

## Глава 5

# Закон Кулона

Джеймс Клерк Максвелл записал свои уравнения, опираясь на эксперименты Кулона, Эрстеда, Ампера и Фарадея. Эти уравнения привели к преобразованиям Лоренца и, в конечном счёте, к теории относительности. Однако в этой главе мы пойдём обратным путём. При помощи закона Кулона и преобразований Лоренца будут получены уравнения Максвелла. Наша основная цель – обсудить ключевые вопросы электродинамики, непосредственно связанные с теорией относительности. Сначала мы будем в основном использовать 3-мерные обозначения. Глава 7 будет посвящена ковариантной формулировке электродинамики и лагранжевому формализму.

С этой главы начинает активно применяться дифференциальный векторный анализ, поэтому имеет смысл просмотреть математические приложения на странице 754. Ещё лучше проработать первые две главы книги [1], решив приведенные в них задачи.

Мы по-прежнему используем систему единиц, в которой скорость света  $c = 1$ . Для единиц измерения зарядов принята система СГС, в которой закон Кулона выглядит наиболее просто. В приложении S на стр. 803 собраны все необходимые замены для восстановления скорости света и перехода от системы СГС к системе СИ с примерами таких преобразований.

---

### РЕЛЯТИВИСТСКИЙ МИР

Сергей С. Степанов

Последняя версия находится на сайте <http://synset.com>. Все обнаруженные ошибки и замечания просьба присылать по почте: [phys@synset.com](mailto:phys@synset.com). (с) 2009-2013. Печать: 2 июля 2013 г.

---

## 5.1 Электростатика

Мир вещественных тел, непосредственно воспринимаемый чувствами, очень привычен для нашего повседневного опыта. Поэтому для возникновения понятия “поля” потребовались длительная эволюция и достаточно высокий уровень физической абстракции. Простейший способ введения поля состоит в “отрывании” параметров пробного тела от параметров объекта, оказывающего на него силовое воздействие. Известно, что неподвижный заряд  $Q$  действует на небольшой пробный заряд  $q$  силой Кулона:

$$\mathbf{F} = \frac{qQ}{r^3} \mathbf{r}.$$

Заряды могут быть как положительными, так и отрицательными. Сила взаимодействия зависит от их произведения. Следовательно, заряды одинакового знака отталкиваются, а противоположного – притягиваются. Введём *электрическое поле*  $\mathbf{E}$  следующим образом:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}, \quad \mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (5.1)$$

*Напряжённость* электрического поля, т.е. значение векторной функции  $\mathbf{E}$ , зависит от расстояния  $\mathbf{r}$  и заряда  $Q$ , но не зависит от значения пробного заряда  $q$ . Такое отделение источника силы от объекта воздействия является очень удобным, однако достаточно формальным. В дальнейшем, когда мы учтём конечность скорости распространения электромагнитного взаимодействия, поле окажется реально существующим физическим объектом. Обратим внимание, что электрическое поле мы обозначаем той же буквой, что и энергию. Чтобы не было путаницы, в этой главе будем обозначать энергию движения частицы, как  $\mathcal{E}$ .

Закон Кулона с хорошей степенью точности справедлив как на очень малых расстояниях, так и на достаточно больших. Тем не менее, с физической точки зрения соответствующее ему электрическое поле  $\mathbf{E}$  не является хорошо определённой величиной. Если объект, имеющий заряд  $Q$  – точечный, то при  $r = 0$  получается бесконечное значение поля и, следовательно, силы воздействия на пробный заряд  $q$ . Попробуем временно устранить эту проблему, модифицируя закон Кулона при помощи малой константы  $a$ :

$$\mathbf{E} = \frac{Q \mathbf{r}}{(r^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (5.2)$$

При  $a = 0$  мы возвращаемся к исходному выражению, однако при  $a \neq 0$  получается конечное значение напряжённости  $\mathbf{E}$  при  $r = 0$ . Подобное устранение сингулярности (бесконечности) называется *регуляризацией*.

