{H}$ *конечной группы* $\mathbf{G}$ *является одним из делителей порядка группы* $\mathbf{G}$.

Например, подгруппы $\mathbf{C_3}$, $\mathbf{C_2}$ группы $\mathbf{D_3}$ имеют порядки 3 и 2. Эти числа являются делителями порядка группы $\mathbf{D_3}$ равного 6. Для группы $\mathbf{D_4}$ можно сделать следующее разложение на классы:

$$\mathbf{D_4} = \mathbf{C_2} + a\,\mathbf{C_2} + b\,\mathbf{C_2} + d\,\mathbf{C_2} = \{e,\ a^2\} + \{a, a^3\} + \{b, c\} + \{d, f\}.$$

Из теоремы Лагранжа следует, что группы, порядок которых является простым числом, не могут иметь несобственных подгрупп.

Подчеркнём, что смежные классы *не являются* группами, так как, например, единичный элемент находится только в исходной порождающей подгруппе $\mathbf{H}$. Однако, как мы сейчас увидим, каждый класс, построенный по инвариантной подгруппе является *элементом* некоторой группы!

• Аналогично "произведению" $a\,\mathbf{H} = \{a\,h_1, ..., a\,h_n\}$ элемента группы на множество, можно определить *операцию* умножения двух множеств $\mathbf{A} = \{a_1, ..., a_n\}$ и $\mathbf{B} = \{b_1, ..., b_m\}$, как множество состоящее из всех упорядоченных произведений: $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \{a_1 b_1, a_1 b_2, ..., a_2 b_1, ..., a_n b_m\}$. Результаты некоторых произведений могут совпадать, поэтому размерность этого множества будет меньше чем $n \cdot m$. В частности $\mathbf{HH}$ – это произведение всех элементов подгруппы, которые снова принадлежат этой подгруппе: $\mathbf{HH} = \mathbf{H}$. В силу ассоциативности $\mathbf{A}(a\mathbf{B}) = (\mathbf{A}a)\mathbf{B}$.

Произведение смежных классов построенных по инвариантной подгруппе обладает групповыми свойствами. Например, в силу $g\mathbf{H} = \mathbf{H}g$, инвариантная подгруппа $\mathbf{H}$ является "единичным" элементом:

$$\mathbf{H}\,(g\mathbf{H}) = (\mathbf{H}g)\,\mathbf{H} = g\mathbf{HH} = g\mathbf{H}.$$

Т.е. попарное произведение всех элементов инвариантной группы $\mathbf{H}$ и её левого смежного класса $g\mathbf{H}$ снова приводит к этому же смежному классу. Аналогично попарные произведения двух смежных классов приводят к смежному классу построенному по элементу ab: $(a\,\mathbf{H})\,(b\,\mathbf{H}) = (a\,b)\,\mathbf{H}$. Наконец, произведение смежных классов по обратным элементам дает единичный класс: $(a\mathbf{H})(a^{-1}\mathbf{H}) = \mathbf{H}$.

Таким образом, если в группе порядка $h\,m$ имеется инвариантная подгруппа $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ порядка h, то m смежных классов $\mathbf{G} = \mathbf{H} + g_2\mathbf{H} + ... + g_m\mathbf{H}$ являются элементами т.н. *фактор-группы* $\mathbf{G}/\mathbf{H}$:

$$\{\mathbf{H},\ g_2\mathbf{H}, ...,\ g_m\mathbf{H}\} = \mathbf{G}/\mathbf{H}.$$

Инвариантная подгруппа $\mathbf{H}$ играет в $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ роль единичного элемента.

Рассмотрим инвариантную подгруппу $\mathbf{H} = \{e, a, a^2\}$ группы $\mathbf{D_3}$. Возьмём любой элемент не находящийся в подгруппе, например b:

$$\mathbf{H} = \{e, a, a^2\}, \qquad b\mathbf{H} = \{b, d, c\}, \qquad \mathbf{D_3} = \{e, a, a^2, b, c, d\} = \mathbf{H} + b\mathbf{H}.$$

Эти два множества обладают групповой таблицей умножения $\mathbf{C_2}$. Так:

$$\mathbf{H} \cdot (b\mathbf{H}) = \{e, a, a^2\} \cdot \{b, c, d\} = \{b, c, d\} = b\mathbf{H},$$

где после перемножения множеств, при помощи таблицы $\mathbf{D_3}$ оставлены только неповторяющиеся элементы, составляющие класс $b\mathbf{H}$. Аналогично $(b\mathbf{H})\,(b\mathbf{H}) = \mathbf{H}$, и т.д. Инвариантная подгруппа $\mathbf{H} = \mathbf{C_3}$ имеет порядок 3, и есть только один смежный класс, поэтому порядок фактор-группы $\mathbf{D_3}/\mathbf{C_3}$ равен 2=6/3. Её таблица умножения совпадает с $\mathbf{C_2}$.

• Элемент z' называется *сопряжённым* к элементу z, если *существует* такой g, что:

$$z' = gzg^{-1}.$$

В группе $\mathbf{D_3}$ элементы b и d сопряжены, так как $aba^{-1} = ca^2 = d$. Сопряженность элементов напоминает определение сопряжения подгруппы (стр. 353), но относится не к множеству элементов, а к одному (точнее двум, связанным сопряжением).

Сопряженность элементов обладает *транзитивностью*: если z'' сопряжен z', а z' сопряжен к z, то и z'', z сопряжены:

$$z'' = az'a^{-1}, \qquad z' = bzb^{-1}, \qquad => \qquad z'' = (ab)z(ab)^{-1}.$$

Понятно, что если z' сопряжен z, то и z сопряжён z'.

$$z' = aza^{-1} \qquad => \qquad z = a^{-1}z'a.$$

Это свойство называется *симметричностью.* Аналогично, справедлива *рефлексивность*, т.е. элемент сопряжён сам себе. В этом случае $g = e$.

Обозначим факт сопряженности следующим образом: $z' \sim z$ и назовем его *отношением эквивалентности.* Свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности сопряженных элементов будут иметь вид:

$$\begin{array}{lllll} \text{рефлексивность :} & x \sim x & & & \\ \text{симметричность :} & x \sim y & & => & y \sim x \\ \text{транзитивность :} & x \sim y, & y \sim z & => & x \sim z \end{array}$$

Этими же свойствами обладает и равенство элементов $x = y$. Однако, если равенство означает полное совпадение x и y, то эквивалентность относительно сопряжения объявляет "похожими" некоторые группы элементов.

Так, группы $\mathbf{D_3}$ и $\mathbf{D_4}$ разбиваются на следующие *классы эквивалентности* (или *классы сопряженных элементов*):

$$\begin{array}{ll} \mathbf{D_3}: & \{e\},\ \{a,a^2\},\ \{b,c,d\}; \\ \mathbf{D_4}: & \{e\},\ \{a,a^3\},\ \{a^2\},\ \{b,c\},\ \{d,f\}. \end{array}$$

Важным свойством класса эквивалентности к сопряжению является то, что все элементы данного класса имеют одинаковый порядок:

$$a^m = e, \quad b = gag^{-1} \qquad => \qquad b^m = (gag^{-1})^m = ga^mg^{-1} = geg^{-1} = e.$$

Единичный элемент любой группы образует "класс эквивалентности" состоящий только из него самого. В абелевой группе все элементы коммутируют друг с другом и сопряженным к элементу будет он сам. Поэтому, также как и единичный элемент, каждый элемент абелевой группы образует класс сопряженности состоящий из этого одного элемента.

• Элемент z является *самосопряженным элементом*, если для *любого* $g \in \mathbf{G}$ сопряжение снова даёт z:

$$\forall g \in \mathbf{G} \qquad z = gzg^{-1}, \qquad \text{или} \qquad gz = zg.$$

Другими словами, самосопряженный элемент коммутирует (перестановочен) с *любым* элементом группы. Это свойство не стоит путать с определением инвариантной подгруппы $g\,\mathbf{H} = \mathbf{H}\,g$, в котором, вообще говоря слева и справа стоят разные элементы $g\,h_i = h_j\,g$ из подмножества $\mathbf{H}$.

Множество всех самосопряженных элементов $\mathbf{Z} = \{z_1, ..., z_k\}$ образует абелеву подгруппу $\mathbf{Z} \subset \mathbf{G}$, которую называют *центром.* Одновременно центр является инвариантной подгруппой (но не наоборот!). В группе $\mathbf{D_3}$ центр тривиален: $\{e\}$, а в $\mathbf{D_4}$ нетривиальным центром является $\mathbf{Z} = \{e, a^2\}$. Так как $(a^2)^2 = e$, то это группа $\mathbf{C_2}$.

В любой абелевой группе каждый элемент является самосопряжённым, и вся такая группа является центром. Самосопряженный элемент образует класс эквивалентности из единственного элемента - самого себя.

• *Нормализатором элемента* a называют множество $\mathbf{N}_a$ всех элементов группы $\mathbf{G}$, которые коммутируют с a. Нормализатор самосопряженного элемента совпадает со всей группой.

Элементы каждого нормализатора обладают групповыми свойствами. Поэтому нормализатор элемента $a \in \mathbf{G}$ является подгруппой группы $\mathbf{G}$. Её порядок равен n/m, где m – индекс в разложении Лагранжа:

$$\mathbf{G} = \mathbf{N}_a + g_2\mathbf{N}_a + ... + g_m\mathbf{N}_a.$$

Справедлива теорема:

> Число элементов сопряженных к a равно индексу m в разложении Лагранжа по нормализатору $\mathbf{N}_a$.

Действительно, чтобы построить класс эквивалентности к a надо перебрать все элементы $x \in \mathbf{G}$, отобрав неповторяющиеся значения xax^{-1}. Пусть x сначала пробегает элементы первого смежного класса $\mathbf{N}_a$. Тогда $\mathbf{N}_a a \mathbf{N}_a^{-1} = a\mathbf{N}_a\mathbf{N}_a^{-1} = a$. Для $x \in g_2\mathbf{N}_a$ имеем $xax^{-1} = g_2 a g_2^{-1} \neq a$ (так как g_2 не входит в $\mathbf{N}_a$ и с a не коммутирует). Так, для каждого из m сопряженных классов получим m различных эквивалентных элементов.

В группе $\mathbf{D_3}$ есть 4 нормализатора:

$$\mathbf{N}_a = \{e, a, a^2\}, \qquad \mathbf{N}_b = \{e, b\}, \qquad \mathbf{N}_c = \{e, c\}, \qquad \mathbf{N}_d = \{e, d\}.$$

Разложение Лагранжа этой группы имеет вид

$$\mathbf{D_3} = \mathbf{N}_b + a\mathbf{N}_b + d\mathbf{N}_b = \{e, b\} + \{a, c\} + \{d, a^2\},$$

поэтому в классе эквивалентности к b есть 3 элемента (это $\{b, c, d\}$).

• Изоморфизм – это взаимооднозначная функция связывающая два элемента множества $\Psi:\ \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, и сохраняющая групповое умножение:

$$\Psi(x) \cdot \Psi(y) = \Psi(x \cdot y). \qquad (6.1)$$

Обратимость функции Ψ означает, что её упорядоченная область значений является некоторой перестановкой области определений. Другими словами, две конечные группы изоморфны, если они эквивалентны с точностью до переобозначения своих элементов. Поэтому изоморфизм абстрактных групп называется также *автоморфизмом* (изоморфизм группы "самой в себя").

$$\mathbf{G}_1 : \begin{array}{c|ccc|} & a & b & c \\ \hline a & b & c & \bullet \\ b & c & \bullet & a \\ c & \bullet & a & b \\ \hline \end{array} \qquad \mathbf{G}_2 : \begin{array}{c|ccc|} & a & b & c \\ \hline a & c & \bullet & c \\ b & \bullet & c & a \\ c & b & a & \bullet \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{G}_1 \approx \mathbf{G}_2, \qquad \mathbf{G}_2 = \Psi(\mathbf{G}_1) \\ \Psi(\{e,a,b,c\}) = \{e,a,c,b\} \end{array}$$

Что бы обнаружить автоморфизм, можно начать с поиска элемента порядка 1. В таблице $\mathbf{G}_1$ он единственен $b^2 = e$. Аналогично, в $\mathbf{G}_2$: $c^2 = e$, поэтому $\Psi(b) = c$. Выбор соответствия для остальных элементов в данном случае – произволен.

Рассматривая для группы $\mathbf{G}$ все различные функции $y = \Psi_k(x)$ проводящие подобные перестановки, мы приходим к *группе автоморфизмов* обозначаемой Aut$\mathbf{G}$. Элементами этой группы являются функции, а умножением – композиция функций $\Psi_k(x) = \Psi_j(\Psi_i(x))$, выполняющих последовательные автоморфизмы. Единичным преобразованием является $\Psi_1(x) = x$. Обратным – обратная функция $\Psi_k^{-1}(\Psi_k(x)) = x$. Для умножения двух элементов x, y и двух последовательных автоморфизмов Ψ_i и Ψ_j (см. (6.1)):

$$\Psi_i(\Psi_j(x)) \cdot \Psi_i(\Psi_j(y)) = \Psi_i(\Psi_j(x) \cdot \Psi_j(y)) = \Psi_i(\Psi_j(x \cdot y)).$$

Внутренним автоморфизмом называют автоморфизм возникающий при применении операции сопряжения:

$$x \to \Psi_g(x) = gxg^{-1}.$$

Абелевы группы $\mathbf{C_n}$ являются самосопряжёнными, поэтому сопряжение не создаёт внутренних автоморфизмов (кроме тривиального единичного $\Psi_g(x) = x$, для любого $g \in \mathbf{G}$). Для группы $\mathbf{D_3}$ можно, например, так переставить элементы:

$$\Psi_a(x) \quad : \quad a \cdot \{e, a, a^2, b, c, d\} \cdot a^2 = \{e, a, a^2, d, b, c\}.$$

Внутренние автоморфизмы вида $x \to gxg^{-1}$ являются подгруппой группы всех автоморфизмов Aut $\mathbf{G}$.

• Введем еще одно понятие. Пусть на множествах $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_n\}$ и $\mathcal{G} = \{g_1, ..., g_m\}$ заданы групповые функции умножения. *Прямым произведением* $\mathcal{F}\times\mathcal{G}$ двух множеств $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_n\}$ и $\mathcal{G} = \{g_1, ..., g_m\}$ называют *множество* всех $n \cdot m$ упорядоченных пар $(f_i,\ g_j)$. Определим на этом множестве *новую группу*, при помощи закона умножения:

$$(g_1,\ f_1) \cdot (g_2,\ f_2) = (g_1 \cdot g_2,\ f_1 \cdot f_2).$$

Так как таблицы умножения $g_i \cdot g_j$ и $f_i \cdot f_j$ известны, нам становится известной и таблица для группы на $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Подобный метод создания новых групп особенно интересен в обратную сторону, когда выясняется, что некоторую группу можно представить в виде прямого произведения двух других *меньших* групп, свойства которых исследовать проще.

Найдём прямое произведение группы $\mathbf{C_2} = \{e,\ \alpha\}$ саму на себя:

$$\begin{array}{c|c|} & \alpha \\ \hline \alpha & e \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{c|c|} & \alpha \\ \hline \alpha & e \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|ccc|} & (\alpha,e) & (e,\alpha) & (\alpha,\alpha) \\ \hline (\alpha,e) & (e,e) & (\alpha,\alpha) & (e,\alpha) \\ (e,\alpha) & (\alpha,\alpha) & (e,e) & (\alpha,e) \\ (\alpha,\alpha) & (e,\alpha) & (\alpha,e) & (e,e) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|ccc|} & a & b & c \\ \hline a & e & c & b \\ b & c & e & a \\ c & b & a & e \\ \hline \end{array} = \mathbf{D_2}$$

Получившаяся группа $\mathbf{D_2} = \{e, a, b, c\}$ из 4-х элементов (порядок равен 4) может быть записана следующим образом: $\mathbf{D_2} = \mathbf{C_2} \times \mathbf{C_2}$.

Пусть $f_1 = e$ - единичный элемент группы $\mathcal{F}$. Тогда множество элементов (f_1, g_1), (f_1, g_2),...,(f_1, g_m) образуют инвариантную подгруппу группы $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$. Эта подгруппа изоморфна группе $\mathcal{G}$ ($\lessdot$ H$_{57}$).

Если две инвариантные подгруппы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ группы $\mathbf{G}$ пересекаются только на единичный элемент, и произведение множеств $\mathbf{AB}$ приводит к множеству $\mathbf{G}$, то группа $\mathbf{G}$ изоморфна прямому произведению $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$:

$$(inv)\quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbf{G}, \qquad \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{e\}, \qquad \mathbf{AB} = \mathbf{G} \qquad => \qquad \mathbf{G} \approx \mathbf{A} \times \mathbf{B}.$$

Это утверждение стоит попробовать доказать ($\lessdot$ H$_{59}$), доказав сперва, что если две инвариантные подгруппы не имеют общих элементов (кроме единичного), то их элементы коммутируют друг с другом ($\lessdot$ H$_{58}$).

В теории групп существует множество определений, которые необходимо выучить, каждый раз испытывая удивление тому, что 4 простые аксиомы порождают такое разнообразие алгебраических структур. Напомним наиболее важные термины:

группа, порядок группы и элемента, абелева группа, подгруппа, сопряженная и инвариантная подгруппы, простая и полупростая группы, изоморфизм, гомоморфизм, ядро, смежный класс, фактор-группа, класс эквивалентности, самосопряженный элемент, центр, нормализатор, группа автоморфизмов, прямое произведение.

6.5 Представления групп

Группа – это *абстрактное* множество элементов на котором задана бинарная операция, удовлетворяющая соответствующим аксиомам. Представлением группы является *реализация* этого множества при помощи тех или иных математических объектов. *Матричным представлением* (далее просто представлением) группы называется множество матриц фиксированной размерности, произведение которых воспроизводит групповую таблицу умножения. Более точно, если g – элемент группы, g^{-1} – ему обратный, e – единичный элемент, а $\mathbf{T}(g)$ матрица, которая ставится в соответствие элементу g, то

$$\mathbf{T}(g_1)\mathbf{T}(g_2) = \mathbf{T}(g_1g_2), \qquad \mathbf{T}(e) = 1, \qquad \mathbf{T}(g^{-1}) = \mathbf{T}^{-1}(g). \tag{6.2}$$

Представление $\mathbf{T}(g)$ называется *точным*, если множество матриц изоморфно множеству элементов группы (каждому элементу соответствует матрица и все эти матрицы различны). Гомоморфное отображение (нескольким элементам группы соответствует одна матрица) также считается представлением группы.

Матрицы nхn являются линейными операторами, которые могут действовать (умножаться) на вектор (столбик из n элементов), в результате чего будет получаться новый столбик (по j сумма от 1 до n):

$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}(g)\cdot\mathbf{x}, \qquad\qquad x'_i = T_{ij}x_j.$$

Подобные линейные операторы можно реализовать и более сложными конструкциями, чем матрицы конечной размерности. Однако мы ограничимся именно этим классом представлений.

Если задано некоторое представление размерности n (матрицы nхn), то при помощи некоторой *несингулярной* матрицы $\mathbf{S}$ ($\det\mathbf{S}\neq 0$) той же размерности всегда можно построить другое представление:

$$\mathbf{T}'(g) = \mathbf{S}\,\mathbf{T}(g)\,\mathbf{S}^{-1}. \tag{6.3}$$

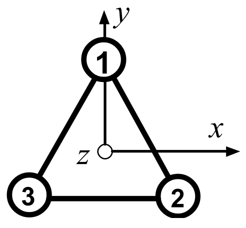
Несложно видеть, что подобное преобразование сохраняет групповое умножение:

$$\mathbf{T}'(g_1)\mathbf{T}'(g_2) = \mathbf{S}\,\mathbf{T}(g_1)\mathbf{T}(g_2)\,\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\,\mathbf{T}(g_1g_2)\,\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{T}'(g_1g_2),$$

поэтому матрицы $\mathbf{T}'(g)$ также являются представлением группы $\mathbf{G}$. Представления связанные преобразованием (6.3) называются *эквивалентными*. Если же два представления не могут быть связаны (6.3), то они неэквивалентны. Подчеркнем, что в (6.3) для *всех* матриц данного представления $\mathbf{T}(g)$ используется *одна* и та же матрица $\mathbf{S}$.

- Рассмотрим дискретную неабелеву группу $\mathbf{D}_3$ (стр. 352):

$$
\mathbf{D_3}:\quad
\begin{array}{c|cc|ccc|}
 & a & a^2 & b & c & d \\
\hline
a & a^2 & \bullet & c & d & b \\
a^2 & \bullet & a & d & b & c \\
\hline
b & d & c & \bullet & a^2 & a \\
c & b & d & a & \bullet & a^2 \\
d & c & b & a^2 & a & \bullet \\
\hline
\end{array}
$$



Элементы этой группы можно представить как операции переворота треугольника, которые сохраняют его положение в пространстве. Свяжем с треугольником декартову систему координат (x, y, z). Элемент группы a соответствует повороту на 120^o вокруг оси z. Его можно записать при помощи матрицы $\mathbf{T}(a)$ вращения (стр. 124) на угол $2\pi/3$. Аналогично запишем матрицу $\mathbf{T}(a^2)$, поворота на двойной угол $4\pi/3$:

$$
\mathbf{T}(e)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\;
\mathbf{T}(a)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix},\;
\mathbf{T}(a^2)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}.
$$

Переворот вокруг оси y (элемент b) изменяет ориентацию осей x и z. Оставшиеся две матрицы можно получить при помощи перемножения уже записанных матриц, так как $c = a \cdot b$ и $d = a \cdot c$:

$$
\mathbf{T}(b)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\mathbf{T}(c)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\mathbf{T}(d)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.
$$

Эти 6 матриц имеют таблицу умножения совпадающую с групповой таблицей $\mathbf{D}_3$. Если мы перейдём от матриц 3x3 к матрицам 2x2, отбросив последнюю строчку и колонку, то получим множество из 6 *различных* матриц, которое снова изоморфно группе $\mathbf{D}_3$ и также является её представлением

Эта же группа допускает неточное представление при помощи следующего гомоморфного отображения:

$$
\mathbf{T}(e)=\mathbf{T}(a)=\mathbf{T}(a^2)=1,\qquad \mathbf{T}(b)=\mathbf{T}(c)=\mathbf{T}(d)=-1.
$$

Матрицами в этом случае выступают просто числа. Несмотря на “потерю” информации, такое представление удовлетворяет определению (6.2). Например: $\mathbf{T}(a)\mathbf{T}(b) = 1 \cdot (-1) = -1 = \mathbf{T}(a \cdot b) = \mathbf{T}(c)$. Понятно, что обычная единица 1 является неточным представлением любой группы.

• В примере с группой $\mathbf{D}_3$ мы построили 4 представления: матрицы 3x3, матрицы 2x2 и одномерные представления $\{1, -1\}$ и $\{1\}$. Посмотрим ещё раз на матрицы 3x3. Они состоят из диагональных блоков 2x2 и 1x1. Каждый из этих блоков снова является представлением группы. Говорят, что представление *вполне приводимо*, если все его матрицы можно представить в эквивалентном блочно-диагональном виде:

$$\mathbf{T}(g) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1(g) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2(g) & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_3(g)\dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{T}_i(g)$ - матрицы, вообще говоря, различной размерности.

Иногда, чтобы обнаружить приводимость представления необходимо выполнить преобразование $\mathbf{T}'(g) = \mathbf{S}\,\mathbf{T}(g)\,\mathbf{S}^{-1}$. Если ни при какой матрице $\mathbf{S}$ блочно-диагональный вид для всех матриц представления не получается, то говорят, что представление *неприводимо*. Блоки в матрицах 3x3 приводимого представления группы $\mathbf{D_3}$ являются матрицами неприводимых представлений.

Представление будет также *приводимым*, если нулю равен только нижний левый блок матриц:

$$\mathbf{T}(g) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1(g) & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2(g) \end{pmatrix}.$$

Если матрицы $\mathbf{T}_1(g)$ и/или $\mathbf{T}_2(g)$ приводимы, то для них можно получить аналогичную блочную конструкцию, и т.д. Разберемся, почему эта матрица является приводимой. Например, для матриц 3x3 запишем:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & A_1 \\ c_1 & d_1 & B_1 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & A_2 \\ c_2 & d_2 & B_2 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 & *** \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 & *** \\ 0 & 0 & C_1C_2 \end{pmatrix}.$$

В результирующей матрице диагональные блоки 2x2 и 1x1 состоят из тех же элементов, что и в соответствующих блоках исходных матриц. Поэтому эти блоки могут быть выбраны в качестве матриц представления меньшей размерности (звездочками отмечены два элемента содержащие смесь элементов из различных блоков).

Для матриц конечной размерности, если представление приводимо (нулевая матрица в левом нижнем углу), то оно будет и вполне приводимым (блочно-диагональные матрицы). Дальше мы будем рассматривать только блочно-диагональные матрицы, опуская слово “вполне”.

Выяснение всех неприводимых представлений данной группы важно, так как с их помощью можно сконструировать любое приводимое представление. Разложение представления на неприводимые представления записывается следующим образом:

$$\mathbf{T}(g) = \mathbf{T}_1(g) \oplus \mathbf{T}_2(g) \oplus \mathbf{T}_3(g) \oplus ...,$$

где $\mathbf{T}_i(g)$ – матрицы меньшей размерности, чем $\mathbf{T}(g)$.

Векторы $\mathbf{x}$ на которые действуют матрицы являются элементами векторного пространства $\mathbf{L}$. Для них определено коммутативное и ассоциативное сложение

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}, \qquad (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

и умножение вектора на число:

$$(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}, \qquad \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}, \qquad (\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x}).$$

Кроме этого существует выделенный нулевой вектор $\mathbf{0}$, такой, что для любого вектора $\mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{x}$ и умножение вектора на 1 его не меняет $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Вектор n-мерного векторного пространства может быть записан в виде столбика из n чисел $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ ...x_n)^T$. В векторном пространстве можно ввести n базисных векторов $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ по которым разложить любой вектор (c_k – числа):

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + ... + c_n\mathbf{e}_n.$$

Для $n = 3$ можно выбрать $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T,\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T,\ \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$.