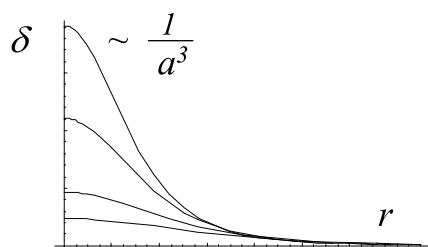
Найдём *дивергенцию* электрического поля, умножив его на *оператор набла*. Дивергенция радиус вектора  $\mathbf{r}$  и градиент его длины  $r = \sqrt{\mathbf{r}^2}$  равны (см. стр. 756):

$$\nabla \mathbf{r} = \mathbf{3}, \quad \nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Поэтому, вычисляя дивергенцию поля (5.2) как производную произведения, получаем:

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{3Q}{(r^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{Q\mathbf{r}}{(r^2 + a^2)^{5/2}} 2r \frac{\mathbf{r}}{r} = 4\pi Q \delta_a(\mathbf{r}),$$

где введена следующая скалярная функция:



$$\delta_a(\mathbf{r}) = \frac{3}{4\pi} \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}}. \quad (5.3)$$

При уменьшении значения параметра  $a$  функция  $\delta_a(\mathbf{r})$  получается всё более высокой и узкой (см. рисунок). Множитель  $3/4\pi$  выделен для того, чтобы интеграл от  $\delta_a(\mathbf{r})$  по всему пространству был равен единице:

$$\int \delta_a(\mathbf{r}) dV = \frac{3a^2}{4\pi} \int_0^\infty \int_{4\pi} \frac{r^2 dr d\Omega}{(r^2 + a^2)^{5/2}} = \int_0^\infty \frac{3\chi^2 d\chi}{(1 + \chi^2)^{5/2}} = \frac{\chi^3}{(1 + \chi^2)^{3/2}} \Big|_0^\infty = 1.$$

Вычисление интеграла проводится в сферических координатах. Интегрирование по телесному углу  $d\Omega$  даёт  $4\pi$ , и сделана замена  $\chi = r/a$ . Значение интеграла остаётся единичным при  $a \rightarrow 0$ , хотя функция  $\delta(\mathbf{r}) = \delta_0(\mathbf{r})$  в этом пределе становится разрывной:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & r \neq 0 \\ \infty, & r = 0 \end{cases}, \quad \int \delta(\mathbf{r}) dV = 1.$$

Функция  $\delta(\mathbf{r})$  с такими свойствами называется *трёхмерной функцией Дирака* (см. также стр. 788). Её удобно использовать для описания точечных зарядов, когда заряд сосредоточен в сколь угодно малом объёме. В этом случае дивергенция электрического поля равна нулю везде, кроме точки  $r = 0$ , где она обращается в бесконечность. Заметим, что если бы мы формально вычислили  $\nabla \mathbf{E}$  для закона Кулона (5.1), то получился бы ноль при любом значении  $r$ . Поэтому дифференцирование *сингулярных функций* требует определённой аккуратности.

• При помощи функции Дирака закон Кулона можно записать в форме дифференциального уравнения:

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi Q \delta(\mathbf{r}).$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса (стр. 754) и интегрируя по замкнутой поверхности, окружающей заряд  $Q$ , мы получаем интегральную версию этого же уравнения:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi Q. \quad (5.4)$$

Экспериментальным фактом является *принцип суперпозиции*:

*поле, создаваемое несколькими зарядами, равно векторной сумме напряжённостей поля от каждого заряда.*

Поэтому закон Кулона в дифференциальной форме может быть записан в следующем виде, который называют *законом Гаусса*:

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho(\mathbf{r}), \quad (5.5)$$

где функция  $\rho(\mathbf{r})$  называется *плотностью заряда*

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n Q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i).$$

Она выражается через значения зарядов  $Q_1, \dots, Q_n$ , находящихся в точках пространства  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ . Интегральный закон Кулона (5.4) остаётся неизменным, однако  $Q$ , входящий в правую часть, имеет смысл суммарного заряда в объёме, окружённом поверхностью  $S$ .

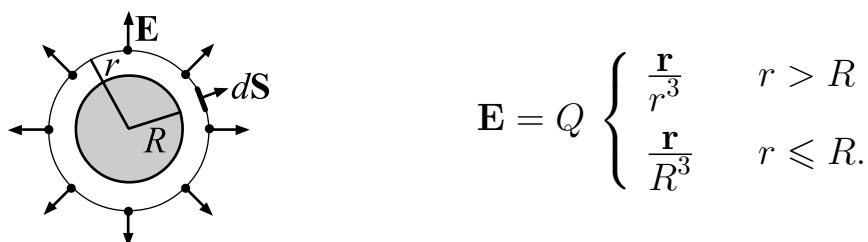
Интеграл по объёму  $V$  от функции  $\rho(\mathbf{r})$  даёт суммарный заряд, находящийся в этом объёме. Пусть точечные заряды расположены очень близко, так что имеет смысл говорить о непрерывном распределении заряда. Тогда его плотность определяется при помощи предела:

$$\sum_i Q_i = \int_{V \rightarrow 0} \rho(\mathbf{r}) dV \approx \rho(\mathbf{r}) V \quad \Rightarrow \quad \rho(\mathbf{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \sum_i Q_i,$$

где суммируются все заряды, попавшие в объём  $V$ , окружающий точку пространства  $\mathbf{r}$ . На практике математический предел не вычисляется, а берётся малый объём  $V$ , и плотность считается равной отношению заряда, который содержится в объёме, к величине этого объёма. Такая процедура “сглаживания” суммы сингулярных функций Дирака приводит к тому, что плотность заряда  $\rho(\mathbf{r})$  в ряде случаев оказывается гладкой (“обычной”) функцией координат.

• Напряжённость поля принято изображать в виде стрелок, направление которых совпадает с вектором  $\mathbf{E}$ , а их количество, проходящее через единицу поверхности, пропорционально модулю напряжённости  $|\mathbf{E}|$ .

Если есть симметрия в распределении заряда, при помощи уравнения (5.4) иногда можно легко находить напряжённость электрического поля. Рассмотрим, например, однородный шар радиуса  $R$ , плотность заряда внутри которого постоянна. Выделенных направлений нет, поэтому в силу сферической симметрии “стрелки” электрического поля выглядят так, как это показано на рисунке ниже, и напряжённость равна:



Действительно, окружим шар сферой радиуса  $r > R$ , имеющей площадь  $4\pi r^2$ . Так как вектор  $d\mathbf{S}$  параллелен вектору напряжённости и на сфере её модуль постоянен, имеем:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = |\mathbf{E}|4\pi r^2 = 4\pi Q \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{E}| = \frac{Q}{r^2},$$

т.е. вне шара выполняется закон Кулона. Если же  $r \leq R$ , то заряд внутри сферы равен произведению объёма  $4\pi r^3/3$  на плотность:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = |\mathbf{E}|4\pi r^2 = 4\pi \rho \frac{4\pi}{3} r^3 = 4\pi Q \frac{r^3}{R^3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = Q \frac{\mathbf{r}}{R^3}.$$

Проверьте ( $\ll \text{Н}_{33}$ ), что поле, создаваемое бесконечной тонкой однородно заряженной нитью с зарядом  $\mu = Q/L$  на единицу длины  $L$ , равно:

$$|\mathbf{E}| = \frac{2\mu}{r_{\perp}}, \quad \mathbf{E} = 2\mu \frac{[\mathbf{k} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{k}]]}{[\mathbf{r} \times \mathbf{k}]^2},$$

где  $\mathbf{r}_{\perp}$  – составляющая радиус-вектора, перпендикулярная к нити (см. рисунок), а  $\mathbf{k}$  – единичный вектор, направленный вдоль нити. Стоит вычислить  $\nabla\mathbf{E}$ , проведя регуляризацию выражения. Заметим, что выделенных направлений вдоль нити нет. Поэтому ещё одна симметричная конфигурация поля, когда вектор  $\mathbf{E}$  касателен цилиндру, окружающему нить (поперёк направления нити), не является подходящей. Нет оснований “закрутить” поле  $\mathbf{E}$  в одну или в другую сторону.

• Вторая операция, которая может быть проделана с векторной функцией при помощи оператора набла, – это ротор. Для любого сферически симметричного поля  $f(r)\mathbf{r}$  ротор равен нулю. Действительно, так как:

$$\nabla f(r) = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad [\nabla \times \mathbf{r}] = 0,$$

то для ротора сферически симметричного поля получаем:

$$[\nabla \times f(r) \mathbf{r}] = f(r) [\nabla \times \mathbf{r}] - [\mathbf{r} \times \nabla] f(r) = -f'(r) \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{r}]}{r} = 0.$$

Поэтому как для закона Кулона, так и для его регуляризованного выражения (5.2) ротор будет равен нулю. В силу принципа суперпозиции это справедливо для любого статического распределения заряда. Поэтому уравнения *электростатики* имеют вид:

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (5.6)$$

Последнее уравнение, выражающее центральный характер кулоновского поля для точечного заряда, выполняется автоматически, если:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad (5.7)$$

где  $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$  – скалярная функция, называемая *потенциалом*. Действительно:  $\nabla \times \mathbf{E} = -[\nabla \times \nabla] \varphi = 0$ . Подстановка вектора напряжённости, выраженного через потенциал, в уравнение для дивергенции (закон Гаусса), даёт *уравнение Пуассона с оператором Лапласа*  $\Delta = \nabla^2$ :