Матрицы являются линейными операторами (каждому вектору ставят в соответствие другой вектор $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$). Линейность означает, что:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{T}\mathbf{y}, \qquad \mathbf{T}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{T}\mathbf{x}.$$

Векторное пространство на которое действуют матрицы приводимого представления разбиваются на классы $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_3$, ... число которых равно числу блоков на диагонали матриц. Внутри каждого класса происходят независимые преобразования подмножества компонент этих векторов на которые “действует” данный блок матрицы. Так, в примере с $\mathbf{D}_3$ представление 3х3 следующим образом действует на векторы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 \\ b_1\beta_1 \end{pmatrix}.$$

В случае приводимого представления векторное пространство и базис расщепляются на векторные подпространства меньшей размерности.

• *Эрмитовым сопряжением* $(\mathbf{T}^+)_{ij}$ матрицы $(\mathbf{T})_{ij}$ называется её транспонирование и комплексное сопряжение: $(\mathbf{T}^+)_{ij} = T^*_{ji}$. Для эрмитового сопряжения, как и для транспонирования матриц, справедливо тождество $(\mathbf{AB})^+ = \mathbf{B}^+\mathbf{A}^+$. *Унитарной* называют матрицу $\mathbf{U}$, которая обратна своему эрмитовому сопряжению:

$$\mathbf{U}^+\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^+ = \mathbf{1}.$$

Для всех конечных групп и многих важных классов бесконечных групп матрицы представления можно выбрать *унитарными*. Это утверждение называется *теоремой Машке*. Действительно, пусть $\mathbf{T}(g)$ не являются унитарными. Выберем $\mathbf{S}$ следующим образом:

$$\mathbf{S} = \Bigl[\sum_k \mathbf{T}^+(g_k)\mathbf{T}(g_k)\Bigr]^{1/2},$$

где проводится суммирование по всем элементам группы, а корень понимается как матрица, квадрат которой даёт подкоренную матрицу. Для любой матрицы $\mathbf{T}(g_i)$ представления справедливо равенство:

$$\mathbf{T}^+(g_i)\mathbf{S}^2\mathbf{T}(g_i) = \sum_k \mathbf{T}^+(g_i)\mathbf{T}^+(g_k)\mathbf{T}(g_k)\mathbf{T}(g_i) = \sum_k \mathbf{T}^+(g_k g_i)\mathbf{T}(g_k g_i) = \mathbf{S}^2,$$

где учтено, что $\mathbf{T}^+(g_i)\mathbf{T}^+(g_k) = (\mathbf{T}(g_k)\mathbf{T}(g_i))^+ = \mathbf{T}^+(g_k g_i)$, а произведение $g_k g_i$ пробегает по одному разу все элементы группы (стр. 349), тем самым снова давая матрицу $\mathbf{S}$. Умножая обе стороны этого равенства слева и справа на $\mathbf{S}^{-1}$, получаем условие унитарности:

$$\mathbf{1} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{T}^+(g_i)\mathbf{S}^2\mathbf{T}(g_i)\mathbf{S}^{-1} = \bigl[\mathbf{S}\mathbf{T}\mathbf{S}^{-1}\bigr]^+\mathbf{S}\mathbf{T}\mathbf{S}^{-1},$$

где учтено, что матрица $\mathbf{S}$ по её построению *эрмитова*, т.е. $\mathbf{S}^+ = \mathbf{S}$. □

• В теории представлений важную роль играет *лемма Шура* ($\lessdot$ H$_{60}$):

> Матрица $\mathbf{I}$ *коммутирующая* со всеми матрицами $\mathbf{T}(g)$ *неприводимого* представления пропорциональна единичной: $\mathbf{I} = \lambda\mathbf{1}$.

Выполняется также *вторая лемма Шура*. Пусть $\mathbf{T}(g)$ неприводимое представление размерности n, а $\mathbf{R}(g)$ другое неприводимое представление размерности m. Тогда, если некоторая прямоугольная матрица $\mathbf{Z}$ размерности nxm удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{T}(g)\mathbf{Z} = \mathbf{Z}\mathbf{R}(g) \qquad \text{или} \qquad \sum_{\nu=1}^{n} T_{\alpha\nu}(g)Z_{\nu\beta} = \sum_{\mu=1}^{m} Z_{\alpha\mu}R_{\mu\beta}(g),$$

то эта матрица $\mathbf{Z}$ может быть только нулевой (все элементы нули).

• Для неприводимого унитарного n-мерного представления $\mathbf{T}(g)$ группы $\mathbf{G}$ размерности γ справедливо *условие ортогональности*:

$$\sum_{i=1}^{\gamma} T_{\alpha\beta}(g_i) T_{\mu\nu}(g_i^{-1}) = \frac{\gamma}{n}\,\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}. \tag{6.4}$$

Если представление унитарно, то $\mathbf{T}(g^{-1}) = \mathbf{T}^{-1}(g) = \mathbf{T}^{+}(g)$, и второй сомножитель под знаком суммы можно записать $T_{\mu\nu}(g_i^{-1}) \mapsto T^{*}_{\nu\mu}(g_i)$. Для доказательства (6.4) определим матрицу nхn:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{\gamma} \mathbf{T}(g_i)\mathbf{X}\mathbf{T}(g_i^{-1}),$$

где $\mathbf{X}$ – произвольная матрица и суммирование ведется по всем γ элементам группы. Матрица $\mathbf{M}$ коммутирует с любой матрицей представления ($\lessdot$ H$_{61}$). Поэтому, в силу леммы Шура: $\mathbf{M} = \lambda\mathbf{1}$. Положим все элементы матрицы $\mathbf{X}$ нулю, за исключением фиксированного элемента $X_{\alpha_0\beta_0} = 1$. Запишем соотношение $\mathbf{M} = \lambda\mathbf{1}$ в индексных обозначениях:

$$M_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{\gamma} T_{\alpha\mu}(g_i) X_{\mu\nu} T_{\nu\beta}(g_i^{-1}) = \sum_{i=1}^{\gamma} T_{\alpha\alpha_0}(g_i) T_{\beta_0\beta}(g_i^{-1}) = \lambda\,\delta_{\alpha\beta}. \tag{6.5}$$

Положим $\alpha = \beta$ и просуммируем по всем n значением индекса α:

$$\sum_{i=1}^{\gamma} T_{\alpha\alpha_0}(g_i) T_{\beta_0\alpha}(g_i^{-1}) = \sum_{i=1}^{\gamma} [\mathbf{T}(g_i^{-1}g_i)]_{\beta_0\alpha_0} = \gamma\delta_{\alpha_0\beta_0},$$

где учтено, что $g_i^{-1}g_i = e$, поэтому под суммой стоит γ единичных матриц. С другой стороны, в правой части (6.5) при суммировании по $\alpha = \beta$ получится $n\lambda$. Поэтому для фиксированных индексов α_0 и β_0 имеем $\lambda = (\gamma/n)\delta_{\alpha_0\beta_0}$, что и дает 6.4. □

В качестве упражнения стоит проверить условие ортогональности на неприводимом представлении размерности 2 для группы $\mathbf{D}_3$ (стр. 367).

Если индексами p и q пометить различные представления, то справедливо также более общее свойство ортогональности:

$$\sum_{i=1}^{\gamma} T^{(p)}_{\alpha\beta}(g_i) T^{(q)}_{\mu\nu}(g_i^{-1}) = \frac{\gamma}{n_p}\,\delta_{pq}\,\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}, \tag{6.6}$$

где n_p – размерность p-того представления $\mathbf{T}^{(p)}(g)$ (матрицы n_p х n_p). Для доказательства, в матрице $\mathbf{M}$ под суммой пишем $\mathbf{T}^{(p)}(g_i)\mathbf{X}\mathbf{T}^{(q)}(g^{-1})$. Тогда $\mathbf{T}^{(p)}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{T}^{(q)}$, откуда в силу второй леммы Шура $\mathbf{M} = \mathbf{0}$.

• След матриц (сумма диагональных элементов) инвариантен относительно преобразования $\mathbf{T}' = \mathbf{STS}^{-1}$:

$$\mathbf{T}'_{ii} = (\mathbf{STS}^{-1})_{ii} = \mathbf{S}_{ij}\mathbf{T}_{jk}\mathbf{S}^{-1}_{ki} = \mathbf{S}^{-1}_{ki}\mathbf{S}_{ij}\mathbf{T}_{jk} = \delta_{kj}\mathbf{T}_{jk} = \mathbf{T}_{kk}.$$

Поэтому все эквивалентные представления имеют одинаковый след, который для матрицы $\mathbf{T}(g_a)$ обозначается как $\chi(g_a)$. Набор чисел

$$\chi(g_1),\ \chi(g_2),\ ...,\ \chi(g_\gamma),$$

для всех γ элементов группы называется *характером представления*. Так как единичному элементу соответствует единичная матрицы, для представления размерности n имеем $\chi(e) = n$.

Обозначим через $\chi^{(p)}(g_a)$ характер матрицы p–того представления для элемента группы g_a. Используя (6.6) для унитарных матриц представления несложно получить условие ортогональности для характеров:

$$\sum_{i=1}^{\gamma} \chi^{(p)}(g_i)\chi^{*(q)}(g_i) = \gamma\,\delta_{pq}. \tag{6.7}$$

В силу определения классов эквивалентности (стр. 362) элементы одного класса имеют одинаковый след $\chi(g_a)$. Пусть у группы есть k классов содержащих по k_i элементов. Тогда ортогональность характеров (6.7) записывается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{k} k_i\chi^{(p)}(g_i)\chi^{*(q)}(g_i) = \gamma\,\delta_{pq}. \tag{6.8}$$

Это соотношение можно рассматривать как условие ортогональности векторов $\sqrt{k_i/\gamma}\,\chi^{(p)}(g_i)$, имеющих k компонент. Таким образом, характер каждого представления является базисным вектором в k-мерном комплексном векторном пространстве. В результате оказывается справедливой теорема:

> Число неэквивалентных неприводимых представлений группы G равно числу её классов эквивалентности.

Группа $\mathbf{D_3}$ содержит 3 класса эквивалентности $\{e\}$, $\{a, a^2\}$, $\{b, c, d\}$. Поэтому она имеет 3 неприводимых представления. Для представления матриц 2x2 характеры равны:

$$\chi^{(1)}(e) = 1, \qquad \chi^{(1)}(a) = -1, \qquad \chi^{(1)}(b) = 0.$$

Для представления числами $\{1, -1\}$: $\chi^{(2)}(e) = \chi^{(2)}(a) = 1$, $\chi^{(2)}(b) = -1$ и представление в виде одного числа $\{1\}$: $\chi^{(3)}(e) = \chi^{(3)}(a) = \chi^{(3)}(b) = 1$. Учитывая, что $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ и $k_3 = 3$ несложно проверить условие ортогональности характеров (6.8).

• Пусть приводимое представление $\mathbf{T}(g)$ содержит a_1 раз неприводимое представление $\mathbf{T}^{(1)}(g)$ (т.е. присутствует a_1 диагональных блоков такого вида). Кроме этого оно содержит a_2 раз представление $\mathbf{T}^{(2)}(g)$ и т.д. Беря след от такой матрицы, соответствующей элементу g_i, получаем:

$$\chi(g_i) = \sum_p a_p\, \chi^{(p)}(g_i), \tag{6.9}$$

где a_p – целые положительные числа. Чтобы найти коэффициенты a_p, умножим это соотношение на $k_i\chi^{*(q)}(g_i)$ и просуммируем по i:

$$\sum_{i=1}^{k} \chi(g_i) k_i \chi^{*(q)}(g_i) = \sum_p a_p \sum_{i=1}^{k} \chi^{(p)}(g_i) k_i \chi^{*(q)}(g_i) = \sum_p a_p\, \gamma \delta_{pq} = \gamma a_q,$$

где мы воспользовались условием ортогональности (6.8). Таким образом:

$$a_p = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^{k} \chi(g_i) k_i \chi^{*(p)}(g_i). \tag{6.10}$$

Зная a_p мы знаем, сколько раз неприводимое представление $\mathbf{T}^{(q)}(g)$ содержится в приводимом представлении $\mathbf{T}(g)$. Если два представления имеют *одинаковый набор характеров*, то для них коэффициенты a_p одинаковы и следовательно эти представления *эквивалентны*.

Умножим теперь (6.9) на $k_i\chi^*(g_i)$ и просуммируем по классам эквивалентности (сумма по i):

$$\sum_{i=1}^{k} k_i |\chi(g_i)|^2 = \sum_{p,q} a_p a_q \sum_{i=1}^{k} k_i \chi^{*(q)}(g_i) \chi^{(p)}(g_i) = \gamma \sum_p a_p^2,$$

где в первом равенстве для $\chi^*(g_i)$ подставлено (6.9). В неприводимом представлении все $a_p = 0$ за исключением одного, равного 1 (т.е. матрица неприводимого представления 1 раз содержится “сама в себе”). Поэтому мы приходим к *критерию неприводимости*:

$$\sum_{i=1}^{k} k_i |\chi(g_i)|^2 = \gamma. \tag{6.11}$$

Таким образом, чтобы выяснить неприводимость представления необходимо найти k классов эквивалентности, число k_i элементов в них и вычислить характеры матриц представления (на самом деле можно не искать классы эквивалентности, а просто сложить квадраты следов всех матриц). Если сумма (6.11) равна порядку группы γ, значит представление неприводимо. Так, для матриц 2х2 представления группы $\mathbf{D_3}$ сумма квадратов следов равна: $2^2 + (-1)^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 6$, следовательно это представление неприводимо (в группе 6 элементов).

6.6 Линейные преобразования

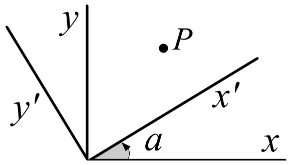
• При описании симметрий пространства и времени важную роль играют бесконечные непрерывные группы, элементы которых нумеруются одним или несколькими непрерывными параметрами. Такие группы называются *параметрическими* или *группами Ли*. Важным подмножеством этих групп являются линейные преобразования.

Рассмотрим вектор n величин $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, которые будем называть координатами, и набор s параметров $\mathbf{a} = (a^1, ..., a^s)$, определяющих линейное *преобразование*, которое мы запишем в матричном виде:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}(\mathbf{a})\cdot\mathbf{x} \qquad \text{или} \qquad x'_i = T_{ij}(\mathbf{a})x_j.$$

По повторяющемуся индексу j предполагается суммирование от 1 до n, знак которого не приводится. Для нумерации параметров мы используем верхние индексы, а для координат – нижние. Примером подобных преобразований являются 2-мерные повороты на угол a (стр. 124):

$$\overbrace{\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}}^{\mathbf{x}'} = \overbrace{\begin{pmatrix}\cos a & \sin a\\ -\sin a & \cos a\end{pmatrix}}^{\mathbf{T}(a)}\overbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}^{\mathbf{x}}$$



Последовательность матричных преобразований снова является матричным преобразованием. Например, если от координат $\mathbf{x}$ мы переходим к $\mathbf{x}'$, а затем к $\mathbf{x}''$, это можно записать в виде одной матрицы:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}_1\,\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}'' = \mathbf{T}_2\,\mathbf{x}', \qquad => \qquad \mathbf{x}'' = \mathbf{T}_3\,\mathbf{x} = (\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1)\,\mathbf{x}.$$

Если вектор $\mathbf{x}$ представлен в виде столбика, то матрица на него действует слева направо. Поэтому в композиции преобразований $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$ крайняя справа матрица является первым преобразованием, а крайняя слева – последним (порядок матриц обратный по сравнению с порядком преобразований и умножением элементов абстрактных групп).

По определению, матричное умножение обладает ассоциативностью. Групповое преобразование замкнуто. Это означает, что если $\mathbf{T}(\mathbf{a})$ и $\mathbf{T}(\mathbf{b})$ два последовательных преобразования (*композиция*) с параметрами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то их матричное умножение $\mathbf{T}(\mathbf{c}) = \mathbf{T}(\mathbf{b})\mathbf{T}(\mathbf{a})$ также будет преобразованием с параметром $\mathbf{c}$. Единице группы соответствует единичная матрица $\mathbf{1}$ с единицами на диагонали и нулями для других элементов. Кроме этого мы требуем, чтобы матрицы были несингулярными ($\det\mathbf{T} \neq 0$) и каждая из них имела обратную. Заметим, что подходящим выбором способа параметризации всегда можно добиться чтобы значение $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ соответствовало единичному преобразованию: $\mathbf{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$.

И так, множество несингулярных матриц данной размерности nxn образуют группу. Если коэффициенты матриц являются комплексными числами, то такая группа обозначается следующим образом: $\mathbf{GL}(n, C)$. Подгруппой этой группы будет множество матриц с действительными коэффициентами: $\mathbf{GL}(n, R)$. Буквы в названии имеют следующий смысл: **G** – group, **L** – linear, C – complex, R – real.

Обычно на матрицы накладываются те или иные условия, что сужает их множество. Если внутри этого множества выполняются групповые аксиомы, то снова получается некоторая подгруппа группы $\mathbf{GL}(n, C)$.

Группа $\mathbf{U}(n)$ (*унитарная группа*) – это множество унитарных матриц nxn, для которых выполняется условие:

$$\mathbf{U}^+\,\mathbf{U} = \mathbf{1},$$

где $\mathbf{U}^+$ – эрмитово сопряжение (транспонирование матрицы и взятие комплексного сопряжения: $U^+_{ij} = U^*_{ji}$). Стоит проверить ($\lessdot\,\mathrm{H}_{62}$), что унитарные матрицы образуют группу. Эта группа преобразований сохраняет норму вектора: если $\mathbf{x}' = \mathbf{U}\mathbf{x}$ то $|\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}'|^2$, где $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}^+\mathbf{x}$. Так как определитель при транспонировании не меняется, а определитель произведения матриц равен произведению их определителей, то $\det(\mathbf{U}^+\,\mathbf{U}) = |\det\mathbf{U}|^2 = 1$ или $\det\mathbf{U} = e^{\imath\alpha}$.

Группа $\mathbf{SU}(n)$ (*специальная унитарная группа*) – подгруппа всех унитарных матриц, имеющих единичный определитель:

$$\mathbf{U}^+\,\mathbf{U} = \mathbf{1}, \qquad\qquad \det\mathbf{U} = 1.$$

Группа $\mathbf{O}(n)$ (*ортогональная группа*) – это множество действительных ортогональных матриц nxn, для которых выполняется условие:

$$\mathbf{O}^T\,\mathbf{O} = \mathbf{1}.$$

Она является частным случаем (подгруппой) унитарной группы. Ортогональные матрицы сохраняют длину вектора $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ на который они действуют. Для ортогональных матриц $(\det\mathbf{O})^2 = 1$ или $\det\mathbf{O} = \pm 1$.

Группа $\mathbf{SO}(n)$ (*специальная ортогональная группа*) – подгруппа всех ортогональных матриц, с единичным определителем:

$$\mathbf{O}^T\,\mathbf{O} = \mathbf{1}, \qquad\qquad \det\mathbf{O} = 1.$$

Заметим, что матрицы с $\det\mathbf{O} = 1$ образуют группу, тогда как множество матриц с $\det\mathbf{O} = -1$ группой не являются. Действительно, их произведение будет давать матрицу с единичным определителем и следовательно не сохраняет свойства $\det\mathbf{O} = -1$.

• Так как последовательные матричные преобразования $\mathbf{T}(\mathbf{a})$, $\mathbf{T}(\mathbf{b})$ снова приводят к преобразованию, то существует некоторая функция, при помощи которой можно получить значения итоговых параметров:

$$\mathbf{T}(\mathbf{c}) = \mathbf{T}(\mathbf{b})\,\mathbf{T}(\mathbf{a}), \qquad \mathbf{c} = \phi(\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

Такая *функция композиции* $\mathbf{c} = \phi(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ (сначала на $\mathbf{a}$, затем на $\mathbf{b}$) удовлетворяет некоторым функциональным уравнениям. Так, из *ассоциативности* $(\mathbf{T}_\mathbf{c} \cdot \mathbf{T}_\mathbf{b}) \cdot \mathbf{T}_\mathbf{a} = \mathbf{T}_\mathbf{c} \cdot (\mathbf{T}_\mathbf{b} \cdot \mathbf{T}_\mathbf{a})$ следует:

$$\phi(\phi(\mathbf{c}, \mathbf{b}),\ \mathbf{a}) = \phi(\mathbf{c}, \phi(\mathbf{b}, \mathbf{a})). \tag{6.12}$$

Единичное (при $\mathbf{a} = \mathbf{0}$) преобразование даёт:

$$\phi(\mathbf{a}, \mathbf{0}) = \phi(\mathbf{0}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}. \tag{6.13}$$

Важную роль играет поведение функции $\phi(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ в окрестности единичного преобразования (нулевого параметра $\mathbf{a}$). Разложим $\phi(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ в ряд Тейлора (по повторяющимся индексам суммирование от 1 до s):

$$c^k = \phi^k(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = b^k + a^k + \phi^k_{ij}\, b^i\, a^j + F^k_{ij}\, b^i\, b^j + G^k_{ij}\, a^i\, a^j + ...,$$

где верхний индекс является *не степенью*, а *номером параметра.* Для первых двух слагаемых разложения сразу учтено условие (6.13). Сохраняя порядок малости, подставим это разложение в уравнение ассоциативности (6.12). Чтобы не погрязнуть в индексах опустим их, представив всё в "матричной" форме, и, сохраняя второй порядок малости, получим:

$$\phi(c + b + c\Phi b + cFc + bGb,\ a) = \phi(c,\ b + a + b\Phi a + bFb + aGa),$$

или ещё раз раскладывая функцию:

$$\begin{aligned}&(c + b + c\,\Phi\, b + cFc + bGb) + a + (c + b)\,\Phi\, a + (c + b)\,F\,(c + b) + a\,G\,a\\ &= c + (b + a + b\Phi a + bFb + aGa) + c\Phi(b + a) + cFc + (b + a)\,G\,(b + a).\end{aligned}$$

Члены линейные по параметрам, и пропорциональные $\Phi = \phi^k_{ij}$ успешно сокращаются, чего нельзя сказать о членах с F и G. Поэтому условие ассоциативности при любых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выполняется только при $F^k_{ij} = 0$, $G^k_{ij} = 0$, и, следовательно, в окрестности нуля:

$$\phi^k(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \approx b^k + a^k + \phi^k_{ij}\, b^i\, a^j. \tag{6.14}$$

Антисимметричные по нижним индексам коэффициенты:

$$c^k_{ij} = \phi^k_{ij} - \phi^k_{ji} \tag{6.15}$$

называют *структурными константами.* Они играют фундаментальную роль в теории групп Ли.

• Разложим матрицу $\mathbf{T}(\mathbf{a})$ в окрестности единичного преобразования:

$$\mathbf{T}_{(\mathbf{a})} = \mathbf{1} + a^i\,\mathbf{X}_i + a^i\,a^j\,\mathbf{Y}_{ij} + ...,$$

где по повторяющимся индексам проводится суммирование. Обратим внимание, что нижние индексы у матриц $\mathbf{X}_i$, $\mathbf{Y}_{ij}$ – это их *номера*, а не элементы матриц! Для первого порядка малости по $\mathbf{a}$ нам необходимо s матриц $\mathbf{X}_i$, где s – число параметров. Для следующего члена разложения требуется уже s^2 матриц $\mathbf{Y}_{ij}$, однако благодаря симметричному тензору a^ia^j, на самом деле этих матриц $s(s+1)/2$, так как $\mathbf{Y}_{ij} = \mathbf{Y}_{ji}$. Для последовательности двух преобразований имеем:

$$\mathbf{T}_{(\mathbf{b})}\mathbf{T}_{(\mathbf{a})} = (\mathbf{1} + b^i\,\mathbf{X}_i + b^i\,b^j\,\mathbf{Y}_{ij} + ...)(\mathbf{1} + a^p\,\mathbf{X}_p + a^p\,a^q\,\mathbf{Y}_{pq} + ...).$$

Перемножим скобки с сохранением порядка малости по a^i и b^i:

$$\mathbf{T}_{(\mathbf{b})}\mathbf{T}_{(\mathbf{a})} = \mathbf{1} + (b^i + a^i)\mathbf{X}_i + b^ia^j\,\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j + (b^i\,b^j + a^i\,a^j)\,\mathbf{Y}_{ij} + ...$$

С другой стороны, результат умножения $\mathbf{T}_{(\mathbf{b})}\mathbf{T}_{(\mathbf{a})}$ равен $\mathbf{T}(\phi(\mathbf{b},\mathbf{a}))$, поэтому, подставляя разложение (6.14), имеем:

$$\mathbf{T}_{(\mathbf{b})}\mathbf{T}_{(\mathbf{a})} = \mathbf{1} + (b^k + a^k + \phi^k_{ij}\,b^ia^j + ...)\,\mathbf{X}_k + (b^i + a^i + ...)\,(b^j + a^j + ...)\,\mathbf{Y}_{ij} + ...$$

Сравнивая $\mathbf{T}_{(\mathbf{b})}\mathbf{T}_{(\mathbf{a})}$, полученные двумя способами находим ($\lessdot$ H$_{63}$):

$$\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j = \phi^k_{ij}\,\mathbf{X}_k + 2\mathbf{Y}_{ij}.$$

Запишем это же уравнение с переставленными индексами i, j, и вычтем его из исходного. Так как матрицы $\mathbf{Y}_{ij}$ по i и j симметричны, то:

$$[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = c^k_{ij}\,\mathbf{X}_k, \tag{6.16}$$

где $c^k_{ij} = \phi^k_{ij} - \phi^k_{ji}$ - структурные константы, и квадратные скобки являются *коммутатором* матриц: $[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{A}\,\mathbf{B} - \mathbf{B}\,\mathbf{A}$.

Матрицы $\mathbf{X}_1$,...,$\mathbf{X}_s$ называют *генераторами группы*, а систему матричных уравнений (6.16) – *алгеброй Ли*. Слово алгебра происходит из того, что операция коммутирования двум матрицам $[\mathbf{A},\mathbf{B}]$ ставит в соответствие третью. Эта третья матрица для параметрических групп всегда является линейной комбинацией генераторов с множителями равными структурным константам.

В качестве упражнения предлагается записать генератор однопараметрической группы $\mathbf{SO}(2)$ поворотов в плоскости (стр. 374) и найти результат бесконечного произведения преобразований, соответствующих бесконечно малому параметру ($\lessdot$ H$_{64}$).

• Иногда при вычислении коммутаторов удобно использовать не матрицы, а дифференциальные операторы. Введем *инфинитезимальные операторы* связанные с матричными генераторами следующим образом:

$$\hat{X}_i = -(\mathbf{X}_i)_{\alpha\beta}\, x_\beta\, \partial_\alpha, \tag{6.17}$$

где $(\mathbf{X}_i)_{\alpha\beta}$ – матричные элементы i-того генератора, а $\partial_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$ – частная производная. Если преобразование записать в виде

$$x'_\alpha = f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = T_{\alpha\beta}(\mathbf{a}) x_\beta \approx (\mathbf{1} + a^i \mathbf{X}_i)_{\alpha\beta} x_\beta,$$

то оператор выражается через производную функции преобразования в окрестности единичного преобразования $u_{\alpha i}(x) = \partial f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{0})/\partial a^i = (\mathbf{X}_i)_{\alpha\beta} x_\beta$ следующим образом: $\hat{X}_i = -u_{\alpha i}(x)\partial_\alpha$.

Для операторов, как и для матриц, можно записывать коммутационные соотношения. Предполагается, что любое операторное выражение действует на некоторую функцию координат $F = F(\mathbf{x})$, поэтому:

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j]\, F = (\hat{X}_i \hat{X}_j - \hat{X}_j \hat{X}_i)\, F.$$

Убедимся, что операторная алгебра имеет такие же структурные константы, что и матричная. Подставляя в коммутатор соотношение (6.17) и вынося не зависящие от координат коэффициенты, имеем:

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j]\, F = (\mathbf{X}_i)_{\alpha\beta}\, (\mathbf{X}_j)_{\mu\nu}\, x_\beta\, \partial_\alpha (x_\nu\, \partial_\mu F) - (\mathbf{X}_j)_{\mu\nu}\, (\mathbf{X}_i)_{\alpha\beta}\, x_\nu\, \partial_\mu (x_\beta\, \partial_\alpha F).$$

Производные действуют на всё, что стоит справа, поэтому, например, для первого слагаемого, вычисляя производную произведения, имеем:

$$\partial_\alpha (x_\nu\, \partial_\mu F) = \delta_{\nu\alpha}\, \partial_\mu F + x_\nu \partial_\alpha \partial_\mu F, \qquad \text{где} \qquad \partial_\alpha x_\nu = \frac{\partial x_\nu}{\partial x_\alpha} = \delta_{\nu\alpha},$$

– символ Кронекера (частная производная по различным координатам равна нулю: $\partial x_1/\partial x_2 = 0$, а по совпадающим единице: $\partial x_2/\partial x_2 = 1$). Аналогично берется производная произведения для второго слагаемого. Члены со вторыми производными сокращаются, поэтому:

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j]\, F = (\mathbf{X}_j)_{\mu\alpha}\, (\mathbf{X}_i)_{\alpha\beta}\, x_\beta\, \partial_\mu F - (\mathbf{X}_i)_{\alpha\beta}\, (\mathbf{X}_j)_{\beta\nu}\, x_\nu\, \partial_\alpha F,$$

где переставлены матричные элементы и проведена свёртка с символами Кронекера. Переименовывая индексы, получаем:

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j]\, F = -[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j]_{\mu\beta}\, x_\beta\, \partial_\mu F = -c^k_{ij} (\mathbf{X}_k)_{\mu\beta}\, x_\beta\, \partial_\mu F = c^k_{ij} \hat{X}_k\, F.$$

Таким образом, коммутатор операторов инфинитезимальных преобразований, равен свертке операторов со структурными константами:

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = c^k_{ij}\, \hat{X}_k,$$

где опущена произвольная функция F.

• Коммутатор можно рассматривать как бинарную функцию (зависящую от двух матриц), которая дает новую матрицу. Если матрицы перестановочны $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, то говорят, что они *коммутируют*. Для таких матриц коммутатор равен нулю (нулевой матрице).

Непосредственно используя определение коммутатора, несложно проверить, что для любых матриц он *антисимметричен* и линеен ($\lessdot$ H$_{65}$):

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}] = -[\mathbf{B},\mathbf{A}], \qquad [\mathbf{A},\mathbf{B}+\mathbf{C}] = [\mathbf{A},\mathbf{B}] + [\mathbf{A},\mathbf{C}]. \tag{6.18}$$

Кроме этого, для любых трёх матриц $\mathbf{A},\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ справедлива формула "произведения" ($\lessdot$ H$_{66}$):

$$[\mathbf{A},\mathbf{BC}] = [\mathbf{A},\mathbf{B}]\,\mathbf{C} + \mathbf{B}\,[\mathbf{A},\mathbf{C}]. \tag{6.19}$$

Наконец, для произвольных трех матриц выполняется *тождество Якоби* для "вложенных" коммутаторов ($\lessdot$ H$_{67}$):

$$[\mathbf{C},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] + [\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]] + [\mathbf{B},[\mathbf{C},\mathbf{A}]] = 0.$$

Подставляя в тождество Якоби $\mathbf{A} = \mathbf{X}_i$, $\mathbf{B} = \mathbf{X}_j$, $\mathbf{C} = \mathbf{X}_k$ и дважды применяя алгебру Ли (6.16), можно получить соотношение

$$c^p_{ij}c^q_{kp} + c^p_{jk}c^q_{ip} + c^p_{ki}c^q_{jp} = 0, \tag{6.20}$$

называемое *тождеством Якоби* для структурных констант. В нём происходит циклическая перестановка индексов (i,j,k), а по p – суммирование.

• В заключение сделаем замечание технического характера. Линейные преобразования можно также записывать, умножая *строку* координат справа на матрицу:

$$x'_i = x_j T_{ji}, \qquad \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

В этом случае порядок преобразований и умножений матриц будет совпадать $\mathbf{T}(\mathbf{a})\mathbf{T}(\mathbf{b}) = \mathbf{T}(\phi_{(\mathbf{a},\mathbf{b})})$ (сначала $\mathbf{a}$, затем $\mathbf{b}$). При такой записи матрицы (и соответственно) генераторы будут транспонированными по сравнению с принятым выше ($\mathbf{x}' = \mathbf{Tx} \Rightarrow \mathbf{x}'^T = \mathbf{x}^T\mathbf{T}^T$). При транспонировании матрицы меняются местами, и знак коммутатора изменяется $[\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_j]^T = -[\mathbf{X}_i^T,\mathbf{X}_j^T]$. Если по-прежнему $\phi^k(\mathbf{a},\mathbf{b}) = a^k + b^k + \phi^k_{ij}a^ib^i$, то алгебра Ли останется без изменений (см.вывод на стр. 377). Поэтому для транспонированных генераторов структурные константы будут иметь обратный знак по сравнению с принятым в этом разделе. Несложно также проверить, что переставляются индексы и исчезает минус в операторной записи генератора: $\hat{X}_i = x_\alpha(\mathbf{X}_i)_{\alpha\beta}\partial_\beta$.

6.7 Группы $\mathbf{O}(3)$ и $\mathbf{SO}(3)$

• Рассмотрим 3-мерное пространство с координатами $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$. Группой вращения $\mathbf{O}(3)$ называется линейное преобразование $\mathbf{x}' = \mathbf{R}\,\mathbf{x}$, которое не изменяет длины радиус-вектора: $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x} = x^2 + y^2 + z^2$ (значок ^{T} – транспонирование):

$$\mathbf{x}'^2 = \mathbf{x}'^T \mathbf{x}' = (\mathbf{R}\,\mathbf{x})^T\ \mathbf{R}\,\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\,\mathbf{R}^T \mathbf{R}\,\mathbf{x} = \mathbf{x}^2,$$

где учтено, что при транспонировании произведения матриц их порядок меняется $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$. Чтобы квадрат вектора не изменился $\mathbf{x}'^2 = \mathbf{x}^2$, должно выполняться *условие ортогональности*:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{1}.$$

Другими словами, обратная матрица к матрице поворота, является просто её транспонированием. Напомним, что буква "$\mathbf{O}$" в названии группы означает ортогональная, а тройка – размерность пространства.

Так как определитель при транспонировании матрицы не изменяется, а определитель произведения матриц равен произведению их определителей, из условия ортогональности следует, что

$$(\det \mathbf{R})^2 = 1.$$

Матрица вращения вокруг оси z (стр. 124) на угол ϕ имеет единичный определитель:

$$\det \mathbf{R}_z = \det \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1.$$

Все матрицы вращения, имеющие единичный определитель образуют *специальную ортогональную группу* $\mathbf{SO}(3)$. Её также называют собственными преобразованиями или просто вращениями.

Кроме вращений, длину радиус-вектора оставляют неизменными преобразования инверсии (или отражения осей): $\{x, y, z\} \mapsto \{-x, -y, -z\}$. Матрица этого преобразования имеет вид:

$$\mathbf{I}_{xyz} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Это тоже ортогональная матрица, но имеющая определитель равный минус единице: $\det \mathbf{I}_{xyz} = -1$, поэтому она принадлежит к группе $\mathbf{O}(3)$, но не принадлежит к группе $\mathbf{SO}(3)$.

Матрица $\mathbf{I}_{xyz}$ вместе с единичной матрицей $\mathbf{1}$ образует *дискретную абелеву* группу из двух элементов $\mathbf{I} = \{\mathbf{1}, \mathbf{I}_{xyz}\}$, изоморфную циклической группе $\mathbf{C}_2$. При этом элемент группы $\mathbf{I}_{xyz}$ является обратным самому себе: $\mathbf{I}^2_{xyz} = \mathbf{1}$. Так как эта группа является "частным случаем" группы $\mathbf{O}(3)$, то она является её *подгруппой*, т.е. $\mathbf{I} \subset \mathbf{O}(3)$.

Можно рассмотреть дискретную абелеву группу ранга 4, в которой кроме единичной матрицы есть ещё три элемента:

$$\mathbf{I}_{xy} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{I}_{yz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{I}_{xz} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Они осуществляют инверсии пар осей и имеют единичный детерминант. Эта группа является подгруппой не только $\mathbf{O}(3)$, но $\mathbf{SO}(3)$, так как инверсия двух осей в 3-мерном пространстве всегда может быть реализована поворотом системы координат.

Подгруппой группы $\mathbf{O}(3)$ является также более широкая группа инверсий, когда отражается одна, две или три оси. Инверсии осей x, y и z имеют следующее матричное представление:

$$\mathbf{I}_{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{I}_{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{I}_{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Стоит проверить что для $\mathbf{P} = \{\mathbf{1},\ \mathbf{I}_x,\ \mathbf{I}_y,\ \mathbf{I}_z,\ \mathbf{I}_{xy},\ \mathbf{I}_{xz},\ \mathbf{I}_{yz},\ \mathbf{I}_{xyz}\}$ выполняется аксиома замкнутости, а каждый элемент является обратным самому себе. Эта группа включает в качестве подгруппы группу отражения всех трёх осей, что записывается в виде такой цепочки: $\mathbf{I} \subset \mathbf{P} \subset \mathbf{O}(3)$. Группа $\mathbf{P}$ 8-го порядка изоморфна абелевой группе $\mathbf{C}_{\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{2}}$ (стр. 354) с тремя порождающими элементами $\mathbf{I}_x$, $\mathbf{I}_y$ и $\mathbf{I}_z$ второго порядка.

Инвертирование сразу трёх осей (или одной) переводит правую систему координат в левую и наоборот. После такого инвертирования ни каким поворотом нельзя вернуться в исходное состояние. Таким образом, все преобразования группы $\mathbf{O}(3)$ можно разбить на два класса – обычные вращения правой и левой системы координат. Это записывается в виде *прямого произведения* групп вращений и инверсий всех осей:

$$\mathbf{O}(3) = \mathbf{SO}(3) \times \mathbf{I}.$$

В данном случае прямое произведение означает, что рассматриваются последовательные преобразования $\mathbf{R}\mathbf{I}_{xyz}$ или $\mathbf{R}\mathbf{1}$, т.е. пары матриц из групп $\mathbf{SO}(3) = \{\mathbf{R}\}$ и $\mathbf{I} = \{\mathbf{1},\ \mathbf{I}_{xyz}\}$ матрично перемножаются. Так как матрицы $\mathbf{I}$ пропорциональны единичной, то $(\mathbf{R}_2\mathbf{I}_2)(\mathbf{R}_1\mathbf{I}_1) = (\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1)(\mathbf{I}_2\mathbf{I}_1)$.

• Рассмотрим подробнее группу вращений $\mathbf{SO}(3)$. Введём матрицу $\mathbf{A}$ небольшого отклонения от единичного преобразования (поворот на малые углы): $\mathbf{R} = \mathbf{1} + \mathbf{A} + ...$ Пренебрегая вторым порядком малости, запишем условие ортогональности:

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} \approx (\mathbf{1}+\mathbf{A}^T)(\mathbf{1}+\mathbf{A}) \approx \mathbf{1}+\mathbf{A}^T+\mathbf{A} = \mathbf{1} \qquad => \qquad \mathbf{A}^T = -\mathbf{A}.$$

Операция транспонирования переставляет местами индексы, следовательно матрица $\mathbf{A}$ является антисимметричной. Она имеет три независимых элемента:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.21}$$

Величины $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ можно рассматривать как малые параметры преобразования. Генераторы группы $\mathbf{R} = \mathbf{1} + \mathbf{A} + ... = \mathbf{1} + a^i\mathbf{X}_i + ...$ имеют вид:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.22}$$

Прямым перемножением матриц несложно проверить, что они удовлетворяют следующей алгебре Ли:

$$[\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2] = -\mathbf{X}_3, \qquad [\mathbf{X}_3,\ \mathbf{X}_1] = -\mathbf{X}_2, \qquad [\mathbf{X}_2,\ \mathbf{X}_3] = -\mathbf{X}_1. \tag{6.23}$$

Поэтому структурные константы равны $c^3_{12} = c^2_{31} = c^1_{23} = -1$. Второй и третий коммутаторы получаются из первого, в результате *циклической перестановки* индексов: $\{1,2,3\} \mapsto \{3,1,2\} \mapsto \{2,3,1\}$. Стоит вычислить ($\lessdot$ H$_{68}$) эти коммутаторы операторным методом (стр. 378).

Коммутаторы (6.23) можно записать используя символ Леви-Чевиты:

$$[\mathbf{X}_i,\ \mathbf{X}_j] = -\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{X}_k$$

($\varepsilon_{123} = 1$, по k сумма). Матрица инверсии трёх осей пропорциональна единичной, поэтому коммутирует с каждым генератором: $[\mathbf{X}_i,\ \mathbf{I}_{xyz}] = 0$. Кроме этого диагональными являются квадраты матриц генераторов:

$$\mathbf{X}_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_2^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_3^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

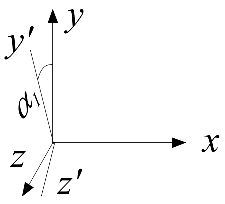
откуда следует, что $\mathbf{X}_1^3 = -\mathbf{X}_1$, и т.д. Сумма квадратов генераторов $\mathbf{C} = \mathbf{X}_1^2 + \mathbf{X}_2^2 + \mathbf{X}_3^3 = -2\cdot\mathbf{1}$ пропорциональна единичной матрице, а следовательно коммутирует со всеми генераторами: $[\mathbf{C}, \mathbf{X}_i] = 0$. Подобная величина в теории групп называется *оператором Казимира*.

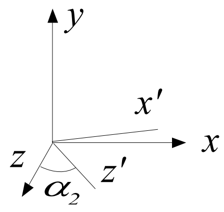
Генераторы $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ и $\mathbf{X}_3$ связаны с бесконечно малыми поворотами вокруг осей x, y и z. Если обозначить $s_1 = \sin a_1$, $c_1 = \cos a_1$ и т.д., то повороты вокруг трёх осей будут иметь вид:

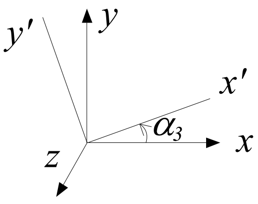
$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & s_1 \\ 0 & -s_1 & c_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определители этих матриц равны 1, поэтому мы имеем дело с группой $\mathbf{SO}(3)$. Разложение их по параметрам a_i приводит к генераторам $\mathbf{X}_i$.

Обратим внимание, что поворот в матрицах $\mathbf{R}_x$, $\mathbf{R}_y$, $\mathbf{R}_z$ происходит по правому винту (штопору) “вкручивающемуся” в направлении оси. Поэтому при повороте вокруг y роль “первой” оси (от которой отсчитывается угол) играет z, а “второй’ – x:







В результате матрицы $\mathbf{R}_x$ и $\mathbf{R}_z$ “блочно” одинаковы, а в матрице $\mathbf{R}_y$ по отношению к $\mathbf{R}_x$ переставлены местами строчки и аналогично колонки.

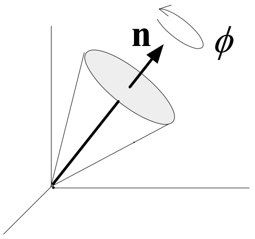
Группа $\mathbf{SO}(3)$ является неабелевой и последовательность поворотов играет роль. Например, если сначала повернуть систему вокруг оси y, а затем вокруг оси x, получим одну матрицу, а при выполнении этих поворотов в обратном порядке – другую:

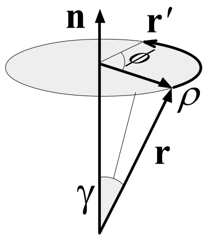
$$\mathbf{R}_x\mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ s_1 s_2 & c_1 & s_1 c_2 \\ c_1 s_2 & -s_1 & c_1 c_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}_y\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} c_2 & s_1 s_2 & -c_1 s_2 \\ 0 & c_1 & s_1 \\ s_2 & -s_1 c_2 & c_1 c_2 \end{pmatrix}.$$

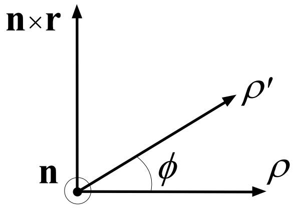
Неабелевость группы вращений связана с ненулевыми структурными константами. Понятно, что если коммутатор бесконечно малых поворотов (генераторов) отличен от нуля, то и матрицы произвольного поворота не будут между собой коммутировать. Естественно в группе $\mathbf{SO}(3)$ можно выделить и абелевы подгруппы. Например, вращение вокруг одной оси на различные углы является абелевой группой $\mathbf{SO}(2) \subset \mathbf{SO}(3)$.

Описание композиции вращений существенно упрощается при использовании кватернионной техники. Поэтому к группе $\mathbf{SO}(3)$ мы вернемся при рассмотрении соответствующей темы в главе 8. В частности, получим явное выражение для функции композиции $\phi(\mathbf{b}, \mathbf{a})$.

• Найдем выражение для матрицы поворота на угол ϕ вокруг произвольно направленного единичного вектора $\mathbf{n}$. Пусть с твёрдым телом, вращающимся вокруг оси $\mathbf{n}$ (ниже первый рисунок) жёстко связан некоторый вектор $\mathbf{r}$. При повороте на угол ϕ он переходит в вектор $\mathbf{r}'$, скользя по перевёрнутому конусу (второй рисунок):







Обозначим проекцию $\mathbf{r}$ на основание конуса через $\boldsymbol{\rho}$, а проекцию $\mathbf{r}'$ через $\boldsymbol{\rho}'$. Их длины одинаковы, и вектор $\boldsymbol{\rho}$, в результате поворота на угол ϕ, переходит в $\boldsymbol{\rho}'$. Введём вектор $\mathbf{n}\times\mathbf{r}$, лежащий в основании конуса перпендикулярно $\boldsymbol{\rho}$ (см. "вид сверху" на третьем рисунке). Его длина равна $|\mathbf{n}\times\mathbf{r}| = r\sin\gamma = |\boldsymbol{\rho}|$ (второй рисунок), поэтому $\boldsymbol{\rho}'$ можно разложить по двум перпендикулярным векторам, имеющим одинаковую длину:

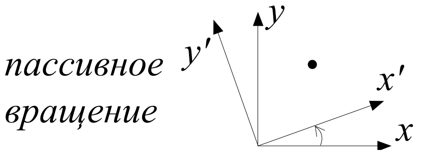
$$\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho}\cos\phi + [\mathbf{n}\times\mathbf{r}]\sin\phi.$$

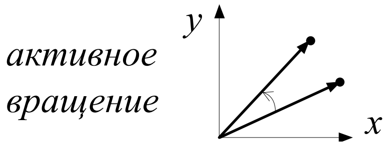
С другой стороны, векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ можно разложить следующим образом:

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{n}\ (\mathbf{n}\mathbf{r}), \qquad\qquad \mathbf{r}' = \boldsymbol{\rho}' + \mathbf{n}\ (\mathbf{n}\mathbf{r}'), \tag{6.24}$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{r})$ направлен вдоль $\mathbf{n}$ и равен высоте конуса. В результате, учитывая, что $\mathbf{r}'\mathbf{n} = \mathbf{r}\mathbf{n}$, получаем: $\mathbf{r}' = \boldsymbol{\rho}\cos\phi + [\mathbf{n}\times\mathbf{r}]\sin\phi + \mathbf{n}\ (\mathbf{n}\,\mathbf{r})$.

Принято различать *пассивные* и *активные* повороты. В первом случае сравниваются координаты одной и той же *фиксированной точки* пространства в двух системах координат (x, y, z) и (x', y', z'), повёрнутых относительно друг друга на угол ϕ. При активных вращениях рассматриваются координаты некоторого вектора, после *его* поворота относительно одной и той же системы координат:





Преобразования Лоренца описывают одно и тоже событие из различных систем отчёта, поэтому они являются пассивными вращениями. Для пространственных вращений мы также будем использовать пассивную интерпретацию. Несложно видеть, что поворот тела на угол ϕ относительно неподвижной системы координат эквивалентно повороту системы координат при неподвижном теле на угол "$-\phi$".

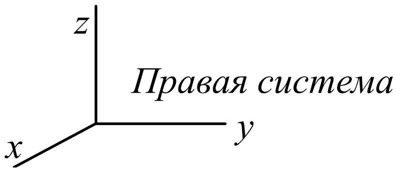
Поэтому, делая замену $\phi \mapsto -\phi$ и меняя порядок векторов в векторном произведении, а также выражая $\boldsymbol{\rho}$ через $\mathbf{r}$ при помощи первого соотношения (6.24), окончательно, получаем:

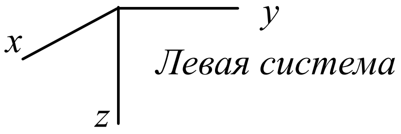
$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}\,\cos\phi + \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{r})(1-\cos\phi) - [\mathbf{n}\times\mathbf{r}]\sin\phi. \qquad (6.25)$$

Пусть ось вращения направлена вдоль оси z. Тогда компоненты единичного вектора имеют значения $\mathbf{n} = \{0,0,1\}$. Записывая $\mathbf{r} = \{x,y,z\}$ и аналогично со штрихами, из (6.25) получаем преобразование (2.37), стр. 124 для вращения в плоскости (x,y):

$$\begin{cases} x' = x\cos\phi + y\sin\phi \\ y' = y\cos\phi - x\sin\phi \\ z' = z. \end{cases}$$

Напомним, что при описании вращения используется правило правого винта (штопора). Этот винт вкручивается на угол ϕ в направлении оси $\mathbf{n}$ и его поворот показывает направление вращения системы координат. Кроме этого различают правые и левые системы координат:





В книге используется правая система. В этой системе ось z получается при помощи того же правого винта, если его рукоятку поворачивать от оси x к оси y в направлении z. В 3-мерном пространстве левая система координат получается из правой в результате инверсии (обращении) одной или трёх осей. После такой операции, ни каким поворотом нельзя совместить оси левой и правой систем координат.

Векторное соотношение (6.25) можно записать в тензорном виде для преобразования $r'_i = R_{ij}r_j$, при помощи символа Кронекера δ_{ij} и антисимметричного тензора Леви-Чевиты ($[\mathbf{n}\times\mathbf{r}]_i = \varepsilon_{ikj}n_k r_j = -\varepsilon_{ijk}n_k r_j$):

$$R_{ij} = \delta_{ij}\,\cos\phi + n_i n_j\,(1-\cos\phi) + \varepsilon_{ijk}n_k\,\sin\phi. \qquad (6.26)$$

Для бесконечно малого по углу ϕ преобразования, раскладывая в ряд синус и косинус, имеем $R_{ij} \approx \delta_{ij} + \varepsilon_{ijk}n_k\phi$, Поэтому генераторы группы равны $(\mathbf{X}_k)_{ij} = \varepsilon_{ijk}$, где индекс k перечисляет матрицы генераторов, а i,j – их элементы. Символ Леви-Чевиты равен $\varepsilon_{123} = 1$, при перестановке двух индексов появляется минус и при совпадении любых индексов он равен нулю. Поэтому несложно проверить, что значения $(\mathbf{X}_k)_{ij} = \varepsilon_{ijk}$ совпадают с элементами матриц (6.22).

• Из геометрических соображений понятно, что вращения вокруг различных единичных осей на некоторые углы охватывают все возможные вращения. Два последовательных вращения вокруг осей $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ на углы ϕ_1 и ϕ_2 всегда можно выразить через один поворот на угол ϕ вокруг единичного вектора $\mathbf{n}$. Связь между параметрами исходных поворотов и их результата будет получена в главе 8. Сейчас рассмотрим два последовательных поворота вокруг одной и той же оси. В этом случае происходит обычное сложение углов поворота (если последовательные вращения происходят вокруг разных осей это не так!):

$$\mathbf{R}(\mathbf{n},\,\phi_1)\,\mathbf{R}(\mathbf{n},\,\phi_2)=\mathbf{R}(\mathbf{n},\,\phi_1+\phi_2).$$

Возьмем производную по ϕ_2, приравняв $\phi_2=0$, а $\phi_1=\phi$:

$$\mathbf{R}(\mathbf{n},\,\phi)\,\mathbf{X}(\mathbf{n})=\frac{\partial\mathbf{R}(\mathbf{n},\,\phi)}{\partial\phi},\tag{6.27}$$

где матрицу $\mathbf{X}(\mathbf{n})$, при помощи выражения (6.26), можно выразить через генераторы группы:

$$\mathbf{X}(\mathbf{n})=\frac{\partial\mathbf{R}(\mathbf{n},\,\phi)}{\partial\phi}\bigg|_{\phi=0}=n_k\mathbf{X}_k=n_1\mathbf{X}_1+n_2\mathbf{X}_2+n_3\mathbf{X}_3.$$

Так как последовательность поворотов вокруг одной оси не играет роли ($\mathbf{R}(\mathbf{n},\,\phi_1)\,\mathbf{R}(\mathbf{n},\,\phi_2)=\mathbf{R}(\mathbf{n},\,\phi_2)\,\mathbf{R}(\mathbf{n},\,\phi_1)$), матрицы $\mathbf{R}(\mathbf{n},\,\phi)$ и $\mathbf{X}(\mathbf{n})$ коммутируют (перестановочны). Следовательно, решение дифференциального матричного уравнения (6.27) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{R}(\mathbf{n},\,\phi)=e^{\mathbf{X}(\mathbf{n})\,\phi}=e^{\mathbf{X}_k n_k\phi}.\tag{6.28}$$

Экспонента от матрицы понимается в смысле её разложения в бесконечный степенной ряд Тейлора (возведение в произвольную степень матрицы является хорошо определенной операцией). Предполагается, что каждый элемент матрицы, получившейся в результате такого суммирования сходится к определенному значению. Стоит, разложив экспоненту, с точностью до второго порядка малости по ϕ, убедиться, что с той же точностью воспроизводится выражение (6.26). Для этого сначала необходимо найти при помощи (6.22) следующие матрицы:

$$\mathbf{X}_k n_k=\begin{pmatrix}0 & n_z & -n_y\\ -n_z & 0 & n_x\\ n_y & -n_x & 0\end{pmatrix},\qquad (\mathbf{X}_k n_k)^2=\begin{pmatrix}n_x^2-1 & n_xn_y & n_xn_z\\ n_yn_x & n_y^2-1 & n_yn_z\\ n_zn_x & n_zn_y & n_z^2-1\end{pmatrix},$$

где учтено, что $n_x^2+n_y^2+n_z^2=1$. Обратим внимание, что $(\mathbf{X}_k n_k)^2$ является симметричной матрицей (как и квадрат любой антисимметричной матрицы $\mathbf{X}_k n_k$).