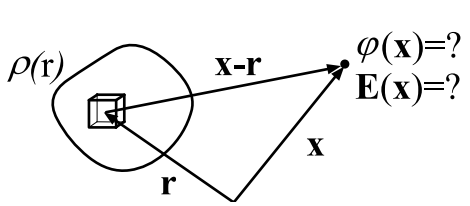
$$\Delta \varphi = -4\pi \rho. \quad (5.8)$$

Кулоновский потенциал поля точечного заряда равен

$$\varphi = \frac{Q}{r},$$

что проверяется вычислением его градиента (5.7) и сравнением с (5.1).

Потенциал и напряжённость можно представить в интегральном виде, просуммировав кулоновские поля от зарядов малых объёмов:



$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^3} \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (5.10)$$

Значения напряжённости поля и потенциал вычисляются в точке пространства  $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$  (“жирный”  $\mathbf{x}$  – это вектор, а не координата  $x$ !). Интегрирование проводится по радиус-вектору  $\mathbf{r}$ , пробегающему все заряды  $\rho(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}$  в каждом элементарном объёме  $dV \equiv d^3\mathbf{r}$ . Если плотность  $\rho(\mathbf{r})$  равна сумме дельта-функций Дирака, мы возвращаемся к сумме полей, создаваемых точечными зарядами (принцип суперпозиции).

• При движении в кулоновском поле, создаваемом точечным зарядом  $Q$ , сохраняется полная энергия пробного заряда  $q$ :

$$\mathcal{E} = \mathbb{E} + \frac{qQ}{r} = \mathbb{E} + q\varphi,$$

где  $\mathbb{E} = m/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$ . Действительно (см. также стр. 158):

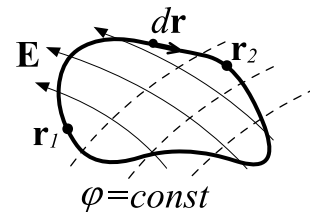
$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{u}\mathbf{F} - \frac{qQ}{r^2} \frac{\mathbf{r}\mathbf{u}}{r} = \frac{qQ}{r^3} (\mathbf{r}\mathbf{u}) - \frac{qQ}{r^3} (\mathbf{r}\mathbf{u}) = 0.$$

Поэтому потенциал  $\varphi$  можно интерпретировать, как потенциальную энергию пробного единичного заряда:

$$U(\mathbf{r}) = q\varphi(\mathbf{r}).$$

При помощи теоремы Стокса равенство нулю ротора электрического поля можно записать в интегральном виде:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0,$$



где интегрирование проводится по замкнутому контуру  $L$ . Сила, действующая на заряд  $q$ , равна  $q\mathbf{E}$ , а скалярное произведение силы на вектор смещения  $d\mathbf{r}$  в пространстве – это работа, совершаемая для перемещения заряда в поле. Поэтому подобный интегральный закон выражает равенство нулю работы перемещения заряда по замкнутому контуру. Если контур незамкнутый, то работа:

$$A = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} q\nabla\varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = -q \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\varphi = q\varphi(\mathbf{r}_1) - q\varphi(\mathbf{r}_2)$$

равна разнице потенциалов в начальной и конечной точках (изменению потенциальной энергии) и поэтому *не зависит* от формы пути.

Так как электрическое поле является градиентом от потенциала (с обратным знаком), то оно всегда перпендикулярно поверхности постоянного потенциала  $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const}$  (стр. 754). Такие поверхности называются *эквипотенциальными*. Перемещение заряда вдоль эквипотенциальной поверхности происходит перпендикулярно вектору силы и не меняет энергии заряда. Например, для центрально-симметричного электрического поля, создаваемого точечным зарядом или заряженным шаром, эквипотенциальные поверхности являются сферами, окружающими центр симметрии.