• Аналогичное экспоненциальное представление с генераторами группы в показателе справедливо для многих линейных групп Ли. Остановимся на этом чуть подробнее. Пусть в групповом пространстве задана некоторая кривая. Это означает, что из всех элементов группы отобраны только такие элементы $\mathbf{T}(t)$, которые можно перечислить (пронумеровать) при помощи одного непрерывного параметра t. Считается, что элементы группы на кривой близки, если близки соответствующие им параметры. В случае матричных групп, элементы двух близких матриц близки в обычном смысле математического анализа. Для многопараметрических групп подмножество элементов, заданных на кривой не охватывает всех элементов группы. Однако, для ряда интересных в приложениях линейных групп множество всевозможных кривых, проходящих через единичный элемент $\mathbf{T}(0) = \mathbf{1}$ (для которого естественно положить $t = 0$), покрывают все групповое пространство, пересекаясь только в единичном элементе. Более того, произведение двух элементов группы, лежащих на кривой, даёт элемент, который лежит на *этой же* кривой. Поэтому, всегда можно выбрать параметризацию, для которой:

$$\mathbf{T}(t_1)\mathbf{T}(t_2) = \mathbf{T}(t_1 + t_2).$$

Продифференцируем это выражение по t_2, положив его равным нулю, а $t_1 = t$:

$$\mathbf{T}(t)\,\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{T}(t)}{\partial t}.$$

Так как в окрестности единичного преобразования матрицу $\mathbf{T}$ можно разложить по генераторам группы, то

$$\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{T}(t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = c_k \mathbf{X}_k,$$

где c_k – коэффициенты разложения и число слагаемых в сумме по k равно числу параметров группы. Аналогичное уравнение, с переставленными матрицами $\mathbf{T}(t)$ и $\mathbf{X}$ мы бы получили, продифференцировав по t_1. Поэтому они коммутируют и решение уравнения можно записать в виде:

$$\mathbf{T}(t) = e^{\mathbf{X}_k c_k\, t}.$$

Числа $c_1, ..., c_n$ имеют смысл компонент касательного к кривой вектора в групповом пространстве в окрестности единичного преобразования, который разложен по базису генераторов $\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n$. Масштабным преобразованием параметра t всегда можно сделать сумму квадратов коэффициентов c_k равной единице.

6.8 Группа $\mathbf{SU}(2)$

• Рассмотрим теперь группу $\mathbf{SU}(n)$. Напомним, что её элементами являются унитарные матрицы $\mathbf{U}^+\mathbf{U} = \mathbf{1}$ с единичным определителем $\det\mathbf{U} = 1$. Группа $\mathbf{SU}(n)$ при преобразованиях вектора с комплексными коэффициентами $\mathbf{z}' = \mathbf{U}\mathbf{z}$ оставляет неизменным квадрат модуля компонент вектора: $\mathbf{z}^+\mathbf{z} = |z_1|^2 + ... + |z_n|^2$. Действительно:

$$\mathbf{z}'^+\mathbf{z}' = (\mathbf{U}\mathbf{z})^+\,\mathbf{U}\mathbf{z} = \mathbf{z}^+(\mathbf{U}^+\mathbf{U})\mathbf{z} = \mathbf{z}^+\mathbf{z}.$$

Запишем матрицу $\mathbf{U}$ в окрестности единичного преобразования:

$$\mathbf{U} \approx \mathbf{1} + \mathbf{A},$$

где коэффициенты матрицы $\mathbf{A}$ – малые комплексные числа. Условие унитарности приводит к *антиэрмитовости* матрицы $\mathbf{A}$:

$$(\mathbf{1}+\mathbf{A})^+(\mathbf{1}+\mathbf{A}) \approx \mathbf{1} + \mathbf{A}^+ + \mathbf{A} = \mathbf{1} \qquad => \qquad \mathbf{A}^+ = -\mathbf{A}.$$

Единичность определителя матрицы $\mathbf{U}$ даёт ещё одно уравнение (равенство нулю следа матрицы) ($\lessdot$ H$_{69}$):

$$\det(\mathbf{1}+\mathbf{A}) \approx 1 + \operatorname{Tr}\mathbf{A} = 1 \qquad => \qquad \operatorname{Tr}\mathbf{A} = 0.$$

Матрица $\mathbf{A}$ зависит от $2n^2$ вещественных параметров (n^2 элементов, имеющих действительную и мнимую части). Из уравнений $A^*_{ij} = -A_{ji}$ следует, что диагональные элементы должны быть чисто мнимыми (n ограничений). Для недиагональных элементов они дают еще $2(n^2-n)/2$ действительных уравнений. Плюс одно ограничение получается из $\operatorname{Tr}\mathbf{A} = 0$. В результате, общее число действительных параметров, определяющих матрицу $\mathbf{A}$ равно $2n^2-(n+n^2-n+1) = n^2-1$. *Специальная унитарная группа* $\mathbf{SU}(2)$ имеет 3 параметра. Запишем её матрицу $\mathbf{A}$ в следующем виде:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \imath a_3 & a_2+\imath a_1 \\ -a_2+\imath a_1 & -\imath a_3 \end{pmatrix} = a_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}_1} + a_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}_2} + a_3 \underbrace{\begin{pmatrix} \imath & 0 \\ 0 & -\imath \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}_3}.$$

Несложно проверить, что эта матрица удовлетворяет обоим полученным выше условиям. Разложение, записанное во втором равенстве, приводит к трём матричным генераторам: $\mathbf{U} \approx \mathbf{1} + a_1\mathbf{X}_1 + a_2\mathbf{X}_2 + a_3\mathbf{X}_3$. Они удовлетворяют алгебре Ли, похожей на алгебру группы вращения $\mathbf{SO}(3)$:

$$[\mathbf{X}_i,\ \mathbf{X}_j] = -2\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{X}_k.$$

Если их умножить на $-\imath$, то получатся *матрицы Паули* $\sigma_k = -\imath\,\mathbf{X}_k$.

- Любую матрицу группы $\mathbf{SU}(2)$ можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \qquad\qquad \det \mathbf{U} = |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Несложно проверить, что эта матрица унитарна: $\mathbf{U}^+\mathbf{U} = \mathbf{1}$. Введем вместо 2-х комплексных параметров четыре действительных ϕ, n_1, n_2, n_3:

$$a = \cos\frac{\phi}{2} + \imath\, n_3 \sin\frac{\phi}{2}, \qquad\qquad b = (n_2 + \imath\, n_1)\, \sin\frac{\phi}{2}. \tag{6.29}$$

Равенство единице определителя выполняется, если $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, т.е. $\{n_1, n_2, n_3\} = \mathbf{n}$ являются компонентами единичного вектора: $\mathbf{n}^2 = 1$. Выделение фактора 1/2 станет ясным ниже. В такой параметризации матрица $\mathbf{U}$ выражается через генераторы группы следующим образом:

$$\mathbf{U} = \mathbf{1}\, \cos\frac{\phi}{2} + (n_1\mathbf{X}_1 + n_2\mathbf{X}_2 + n_3\mathbf{X}_3)\, \sin\frac{\phi}{2}. \tag{6.30}$$

Бесконечно малые параметры a_i связаны с новыми параметрами: $a_i = n_i\, \phi/2$ (берём ведущее приближение при разложении синуса и косинуса в ряд Тейлора). Матрицу $\mathbf{U}$ можно также записать в следующем компактном, но более формальном виде (по k сумма):

$$\mathbf{U} = e^{(\phi/2)\, n_k \mathbf{X}_k}. \tag{6.31}$$

Действительно, несложно проверить, что квадрат матрицы $n_k\mathbf{X}_k$ для единичного вектора равен единичной матрице с обратным знаком (по k сумма):

$$n_k\mathbf{X}_k = \begin{pmatrix} \imath n_3 & n_2 + \imath n_1 \\ -n_2 + \imath n_1 & -\imath n_3 \end{pmatrix}, \qquad\qquad (n_k\mathbf{X}_k)^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому:

$$(n_k\mathbf{X}_k)^2 = -\mathbf{1}, \qquad (n_k\mathbf{X}_k)^3 = -n_k\mathbf{X}_k, \qquad (n_k\mathbf{X}_k)^3 = \mathbf{1}, \dots.$$

При разложении в ряд Тейлора экспоненты (6.31), получается (6.30).

Если в качестве бесконечно малых параметров выбрать $\tilde{a}_i = 2a_i = n_i\phi$, то новые генераторы будут удовлетворять алгебре Ли эквивалентной алгебре группы $\mathbf{SO}(3)$ (по k сумма):

$$[\tilde{\mathbf{X}}_i, \tilde{\mathbf{X}}_j] = -\varepsilon_{ijk}\tilde{\mathbf{X}}_k,$$

где

$$\tilde{\mathbf{X}}_k = \frac{\mathbf{X}_k}{2}, \qquad\qquad \mathbf{U} \approx \mathbf{1} + \tilde{\mathbf{X}}_k n_k \phi.$$

Как мы сейчас увидим, подобное совпадение алгебр неслучайно.

• Продемонстрируем связь групп $\mathbf{SU}(2)$ и $\mathbf{SO}(3)$. При помощи координат радиус-вектора $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ построим *эрмитову* ($\mathbf{F}^+ = \mathbf{F}$) матрицу:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}.$$

Её определитель $\det \mathbf{F} = -(x^2 + y^2 + z^2)$ пропорционален длине радиус-вектора. При помощи унитарных матриц с единичными определителем запишем следующее преобразование:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{UFU}^+. \tag{6.32}$$

Оно сохраняет эрмитовость матрицы: $\mathbf{F}'^+ = (\mathbf{UFU}^+)^+ = \mathbf{UF}^+\mathbf{U}^+ = \mathbf{F}'$, и так как $\det \mathbf{U} = 1$, длина радиус-вектора оказывается инвариантной:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Таким образом, преобразование (6.32) осуществляет некоторый поворот декартовой системы координат.

Возникает закономерный вопрос. Если существует связь группы $\mathbf{SU}(2)$ и обычных вращений и кроме того, алгебры групп $\mathbf{SU}(2)$ и $\mathbf{SO}(3)$ совпадают, то не означает ли это, что группы $\mathbf{SU}(2)$ и $\mathbf{SO}(3)$ изоморфны (т.е. их элементы могут быть поставлены во взаимно-однозначное соответствие)? Ответ отрицательный! Дело в том, что одинаковое поведение в малом (в окрестности единичного преобразования), вообще говоря, не означает одинаковости при любых значениях параметров.

Действительно, используя параметризацию (6.29), запишем преобразование (6.32) в явном виде для случая $n_1 = n_2 = 0$, $n_3 = 1$.

$$\begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + \imath s & 0 \\ 0 & c - \imath s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c - \imath s & 0 \\ 0 & c + \imath s \end{pmatrix},$$

где $c = \cos(\phi/2)$, $s = \sin(\phi/2)$. Перемножая матрицы, имеем:

$$x' + iy' = (\cos\phi - \imath \sin\phi)(x + \imath y), \qquad z' = z$$

Сравнивая действительные и мнимые части, окончательно получаем:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Таким образом унитарное преобразование с параметрами $\mathbf{n} = \{0, 0, 1\}$ и ϕ соответствует повороту $\mathbf{R}_z$ в 3-мерном пространстве вокруг оси z на угол ϕ. Если бы мы выбрали $\mathbf{n} = \{1, 0, 0\}$, то получился бы поворот вокруг оси x, а при $\mathbf{n} = \{0, 1, 0\}$ - вокруг y.

Теперь заметим, что в группе $\mathbf{SU}(2)$ параметр ϕ пробегает значения от 0 до 4π (см. множитель 1/2 в (6.29)), определяя различные матрицы. В тоже время в группе $\mathbf{SO}(3)$ интервалы $0 \leqslant \phi < 2\pi$ и $2\pi \leqslant \phi < 4\pi$ приводят к одним и тем же матрицам. Поэтому одной матрице $\mathbf{SO}(3)$ соответствует две матрицы группы $\mathbf{SU}(2)$ и, следовательно, преобразование (6.32) осуществляет *гомоморфное отображение* $\mathbf{SU}(2)$ в $\mathbf{SO}(3)$.

Если бы мы отказались от условия $\det \mathbf{U} = 1$, вместо группы $\mathbf{SU}(2)$ получилась бы группа $\mathbf{U}(2)$. Её матрицы отличаются дополнительным фазовым множителем с вещественным параметром "Φ":

$$\mathbf{U} = e^{-\imath\Phi} \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \qquad\qquad |\det \mathbf{U}| = |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Эта матрица по прежнему унитарна $\mathbf{U}^{+}\mathbf{U} = \mathbf{1}$, но её определитель не равен единице, хотя и имеет единичный модуль $|\mathbf{U}| = 1$, что следует из условия унитарности.

Фазовый множитель $e^{-\imath\Phi}$ можно рассматривать как унитарную матрицу из одного комплексного элемента. Эта "матрица" действует на единственное комплексное число: $z' = e^{-\imath\Phi}z$. Поэтому это группа $\mathbf{U}(1)$. Если записать $z = x+\imath y$ и по теореме Эйлера $e^{-\imath\Phi} = \cos\Phi - \imath\sin\Phi$, то преобразование для z оказывается полностью эквивалентным поворотам в плоскости. Таким образом, группы $\mathbf{U}(1)$ и $\mathbf{SO}(2)$ изоморфны. В свою очередь, группа $\mathbf{U}(2)$ является прямым произведением $\mathbf{U}(2) = \mathbf{U}(1) \times \mathbf{SU}(2)$.

Очевидно, что группа $\mathbf{U}(1)$ абелева. В тоже время группа $\mathbf{SU}(2)$, как и $\mathbf{SO}(3)$ является *неабелевой.*

Группа симметрий $\mathbf{SU}(2)$ встречается в физике элементарных частиц при рассмотрении спина и изоспина. Следующая по размерности специальная унитарная группа $\mathbf{SU}(3)$ лежит в основе одного из фундаментальных взаимодействий – квантовой хромодинамики. Эта группа имеет $3^2-1 = 8$ параметров и соответственно 8 генераторов, которые являются матрицами 3x3. Эти матрицы строятся аналогично группе $\mathbf{SU}(2)$. Матрица "отклонения от единичной" со свойствами $\mathbf{A}^{+} = -\mathbf{A}$ и $\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = 0$ может быть записана следующим образом (выделена мнимая единица!):

$$\mathbf{A} = \imath \begin{pmatrix} a_3 + a_8 & a_1 - \imath a_2 & a_4 - \imath a_5 \\ a_1 + \imath a_2 & a_8 - a_3 & a_6 - \imath a_7 \\ a_4 + \imath a_5 & a_6 + \imath a_7 & -2a_8 \end{pmatrix}.$$

Параметризация диагональных элементов произвольна (они чисто мнимые и их сумма равна нулю). Разложение $\mathbf{A} = a_1\mathbf{X}_1 + ... + a_8\mathbf{X}_2 = \imath a^i\lambda_i$ даёт 8 генераторов $\mathbf{X}_i$ или т.н. *матриц Гелл-Манна* λ_i (обычно λ_8 делится на $\sqrt{3}$, что соответствует переопределению параметра a_8).

• Существование гомеоморфного отображения группы $\mathbf{SU}(2)$ на $\mathbf{SO}(3)$, в силу определения данного на стр. 366, означает, что матрицы группы $\mathbf{SO}(3)$ являются матричным представлением элементов группы $\mathbf{SU}(2)$. Аналогично в обратную сторону: все элементы группы $\mathbf{SO}(3)$ можно изоморфно отобразить в *часть* матриц $\mathbf{SU}(2)$ (это точное представление).

Алгебры генераторов групп $\mathbf{SU}(2)$ и $\mathbf{SO}(3)$ совпадают, хотя имеют различную размерность (матрицы 2x2 и 3x3). *Представлением алгебры* группы Ли размерности n называется множество квадратных матриц nxn, коммутатор которых совпадает с коммутатором генераторов группы. Не стоит путать размерность представления и размерность группы Ли (равную числу действительных параметров, "перечисляющих" элементы группы). Для одной и той же группы можно построить представления алгебр различной размерности.

Почему интересно изучение представлений, например, группы $\mathbf{SO}(3)$? Эта группа с тремя генераторами $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ является группой матриц $\mathbf{R} = e^{\mathbf{X}_k n_k \phi}$ размера 3x3. С их помощью записывается преобразование компонент 3-вектора $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ при поворотах системы координат: $r'_i = R_{ij} r_j$ (собственно одним из определений компонент вектора является: "набор 3-х величин, преобразующихся при поворотах при помощи матрицы $\mathbf{R}$"). Пусть теперь найдены матрицы-генераторы $\tilde{\mathbf{X}}_k$ другой размерности $n \neq 3$, имеющие такую же алгебру, как и $\mathbf{X}_k$. Это означает, что построены матрицы $\tilde{\mathbf{R}} = e^{\tilde{\mathbf{X}}_k n_k \phi}$ преобразования некоторой n-компонентной величины $\{x_1, ..., x_n\}$. Таким образом, существуют различные математические объекты, по разному преобразующиеся при вращении системы координат. Часть из них хорошо известна. Например, тензоры a_{ij} ранга 2 в 3-мерном пространстве имеют 9 компонент. Обычно мы записываем их преобразование как произведение двух векторов: $a'_{ij} = R_{ik} R_{jl} a_{kl}$. Однако его можно записать и при помощи матрицы 9x9, действующей на *столбик*, состоящий из 9 компонент тензора.

Замечательно, что существуют более экзотические объекты, несводимые к векторам и тензорам. Например, матрицам 2x2 преобразования группы $\mathbf{SU}(2)$ соответствуют так называемые 3-спиноры, которые мы подробно изучим в главе 8. Природа не любит "математической пустоты". Если естественным образом возникают математические конструкции обобщающие, например, векторы, то, обычно, в физике находятся объекты, адекватное описание которых проще всего провести при помощью этих конструкций. Например, спиноры лежат в основе нашего понимания таких фундаментальных частиц как лептоны (к которым относится электрон) и кварки, из которых "состоят" адроны.

• Найдем все неприводимые представления алгебры $[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = -\varepsilon_{ijk}\mathbf{X}_k$ групп $\mathbf{SU}(2)$ и $\mathbf{SO}(3)$. Как мы увидим в дальнейшем, классификация представлений группы Лоренца (к которой относятся преобразования Лоренца), также основана на этой алгебре. Матрицы $\mathbf{X}_i$ – антиэрмитовы. Удобно вместо них ввести эрмитовы матрицы $\mathbf{J}_k = -\imath\mathbf{X}_k$, не меняющиеся при эрмитовом сопряжении: $\mathbf{J}_k^+ = \mathbf{J}_k$. Для них справедлива следующая алгебра:

$$[\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] = \imath\varepsilon_{ijk}\mathbf{J}_k. \tag{6.33}$$

В частности $[\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2] = \imath\mathbf{J}_3$. Кроме этого введем ещё две матрицы:

$$\mathbf{J}_+ = \frac{\mathbf{J}_1 + \imath\mathbf{J}_2}{\sqrt{2}}, \qquad\qquad \mathbf{J}_- = \frac{\mathbf{J}_1 - \imath\mathbf{J}_2}{\sqrt{2}}.$$

При помощи коммутатора (6.33) несложно проверить, что

$$[\mathbf{J}_3,\, \mathbf{J}_\pm] = \pm\mathbf{J}_\pm, \qquad\qquad [\mathbf{J}_+,\, \mathbf{J}_-] = \mathbf{J}_3,$$

и эрмитово сопряжение меняет местами эти матрицы: $(\mathbf{J}_+)^+ = \mathbf{J}_-$.

Рассмотрим уравнение на собственные функции и собственные значения матрицы $\mathbf{J}_3$:

$$\mathbf{J}_3\Phi_m = m\Phi_m. \tag{6.34}$$

Если представление имеет размерность n (матрицы nхn), то Φ_m – это столбик, состоящий их n чисел (индекс m нумерует столбики соответствующие различным собственным значениям m, а не компоненты этих столбиков). Для эрмитовой матрицы nхn это уравнение имеет не более n решений (они существует, если $\det(\mathbf{J}_3 - m\mathbf{1}) = 0$, а это степенное уравнение порядка n относительно числа m). Кроме этого, все собственные значения – действительны (стр. 770). Найдем их. Умножая коммутатор $\mathbf{J}_3\mathbf{J}_\pm - \mathbf{J}_\pm\mathbf{J}_3 = \pm\mathbf{J}_\pm$ справа на столбик Φ_m, приходим к выводу, что столбик $\mathbf{J}_\pm\Phi_m$, также является собственным вектором матрицы $\mathbf{J}_3$, который соответствует собственному значению $m \pm 1$:

$$\mathbf{J}_3\,(\mathbf{J}_\pm\Phi_m) = (m \pm 1)(\mathbf{J}_\pm\Phi_m). \tag{6.35}$$

Матрицы $\mathbf{J}_\pm$ называются *повышающей* ($\mathbf{J}_+$) и *понижающей* ($\mathbf{J}_-$). Число собственных значений ограничено значением n и бесконечно повышать и понижать собственное значение матрицы $\mathbf{J}_\pm$ не могут. В частности существует максимальное собственное значение $m = j$, для которого

$$\mathbf{J}_+\Phi_j = 0. \tag{6.36}$$

Понижая $m = j$ при помощи $\mathbf{J}_-$, мы также рано или поздно получим ноль, т.е. существует целое число $N < n$, такое, что $(\mathbf{J}_-)^{N+1}\Phi_j = 0$. При этом собственные значения равны $m = j,\, j-1,\, ...,\, j-N$.

Собственные векторы Φ_m унитарной матрицы $\mathbf{J}_3$ являются ортогональными и в силу линейности уравнений (6.34) могут быть сделаны ортонормированными: $\Phi^+_m\Phi'_m = \delta_{mm'}$. С их помощью матрицу $\mathbf{J}_3$ можно задать диагональной с элементами:

$$(\mathbf{J}_3)_{mm'} = \Phi^+_m\mathbf{J}_3\Phi_m = m\,\delta_{mm'},$$

т.е. на её диагонали стоят собственные значения. Беря след от коммутатора $[\mathbf{J}_+,\mathbf{J}_-] = \mathbf{J}_3$ и учитывая, что для любых матриц $\mathrm{Tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{BA})$, получаем, что $\mathrm{Tr}\,\mathbf{J}_3 = 0$. След – это сумма диагональных элементов, поэтому (арифметическая прогрессия):

$$j + (j-1) + ... + (j-N) = \frac{1}{2}\,(2j-N)(N+1) = 0.$$

В результате, максимальное собственное значение $j = N/2$, т.е. оно может быть только целым или полуцелым (N – целое число), а собственные значения равны $m = j, j-1, ..., -j$. Например, для $j = 1/2$ и $j = 1$ имеем следующие представления матрицы $\mathbf{J}_3$ (нумерация индексов элементов матриц соответствует $m = j, ..., -j$):

$$\mathbf{J}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Из *линейных* уравнений (6.35) следует, что:

$$\mathbf{J}_+\Phi_m = N_{m+1}\Phi_{m+1}, \qquad \mathbf{J}_-\Phi_m = N^*_m\Phi_{m-1}, \tag{6.37}$$

где N_m – некоторые числа. Первое соотношение следует из линейности, а второе из первого, так как учитывая $(\mathbf{J}_+)^+ = \mathbf{J}_-$ и $\Phi^+_m\Phi_m = 1$ (нет суммы по m), имеем: $N_m = (\Phi^+_{m-1}\mathbf{J}_-\Phi_m)^+ = \Phi^+_m\mathbf{J}_+\Phi_{m-1} = N_m$. Найдем коэффициенты N_m:

$$\mathbf{J}_+\mathbf{J}_-\Phi_m = ([\mathbf{J}_+,\mathbf{J}_-]+\mathbf{J}_-\mathbf{J}_+)\Phi_m = (\mathbf{J}_3+\mathbf{J}_-\mathbf{J}_+)\Phi_m = \bigl(m+N^*_{m+1}N_{m+1}\bigr)\Phi_m,$$

и так как $\mathbf{J}_+\mathbf{J}_-\Phi_m = N_mN^*_m\Phi_m = |N_m|^2\Phi_m$, получаем:

$$|N_m|^2 - |N_{m+1}|^2 = m.$$

Сложив левые части этих соотношений для $m = j,\ j-1,\ ....,\ j-p$ (принимая во внимание, что $N_{j+1} = 0$):

$$|N_j|^2 + (|N_{j-1}|^2 - |N_j|^2) + (|N_{j-2}|^2 - |N_{j-1}|^2) + ... + (|N_{j-p}|^2 - |N_{j-p+1}|^2),$$

получаем $|N_{j-p}|^2$. Сумма правых частей $j + (j-1) + ... + (j-p)$ (арифметическая прогрессия) дает $(2j-p)(p+1)/2$.

Поэтому, с точностью до произвольного фазового множителя, имеем:

$$N_k = \sqrt{\frac{(j+k)(j-k+1)}{2}}.$$

Теперь можно записать элементы понижающей и повышающей матриц $(\mathbf{J}_\pm)_{m'm} = \Phi^+_{m'}\mathbf{J}_\pm\Phi_m$:

$$(\mathbf{J}_+)_{m'm} = N_{m+1}\,\delta_{m',m+1}, \qquad\qquad (\mathbf{J}_-)_{m'm} = N_m\,\delta_{m',m-1}.$$

Элементы этих матриц равны нулю за исключением чисел N_j, ..., N_{-j+1}, стоящих над главной диагональю в $\mathbf{J}_+$ и под главной диагональю в $\mathbf{J}_-$. Так, для $j = 1/2$ имеем $N_{1/2} = 1/\sqrt{2}$, поэтому для $\mathbf{J}_\pm$ и $\mathbf{J}_1 = (\mathbf{J}_+ + \mathbf{J}_-)/\sqrt{2}$ и $\mathbf{J}_2 = (\mathbf{J}_+ - \mathbf{J}_-)/\imath\sqrt{2}$, получаем:

$$\mathbf{J}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{J}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{J}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{J}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-\imath\\\imath&0\end{pmatrix},$$

что совпадает с матрицами 2x2 генераторов $\tilde{\mathbf{X}}_k = \imath\mathbf{J_k}$, полученных при рассмотрении группы $\mathbf{SU}(2)$. Аналогично, для представления $j = 1$, имеем $N_1 = N_0 = 1$, откуда:

$$\mathbf{J}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{J}_2 = \frac{1}{\imath\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix},$$

что соответствует матрицам 3x3 генераторов $\mathbf{X}_k = \imath\mathbf{J}_k$ группы $\mathbf{SO}(3)$, с точностью до преобразования эквивалентности $\tilde{\mathbf{X}}_k = \mathbf{S}\mathbf{X}_k\mathbf{S}^{-1}$, см. стр. 366 (найдите ($\lessdot$ H$_{70}$) матрицу $\mathbf{S}$). Аналогично записываются неприводимые представления более высокой размерности. Неприводимость представления следует из того, что число линейно независимых векторов Φ_m равно размерности представления (нет инвариантных подпространств).

В заключение введем *матрицу Казимира*:

$$\mathbf{J}^2 = (\mathbf{J}_1)^2 + (\mathbf{J}_2)^2 + (\mathbf{J}_3)^2 = \mathbf{J}_+\mathbf{J}_- + \mathbf{J}_-\mathbf{J}_+ + (\mathbf{J}_3)^2,$$

которая коммутирует со всеми генераторами алгебры $[\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_i] = 0$, что проверяется при помощи алгебры матриц $\mathbf{J}_i$. Векторы Φ_m также являются её собственными векторами. В частности, для максимального $m = j$, имеем:

$$\mathbf{J}^2\Phi_j = \{[\mathbf{J}_+, \mathbf{J}_-] + 2\mathbf{J}_-\mathbf{J}_+ + (\mathbf{J}_3)^2\}\Phi_j = j(j+1)\Phi_j,$$

где учтен второй коммутатор (6.35) и (6.36).

6.9 Группа Лоренца

• Группа Лоренца объединяет в себе преобразования Лоренца и повороты в обычном пространстве. Рассмотрим сначала 2-мерное пространство x, y и время t, которые будут преобразуемыми величинами $\mathrm{x} = \{t, x, y\}$. Пространственные повороты не затрагивают время, поэтому соответствующее преобразование выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Разложение по углу ϕ даёт генератор вращений плоскости, который мы обозначим как $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразования Лоренца (1.10), стр. 32 вдоль оси x со скоростью v_x и вдоль оси y со скоростью v_y запишем в первом порядке малости по скорости $\mathbf{v}$ ($\gamma \approx 1$), временно восстановив фундаментальную константу c, обозначив $\alpha = 1/c^2$:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha v_x & 0 \\ -v_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha v_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -v_y & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Соответствующие этим преобразованиям генераторы имеют вид:

$$\mathbf{L}_x = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{L}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Несложно проверить, что три матрицы $\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y$ и $\mathbf{R}$ удовлетворяют следующей алгебре Ли:

$$[\mathbf{L}_x, \mathbf{R}] = \mathbf{L}_y, \qquad [\mathbf{L}_y, \mathbf{R}] = -\mathbf{L}_x, \qquad [\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y] = \alpha\mathbf{R}.$$

В классической механике фундаментальная скорость “c” равна бесконечности, а $\alpha = 0$. Поэтому эта же алгебра для *группы Галилея* (повороты + смена системы отсчёта) имеет вид:

$$[\mathbf{L}_x, \mathbf{R}] = \mathbf{L}_y, \qquad [\mathbf{L}_y, \mathbf{R}] = -\mathbf{L}_x, \qquad [\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y] = 0.$$

Отличие состоит в последнем коммутаторе, который равен нулю.

Мы видели, что линейная группа преобразований определяется набором структурных констант, которые задают алгебру для генераторов:

$$[\mathbf{X}_i,\ \mathbf{X}_j] = c^k_{ij}\,\mathbf{X}_k.$$

Эти константы должны быть антисимметричными по нижним индексам $c^k_{ij} = -c^k_{ji}$ и удовлетворять тождеству Якоби (стр. 379):

$$c^p_{ij}c^q_{kp} + c^p_{jk}c^q_{ip} + c^p_{ki}c^q_{jp} = 0.$$

В случае 3-параметрической группы $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\} = \{\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y, \mathbf{R}\}$, рассмотренной выше, возможно 9 различных структурных констант, а тождество Якоби вырождается в одно нетривиальное ограничение, следующее из соотношения $[\mathbf{X}_1, [\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3]] + [\mathbf{X}_2, [\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_1]] + [\mathbf{X}_3, [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]] = 0$. Кроме этого, выбор способа параметризации произволен. Поэтому в рамках одной и той же группы, можно перейти к новым генераторам, являющимися линейной комбинацией старых. В рамках классификации, проделанной Луиджи Бианки (стр. 418) показывается, что существует 4 независимых параметра, определяющих структурные константы и 9 нетривиальных групп Ли размерности 3.

Эти 4 структурные константы можно рассматривать как четвёрку потенциальных фундаментальных физических констант, определяющих ту или иную теорию преобразований между двумя системами отсчёта. При росте числа параметров группы, быстро растёт и число независимых структурных констант. Дополнительные ограничения на них накладывает *принцип соответствия*, так как в пределе нулевых фундаментальных констант должны получаться соотношения группы Галилея. Поэтому часть из структурных констант уже фиксированы. Далее можно использовать свойства изотропности пространства, которое на языке генераторов выражаются в равноправии (симметрии) между $\mathbf{L}_x$ и $\mathbf{L}_y$, и т.д. В результате число фундаментальных констант будет ещё сильнее уменьшаться. Однако на любом этапе можно остановиться, получив некоторое обобщение классической механики.

Таким образом, на языке теории групп мы возвращаемся к *принципу параметрической неполноты* (стр. 44). Построение новых физических теорий может идти по пути расширения исходных групп преобразований классической механики, путём введения новых ненулевых структурных констант. Эти структурные константы являются фундаментальными константами, определяющими свойства соответствующих механик.

Впрочем, сейчас самое время перейти к детальному изучению свойств группы, которая гарантирована реализовалась в нашем Мире и явилась первым параметрическим обобщением классической механики.

• Рассмотрим 4-мерное пространство-время. Преобразуемыми величинами будут компоненты 4-вектора $\mathrm{x} = \{t, x, y, z\}$. В матрицы генераторов группы пространственных вращений (6.22), стр. 382 необходимо добавить нулевые столбик и строчку, так как при поворотах время не изменяется:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Генераторы лоренцевских бустов вдоль каждой оси получаются также как и в 2-мерном случае, рассмотренном выше. Положив фундаментальную скорость единице, имеем:

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{L}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прямым умножением матриц можно проверить, что эти генераторы удовлетворяют следующей алгебре Ли (по k сумма):

$$[\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j] = -\varepsilon_{ijk}\mathbf{R}_k, \qquad [\mathbf{L}_i, \mathbf{R}_j] = -\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{L}_k, \qquad [\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j] = \varepsilon_{ijk}\mathbf{R}_k. \quad (6.38)$$

Особенно важны последние соотношения. Во-первых, именно они отличают группу Лоренца от группы Галилея, а во-вторых, в них выражен факт некоммутативности преобразований Лоренца. Как мы знаем, два последовательных лоренцевских буста, выполненные с непараллельными скоростями не являются снова бустом (стр. 99). Итоговое преобразование является композицией буста и поворота (подробнее см.стр. 518).

Заметим также, что все коммутаторы выглядят похожим образом и записываются при помощи символов Леви-Чевиты. Это отражает тот фундаментальный факт, что группа Лоренца является группой поворотов в 4-мерном псевдоевклидовом пространстве. В таком пространстве существует 6 плоскостей: (t, x), (t, y), ... (y, z) вращение которых определяется 6-ю параметрами. Соответственно это 6-параметрическая неабелева группа. Инвариантом этой группы является световой конус:

$$\mathrm{x}^2 = t^2 - \mathbf{r}^2 = inv, \qquad (6.39)$$

имеющий смысл расстояния от начала координат в 4-мерном псевдоевклидовом пространстве. По аналогии с группой вращения, группу Лоренца обозначают следующим образом: $\mathbf{O}(1, 3)$, где первый аргумент – размерность времени, а второй – пространства.

Формально, *группа Лоренца* $\mathbf{O}(1,3)$ является множеством ортогональных матриц (стр. 139) 4x4 в псевдоевклидовом пространстве с метрическим тензором $\mathbf{g} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$, $\mathbf{g}^2 = \mathbf{1}$, $\mathbf{g}^T = \mathbf{g}$:

$$\mathrm{x}^2 = \mathrm{x}^T\mathbf{g}\,\mathrm{x} = \mathrm{x}'^T\mathbf{g}\,\mathrm{x}', \qquad \mathrm{x}' = \mathbf{\Lambda}\mathrm{x} \qquad => \qquad \mathbf{g}\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{g}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{1}.$$

Так как $\det\mathbf{g} = -1$, то $(\det\mathbf{\Lambda})^2 = 1$ и определитель матрицы преобразования $\mathbf{\Lambda}$ может быть равен 1 или -1. Последний случай, аналогично обычным вращениям, реализуется в результате операций отражения нечетного числа осей в 4-мерном пространстве-времени. Например, изменение направления хода времени $t \mapsto -t$ или всех трёх пространственных осей $(x,y,z) \mapsto (-x,-y,-z)$, осуществляется следующими матрицами:

$$\mathbf{I}_t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{I}_\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Четверка матриц $\{\mathbf{1},\ \mathbf{I}_t,\ \mathbf{I}_\mathbf{r},\ \mathbf{I}_{t\mathbf{r}}\}$, где $\mathbf{I}_{t\mathbf{r}} = \mathbf{I}_t\mathbf{I}_\mathbf{r} = -\mathbf{1}$ (инверсия всех осей) образует дискретную группу. Эта группа, дополненная непрерывными преобразованиями, определяемыми генераторами $\mathbf{R}_i$, $\mathbf{L}_i$, описывает все возможные симметрии не меняющие инварианта (6.39).

Наличие дискретных симметрий приводит к тому, что все возможные преобразования разбиваются на подмножества, несводимые друг к другу при помощи непрерывных преобразований. Пусть исходной является правая система координат с "нормальным" направлением течения времени. При помощи, например, $\mathbf{I}_\mathbf{r}$ её можно превратить в левую систему координат, после чего, ни преобразованием Лоренца, ни поворотом нельзя вернутся к исходному состоянию. Аналогично с $\mathbf{I}_t$ и $\mathbf{I}_{t\mathbf{r}}$. Эти 4 подмножества, не соединяемые непрерывным преобразованием, классифицируют по знакам определителя матрицы $\mathbf{\Lambda}$ и её нулевого элемента: ${\Lambda^0}_0$ (который по модулю больше единицы, что следует из условия ортогональности для нулевых индексов ($\lessdot$ H$_{71}$)):

I.	$\det\mathbf{\Lambda} = +1$	${\Lambda^0}_0 \geqslant +1$	$\mathbf{1}$
II.	$\det\mathbf{\Lambda} = -1$	${\Lambda^0}_0 \geqslant +1$	$\mathbf{I}_\mathbf{r}$
III.	$\det\mathbf{\Lambda} = -1$	${\Lambda^0}_0 \leqslant -1$	$\mathbf{I}_t$
IV.	$\det\mathbf{\Lambda} = +1$	${\Lambda^0}_0 \leqslant -1.$	$\mathbf{I}_{t\mathbf{r}}$

Первый класс соответствует "обычным" преобразованиям Лоренца и вращениям правой системы координат. Он называется *собственной ортохронной группой Лоренца.* В последней колонке записаны матрицы дискретных преобразований, принадлежащие каждому классу (проверьте).

• Алгебру Ли (6.38) группы Лоренца можно упростить, если перейти к следующим генераторам ($\imath^2 = -1$):

$$\mathbf{J}_k = \frac{1}{2}\,(\mathbf{R}_k + \imath\mathbf{L}_k), \qquad \mathbf{K}_k = \frac{1}{2}\,(\mathbf{R}_k - \imath\mathbf{L}_k).$$

Они коммутируют друг с другом, поэтому алгебра “расщепляется”:

$$[\mathbf{J}_i,\ \mathbf{J}_j] = -\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{J}_k, \qquad [\mathbf{K}_i,\ \mathbf{K}_j] = -\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{K}_k, \qquad [\mathbf{J}_i,\ \mathbf{K}_j] = 0.$$

Для каждой тройки генераторов $\mathbf{J}_i$ и $\mathbf{K}_i$ алгебра Ли группы Лоренца совпадает с алгеброй групп $\mathbf{SO}(3)$ и $\mathbf{SU}(2)$. Соответственно, есть два оператора Казимира, коммутирующие со всеми генераторами:

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{J}_1^2 + \mathbf{J}_2^2 + \mathbf{J}_3^2, \qquad \mathbf{K}^2 = \mathbf{K}_1^2 + \mathbf{K}_2^2 + \mathbf{K}_3^2.$$

Пользуясь результатами предыдущего раздела, можно описать неприводимые представления алгебры Ли. Каждое из них характеризуется парой чисел (j_1, j_2), где j_1 – максимальное собственное значение генератора $\mathbf{J}_3$, а j_2 – генератора $\mathbf{K}_3$. Числа (j_1, j_2) могут быть целыми или полуцелыми, а размерность неприводимых представлений каждой из алгебр равна $2j_i+1$. Если j_1+j_2 равно полуцелому числу, то представление называется спинорным, а для целого числа – векторным. Векторное представление является однозначным, в спинорное – двухзначным. Если $j_1 \neq j_2$, то возможно два неэквивалентных представления одинаковой размерности: (j_1, j_2) и (j_2, j_1).

Пусть $S^{(j)}_{\alpha\beta}$ – матрица $(2j{+}1)$x$(2j{+}1)$, соответствующая данному неприводимому представлению, а $\Psi_{\alpha\beta}$ – некоторая многокомпонентная величина, преобразующаяся по представлению (j_1, j_2):

$$\Psi'_{\alpha\beta} = S^{(j_1)}_{\alpha\mu} S^{(j_2)}_{\beta\nu} \Psi_{\mu\nu},$$

где по повторяющимся индексам сумма от 1 до $2j_1+1$ для μ и до $2j_2+1$ для ν. В этом смысле произвольное неприводимое представление алгебры группы Лоренца является прямым произведением двух неприводимых представлений алгебры $\mathbf{SO}(3)$ или $\mathbf{SU}(2)$, т.е. $\mathbf{S}^{(j_1,j_2)} = \mathbf{S}^{(j_1)} \otimes \mathbf{S}^{(j_2)}$ и имеет размерность $(2j_1+1)(2j_2+1)$.

Одной из матриц может не быть, что помечается нулем: $(j_1, 0)$ или $(0, j_2)$. При помощи неприводимых представлений можно получать матрицы приводимых представлений. Однако особый интерес представляют именно неприводимые представления, так как они определяют различные типы нетривиальных математических объектов, тем или иным образом меняющихся при преобразованиях Лоренца (см. стр. 392)

Перечислим некоторые из них для конкретных j_1 и j_2:

- ▷ $(0, 0)$ – *скаляр*, не меняющийся при вращениях и преобразованиях Лоренца; это однокомпонентная величина $\Psi' = \Psi$.
- ▷ $(1/2, 0)$ или $(0, 1/2)$ – описывают преобразования *спинора*; это двухкомпонентная комплексная величина $\Psi_\alpha = (\Psi_1\, \Psi_2)^T$, см. главу 8.
- ▷ $(1, 0)$ или $(0, 1)$ – преобразования трехкомпонентных величин, которыми могут быть комплексные векторы $\mathbf{a} + \imath\mathbf{b}$, являющиеся компонентами антисимметричного 4-тензора $A_{ij} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$, см.стр. 180.
- ▷ $(1/2, 1/2)$ – четырехкомпонентная величина являющаяся обычным 4-вектором $A^\nu = \{A^0, \mathbf{A}\}$. Каким образом прямое произведение двух матриц 2x2 приводит к преобразованиям Лоренца для 4-вектора станет ясно в главе 8.

Рассмотрим подробнее представление $(1, 0)$. В этом случае матрицы генераторов 3x3 действуют на столбик из трёх, вообще говоря, комплексных чисел. Так как генераторы совпадают с матрицами группы $\mathbf{SO}(3)$, то при пространственных поворотах эта тройка чисел преобразуется как компоненты 3-векторов (независимо и одинаково для действительной и мнимой частей). Запишем матрицу преобразования для малых параметров:

$$\mathbf{S} \approx \mathbf{1} + \delta\phi_k \mathbf{R}_k + \delta v_k \mathbf{L}_k = \mathbf{1} + (\delta\phi_k - \imath\delta v_k)\mathbf{J}_k + (\delta\phi_k + \imath\delta v_k)\mathbf{K}_k,$$

где $\delta\boldsymbol{\phi} = \mathbf{n}d\phi$ – углы поворота, $\delta\mathbf{v}$ – относительная скорость. Таким образом, в представлении $(1, 0)$ параметры преобразования являются комплексными величинами: $\delta\phi_k - \imath\delta v_k$. Рассмотрим относительное движение двух систем отсчета вдоль оси x: $\delta\mathbf{v} = \{\delta v, 0, 0\}$. В этом случае $\mathbf{S} \approx \mathbf{1} - \imath\delta v\, \mathbf{J}_1$. Взяв генераторы поворота (6.22), стр. 382 и выделив в преобразуемом векторе явным образом действительную и мнимую части, имеем:

$$\begin{pmatrix} a'_x + \imath b'_x \\ a'_y + \imath b'_y \\ a'_z + \imath b'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\imath\delta v \\ 0 & \imath\delta v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x + \imath b_x \\ a_y + \imath b_y \\ a_z + \imath b_z \end{pmatrix}.$$

Перемножая и приравнивая действительную и мнимые части, получаем:

$$\begin{array}{lll} a'_x = a_x, & a'_y = a_y + \delta v\, b_z, & a'_z = a_z - \delta v\, b_y, \\ b'_x = b_x, & b'_y = b_y - \delta v\, a_z, & b'_z = b_z + \delta v\, a_y, \end{array}$$

что совпадет с преобразованием антисимметричного 4-тензора (стр. 180) при малой относительной скорости движения.

6.10 Группа Пуанкаре

- *Группа Пуанкаре* $\mathbf{P}(1,3)$ объединяет группы Лоренца и трансляций:

$$x'^{\alpha} = a^{\alpha} + \Lambda^{\alpha}_{\ \beta}\, x^{\beta}.$$

Трансляции означают сдвиги начала отчёта времени и начала системы координат: $t' = t + a^0$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$. Группа Лоренца имеет 6 параметров (вектор скорости и вектор вращений). Трансляция – это ещё 4 параметра. Поэтому группа Пуанкаре – 10-параметрическая группа с инвариантом, равным расстоянию в 4-мерном пространстве между двумя событиями:

$$(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)^2 = (t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = inv.$$

Группа Лоренца – это подгруппа группы Пуанкаре. Её инвариантом является как $(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)^2$, так и x^2. В тоже время для группы Пуанкаре x^2 не является инвариантом, так как он трансляционно неинвариантен.

Запишем два преобразования Пуанкаре в матричном виде:

$$\mathrm{x}_1 = \mathrm{a}_1 + \mathbf{\Lambda}_1 \mathrm{x}, \qquad \mathrm{x}_2 = \mathrm{a}_2 + \mathbf{\Lambda}_2 \mathrm{x}_1.$$

Подставим первое преобразование во второе: $\mathrm{x}_2 = \mathrm{a}_2 + \mathbf{\Lambda}_2 \mathrm{a}_1 + \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_1 \mathrm{x}$. Поэтому символическая запись закона групповой композиции имеет вид:

$$(\mathrm{a}_2,\ \mathbf{\Lambda}_2) \cdot (\mathrm{a}_1,\ \mathbf{\Lambda}_1) = (\mathrm{a}_2 + \mathbf{\Lambda}_2 \mathrm{a}_1,\ \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_1).$$

Единичным элементом группы является $(0,\ \mathbf{1})$, а обратным к $(\mathrm{a},\ \mathbf{\Lambda})$ будет элемент $(-\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathrm{a},\ \mathbf{\Lambda}^{-1})$ ($\lessdot \mathrm{H}_{72}$). Множество всех трансляций $(\mathrm{a},\ \mathbf{1})$ (без преобразований Лоренца) являются *инвариантной подгруппой* группы Пуанкаре ($\lessdot \mathrm{H}_{73}$).

Преобразование группы Пуанкаре можно записать в матричном виде, если расширить матрицы до размерности 5:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^0_{\ 1} & \Lambda^0_{\ 2} & \Lambda^0_{\ 3} & a^0 \\ \Lambda^1_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 1} & \Lambda^1_{\ 2} & \Lambda^1_{\ 3} & a^1 \\ \Lambda^2_{\ 0} & \Lambda^2_{\ 1} & \Lambda^2_{\ 2} & \Lambda^2_{\ 3} & a^2 \\ \Lambda^3_{\ 0} & \Lambda^3_{\ 1} & \Lambda^3_{\ 2} & \Lambda^3_{\ 3} & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

При перемножении таких матриц 5x5 (композиция преобразований) последняя строчка матрицы изменяться не будет, как не будет изменяться равный единице 5-й элемент в столбике преобразуемого вектора.

Перемножать матрицы, для получения алгебры генераторов достаточно утомительно. Проще оказывается операторный подход (стр. 378). Матрицы генераторов $\mathbf{R}_i$, $\mathbf{L}_i$ группы Лоренца (стр. 398) приводят к следующим операторам $\hat{X}_i = -(\mathbf{X}_i)^{\alpha}{}_{\beta} x^{\beta} \partial_{\alpha}$ с такой же алгеброй для коммутаторов:

$$\hat{L}_x = t\partial_x + x\partial_t, \qquad \hat{L}_y = t\partial_y + y\partial_t, \qquad \hat{L}_z = t\partial_z + z\partial_t,$$
$$\hat{R}_x = y\partial_z - z\partial_y, \qquad \hat{R}_y = z\partial_x - x\partial_z, \qquad \hat{R}_z = x\partial_y - y\partial_x.$$

Шесть операторов $\hat{R}_i$, $\hat{L}_j$ можно объединить при помощи антисимметричного операторного тензора:

$$\hat{J}_{\alpha\beta} = \imath \begin{pmatrix} 0 & \hat{L}_x & \hat{L}_y & \hat{L}_z \\ -\hat{L}_x & 0 & -\hat{R}_z & \hat{R}_y \\ -\hat{L}_y & \hat{R}_z & 0 & -\hat{R}_x \\ -\hat{L}_z & -\hat{R}_y & \hat{R}_x & 0 \end{pmatrix} = \imath(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha).$$

Во втором равенстве, являющимся ковариантным представлением оператора $\hat{J}_{\alpha\beta}$, учтено, что $x_\alpha = \{t, -x, -y, -z\}$. В тоже время $\partial_1 = \partial/\partial x^1$ является обычной производной по x. Для предания $\hat{J}_{\alpha\beta}$ эрмитовости, в его определении дополнительно был введен множитель $\imath$.

Для трансляции $x'^{\alpha} = x^{\alpha} + a^{\alpha}$, величина $u^{\alpha}_k = \delta^{\alpha}_k$ (стр. 378) приводит к оператору инфинитезимального преобразования, который мы также сделаем эрмитовым:

$$\hat{P}_\alpha = \imath\partial_\alpha.$$

В квантовой теории, умноженный на постоянную Планка $\hbar$, он становится оператором 4-импульса. Найдём как он коммутирует с оператором 4-вращений, который соответствует оператору момента импульса:

$$\hat{J}_{\alpha\beta} = x_\alpha \hat{P}_\beta - x_\beta \hat{P}_\alpha.$$

Действуя коммутатором на произвольную функцию, имеем ($\imath^2 = -1$):

$$[\hat{P}_\alpha,\, \hat{J}_{\mu\nu}]F = -\partial_\alpha(x_\mu \partial_\nu F) + \partial_\alpha(x_\nu \partial_\mu F) + x_\mu \partial_\nu \partial_\alpha F - x_\nu \partial_\mu \partial_\alpha F.$$

Раскрывая производную произведения, и учитывая, что

$$\partial_\alpha x_\mu = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x^\mu} = g_{\alpha\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = g_{\alpha\nu} \delta^\nu_\mu = g_{\alpha\mu},$$

получаем:

$$[\hat{P}_\alpha,\, \hat{J}_{\mu\nu}]F = \imath\,(g_{\alpha\mu} \hat{P}_\nu - g_{\alpha\nu} \hat{P}_\mu)F,$$

где произвольную функцию теперь можно опустить. Чтобы оценить удобство операторного подхода, стоит попробовать получить эти же соотношения на прямую для генераторов, перемножая матрицы.