## 5.2 Поле равномерно движущегося заряда

• Пусть точечный заряд  $Q$  находится в начале системы отсчёта  $S'$ . Сила, с которой он действует на “пробный” заряд  $q$  в системе  $S'$ , равна:



$$\mathbf{F}' = \frac{qQ}{r'^3} \mathbf{r}'. \quad (5.11)$$

Найдём, как будет выглядеть это же взаимодействие в “неподвижной” системе отсчёта  $S$ , мимо которой система  $S'$  движется с *постоянной* скоростью  $\mathbf{v}$ . Выпишем ещё раз законы преобразования различных величин. Базовыми являются преобразования Лоренца (стр. 33):

$$t' = \gamma(t - \mathbf{v}\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \gamma\mathbf{v}t + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}), \quad (5.12)$$

где  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$  и  $\Gamma = \gamma^2/(\gamma + 1) = (\gamma - 1)/v^2$ . Из них непосредственно следует закон сложения скоростей:

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} - \gamma\mathbf{v} + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{u})}{\gamma(1 - \mathbf{v}\mathbf{u})}, \quad (5.13)$$

Кроме этого, в третьей главе (стр. 163) был получен закон преобразования силы  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ , который мы запишем в обратном виде (слева сила в системе  $S$ , а справа – в системе  $S'$ ):

$$\frac{\mathbf{F}}{\gamma(1 - \mathbf{v}\mathbf{u})} = \mathbf{F}' + \gamma\mathbf{v}(\mathbf{u}'\mathbf{F}') + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{F}'). \quad (5.14)$$

Рассмотрим момент времени  $t = 0$  (когда начала систем совпадают). В этом случае из преобразований Лоренца (5.12) следует ( $\llcorner$  Н<sub>34</sub>):

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}'^2 = \mathbf{r}^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2, \quad \mathbf{v}\mathbf{r}' = \gamma(\mathbf{v}\mathbf{r}). \quad (5.15)$$

Умножая  $\mathbf{r}'$  при  $t = 0$  на  $\mathbf{u}'$  (5.13), приходим к соотношению ( $\llcorner$  Н<sub>35</sub>):

$$\mathbf{u}'\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{u}\mathbf{r}}{\gamma(1 - \mathbf{v}\mathbf{u})} - \gamma(\mathbf{v}\mathbf{r}).$$

Подставим в правую часть преобразования (5.14) силу Кулона для неподвижного заряда  $\mathbf{F}'$  в системе  $S'$  (5.11) и выражения для  $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{u}'\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{v}\mathbf{r}'$ :

$$\frac{\mathbf{F}}{\gamma(1 - \mathbf{v}\mathbf{u})} = \frac{qQ}{r'^3} \{\mathbf{r}' + \gamma\mathbf{v}(\mathbf{u}'\mathbf{r}') + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}')\} = \frac{qQ}{r'^3} \left\{ \mathbf{r} + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{u}\mathbf{r})}{1 - \mathbf{v}\mathbf{u}} \right\}.$$

При переходе ко второму равенству учтено, что  $(\gamma + 1)\Gamma = \gamma^2$ .



Приводя к общему знаменателю и выражая  $r' = \sqrt{\mathbf{r}'^2}$  через  $r = \sqrt{\mathbf{r}^2}$  при помощи (5.15), окончательно находим силу, действующую на  $q$  в “неподвижной” системе  $S$ :

$$\mathbf{F} = \frac{qQ\gamma}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2)^{3/2}} (\mathbf{r} + [\mathbf{u} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{r}]]). \quad (5.16)$$

Если бы кулоновская сила в (5.11) была регуляризована (стр. 264), то в знаменателе дополнительно появилось бы слагаемое  $+a^2$ .

Обратим внимание, что при выводе (5.16) мы использовали *постулат* инвариантности заряда частицы. Аналогично инвариантности массы, мы считаем, что заряд – это собственная характеристика объекта, не зависящая от его скорости. Другими словами:

$$Q' = Q.$$

Выражение для силы (5.16) разбивается на два слагаемых, второе из которых зависит от скорости пробного заряда  $\mathbf{u}$ . Напомним, что в системе  $S'$ , связанной с зарядом  $Q$ , сила действия на пробный заряд не зависела от его скорости. Однако, если заряд, создающий поле, движется, теория относительности приводит к тому, что должна появиться ещё одна компонента силового воздействия, зависящая не только от положения пробного заряда, но и от его скорости. Её удобно выделить в виде отдельного поля. В результате получается *сила Лоренца*:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{u} \times \mathbf{B}],$$

где введены *электрическое* и *магнитное поля*:

$$\mathbf{E} = \frac{Q\gamma\mathbf{r}}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2)^{3/2}}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{v} \times \mathbf{E}]. \quad (5.17)$$

Подчеркнём, что появление магнитного поля  $\mathbf{B}$  (а точнее, силового воздействия  $q[\mathbf{u} \times \mathbf{B}]$ , зависящего от скорости пробной частицы) – это чисто релятивистский эффект, возникающий благодаря преобразованию силы между двумя системами отсчёта. Как мы увидим чуть позже, уравнения Максвелла – это “лишь” закон Кулона плюс преобразования Лоренца! Магнит, притягивающий металл, является самым первым известным человечеству релятивистским эффектом (конечно, после видимого света).

Выражение для напряжённости электрического поля может быть записано следующим образом:

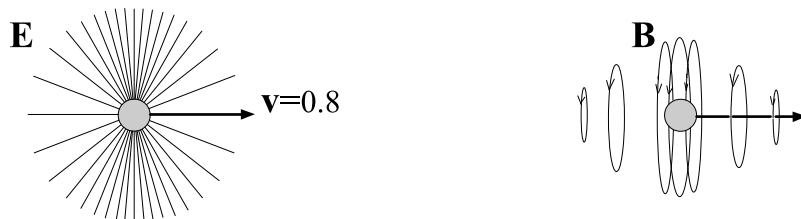
$$\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{r^3} \frac{\gamma}{(1 + \gamma^2 v^2 \cos^2 \theta)^{3/2}}, \quad (5.18)$$

где  $\mathbf{v}\mathbf{r} = vr \cos \theta$ , а  $\theta$  – угол между радиус-вектором и скоростью.

Изучим подробнее характер электрического и магнитного полей, создаваемых движущимся зарядом. На одном и том же расстоянии эти поля достигают минимального значения в точках, находящихся на линии движения заряда  $Q$ , когда  $\theta = 0$  в (5.18), и максимального на плоскости, перпендикулярной к скорости и проходящей через заряд  $Q$ . Например, для электрического поля:

$$|\mathbf{E}_{min}| = \frac{1}{\gamma^2} \frac{Q}{r^2}, \quad |\mathbf{E}_{max}| = \gamma \frac{Q}{r^2}.$$

“Густота” *линий напряженности* символизирует величину поля, поэтому электрическое поле движущегося заряда выглядит примерно так, как изображено на левом рисунке:



Образно говоря, силовые линии “сплюсциваются”, прижимаясь к плоскости, перпендикулярной скорости заряда  $\mathbf{v}$ .

На правом рисунке изображены силовые линии магнитного поля. Так как  $\mathbf{B}$  равно векторному произведению скорости  $\mathbf{v}$  на электрическое поле  $\mathbf{E}$ , то магнитные силовые линии оказываются замкнутыми (см. правило штопора, стр. 750). В отличие от электрической составляющей силы, для которой линии напряжённости начинаются на заряде, магнитное поле не имеет зарядов. Это *кинематический эффект*, родственные замедлению времени, абберации и т.п.

В книге принята система единиц, в которой  $c = 1$ . Для “восстановления” константы  $c$  мы должны умножить величины, имеющие размерность времени в некоторой степени, на  $c$  в той же степени. При применении этого правила сила делится на  $c^2$ . Чтобы при этом *нерелятивистский* закон Кулона не изменился, заряд необходимо разделить на  $c$ , поэтому:

$$\mathbf{F} \mapsto \frac{\mathbf{F}}{c^2}, \quad Q \mapsto \frac{Q}{c}, \quad \mathbf{E} \mapsto \frac{\mathbf{E}}{c}, \quad \mathbf{B} \mapsto \frac{\mathbf{B}}{c}.$$

Учитывая, что для скорости  $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}/c$ , сила Лоренца и связь магнитного и электрического полей с восстановленной константой  $c$  имеют вид:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{B}], \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}].$$

Дальше мы будем по-прежнему использовать систему  $c = 1$ , считая, что восстановление  $c$  в любой формуле не составит для Читателя труда.

• В первом разделе при помощи закона Кулона для неподвижного заряда и принципа суперпозиции мы получили уравнения электростатики (5.6), стр. 268, для электрического поля. Выясним, каким дифференциальным уравнениям удовлетворяют электрическое и магнитное поля движущегося заряда.

Проведя регуляризацию, вычислим ( $\ll N_{36}$ ) дивергенцию от электрического поля движущегося заряда:

$$\nabla \mathbf{E} = \nabla \frac{Q \gamma \mathbf{r}}{(r^2 + \gamma^2 (\mathbf{v}\mathbf{r})^2 + a^2)^{3/2}} = 4\pi Q \delta_a(\mathbf{r}),$$

где введена функция:

$$\delta_a(\mathbf{r}) = \frac{3}{4\pi} \frac{\gamma a^2}{(r^2 + \gamma^2 (\mathbf{v}\mathbf{r})^2 + a^2)^{5/2}}.$$