Так как частные производные перестановочны, то операторы $\hat{P}_\alpha$ коммутируют друг с другом. Кроме этого, повторяя вычисления подобные проведенным выше, можно найти коммутатор $[\hat{J}_{\alpha\beta},\ \hat{J}_{\mu\nu}]$. В результате получается *алгебра Пуанкаре*:

$$[\hat{P}_\alpha, \hat{P}_\beta] = 0, \tag{6.40}$$

$$[\hat{P}_\alpha,\ \hat{J}_{\mu\nu}] = \imath\,(g_{\alpha\mu}\hat{P}_\nu - g_{\alpha\nu}\hat{P}_\mu), \tag{6.41}$$

$$[\hat{J}_{\alpha\beta},\ \hat{J}_{\mu\nu}] = \imath\,(g_{\alpha\mu}\hat{J}_{\nu\beta} - g_{\alpha\nu}\hat{J}_{\mu\beta} + g_{\beta\mu}\hat{J}_{\alpha\nu} - g_{\beta\nu}\hat{J}_{\alpha\mu}). \tag{6.42}$$

Некоммутативность операторов трансляций $\hat{P}_\alpha$ и 4-поворотов $\hat{J}_{\mu\nu}$ связана с неперестановочностью этих операций. Пусть, например, тело в начале координат поворачивается вокруг вертикальной оси на некоторый угол, а затем сдвигается в горизонтальной плоскости. Результат этих операций в обратной последовательности (сдвиг, а затем поворот вокруг начала координат) будет другой, как для положения тела, так и для его ориентации. Из (6.41) следует ($\lessdot$ H$_{74}$), ч то 4-повороты коммутируют с квадратом 4-смещений (и вообще с любым операторным 4-скаляром!):

$$[\hat{J}_{\alpha\beta}, \hat{P}_\gamma \hat{P}^\gamma] = 0.$$

По определению, *представление алгебры Пуанкаре* осуществляют любые линейные операторы (не обязательно матрицы), удовлетворяющие коммутационным соотношениям (6.40)-(6.42). Так, если $\hat{J}_{\alpha\beta}$, $\hat{P}_\alpha$ не являются матрицами 4x4, то $\hat{J}_{\alpha\beta} \neq x_\alpha \hat{P}_\beta - x_\beta \hat{P}_\alpha$, как это происходит, например, для системы точечных частиц, обладающей спином (см.стр. 188). В этом случае можно ввести ненулевой *оператор Паули-Любанского*:

$$\hat{W}^\nu = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\nu\alpha\beta\gamma}\,\hat{J}_{\alpha\beta}\,\hat{P}_\gamma. \tag{6.43}$$

Он 4-ортогонален оператору сдвигов и коммутирует с ним:

$$\hat{W}_\nu \hat{P}^\nu = 0, \qquad\qquad [\hat{W}_\mu,\ \hat{P}_\nu] = 0. \tag{6.44}$$

Коммутатор с оператором вращения имеет вид:

$$[\hat{W}_\alpha,\ \hat{J}_{\mu\nu}] = \imath\,(g_{\alpha\mu}\hat{W}_\nu - g_{\alpha\nu}\hat{W}_\mu). \tag{6.45}$$

Наконец, коммутатор двух операторов $\hat{W}$ равен:

$$[\hat{W}^\mu,\ \hat{W}^\nu] = \imath\,\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\hat{P}_\alpha \hat{W}_\beta, \tag{6.46}$$

что проверяется при помощи (6.44) и (6.45).

При помощи свертки операторов $\hat{J}_{\mu\nu}$ и $\hat{P}_\nu$, можно получить еще один ковариантный оператор, который, как и $\hat{W}_\mu$, ортогонален оператору сдвигов $\hat{P}_\mu$:

$$\hat{N}_\mu = \hat{J}_{\mu\nu}\hat{P}^\nu. \tag{6.47}$$

Для него справедливы следующие коммутаторы:

$$[\hat{N}_\mu,\, \hat{P}_\nu] = \imath(\hat{P}_\mu\hat{P}_\nu - g_{\mu\nu}\, M^2),$$

$$[\hat{N}_\alpha,\, \hat{J}_{\mu\nu}] = \imath\,(g_{\alpha\mu}\hat{N}_\nu - g_{\alpha\nu}\hat{N}_\mu),$$

$$[\hat{N}_\mu,\, \hat{W}_\nu] = \imath\,\hat{W}_\mu\hat{P}_\nu,$$

где $M^2 = \hat{P}_\alpha\hat{P}^\alpha$, а при вычислении последнего коммутатора лучше использовать (6.45) и (6.46). Между собой эти операторы коммутируют так:

$$[\hat{N}_\mu,\, \hat{N}_\nu] = \imath M^2\, \hat{J}_{\mu\nu}.$$

Обратим внимание на одинаковую структуру коммутаторов операторных 4-векторов $\hat{P}_\alpha$, $\hat{W}_\alpha$ и $\hat{N}_\alpha$ с тензорным оператором вращений $\hat{J}_{\mu\nu}$. Это общий результат и так будет коммутировать любой операторный 4-вектор $\hat{A}_\alpha$. Связано это с тем, что $\hat{J}_{\mu\nu}$ определяет матрицу преобразования группы Лоренца. Аналогично, любое тензорное выражение $\hat{S}_{\alpha\beta}$ будет коммутировать с $\hat{J}_{\mu\nu}$ как произведение двух операторов $\hat{A}_\alpha\hat{B}_\beta$, см. (6.42).

Перечислим все независимые ненулевые 4-скаляры, которые можно определить при помощи введенных операторов:

$$\hat{P}_\mu\hat{P}^\mu, \qquad \hat{W}_\mu\hat{W}^\mu, \qquad \hat{N}_\mu\hat{N}^\mu, \qquad \hat{W}_\mu\hat{N}^\mu.$$

Первые два из них коммутируют со всеми операторами, являясь *операторами Казимира* группы Пуанкаре.

Как мы увидим в следующей главе, инвариантность относительно сдвигов приводит к сохранению полного импульса системы P_μ. Аналогично, инвариантность относительно 4-поворотов связана с сохранением тензора полного момента импульса системы $J_{\mu\nu}$. Квадрат импульса является константой, равной полной массе системы $\hat{P}_\mu\hat{P}^\mu = M^2$. Квадрат оператора Паули-Любанского равен:

$$\hat{W}_\mu\hat{W}^\mu = \hat{N}_\mu\hat{N}^\mu - \frac{M^2}{2}\,\hat{J}_{\mu\nu}\hat{J}^{\mu\nu},$$

где мы воспользовались коммутатором (6.41) и тождеством для свертки двух символов Леви-Чевиты по одному индексу ($\lessdot$ H$_{75}$).

• Чтобы построить неприводимые представления алгебры Пуанкаре необходимо отобрать набор коммутирующих между собой операторов и найти их собственные функции и значения. Используя базис собственных функций, можно записать матричные элементы всех операторов. При этом коммутирующие операторы будут представлены диагональными матрицами с собственными значениями, стоящими на диагонали. Аналогичным образом мы поступили при нахождении представлений алгебры групп $\mathbf{SO}(3)$ и $\mathbf{SU}(2)$ (см.стр. 394 и далее).

В качестве коммутирующих операторов удобно выбрать два оператора Казимира, компоненты оператора импульса и нулевую компоненту оператора Паули-Любанского:

$$M^2 = \hat{P}_\mu \hat{P}^\mu, \qquad W^2 = \hat{W}_\mu \hat{W}^\mu, \qquad \hat{P}_\mu, \qquad \hat{W}_0.$$

Обратим внимание, что хотя $[\hat{W}_\mu, \hat{P}_\nu] = 0$, различные компоненты оператора $\hat{W}_\mu$ между собой не коммутируют и в базисный набор можно взять только одну из них, например, $\hat{W}_0$. Кроме этих семи операторов, для некоторых классов представлений (конкретных величин собственных значений) существуют дополнительные базисные операторы (см. ниже). Собственные значения операторов будем обозначать теми же символами, что и операторы, но без шляпок над ними.

Собственные значения оператора импульса принимают непрерывные значения на всем диапазоне вещественной оси. Действительно, решение уравнения $\imath\partial_\mu\Phi = P_\mu\Phi$ на собственные функции и значения для оператора $\hat{P}_\mu = \imath\partial_\mu$ имеют решение $\Phi_{P_\mu}(x) \sim e^{-\imath P_\mu x^\mu}$, с любым собственным значением P_μ. Аналогично, непрерывный спектр принимают собственные значения оператора Казимира $M^2 = \hat{P}_\mu \hat{P}^\mu$ (как и интервал они могут быть как положительными, так и отрицательными).

Следуя Вигнеру различают пять классов представлений, со следующими собственными значениям:

$$\begin{array}{ll} I. & M^2 > 0 \\ II. & M^2 = 0,\ \ W^2 = 0,\ \ P^\mu \neq 0 \\ III. & M^2 = 0,\ \ W^2 \neq 0 \\ IV. & M^2 < 0 \\ V. & P^\mu = 0 \end{array}$$

Для физических приложений интерес представляют первые два класса, соответствующие в квантовой теории массивным и безмассовым частицам. Если $M^2 > 0$, появляется дополнительный оператор $\hat{P}^0/|\hat{P}^0|$, коммутирующий со всеми операторами алгебры и имеющий смысл знака энергии системы.

• Оператор Паули-Любанского $\hat{W}^\mu$ непосредственно связан с оператором спина $\hat{S}^\mu = \{\hat{S}^0,\, \hat{\mathbf{S}}\}$, стр. 188:

$$\hat{W}^\mu = M\hat{S}^\mu.$$

Запишем его в векторных обозначениях (см. также стр. 188):

$$\hat{S}^0 = \hat{\mathbf{J}}\hat{\mathbf{U}}, \qquad \hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{J}}\hat{U}^0 - \hat{\mathbf{G}} \times \hat{\mathbf{U}},$$

где $\hat{U}^\mu = \{\hat{U}^0, \hat{\mathbf{U}}\}$ – оператор 4-скорости ($\hat{P}^\mu = M\hat{U}^\mu$) и введены операторные векторы $\hat{\mathbf{J}} = \{\hat{J}^{23}, \hat{J}^{31}, \hat{J}^{12}\}$ и $\hat{\mathbf{G}} = \{\hat{J}^{10}, \hat{J}^{20}, \hat{J}^{30}\}$. Рассмотрим случай, когда собственные значения оператора $\hat{\mathbf{P}}$ равны нулю ($\mathbf{P} = \mathbf{0}$). Мы будем говорить, что это соответствует системе отсчета в которой полный импульс равен нулю (строго говоря такая терминология справедлива только при переходе к квантовой теории). В такой "системе покоя" матричные элементы $\hat{S}^0$ равны нулю, а пространственные совпадают с полным моментом:

$$\Phi'_{\mathbf{P}=0}\, \hat{S}^0\, \Phi_{\mathbf{P}=0} = 0, \qquad \Phi'_{\mathbf{P}=0}\, \hat{\mathbf{S}}\, \Phi_{\mathbf{P}=0} = \Phi'_{\mathbf{P}=0}\, \hat{\mathbf{J}}\, \Phi_{\mathbf{P}=0}.$$

Коммутатор (6.42) для пространственных компонент совпадает с коммутаторами генераторов групп $\mathbf{SO}(3)$ и $\mathbf{SU}(2)$. Например:

$$[\hat{J}_x,\, \hat{J}_y] = [\hat{J}_{23},\, \hat{J}_{31}] = \imath g_{33}\hat{J}_{21} = \imath\hat{J}_z.$$

Повторяя рассуждения, которые мы сделали при построении неприводимых представлений этой алгебры, приходим к выводу, что собственные значения оператора $\hat{J}_z$ полного момента (и спина $\hat{S}_z$ в системе покоя) принимают $2j+1$ значений: $j, j-1, ..., -j$, где максимальное значение j может быть целым или полуцелым числом. В частности, блок матрицы $\hat{S}_z$, соответствующий значениям нулевого импульса будет диагональным.

Целые значения спина физически соответствуют бозонам (фотон, π-мезон,...), а полуцелые – фермионам (электрон, протон,...). Собственно все известные в природе элементарные частицы относятся к одному из этих двух классов. Более того, истинно фундаментальными (бесструктурными, на данном уровне знания) частицами материи являются фермионы с минимально возможным спином $1/2$ (лептоны и кварки).

Таким образом, алгебра Пуанкаре, существенно расширяет возможности построения различных представлений по сравнению с алгеброй Лоренца. Алгебра Пуанкаре может быть ещё более расширена, за счет введения дополнительных операторов. Подобные расширения приводят к суперсимметричным теориям, изложение которых выходит за рамки нашей книги.

6.11 Нелинейные преобразования *

• Рассмотрим вектор n переменных $\mathbf{x} = (x^1, ..., x^n)$, которые мы будем называть далее координатами, и набор s параметров $\mathbf{a} = (a^1, ..., a^s)$ определяющих в общем случае *нелинейное преобразование*:

$$x^i \mapsto x'^i = f_i(a^1, ..., a^s,\ x^1, ..., x^n), \qquad \text{или} \qquad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \hat{T}_{\mathbf{a}}\mathrm{x}.$$

Например, в одномерном случае преобразования *трансляции* и *масштабирования* (они линейны!) имеют вид:

$$\text{трансляция}: \quad x \mapsto x' = x + a, \qquad\qquad \text{масштабирование}: \quad x \mapsto x' = e^a \cdot x.$$

Нас будут интересовать преобразования образующие *непрерывную группу*. Пусть при помощи параметров $\mathbf{a}$ мы перешли в координатном пространстве от точки $\mathbf{x}$ к $\mathbf{x}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{x})$, а затем, при помощи $\mathbf{b}$, от $\mathbf{x}_1$ к $\mathbf{x}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{b}, \mathbf{x}_1)$. Пусть существует некоторое $\mathbf{c} = \phi(\mathbf{b}, \mathbf{a})$, которое позволяет сразу перейти от $\mathbf{x}$ к $\mathbf{x}_2$:

$$\mathbf{f}\big(\mathbf{b},\ \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{x})\big) = \mathbf{f}\big(\phi(\mathbf{b}, \mathbf{a}),\ \mathbf{x}\big). \tag{6.48}$$

Кроме этого, предположим, что существует единичное преобразование с параметром $\mathbf{e}$, не изменяющее координат, и обратное, с параметром $\mathbf{a}^{-1}$, которое возвращает преобразованное $\mathbf{x}$ к исходному:

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}, \qquad\qquad \mathbf{f}\big(\mathbf{a}^{-1},\ \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{x})\big) = \mathbf{x}. \tag{6.49}$$

Для преобразований трансляции и масштабирования единичный параметр $\mathbf{e} = 0$, а обратный $\mathbf{a}^{-1} = -a$.

Если число параметров s меньше чем размерность пространства n, то групповое преобразование имеет простую геометрическую интерпретацию. Так, при $s = 1$ функция $\mathbf{f}(a, \mathbf{x})$ задаёт кривую в пространстве $\mathbf{x} = (x^1, ..., x^n)$. Если зафиксировать "начальную" точку $\mathbf{x}$ и начать изменять параметр a, мы получим непрерывное множество точек образующих некоторую линию. Если взять другую точку в пространстве не лежащую на линии, мы получим другую кривую. Таким образом всё пространство "расслаивается" на множество подобных кривых.

Однако, нас интересуют не любые кривые заданные параметрическим образом, а лишь те, которые обладают свойством *эквивалентности* всех своих точек. В этом случае *любая* точка кривой может выступить в качестве "начальной", и при помощи *одной и той же* функции $\mathbf{f}(a, \mathbf{x})$ можно из неё "продолжить" кривую дальше. Подобным образом двухпараметрические группы при $n > 2$ определяют некоторую поверхность, обладающую свойством симметрии (равноправия всех своих точек), и т.д.

• Функция *композиции параметров* двух последовательных непрерывных преобразований $\mathbf{c} = \phi(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ является векторной, s-компонентной функцией: $c^\gamma = \phi^\gamma(\mathbf{b}, \mathbf{a})$. Она удовлетворяет таким же функциональным уравнениям как и в случае линейных преобразований (стр. 376):

$$\phi(\phi(\mathbf{c}, \mathbf{b}),\ \mathbf{a}) = \phi(\mathbf{c}, \phi(\mathbf{b}, \mathbf{a})). \tag{6.50}$$

Без потери общности будем считать, что единичное преобразование соответствует нулевому значению параметров: $\phi(\mathbf{0}, \mathbf{a}) = \phi(\mathbf{a}, \mathbf{0}) = \mathbf{a}$. Как мы видели, в окрестности нуля эта функция имеет вид:

$$\phi^\gamma(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \approx a^\gamma + b^\gamma + \phi^\gamma_{\alpha\beta}\, b^\alpha\, a^\beta, \tag{6.51}$$

а антисимметричные по нижним индексам величины $c^\gamma_{\alpha\beta} = \phi^\gamma_{\alpha\beta} - \phi^\gamma_{\beta\alpha}$ называются *структурными константами.*

• Групповые свойства являются сильными ограничениями на возможный вид преобразований. Например, в одномерном случае *наиболее общее* преобразование, образующее группу, имеет дробно-линейный вид:

$$x \mapsto x' = \frac{e^{a_1}\, x + a_2}{1 + a_3\, x}. \tag{6.52}$$

Трансляция и масштабирование являются его частными случаями. В качестве упражнения стоит проверить, что оно удовлетворяет условиям (6.48), (6.49), и найти функцию $\mathbf{c} = \phi(\mathbf{b}, \mathbf{a})$. Вторым упражнением является проверка того, что преобразование $x \mapsto x' = a_1\, x^2 + a_2\, x + a_3$ не удовлетворяет (6.48), и, следовательно, не является группой.

• Заметим, что всегда можно провести замену координат $\tilde{\mathbf{x}} = h(\mathbf{x})$ и переопределить параметры группы $\tilde{\mathbf{a}} = \psi(\mathbf{a})$. Так, переход от декартовых координат $\mathbf{x} = (x, y)$ к полярным $\tilde{\mathbf{x}} = (r, \chi)$, группу 2-мерных поворотов делает трансляционной:

$$\begin{array}{rl} x \mapsto x' = & x\cos a + y\sin a \\ y \mapsto y' = & -x\sin a + y\cos a, \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\chi \\ y = r\sin\chi \end{array} \right\} \quad => \quad \begin{array}{l} r \mapsto r' = r \\ \chi \mapsto \chi' = \chi + a. \end{array}$$

Аналогично, заменой $x = e^{\tilde{x}}$ масштабирование $x' = e^a x$ превращается в трансляционное преобразование $\tilde{x}' = \tilde{x} + a$.

Поэтому, говоря о единственности дробно-линейных преобразований для $n = 1$, на самом деле, подразумевается более общее преобразование:

$$h(x') = \frac{e^{a_1}\, h(x) + a_2}{1 + a_3\, h(x)},$$

и аналогично, для переопределения параметров группы $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

• Рассмотрим произвольное, бесконечно - малое преобразование, разложив его в ряд Тейлора по параметрам $a^\alpha = (a^1, ..., a^s)$:

$$f^k(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = x^k + u^k_\alpha(\mathbf{x})\, a^\alpha + ..., \qquad \text{где} \quad u^k_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\partial f^k(\mathbf{a}, \mathbf{x})}{\partial a^\alpha}\Big|_{\mathbf{a}=0}. \quad (6.53)$$

Величины u^k_α называются *касательными векторами*, так как они касаются кривой (поверхности и т.д.) при бесконечно малом изменении параметров $\mathbf{a}$. Действительно, разница между двумя соседними точками (сдвиг) на кривой или поверхности равна: $dx^k = x'^k - x^k \approx u^k_\alpha(\mathbf{x})\, a^\alpha$.

Аналогично, закон композиции можно разложить в ряд по первому аргументу (параметры второго преобразования):

$$\phi^\gamma(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = a^\gamma + \mu^\gamma_\alpha(\mathbf{a})\, b^\alpha + ..., \qquad \text{где} \quad \mu^\gamma_\alpha(\mathbf{a}) = \frac{\partial \phi^\gamma(\mathbf{b}, \mathbf{a})}{\partial b^\alpha}\Big|_{\mathbf{b}=0}. \quad (6.54)$$

Так как при малых параметрах преобразования $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ для $\phi^\gamma(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ справедливо разложение (6.51), то функция $\mu^\gamma_\alpha(\mathbf{a}) \approx \delta^\gamma_\alpha + \phi^\gamma_{\alpha\beta} a^\beta$ (δ^γ_α – символ Кронекера) имеет следующие значения:

$$\mu^\gamma_\alpha(\mathbf{0}) = \delta^\gamma_\alpha, \qquad \partial_\beta \mu^\gamma_\alpha(\mathbf{0}) \equiv \frac{\partial \mu^\gamma_\alpha(\mathbf{a})}{\partial a^\beta}\Big|_{\mathbf{a}=0} = \phi^\gamma_{\alpha\beta}. \quad (6.55)$$

Функции $u^k_\alpha(\mathbf{x})$ и $\mu^\gamma_\alpha(\mathbf{a})$, как и структурные константы $c^\gamma_{\alpha\beta}$, играют важную роль в теории нелинейных непрерывных групп.

• Возьмём производную по b^β от закона композиции преобразований:

$$\mathbf{f}(\mathbf{b}, \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{x})) = \mathbf{f}(\phi(\mathbf{b}, \mathbf{a}), \mathbf{x})$$

и приравняем $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Левая часть по определению (6.53) равна $u^k_\beta\big(\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{x})\big)$, а производная правой берётся как от сложной функции:

$$u^k_\beta\big(\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{x})\big) = \frac{\partial f^k}{\partial \phi^\gamma_{(\mathbf{b},\mathbf{a})}} \frac{\partial \phi^\gamma_{(\mathbf{b},\mathbf{a})}}{\partial b^\beta}\Big|_{\mathbf{b}=0} = \frac{\partial f^k}{\partial a^\gamma}\, \mu^\gamma_\beta(\mathbf{a}).$$

Таким образом, функция $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\mu^\gamma_\beta(\mathbf{a})\, \frac{\partial f^k(\mathbf{a}, \mathbf{x})}{\partial a^\gamma} = u^k_\beta\big(f(\mathbf{a}, \mathbf{x})\big). \quad (6.56)$$

Если функции *одной* (векторной) переменной $u^k_\beta(\mathbf{x})$ и $\mu^\gamma_\beta(\mathbf{a})$ известны, то решение этого уравнения с начальным условием $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ позволяет восстановить зависимость функции *двух* переменных $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{x})$.

• Найдём уравнение которому удовлетворяют касательные векторы $u^k_\beta(\mathbf{x})$. Возьмём производную (6.56) по a^α и положим $\mathbf{a}=\mathbf{0}$:

$$\phi^\gamma_{\beta\alpha}\,u^k_\gamma(\mathbf{x}) + \frac{\partial f^k(\mathbf{a},\mathbf{x})}{\partial a^\alpha \partial a^\beta}\Big|_{\mathbf{a}=\mathbf{0}} = \frac{\partial u^k_\beta(\mathbf{f})}{\partial f^i}\,\frac{\partial f^i(\mathbf{a},\mathbf{x})}{\partial a^\alpha}\Big|_{\mathbf{a}=0} = \frac{\partial u^k_\beta(\mathbf{x})}{\partial x^i}\,u^i_\alpha(\mathbf{x}),$$

где мы воспользовались определением (6.53) и значениями (6.55). Переставим местами индексы α, β и вычтем из исходного уравнения. Учитывая, что вторая производная по α и β симметрична, получаем:

$$u^i_\alpha(\mathbf{x})\,\partial_i u^k_\beta(\mathbf{x}) \;-\; u^i_\beta(\mathbf{x})\,\partial_i u^k_\alpha(\mathbf{x}) = -c^\gamma_{\alpha\beta}\,u^k_\gamma(\mathbf{x})\;, \tag{6.57}$$

где $\partial_i = \partial/\partial x^i$ и $c^\gamma_{\alpha\beta} = \phi^\gamma_{\alpha\beta} - \phi^\gamma_{\beta\alpha}$ - структурные константы группы.

Перепишем (6.57) в *операторной форме* при помощи величин:

$$\hat{X}_\alpha = -u^i_\alpha(\mathbf{x})\partial_i, \tag{6.58}$$

которые удовлетворяют *алгебре Ли*:

$$[\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta] = c^\gamma_{\alpha\beta}\,\hat{X}_\gamma, \tag{6.59}$$

где как и раньше $[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\,\hat{A}$ – *коммутатор* операторов. Действительно, так как $\hat{X}_\alpha$ операторы, соотношение (6.59) понимается в смысле его действия на произвольную функцию $F = F(\mathbf{x})$:

$$(\hat{X}_\alpha\hat{X}_\beta - \hat{X}_\beta\hat{X}_\alpha)F = u^i_\alpha\,\partial_i(u^j_\beta\,\partial_j F) - u^j_\beta\,\partial_j(u^i_\alpha\,\partial_i F) = -c^\gamma_{\alpha\beta}\,u^i_\gamma\,\partial_i F = c^\gamma_{\alpha\beta}\hat{X}_\gamma F,$$

где раскрыта производная произведения и учтены уравнения (6.57).

Рассмотрим в качестве примера группу масштабирования и сдвига одномерного пространства $x' = e^{a_1}\,x + a_2$. В этом случае, в соответствии с (6.53), касательные векторы равны $u_1(x) = x$ и $u_2(x) = 1$ (индекса k нет, так это одномерный случай). Поэтому генераторы группы имеют вид:

$$\hat{X}_1 = -x\,\frac{d}{dx}, \qquad\qquad \hat{X}_2 = -\frac{d}{dx}.$$

Вычислим их коммутатор:

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2]\,F(x) = x\,\frac{d^2F}{dx^2} - \frac{d}{dx}\left(x\,\frac{dF}{dx}\right) = -\frac{dF}{dx} = \hat{X}_2\,F(x).$$

Таким образом

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \hat{X}_2, \tag{6.60}$$

и не нулевые структурные константы равны $c^2_{12} = -c^2_{21} = 1$.

В качестве упражнения ($\lessdot$ H$_{76}$), предлагается найти генераторы и структурные константы для дробно-линейной группы (6.52), стр. 409.

• Функция композиции $\phi(\mathbf{b},\mathbf{a})$ также как и $\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{x})$ удовлетворяет определённым дифференциальным уравнениям. Их вывод полностью аналогичен выводу уравнений для $\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{x})$ и $u^k_\beta(\mathbf{x})$. Вообще, параметрическую композицию можно рассматривать как преобразование задающее некоторую кривую в параметрическом пространстве начинающуюся в точке $\mathbf{a}$ при изменении парамера $\mathbf{b}$.

Запишем для закона композиции свойство ассоциативности:

$$\phi(\mathbf{c},\phi(\mathbf{b},\mathbf{a}))=\phi(\phi(\mathbf{c},\mathbf{b}),\ \mathbf{a}),$$

возьмём его производную по c^β и приравняем $\mathbf{c}=\mathbf{0}$. Учитывая определение (6.54), имеем

$$\mu^\gamma_\beta\big(\phi(\mathbf{b},\mathbf{a})\big)=\frac{\partial\phi^\gamma(\phi_{(\mathbf{c},\mathbf{b}),\mathbf{a}})}{\partial\phi^\sigma_{(\mathbf{c},\mathbf{b})}}\,\frac{\partial\phi^\sigma_{(\mathbf{c},\mathbf{b})}}{\partial c^\beta}\bigg|_{\mathbf{c}=\mathbf{0}}=\frac{\partial\phi^\gamma(\mathbf{b},\mathbf{a})}{\partial b^\sigma}\,\mu^\sigma_\beta(\mathbf{b}).$$

Поэтому уравнение для функции $\phi(\mathbf{b},\mathbf{a})$ имеет вид:

$$\mu^\sigma_\beta(\mathbf{b})\,\frac{\partial\phi^\gamma(\mathbf{b},\mathbf{a})}{\partial b^\sigma}=\mu^\gamma_\beta\big(\phi(\mathbf{b},\mathbf{a})\big).\tag{6.61}$$

Для получения дифференциальных ограничений на функции $\mu^\gamma_\beta(\mathbf{a})$ возьмём производную этого уравнения по b^α и положим $\mathbf{b}=\mathbf{0}$. Учитывая (6.55) имеем:

$$\phi^\sigma_{\beta\alpha}\,\mu^\gamma_\sigma(\mathbf{a})+\frac{\partial\phi^\gamma(\mathbf{b},\mathbf{a})}{\partial b^\alpha\partial b^\beta}\bigg|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}=\frac{\partial\mu^\gamma_\beta(\phi_{(\mathbf{b},\mathbf{a})})}{\partial\phi^\sigma_{(\mathbf{b},\mathbf{a})}}\,\frac{\partial\phi^\sigma(\mathbf{b},\mathbf{a})}{\partial b^\alpha}\bigg|_{\mathbf{b}=0}=\frac{\partial\mu^\gamma_\beta(\mathbf{a})}{\partial a^\sigma}\,\mu^\sigma_\alpha(\mathbf{a}).$$

Переставив индексы α и β, и вычтя из исходного уравнения, получим:

$$\mu^\sigma_\alpha(\mathbf{a})\,\partial_\sigma\mu^\gamma_\beta(\mathbf{a})-\mu^\sigma_\beta(\mathbf{a})\,\partial_\sigma\mu^\gamma_\alpha(\mathbf{a})=-c^\sigma_{\alpha\beta}\,\mu^\gamma_\sigma(\mathbf{a}),\tag{6.62}$$

где $\partial_\sigma=\partial/\partial a^\sigma$. Взяв производную по a^k и положив $\mathbf{a}=0$, можно снова прийти к тождеством Якоби для структурных констант (6.20) стр. 379.

При известных структурных константах $c^\sigma_{\alpha\beta}$, решение уравнения (6.62) даёт функцию $\mu^\gamma_\beta(\mathbf{a})$. С её помощью далее решается уравнение (6.61) и находится функция композиции $\phi^\gamma(\mathbf{b},\mathbf{a})$.

В случае трансляций и масштабирования $x'=e^{a_1}\,x+a_2$ одномерного пространства закон композиции имеет вид (функция ϕ_k и параметры имеют 2 компоненты и индексы опущены вниз):

$$\begin{aligned}\phi_1(\mathbf{b},\mathbf{a})&=a_1+b_1\\ \phi_2(\mathbf{b},\mathbf{a})&=e^{b_1}a_2+b_2\approx a_2+b_2+b_1a_2.\end{aligned}\tag{6.63}$$

Следовательно, $\phi^2_{12}=1$, а остальные коэффициенты $\phi^\gamma_{\alpha\beta}$ равны нулю. Поэтому, ненулевая структурная константа равна $c^2_{12}=\phi^2_{12}-\phi^2_{21}=1$, что и было получено выше (6.60).

• Иногда удачный выбор способа параметризации группы существенно упрощает групповое преобразование. Рассмотрим случай однопараметрической группы $\mathbf{a} = \{a\}$. В этом случае структурные константы равны нулю. Уравнение (6.62) для функции $\mu(\mathbf{a})$ тождественно выполняется, а уравнение (6.61) для ϕ имеет вид:

$$\mu(b)\,\frac{d\phi(b,a)}{db} = \mu\bigl(\phi(b,a)\bigr).$$

Интегрируя его с "начальным" условием $\phi(0,a) = a$, получаем:

$$\psi(\phi(b,a)) = \psi(a) + \psi(b),$$

где $\psi'(b) = 1/\mu(b)$. Таким образом, с точностью до переопределения параметров однопараметрическое преобразование должно иметь аддитивный закон композиции $\phi(b,a) = a + b$. Для трансляции и поворотов в плоскости это очевидно, а для преобразования масштабирования в виде $x \mapsto x' = \tilde{a}\,x$ имеем $\tilde{a} = \psi(a) = e^{a}$. Параметризация при которой $\phi(b,a) = a + b$ называется *канонической.*

• Функция координат называется *инвариантом группы*, если её *функциональная зависимость* не изменяется при групповом преобразовании $F\bigl(\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{x})\bigr) = F\bigl(\mathbf{x}\bigr)$ и, следовательно, $F\bigl(\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{x})\bigr)$ не зависит от $\mathbf{a}$. Поэтому производная по $\mathbf{a}$ в нуле должна равняться нулю:

$$\frac{\partial F\bigl(\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{x})\bigr)}{\partial a^{\alpha}}\Bigr|_{\mathbf{a}=\mathbf{0}} = \frac{\partial F}{\partial f^{k}}\,\frac{\partial f^{k}}{\partial a^{\alpha}}\Bigr|_{\mathbf{a}=\mathbf{0}} = u^{k}_{\alpha}(\mathbf{x})\,\frac{\partial F}{\partial x^{k}} \equiv -\hat{X}_{\alpha}F(\mathbf{x}) = 0.$$

Справедливо и обратное утверждение: если некоторая функция удовлетворяет уравнениям $\hat{X}_{\alpha}F(\mathbf{x}) = 0$, то она будет инвариантной относительно группы определяемой генераторами $\hat{X}_{\alpha}$.

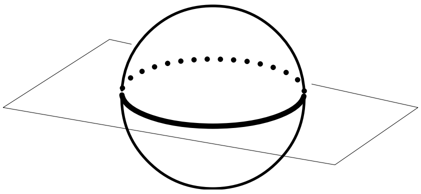
Для *однопараметрической группы* генератор один. В n-мерном пространстве уравнение $\hat{X}F = -u^{k}(\mathbf{x})\partial_{k}F = 0$ является уравнением первого порядка в частных производных. В соответствии с методом характеристик оно решается при помощи системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx^{1}}{u^{1}(\mathbf{x})} = \frac{dx^{2}}{u^{2}(\mathbf{x})} = ... = \frac{dx^{n}}{u^{n}(\mathbf{x})}.$$

Эта система имеет $n-1$ интегралов $C_1 = I_1(\mathbf{x})$, ..., $C_{n-1} = I_{n-1}(\mathbf{x})$. Общее решение уравнения $\hat{X}F = 0$ будет иметь вид $F(I_1(\mathbf{x}), ..., I_{n-1}(\mathbf{x}))$, где F - произвольная функция $n-1$ аргументов. Функции $I_k(\mathbf{x})$, $k = 1, ..., n-1$ называются *базовыми инвариантами.* Произвольный инвариант F является их функцией. В качестве упражнения, предлагается найти инварианты 1-параметрической группы масштабирования 2-мерного пространства $x' = e^{a}\,x$, $y' = e^{a}\,y$ ($\lessdot$ H$_{77}$) и группы $\mathbf{SO}(3)$ ($\lessdot$ H$_{78}$).

6.12 Эрлангенская программа *

• Рассмотрим $n-m$ мерную поверхность в n-мерном евклидовом пространстве. Размерность поверхности определяется числом уравнений m которые её задают. Например, плоская одномерная окружность единичного радиуса в 3-мерном пространстве может быть определена как линия пересечения плоскости и сферы:



$$x^2+y^2+z^2=1$$
$$z=0.$$

Уравнений два, пространство 3-мерно, следовательно размерность этой поверхности равна $3-2=1$ (это линия). В общем случае $n-m$ мерная поверхность $\mathcal{M}$ определяется при помощи m уравнений:

$$\mathcal{M}: \qquad F_1(\mathbf{x})=0, \qquad F_2(\mathbf{x})=0, \qquad ..., \qquad F_m(\mathbf{x})=0. \tag{6.64}$$

Естественно предполагается, что эти уравнения совместны, т.е. поверхности $F_i(\mathbf{x})=0$ размерности $n-1$ должны пересекаться.

Поверхность будет инвариантной относительно группы преобразований, если каждая точка поверхности в результате преобразования перемещается по этой поверхности. Другими словами, если $\mathbf{x}$ решение системы (6.64), то и $\mathbf{x}'=\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{x})$ также является её решением.

Система уравнений (6.64) инвариантна относительно группы с генераторами $\hat{X}_\alpha$, когда выполняются уравнения:

$$\hat{X}_\alpha F_k(\mathbf{x})\Big|_{\mathcal{M}}=0, \qquad\qquad k=1,...,m, \quad \alpha=1,....,s.$$

Черта с индексом $\mathcal{M}$ обозначает, что эти уравнения необходимо брать на поверхности, т.е. подставлять в них решения системы (6.64).

Понятно, что инвариантные уравнения поверхности (6.64) должны быть некоторыми функциями базовых инвариантов группы $I_i(\mathbf{x})$. Поэтому с их помощью можно дать описание всех поверхностей инвариантных относительно данной группы.

Например, уравнение параболоида вращения $z=x^2+y^2$ может быть записано в виде:

$$\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{z}-1=0.$$

Оно состоит из суммы двух инвариантов x^2/z, y^2/z относительно группы неоднородных растяжений: $x'=e^a x$, $y'=e^a y$, $z'=e^{2a}z$ с генератором $\hat{X}=-(x\,\partial_x+y\,\partial_y+2z\,\partial_z)$. Эти инварианты находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений $dx/x=dy/y=dz/2z$.

Та или иная поверхность обладает определенной геометрией. Например, для “плоскатиков”, находящихся на евклидовой плоскости, геометрия пространства евклидова. Для них справедлива теорема Пифагора и другие привычные для нас геометрические законы. Для аналогичных плоскатиков, живущих на поверхности шара, геометрия пространства отличается от евклидовой. Однако их пространство, как и пространство плоскатиков, остаётся однородным и изотропным. Так, они могут перемещать и поворачивать произвольную геометрическую фигуру без её искажения. Это свойство связанно с трансляционной и вращательной симметрией и соответствующими группами.

Произвольно изогнутая поверхность может не обладать ни какими свойствами симметрии. Однако достаточно богатые геометрические свойства возникают, когда пространство обладает определенной симметрией. Идея о том, что различные геометрии можно классифицировать в соответствии с группами преобразований их симметрий принадлежит Феликсу Клейну (1872) и носит название “*Эрлангенской программы*”. В рамках этой программы предлагается в первую очередь изучать геометрии обладающие той или иной группой симметрии. Именно такие геометрии оказываются “интересными”.

Говоря о геометрии необходимо помнить, что речь идет не только об обычном физическом 2-мерном или 3-мерном пространстве. Природа рассматриваемых пространств, на самом деле, может быть достаточно разнообразной. Рассмотрим, например, пространство скоростей, каждая точка которого соответствует определенной скорости некоторого объекта. Два различных объекта, движущихся с одинаковой скоростью, в этом пространстве будут соответствовать одной и той-же точке. Понятно, что подобное пространство скоростей имеет три измерения. Его можно наделить геометрическими свойствами, задав расстояние между двумя точками и способ параллельного переноса.

В классической механике пространство скоростей обладает евклидовой геометрией, а преобразование Галилея (сложение трех векторов) связано с евклидовой теоремой Пифагора. В теории относительности пространство скоростей уже имеет геометрию Лобачевского (см.главу 4). Соответственно их группы симметрий оказываются различными.

Как мы знаем, свойства тех или иных групп симметрий (линейных или нелинейных) определяются структурными константами. Эти константы начинают играть роль фундаментальных физических констант, когда та или иная группа находит свое место в наших математических моделях при описании физической реальности.

• Как уже упоминалось (стр. 409), можно использовать различные способы параметризации группового преобразования. Другими словами, в рамках одной и той же группы можно перейти к новым параметрам $\mathbf{a}'$, связанными некоторой зависимостью $\mathbf{a} = \psi(\mathbf{a}') \equiv \mathbf{a}(\mathbf{a}')$ со старыми параметрами $\mathbf{a}$. При таком преобразовании меняются операторы генераторов группы. Причем генераторы для новых параметров линейным образом выражаются через генераторы для старых. Действительно, пусть $x'^k = f^k(\mathbf{a}(\mathbf{a}'), \mathbf{x})$, тогда:

$$u'^k_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{f^k(\mathbf{a},\mathbf{x})}{\partial a^\beta}\,\frac{\partial a^\beta}{\partial a'^\alpha}\bigg|_{\mathbf{a}'=\mathbf{0}} = A^\beta_\alpha\, u^k_\beta(\mathbf{x}),$$

где предполагается, что в обоих параметризациях нулевые параметры соответствуют единичному преобразованию и введено обозначение для матрицы производных $A^\beta_\alpha = \partial a^\beta/\partial a'^\alpha$, вычисленных в нуле. Теперь можно записать связь генераторов $\hat{X}_\alpha = -u^k_\alpha(\mathbf{x})\partial_k$ по параметрам $\mathbf{a}$ и генераторов $\hat{X}'_\alpha = -u'^k_\alpha(\mathbf{x})\partial_k$ параметрам $\mathbf{a}'$:

$$\hat{X}'_\alpha = A^\beta_\alpha \hat{X}_\beta.$$

Оба набора генераторов удовлетворяют алгебрам Ли: $[\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta] = c^\gamma_{\alpha\beta}\hat{X}_\gamma$, $[\hat{X}'_\alpha, \hat{X}'_\beta] = c'^\gamma_{\alpha\beta}\hat{X}'_\gamma$. Подставляя линейное преобразование во вторую алгебру и вынося постоянные коэффициенты A^β_α за коммутатор, имеем:

$$[\hat{X}'_\alpha, \hat{X}'_\beta] = A^\mu_\alpha A^\nu_\beta\, [\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu] = A^\mu_\alpha A^\nu_\beta\, c^\sigma_{\mu\nu}\hat{X}_\sigma = c'^\tau_{\alpha\beta}\hat{X}'_\tau = A^\sigma_\tau\, c'^\tau_{\alpha\beta}\hat{X}_\sigma.$$

Таким образом, структурные константы соответствующие различным параметризациям связаны следующим образом:

$$A^\mu_\alpha A^\nu_\beta\, c^\sigma_{\mu\nu} = A^\sigma_\tau\, c'^\tau_{\alpha\beta}.$$

Сворачивая обе части этого соотношения с обратной матрицей $\tilde{A}^\gamma_\sigma$, для которой $\tilde{A}^\alpha_\mu\, A^\mu_\beta = \delta^\alpha_\beta$, окончательно, получаем:

$$c'^\gamma_{\alpha\beta} = \tilde{A}^\gamma_\sigma A^\mu_\alpha A^\nu_\beta\, c^\sigma_{\mu\nu}.$$

Это тензорное линейное преобразование структурных констант, в котором для нижних индексов используется матрица A^μ_α, а для верхнего – обратная к ней $\tilde{A}^\gamma_\sigma$. Две алгебры, для которых структурные константы связаны таким образом соответствуют одной и той же параметрической группе Ли $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{x})$. Заметим, что обратная матрица $\tilde{A}^\alpha_\beta$ всегда существует, так как определитель $\det A^\alpha_\beta$ не равен нулю (это якобиан преобразования). Кроме этого, если $A^\alpha_\beta = \partial a^\alpha/\partial a'^\beta$, то $\tilde{A}^\gamma_\alpha = \partial a'^\gamma/\partial a^\alpha$.

• Для двухпараметрических групп возможны две различные структурные константы c^1_{12} и c^2_{12}. Соответственно алгебра Ли имеет вид:

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = c^1_{12}\hat{X}_1 + c^2_{12}\hat{X}_2.$$

С учетом неоднозначности, связанной с выбором параметризации, можно перейти к другим структурным константам. Для нижних индексов это приводит лишь к умножению констант на постоянный множитель:

$$c'^{\gamma}_{\alpha\beta} = \tilde{A}^{\gamma}_{\sigma}(A^1_{\alpha}A^2_{\beta}\,c^{\sigma}_{12} + A^2_{\alpha}A^1_{\beta}\,c^{\sigma}_{21}) = (A^1_{\alpha}A^2_{\beta} - A^2_{\alpha}A^1_{\beta})\,\tilde{A}^{\gamma}_{\sigma}\,c^{\sigma}_{12},$$

По верхним же индексам происходит перемешивание констант:

$$c'^1_{12} = J\,(\tilde{A}^1_1\,c^1_{12} + \tilde{A}^1_2\,c^2_{12}),$$
$$c'^2_{12} = J\,(\tilde{A}^2_1\,c^1_{12} + \tilde{A}^2_2\,c^2_{12}),$$

где $J = \det A = \det(\partial a^{\alpha}/\partial a'^{\beta})$ – якобиан преобразования между различными способами параметризации. Путь константы $\{c^1_{12},\, c^2_{12}\}$ являются компонентами некоторого вектора. Тогда перемешивание соответствует его вращению (возможно с изменением длины). Всегда можно выбрать такой поворот, при котором одна из компонент вектора будет равна нулю. Поэтому возможны две неэквивалентные группы с абелевой алгеброй:

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = 0 \qquad (6.65)$$

(когда обе структурные константы равны нулю) и с неабелевой:

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = q\hat{X}_2, \qquad (6.66)$$

где константу q масштабным преобразованием можно сделать равной, например, единице. Этими двумя алгебрами исчерпываются все возможности для 2-х параметрических групп Ли.

Зная структурные константы, можно решить уравнения (6.62), стр. 412. При этом, правда, потребуется определенная изобретательность, так как получаются 2 нетривиальных уравнения для 4-х неизвестных функций $\mu^{\alpha}_{\beta}(\mathbf{a})$. Разложением в ряд несложно убедиться, что приближенное линейное соотношение $\mu^{\alpha}_{\beta}(\mathbf{a}) = \delta^{\alpha}_{\beta} + \phi^{\alpha}_{\beta\gamma}a^{\gamma}$ оказывается точным, и для алгебры (6.66), имеем (индексы опущены вниз, $q = 1$):

$$\mu^1_1 = \mu^2_2 = 1, \qquad \mu^1_2 = 0, \qquad \mu^2_1 = a_2.$$

Уравнения (6.61), стр. 412 приводят к следующей системе

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial b_1} + b_2\,\frac{\partial\phi_1}{\partial b_2} = 1, \qquad \frac{\partial\phi_1}{\partial b_2} = 0, \qquad \frac{\partial\phi_2}{\partial b_1} + b_2\frac{\partial\phi_2}{\partial b_2} = \phi_2, \qquad \frac{\partial\phi_2}{\partial b_2} = 1,$$

которая легко интегрируется и дает $\phi_1(\mathbf{b},\mathbf{a}) = b_1 + f_1(a_1, a_2)$ и $\phi_2(\mathbf{b},\mathbf{a}) = e^{b_1}f_2(a_1, a_2) + b_2$. После учета "начальных условий" $\phi(\mathbf{0},\mathbf{a}) = \mathbf{a}$, получаются функции композиции (6.63).

• Построим теперь классификацию 3-х параметрических групп. В этом случае возможно 9 различных структурных констант $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$ (по нижним индексам антисимметричный тензор зависит от 3-х параметров, и так для каждого из 3-х значений верхнего индекса). Эти 9 величин можно выразить через произвольный тензор второго ранга $C^{\alpha\beta}$, который также имеет 9 компонент:

$$c^{\gamma}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\nu} C^{\nu\gamma}, \tag{6.67}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\nu}$ – символ Леви-Чевиты, обеспечивающий антисимметричность структурных констант по нижним индексам. Сворачивая алгебру Ли $[\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta] = c^{\gamma}_{\alpha\beta}\hat{X}_\gamma = \varepsilon_{\alpha\beta\nu}C^{\nu\gamma}\hat{X}_\gamma$ с символом $\varepsilon^{\mu\alpha\beta}$ по α и β, получаем:

$$\varepsilon^{\mu\alpha\beta}\hat{X}_\alpha\hat{X}_\beta = C^{\mu\nu}\hat{X}_\nu. \tag{6.68}$$

Если тождество Якоби (6.20), стр. 379 для структурных констант

$$c^{\alpha}_{\mu\nu}c^{\lambda}_{\sigma\alpha} + c^{\alpha}_{\nu\sigma}c^{\lambda}_{\mu\alpha} + c^{\alpha}_{\sigma\mu}c^{\lambda}_{\nu\alpha} = 0,$$

свернуть по трем индексам с $\varepsilon^{\mu\nu\sigma}$, получается следующее соотношение:

$$\varepsilon_{\gamma\alpha\beta}C^{\alpha\beta}C^{\gamma\mu} = 0. \tag{6.69}$$

Произвольный тензор $C^{\alpha\beta}$ можно разложить на сумму симметричного и антисимметричного тензора, которую мы запишем следующим образом:

$$C^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}Q_\gamma.$$

Симметричный тензор $S^{\alpha\beta} = S^{\beta\alpha}$ определяется 6-ю параметрами, а вектор Q_γ – тремя, поэтому мы по-прежнему имеем 9 независимых параметров. В этом представлении структурных констант, тождество Якоби (6.69) принимает вид:

$$S^{\alpha\beta}Q_\beta = 0. \tag{6.70}$$

При переходе к новой параметризации тензорные выражения $S^{\alpha\beta}$ и Q_α преобразуются аналогично $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$:

$$S'^{\alpha\beta} = \tilde{A}^{\alpha}_{\mu}\tilde{A}^{\beta}_{\nu}S^{\mu\nu}, \qquad Q'_\alpha = A^{\mu}_{\alpha}Q_\mu$$

(строго говоря, если матрицы $A^{\alpha}_{\beta} = \partial a^\alpha/\partial a'^\beta$ не являются ортогональными, для тензорности введенных величин, символ Леви-Чевиты необходимо дополнительно умножить на якобиан $J = \det A$ преобразования [1], однако для дальнейшего это не существенно). Подобными преобразованиями симметричный тензор всегда можно сделать диагональным: $S^{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(s_1, s_2, s_3)$. Поэтому в подходящей параметризации он будет определяться только 3-мя независимыми параметрами s_α. Соответственно, условие (6.70) принимает вид: $s_1q_1 = s_2q_2 = s_3q_3 = 0$, где q_α – компоненты вектора Q_α.

Полагая в (6.68) индекс $\mu = 3, 2, 1$ получаем выражения для трех коммутаторов, зависящие от 6-ти параметров:

$$\begin{aligned}
[\hat{X}_1, \hat{X}_2] &= s_3\hat{X}_3 + q_2\hat{X}_1 - q_1\hat{X}_2, \\
[\hat{X}_3, \hat{X}_1] &= s_2\hat{X}_2 + q_1\hat{X}_3 - q_3\hat{X}_1, \\
[\hat{X}_2, \hat{X}_3] &= s_1\hat{X}_1 + q_3\hat{X}_2 - q_2\hat{X}_3.
\end{aligned}$$

При этом, если все s_i отличны от нуля, то q_i должны быть нулевыми и т.д. для выполнения тождества Якоби: $s_1q_1 = s_2q_2 = s_3q_3 = 0$. Кроме вращений, диагонализирующих $S^{\alpha\beta}$ можно умножить операторы на произвольные ненулевые числа (масштабное преобразование параметров). Это позволяет сделать коэффициенты при генераторах в правой части равными ± 1. Наконец, нумерация параметров преобразования (и генераторов) произвольна. Принципиально различными являются случаи, когда все s_i – нулевые, только 2 из них нулевые, и т.д. При ненулевых значениях они могут быть равны как 1, так и -1. На основе подобных соображений строится классификация 3-х параметрических групп, проделанная Луиджи Бианки в 1918 г. Возможны различные способы классификации (см., например, [10],[11]) Мы приведем вариант такой классификации, следуя [10] ($Q_\alpha = \{q, 0, 0\}$ и в первой колонке – классификационный индекс):

	s_1	s_2	s_3	q
I	0	0	0	0
V	0	0	0	1
II	1	0	0	0
IV	0	0	1	1
VII_0	1	1	0	0
VII_q	0	1	1	q
VI_0	1	-1	0	0
VI_q	0	1	-1	q
III	0	1	-1	1
IX	1	1	1	0
VIII	1	1	-1	0

Тип I является абелевой группой трансляций в евклидовом пространстве. Тип IX также соответствует трансляциям, но уже в пространстве постоянной положительной кривизны (глава 4), 2-мерным аналогом которого является сфера. Этот же тип имеет алгебру Ли линейных групп **SO**(3) и **SU**(2). Третье однородное и изотропное пространство постоянной отрицательной кривизны (пространство Лобачевского) связано с типом V. Как мы увидим в главе 4, это пространство описывает пространство скоростей теории относительности.

VI Теория симметрии

- **H**$_{51}$ *Инвариантность уравнений Ньютона* (стр. 347)

Запишем уравнение в штрихованной системе отсчёта:

$$\frac{d^2x'_i}{dt'^2} = \sum_{j\neq i}^{n} f(|x'_i - x'_j|)$$

и подставим преобразования $t' = t$, $x' = x - vt$ с $v = const$. Так как

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v, \qquad \frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

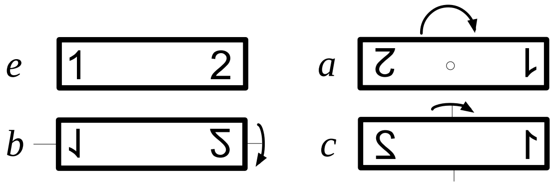
имеем

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \sum_{j\neq i}^{n} f(|x_i - vt - (x_j - vt)|) = \sum_{j\neq i}^{n} f(|x_i - x_j|).$$

Таким образом в нештрихованной системе уравнение не изменило своего вида, т.е. оказалось инвариантным.