При  $r \neq 0$ , если  $a \rightarrow 0$ , функция  $\delta_a$  равна нулю. При  $r = 0$ ,  $a \rightarrow 0$  она стремится к бесконечности. Убедимся, что в этом пределе  $\delta_a$  не зависит от скорости и равна  $\delta$ -функции Дирака. Проинтегрируем электрическое поле по сфере, окружающей заряд ( $|d\mathbf{S}| = r^2 d\Omega$ ):

$$\int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{Q\gamma}{(1 + \gamma^2 v^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} \sin \theta d\theta = 4\pi Q.$$

Интегрирование проводится по сферическим углам на фиксированном расстоянии  $r$  от заряда. Ось  $z$  направлена вдоль скорости. Интеграл по углу  $\phi$  даёт множитель  $2\pi$ . В интеграле по  $\theta$  сделаем замену  $z = \cos \theta$ :

$$\int_{-1}^1 \frac{2\pi Q \gamma dz}{(1 + \gamma^2 v^2 z^2)^{3/2}} = \frac{2\pi Q \gamma z}{(1 + \gamma^2 v^2 z^2)^{1/2}} \Big|_{-1}^{+1} = 4\pi Q.$$

Первообразная интеграла проверяется прямым дифференцированием. Таким образом, поток через сферу, окружающую заряд, при  $a \rightarrow 0$  равен  $4\pi Q$ . Следовательно, для движущегося заряда по-прежнему справедливо электростатическое уравнение:

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi Q \delta(\mathbf{r}). \quad (5.19)$$

Мы видим, что, несмотря на то, что вектор напряжённости электрического поля *не обладает* сферической симметрией, дивергенция имеет такое же сингулярное значение, как и в случае неподвижного заряда.

Найдём теперь дивергенцию от магнитного поля:

$$\nabla \mathbf{B} = \nabla [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] = -\mathbf{v} [\nabla \times \mathbf{E}].$$

Так как  $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ , ротор электрического поля равен:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -[\mathbf{r} \times \nabla] \frac{Q\gamma}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2)^{3/2}} = \frac{3Q\gamma^3[\mathbf{r} \times \mathbf{v}](\mathbf{v}\mathbf{r})}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2)^{5/2}}. \quad (5.20)$$

Так как для смешанного произведения  $\mathbf{v}[\mathbf{r} \times \mathbf{v}] = [\mathbf{v} \times \mathbf{v}]\mathbf{r} = 0$ , то дивергенция магнитного поля равна нулю во всём пространстве, включая положение электрического заряда:

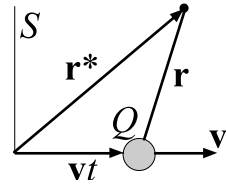
$$\nabla \mathbf{B} = 0. \quad (5.21)$$

Выше мы выбрали момент времени  $t' = t = 0$ , когда заряд находился в началах систем  $S$  и  $S'$ . Так как заряд вместе с  $S'$  движется, поле в фиксированной точке  $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{v}t$  неподвижной системы отсчёта  $S$  изменяется. Поэтому для произвольного положения заряда необходимо везде подставить  $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}^* - \mathbf{v}t$  (звёздочку будем опускать). В частности:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = Q\gamma \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}t}{\{(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)^2 + \gamma^2(\mathbf{v}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t))^2\}^{3/2}}.$$

Производную электрического поля по времени можно вычислить следующим образом (по  $i$  сумма от 1 до 3):

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial(r_i - v_i t)} \frac{\partial(r_i - v_i t)}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r_i} v_i = -(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{E}.$$



Используя это соотношение, найдём ротор магнитного поля (5.17):

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] = \mathbf{v}(\nabla \mathbf{E}) - (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{E}.$$

Во втором равенстве применена формула “бац минус цаб”. Воспользовавшись уравнением  $\nabla \mathbf{E} = 4\pi Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$  и подставив вместо  $-(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{E}$  производную электрического поля по времени, получаем:

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (5.22)$$

где  $\mathbf{j} = Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)\mathbf{v}$  называется *плотностью тока* точечного заряда.