- **H**$_{52}$ *Группа поворотов и отражений прямоугольника* **D**$_2$ (стр. 352)

$$\mathbf{D_2}: \begin{array}{c|ccc|} & a & b & c \\ \hline a & \bullet & c & b \\ b & c & \bullet & a \\ c & b & a & \bullet \\ \hline \end{array}$$



- **H**$_{53}$ *Подгруппы группы* **D**$_3$ (стр. 353)

Повторим таблицы умножения для групп **C**$_2$, **C**$_3$ и **D**$_3$:

$$\begin{array}{c|c|} \mathbf{C_2} & a \\ \hline a & \bullet \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc|} \mathbf{C_3} & a & a^2 \\ \hline a & a^2 & \bullet \\ a^2 & \bullet & a \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc|ccc|} \mathbf{D_3} & a & a^2 & b & c & d \\ \hline a & a^2 & \bullet & c & d & b \\ a^2 & \bullet & a & d & b & c \\ \hline b & d & c & \bullet & a^2 & a \\ c & b & d & a & \bullet & a^2 \\ d & c & b & a^2 & a & \bullet \\ \hline \end{array}$$

Группа **D**$_3$ имеет четыре несобственные циклические подгруппы:

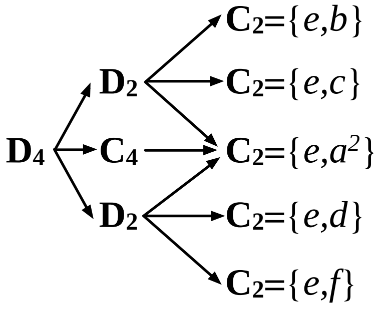
$$\mathbf{C_3} = \{e, a, a^2\}, \qquad \mathbf{C_2} = \{e, b\}, \qquad \mathbf{C_2} = \{e, c\}, \qquad \mathbf{C_2} = \{e, d\}.$$

Количество подгрупп **C**$_2$ всегда равно числу точек стоящих на главной диагонали. Им соответствуют элементы порядка два: $x^2 = e$, приводящие к $\mathbf{C_2} = \{e, x\}$.

- $\mathbf{H}_{54}$ *Подгруппы группы* $\mathbf{D_4}$ (стр. 353)

Подгруппы $\mathbf{D_4}$ имеют такую иерархию:

$$\mathbf{D_4}: \begin{array}{c|ccc|cccc|} & a & a^2 & a^3 & b & c & d & f \\ \hline a & a^2 & a^3 & \bullet & f & d & b & c \\ a^2 & a^3 & \bullet & a & c & b & f & d \\ a^3 & \bullet & a & a^2 & d & f & c & b \\ \hline b & d & c & f & \bullet & a^2 & a & a^3 \\ c & f & b & d & a^2 & \bullet & a^3 & a \\ d & c & f & b & a^3 & a & \bullet & a^2 \\ f & b & d & c & a & a^3 & a^2 & \bullet \\ \hline \end{array}$$



Увидеть одну подгруппу $\mathbf{C_4}$, и пять подгрупп $\mathbf{C_2}$ не сложно. Возможно менее заметными выглядят две подгруппы $\mathbf{D_2}$: $\{e, a^2, b, c\}$ и $\{e, a^2, d, f\}$.

- $\mathbf{H}_{55}$ *Сопряжённая группа* (стр. 353)

Замкнутость умножения доказана на стр. 353. Ассоциативность очевидна, в силу ассоциативности умножения элементов групп. Аналогично ясно появление единичного элемента, который будет общим для всех подгрупп: $geg^{-1} = gg^{-1} = e$. Наконец, пусть h и h^{-1} принадлежат $\mathbf{H}$ и обратны друг другу. Тогда обратными будут и их сопряжения:

$$h' \cdot h'^{-1} = (ghg^{-1}) \cdot (gh^{-1}g^{-1}) = ghh^{-1}g^{-1} = geg^{-1} = gg^{-1} = e.$$

- $\mathbf{H}_{56}$ $\mathbf{C}_3$ *инвариантная подгруппа группы* $\mathbf{D}_3$ (стр. 353)

Используя таблицу умножения для $\mathbf{D}_3$ имеем ($b^{-1} = b$):

$$b \cdot \{e, a, a^2\} \cdot b = \{b, d, c\} \cdot b = \{e, a^2, a\}.$$

Аналогично вычисляются сопряжения с элементами “c” и “d”.

- $\mathbf{H}_{57}$ *Инвариантная подгруппа группы* $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ (стр. 365)

Возьмем произвольный элемент группы $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$: (h_i, g_j). Обратный к нему – (h_i^{-1}, g_j^{-1}), так как $(h_i, g_j) \cdot (h_i^{-1}, g_j^{-1}) = (h_i \cdot h_i^{-1},\ g_j \cdot g_j^{-1}) = (e_h, e_g)$, где e_h и e_g единичные элементы групп $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ соответственно. Проведём сопряжение элемента (e_h, g_k):

$$(h_i, g_j) \cdot (e_h, g_k) \cdot (h_i^{-1}, g_j^{-1}) = (h_i e_h h_i^{-1},\ g_j g_k g_j^{-1}) = (e_h,\ g_j g_k g_j^{-1}).$$

Первый элемент пары оказывается единичным элементом $\mathcal{F}$, а второй - произвольным элементом $\mathcal{G}$.

• $\mathbf{H}_{58}$ (inv) $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbf{G}, \quad \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{e\} \quad => \quad ab = ba$. (стр. 365)

Действительно, инвариантность означает, что для любого $g \in \mathbf{G}$ справедливо

$$g\mathbf{A}g^{-1} = \mathbf{A}, \qquad g\mathbf{B}g^{-1} = \mathbf{B}.$$

Рассмотрим произведение элементов $a^{-1}b^{-1}ab$. Используя ассоциативность, вычислим его двумя способами, первый из которых приведёт к выводу, что это произведение принадлежит подгруппе $\mathbf{A}$, в во втором способе получится, что это элемент $\mathbf{B}$:

$$\underbrace{a^{-1}(b^{-1}ab)}_{\in \mathbf{A}} = \underbrace{(a^{-1}b^{-1}a)b}_{\in \mathbf{B}} \qquad => a^{-1}b^{-1}ab = e$$

В силу свойства $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{e\}$ мы приходим к выводу, что вычисляемое произведение является единичным элементом, откуда умножая слева на a, а затем на b получим требуемую коммутативность $ab = ba$.

• $\mathbf{H}_{59}$ (inv) $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbf{G}, \quad , \mathbf{AB} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{e\} \quad => \quad \mathbf{G} \approx \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (стр. 365)

Выражение $\mathbf{AB} = \mathbf{G}$ означает, что произведение пар a_ib_j формирует все элементы группы $\mathbf{G}$:

$$\forall g \in \mathbf{G}: \quad \text{или} \quad g = a_ib_j, \quad \text{или} \quad g = a_ie = a_i \quad \text{или} \quad g = b_ie = b_i.$$

Это означает, что каждому элементу $g \in \mathbf{G}$ ставится в соответствие некоторая пара a_ib_j, причем взаимно-однозначным образом. Если бы две различные пары давали один и тот же g, мы имели:

$$g = ab = a'b'.$$

Умножая слева на a^{-1}, а справа на b^{-1}, получаем:

$$\underbrace{a^{-1}a'}_{\in \mathbf{A}} \cdot \underbrace{b'b^{-1}}_{\in \mathbf{B}} = e.$$

Произведение равно единичному элементу e, если элементы обратны (но это не так, т.к. они принадлежат к различным, пересекающимся только на e подгруппам) или если они оба равны единичному. Поэтому элементы совпадают: $a' = a$ и $b' = b$. Другими словами, любой элемент $g \in \mathbf{G}$ можно единственным образом поставить в соответствие некоторой паре (a_i, b_j). Произведение этих пар является прямым произведением $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$:

$$(a_i, b_i) \cdot (a_jb_j) = (a_ia_j, \ b_ib_j).$$

Так как элементы подмножеств $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ коммутируют между собой, то результат $a_ib_ia_jb_j$ равен $a_ia_jb_ib_j$, поэтому возникает изоморфизм.

- **H**$_{60}$ *Доказательство первой леммы Шура* (стр. 370)

Запишем уравнение на *собственные векторы и значения*: $\mathbf{I}\,\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{u}$, где $\mathbf{I}$ - квадратная матрица, $\mathbf{u}$ - столбик (вектор) и λ – число.

Рассмотрим преобразование $\mathbf{u}_i = \mathbf{T}(g_i)\mathbf{u}$ переводящее собственный вектор $\mathbf{u}$, в некоторый новый вектор $\mathbf{u}_i$. Этот вектор также является собственным вектором матрицы $\mathbf{I}$ *с тем же* собственным значением λ:

$$\mathbf{I}\mathbf{u}_i = \mathbf{I}\mathbf{T}(g_i)\mathbf{u} = \mathbf{T}(g_i)\mathbf{I}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{T}(g_i)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}_i,$$

где учтена коммутативность (перестановочность): $\mathbf{I}\mathbf{T}(g_i) = \mathbf{T}(g_i)\mathbf{I}$.

Кроме этого, набор векторов $\mathbf{u}_i$ (когда g_i пробегает всю группу) образует *инвариантное пространство* (действие матриц представления на эти векторы даёт векторы, принадлежащие этому же пространству):

$$\mathbf{T}(g_j)\mathbf{u}_i = \mathbf{T}(g_j)\mathbf{T}(g_i)\mathbf{u} = \mathbf{T}(g_jg_i)\mathbf{u} = \mathbf{T}(g_k)\mathbf{u} = \mathbf{u}_k,$$

где $g_k = g_jg_i$. В тоже время, так как представление неприводимо, оно не может содержать инвариантных подпространств, поэтому векторы $\mathbf{u}_i$ совпадают со всем векторным пространством, образуя его базис. В результате, *любой* вектор $\mathbf{v}$, разложенный по этому базису с коэффициентами a_i, оказывается собственным вектором матрицы $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{I}\sum a_i\mathbf{u}_i = \sum a_i\mathbf{I}\mathbf{u}_i = \lambda\sum a_i\mathbf{u}_i = \lambda\mathbf{v}.$$

В силу произвольности вектора $\mathbf{v}$ это возможно только, если матрица $\mathbf{I}$ пропорциональна единичной.

- **H**$_{61}$ *Коммутируемость матриц* $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{T}(g_i)$ (стр. 371)

Действительно, пусть $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}(g_i)$, тогда

$$\mathbf{T}_j\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{\gamma}\mathbf{T}_j(\mathbf{T}_i\mathbf{X}\mathbf{T}_i^{-1})(\mathbf{T}_j^{-1}\mathbf{T}_j) = \sum_{k=1}^{\gamma}\mathbf{T}_k\mathbf{X}\mathbf{T}_k^{-1}\mathbf{T}_j = \mathbf{M}\mathbf{T}_j,$$

где $\mathbf{T}_k = \mathbf{T}_j\mathbf{T}_i$ и при пробегании всех элементов группы (индекс i), умножение на фиксированный элемент $\mathbf{T}_j$ даст все элементы $\mathbf{T}_k$ (см.стр. 349).

- **H**$_{62}$ *Унитарные матрицы образуют группу* (стр. 375)

Пусть матрицы $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$ удовлетворяют условию унитарности. Тогда их произведение также будет унитарной матрицей:

$$(\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2)^+(\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2) = \mathbf{U}_2^+\mathbf{U}_1^+\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_2^+\mathbf{1}\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_2^+\mathbf{U}_2 = \mathbf{1},$$

где учтено, что при транспонировании произведения матриц они транспонируются и меняются местами. Аналогично, если матрица $\mathbf{U}$ унитарна ($\mathbf{U}^+ = \mathbf{U}^{-1}$), то и обратная к ней $\mathbf{U}^{-1}$ будет унитарной:

$$(\mathbf{U}^{-1})^+\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{1} \qquad => \qquad (\mathbf{U}^{-1})^+ = \mathbf{U} \qquad => \qquad \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^+.$$

- $\mathbf{H}_{63}$ *Связь матриц* (стр. 377)

Перегруппируем члены в произведении, полученном 2-м способом:

$$\mathbf{T}_{(\mathbf{b})}\mathbf{T}_{(\mathbf{a})} = \mathbf{1}+(b^k+a^k)\mathbf{X}_k+\phi^k_{ij}b^ia^j\mathbf{X}_k+(b^ib^j+a^ia^j)\mathbf{Y}_{ij}+(b^ia^j+a^ib^j)\mathbf{Y}_{ij}+...$$

Сравнивая с $\mathbf{T}_{(\mathbf{b})}\mathbf{T}_{(\mathbf{a})}$, полученном 1-м способом, имеем:

$$\phi^k_{ij}b^ia^j\mathbf{X}_k + (b^ia^j + a^ib^j)\mathbf{Y}_{ij} = b^ia^j\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j.$$

Беря производные по b^p, a^q и учитывая, что $\mathbf{Y}_{ij} = \mathbf{Y}_{ji}$, получаем требуемое соотношение.

- $\mathbf{H}_{64}$ *Генераторы группы* $\mathbf{SO}$*(2)* (стр. 377)

Найдём генератор группы поворотов в плоскости $\mathbf{SO}(2)$ (множество ортогональных матриц 2x2 с единичным определителем), разложив матрицу в ряд по углу (параметру) a:

$$\mathbf{T}(a) = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix} = \mathbf{1}+a\,\mathbf{X}+..., \qquad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Конечный поворот с параметром a можно представить в виде произведения N бесконечно малых преобразований с параметром $\Delta a = a/N$:

$$\mathbf{T}(a) = \underbrace{\mathbf{T}_{\Delta a}...\mathbf{T}_{\Delta a}}_{N \text{ раз}} = (1+\Delta a\mathbf{X})^N = \left(1+\frac{a\,\mathbf{X}}{N}\right)^N \to e^{a\,\mathbf{X}} = \mathbf{1}\cos a+\mathbf{X}\sin a.$$

Результат $\mathbf{T}(a) = e^{a\mathbf{X}}$ получается в пределе $N \to \infty$ (по определению числа "e") и является достаточно общим в теории групп. Раскладывая экспоненту $e^{a\,\mathbf{X}}$ в ряд Тейлора, можно снова восстановить $\sin a$ и $\cos a$. Для этого надо учесть, что: $\mathbf{X}^2 = -\mathbf{1}$, $\mathbf{X}^3 = -\mathbf{X}$, $\mathbf{X}^4 = \mathbf{1}$, $\mathbf{X}^5 = \mathbf{X}, ...$

- $\mathbf{H}_{65}$ *Антисимметричность и линейность коммутаторов* (стр. 379)

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = -(\mathbf{BA} - \mathbf{AB}) = -[\mathbf{B},\mathbf{A}].$$

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}+\mathbf{C}] = \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})-(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{AB}-\mathbf{BA}+\mathbf{AC}-\mathbf{CA} = [\mathbf{A},\mathbf{B}]+[\mathbf{A},\mathbf{C}].$$

- $\mathbf{H}_{66}$ *Коммутатор произведения* (стр. 379)

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}]\mathbf{C}+\mathbf{B}[\mathbf{A},\mathbf{C}] = \mathbf{ABC} - \mathbf{BAC} + \mathbf{BAC} - \mathbf{BCA} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) - (\mathbf{BC})\mathbf{A}.$$

- $\mathbf{H}_{67}$ *Тождество Якоби* (стр. 379)

$$[\mathbf{C},\ \mathbf{AB} - \mathbf{BA}] + [\mathbf{A},\ \mathbf{BC} - \mathbf{CB}] + [\mathbf{B},\ \mathbf{CA} - \mathbf{AC}] =$$

$$= \mathbf{C}(\mathbf{AB}) - \mathbf{C}(\mathbf{BA}) + \mathbf{A}(\mathbf{BC}) - \mathbf{A}(\mathbf{CB}) + \mathbf{B}(\mathbf{CA}) - \mathbf{B}(\mathbf{AC})$$

$$-(\mathbf{AB})\mathbf{C} + (\mathbf{BA})\mathbf{C} - (\mathbf{BC})\mathbf{A} + (\mathbf{CB})\mathbf{A} - (\mathbf{CA})\mathbf{B} + (\mathbf{AC})\mathbf{B} = 0.$$

• **H**$_{68}$ *Операторная алгебра для группы* $\mathbf{SO}(3)$ (стр. 382)

Учитывая выражения для генераторов группы вращения (6.22) можно записать явный вид операторов $\hat{X}_i = \{\hat{X}_x, \hat{X}_y, \hat{X}_z\} = -(\mathbf{X}_i)_{\alpha\beta} x_\beta \partial_\alpha$:

$$\hat{X}_x = y\partial_z - z\partial_y, \qquad \hat{X}_y = z\partial_x - x\partial_z, \qquad \hat{X}_z = x\partial_y - y\partial_x,$$

где $\partial_x = \partial/\partial x$, и т.д. Найдём коммутатор $[\hat{X}_x, \hat{X}_y]$:

$$(y\partial_z - z\partial_y)(z\partial_x - x\partial_z)F = y\partial_z(z\partial_x F) - y\partial_z x\partial_z F - z\partial_y z\partial_x F + z\partial_y x\partial_z F,$$

$$(z\partial_x - x\partial_z)(y\partial_z - z\partial_y)F = z\partial_x y\partial_z F - z\partial_x z\partial_y F - x\partial_z y\partial_z F + x\partial_z(z\partial_y F).$$

Раскрывая производную произведения $y\partial_z(z\partial_x F) = y\partial_x F + yz\partial_z\partial_x F$, ..., и вычитая эти два выражения, получаем: $[\hat{X}_x, \hat{X}_y] = -\hat{X}_z$, где опущена произвольная функция F на которую действуют операторы.

• **H**$_{69}$ $\det(\mathbf{1} + \mathbf{A}) \approx 1 + \operatorname{Tr}\mathbf{A}$ (стр. 388)

Рассмотрим в качестве примера матрицу 2x2:

$$\det\mathbf{A} = \det\begin{pmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1 + a_{22} \end{pmatrix} = (1 + a_{11})(1 + a_{22}) - a_{12}a_{21}$$

откуда, если элементы a_{ij} малы, имеем:

$$\det\mathbf{A} \approx 1 + a_{11} + a_{22} = 1 + \operatorname{Tr}\mathbf{A},$$

где в приближенном равенстве оставлены только члены первого порядка малости. Аналогичная ситуация и с матрицей произвольной размерности.

• **H**$_{70}$ *Матрица преобразования эквиваленности.* (стр. 395)

Из соотношения $\tilde{\mathbf{X}}_k = \mathbf{S}\mathbf{X}_k\mathbf{S}^{-1}$ следует $\tilde{\mathbf{X}}_k\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{X}_k$. Для $\mathbf{X}_3 = \imath\mathbf{J}_3$ имеем:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\imath \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы и приравнивая элементы, уменьшаем число неизвестных элементов до трех:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \imath\beta \\ \imath\alpha & 0 & \beta \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Повторя эти действия с матрицей $\tilde{\mathbf{X}}_2$, находим $\alpha = -\gamma/\sqrt{2}$, $\imath\beta = \gamma/\sqrt{2}$. Параметр γ можно выбрать произвольным. Окончательно:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\imath & 0 & -\imath \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \imath & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \imath & 0 \end{pmatrix}.$$

- **H**$_{71}$ *Элемент матрицы преобразований* $|\Lambda^0{}_0| \geqslant 1$ (стр. 399)

Запишем условие ортогональности ($\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{g\Lambda g}$):

$$(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^T\mathbf{\Lambda})^\alpha{}_\beta = (\tilde{\Lambda}^T)^\alpha{}_\gamma \Lambda^\gamma{}_\beta = \tilde{\Lambda}_\gamma{}^\alpha \Lambda^\gamma{}_\beta = \delta^\alpha_\beta.$$

Полагая индексы равным нулю $\alpha = \beta = 0$ и расписывая сумму, имеем:

$$\tilde{\Lambda}_0{}^0\Lambda^0{}_0 + \tilde{\Lambda}_1{}^0\Lambda^1{}_0 + \tilde{\Lambda}_2{}^0\Lambda^2{}_0 + \tilde{\Lambda}_3{}^0\Lambda^3{}_0 = 1.$$

Так как матрица $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ получается из $\mathbf{\Lambda}$ свёрткой с двумя метрическими тензорами, то:

$$\tilde{\Lambda}_0{}^0 = g_{00}\Lambda^0{}_0 g^{00} = \Lambda^0{}_0, \qquad\qquad \tilde{\Lambda}_1{}^0 = g_{11}\Lambda^1{}_0 g^{00} = -\Lambda^1{}_0,$$

и т.д. Поэтому: $(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + (\Lambda^1{}_0)^2 + (\Lambda^2{}_0)^2 + (\Lambda^3{}_0)^2 \geqslant 1.$

- **H**$_{72}$ *Обратный элемент группы Пуанкаре* (стр. 402)

$$(\mathrm{a},\ \mathbf{\Lambda}) \cdot (-\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathrm{a},\ \mathbf{\Lambda}^{-1}) = (\mathrm{a} - \mathbf{\Lambda\Lambda}^{-1}\mathrm{a},\ \mathbf{\Lambda\Lambda}^{-1}) = (0, \mathbf{1}).$$

- **H**$_{73}$ *Трансляции – инвариантная подгруппа* (стр. 402)

$$(\mathrm{b},\ \mathbf{\Lambda}) \cdot (\mathrm{a},\ \mathbf{1}) \cdot (\mathrm{b},\ \mathbf{\Lambda})^{-1} = (\mathrm{b} + \mathbf{\Lambda}\mathrm{a},\ \mathbf{\Lambda}) \cdot (-\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathrm{b},\ \mathbf{\Lambda}^{-1}) = (\mathbf{\Lambda}\mathrm{b},\ \mathbf{1}).$$

- **H**$_{74}$ *Коммутатор* $[\hat{J}_{\alpha\beta},\ \hat{P}_\gamma\hat{P}^\gamma]$ (стр. 404)

Воспользуемся тождеством $[\hat{A},\ \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A},\ \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A},\ \hat{C}]$:

$$[\hat{J}_{\alpha\beta},\ \hat{P}_\gamma\hat{P}^\gamma] = [\hat{J}_{\alpha\beta},\ \hat{P}_\gamma]\hat{P}^\gamma + \hat{P}_\gamma[\hat{J}_{\alpha\beta},\ \hat{P}^\gamma] = -[\hat{P}_\gamma,\ \hat{J}_{\alpha\beta}]\hat{P}^\gamma - \hat{P}^\gamma[\hat{P}_\gamma,\ \hat{J}_{\alpha\beta}].$$

Подставляя коммутатор (6.41), стр. 404, имеем:

$$[\hat{J}_{\alpha\beta},\ \hat{P}_\gamma\hat{P}^\gamma] = -\imath(g_{\gamma\alpha}\hat{P}_\beta - g_{\gamma\beta}\hat{P}_\alpha)\hat{P}^\gamma - \imath\hat{P}^\gamma(g_{\gamma\alpha}\hat{P}_\beta - g_{\gamma\beta}\hat{P}_\alpha),$$

или сворачивая с метрически тензором, окончательно:

$$[\hat{J}_{\alpha\beta},\ \hat{P}_\gamma\hat{P}^\gamma] = -\imath(\hat{P}_\beta\hat{P}_\alpha - \hat{P}_\alpha\hat{P}_\beta) - \imath(\hat{P}_\alpha\hat{P}_\beta - \hat{P}_\beta\hat{P}_\alpha) = 0.$$

- **H**$_{75}$ *Квадрат оператора спина* (стр. 405)

При вычислении квадрата используется тождество [1]:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\sigma} = \binom{\alpha\beta\gamma}{\mu\nu\sigma} - \binom{\alpha\beta\gamma}{\mu\sigma\nu} + \binom{\alpha\beta\gamma}{\sigma\mu\nu} - \binom{\alpha\beta\gamma}{\sigma\nu\mu} + \binom{\alpha\beta\gamma}{\nu\sigma\mu} - \binom{\alpha\beta\gamma}{\nu\mu\sigma},$$

где введено сокращение для произведения: $\binom{\alpha\beta\gamma}{\mu\nu\sigma} = \delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu\delta^\gamma_\sigma$.

- **H**$_{76}$ *Трёх-параметрическая дробно-линейная группа* (стр. 411)

Трёх-параметрическая дробно-линейная группа

$$x \mapsto x' = \frac{e^{a_1}x + a_2}{1 + a_3\, x} \approx x + a_1\, x + a_2 - a_3\, x^2 + ...$$

у которой параметры выбраны таким образом, чтобы при $\mathbf{a} = 0$ получалось единичное преобразование, имеет три генератора:

$$\hat{X}_1 = -x\,\frac{d}{dx}, \qquad \hat{X}_2 = -\frac{d}{dx}, \qquad \hat{X}_3 = x^2\frac{d}{dx}.$$

Алгебра Ли, которой они удовлетворяют, имеет вид:

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \hat{X}_2, \qquad [\hat{X}_1, \hat{X}_3] = -\hat{X}_3, \qquad [\hat{X}_2, \hat{X}_3] = 2\hat{X}_1$$

Первый коммутатор совпадает с (6.60), стр. 411 поэтому $x' = e^{a_1}\, x + a_2$ является подгруппой дробно - линейного преобразования.

- **H**$_{77}$ *Инварианты группы масштабирования* (стр. 413)

Рассмотрим группу симметричного масштабирования 2-мерного пространства:

$$\begin{array}{l} x' = e^a\, x \approx x + ax + ... \\ y' = e^a\, y \approx y + ay + ... \end{array} \qquad => \qquad \hat{X} = -x\,\frac{\partial}{\partial x} - y\,\frac{\partial}{\partial y}.$$

Уравнение для инвариантной функции $\hat{X}F = 0$ имеет вид:

$$x\,\frac{\partial F}{\partial x} + y\,\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad => \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

Интегрирование системы уравнений приводит к $C = I(\mathbf{x}) = x/y$. Поэтому произвольная функция отношения координат $F(x/y)$ будет инвариантом преобразования. Естественно в этом не сложно убедиться и прямой проверкой: $x'/y' = e^a x/(e^a y) = x/y$. В одномерном пространстве уравнение $u(x)\, dF/dx = 0$ сводится к тривиальному утверждению о независимости инвариантной функции от координат.

- **H**$_{78}$ *Инварианты группы* **SO**(3) (стр. 413)

Операторы группы вращения можно записать при помощи символа Леви-Чевиты $\hat{X}_i = -\varepsilon_{ijk}x_j\partial_k$. Уравнение для инвариантной функции

$$-\hat{X}_i F(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ijk}\, x_j \partial_k\, F = 0,$$

в силу антисимметрии символа Леви-Чевиты автоматически выполняется, если $\partial_k F \sim x_k$, что происходит, если функция зависит только от квадрата радиус-вектора $\mathbf{r}^2 = x_i x_i = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2$.