Аналогично производной электрического поля, производная магнитного поля по времени равна:

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{B} = (\mathbf{v}\nabla)[\mathbf{v} \times \mathbf{E}].$$

В силу тождества  $(\mathbf{v}\nabla)[\mathbf{v} \times \mathbf{r}] = 0$  ( $\llcorner$  Н<sub>37</sub>) можно вынести  $[\mathbf{v} \times \mathbf{r}]$  за оператор набла и получить ( $\llcorner$  Н<sub>38</sub>):

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = [\mathbf{v} \times \mathbf{r}](\mathbf{v}\nabla) \frac{Q\gamma}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2)^{3/2}} = \frac{3Q\gamma(1 + \gamma^2v^2)[\mathbf{r} \times \mathbf{v}](\mathbf{v}\mathbf{r})}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2)^{5/2}},$$

где для краткости  $t = 0$ . Учитывая, что  $1 + \gamma^2v^2 = \gamma^2$ , в правой части получим ротор электрического поля (5.20), поэтому:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (5.23)$$

Если магнитное поле постоянно или отсутствует, ротор электрического поля равен нулю, как это было в электростатике. В общем же случае ротор  $\mathbf{E}$  отличен от нуля.

Соотношения (5.19), (5.21), (5.22), (5.23) являются дифференциальными уравнениями, которым удовлетворяют электрическое и магнитное поля движущегося с постоянной скоростью  $\mathbf{v}$  заряда. Эти уравнения линейны, что является отражением *принципа суперпозиции*. Поэтому, если в пространстве находится множество зарядов, движущихся с различными постоянными скоростями, результирующее электромагнитное поле будет равно векторной сумме напряжённостей полей, создаваемых каждым зарядом. В этом случае плотность заряда и плотность тока равны сумме  $\delta$ -функций Дирака:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a Q_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a Q_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \mathbf{v}_a,$$

где  $\mathbf{r}_a(t)$  – положение  $a$ -того заряда  $Q_a$ , а  $\mathbf{v}_a$  – его скорость. Выше предполагалось, что скорости всех зарядов постоянны. Соответственно, их траектории равны  $\mathbf{r}_a(t) = \mathbf{r}_{a0} + \mathbf{v}_a t$ .

Так же, как это было сделано в электростатике, можно перейти к непрерывному пределу, усредняя точечные заряды в некотором небольшом объёме (если эти заряды расположены достаточно близко). Тогда плотность заряда  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$  будет “гладкой” функцией координат. Аналогично гладкой становится векторная функция, определяющая плотность тока зарядов  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho \mathbf{v}$ , где  $\mathbf{v}$  – средняя скорость движения зарядов в объёме.

### 5.3 Уравнения Максвелла

Выпишем ещё раз полученные в предыдущем разделе уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho, & \nabla \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{array} \right. \quad (5.24)$$

Выше скорость  $\mathbf{v}$  зарядов считалась постоянной. Это, конечно, не означает независимость полей от времени. Когда заряд пролетает мимо наблюдателя с постоянной скоростью, поля изменяются со временем, поэтому в уравнениях появляется производная  $\partial/\partial t$ .

В дальнейшем будем предполагать, что эти же уравнения справедливы и для системы зарядов, каждый из которых *может двигаться с и ускорением*. Справедливость такого обобщения, вообще говоря, ниоткуда не следует и может быть проверена только экспериментально. Уравнения Максвелла позволяют описать множество явлений. Если отвлечься от квантовых эффектов, все предсказания классической теории Максвелла подтверждаются на опыте. Поэтому подобное обобщение имеет достаточно веские основания.

Обратим внимание на линейность уравнений Максвелла, как по полям, так и по плотности заряда и тока (например, нет членов вида  $\mathbf{E}\rho$ ). Благодаря этой линейности мы можем использовать принцип суперпозиции, суммируя независимо поля, создаваемые различными зарядами. (На самом деле, конечно, всё наоборот, и, постулировав принцип суперпозиции, мы получили линейные уравнения).

Стоит также обратить внимание, что уравнение для дивергенции электрического поля оказывается более общим, чем закон Кулона в исходной записи. Оно имеет в качестве решения как сферически симметричный вектор  $\mathbf{E}$  при  $\mathbf{v} = 0$ , так и сплюснутый “ёжик” для движущегося заряда.

Уравнения Максвелла должны быть дополнены силой Лоренца, действующей со стороны электромагнитных полей на движущийся со скоростью  $\mathbf{u}$  точечный заряд  $q$ :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{u} \times \mathbf{B}]. \quad (5.25)$$

Обычно задают фиксированные распределения плотности заряда  $\rho$  и тока  $\mathbf{j}$ , затем, решая уравнения Максвелла, получают поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . С их помощью вычисляется величина силы, действующая на небольшой заряд  $q$ , движущийся в этом электромагнитном поле.

• Два из 4-х уравнений Максвелла содержат в себе важное соотношение, связывающее плотности зарядов и токов. Умножим уравнение для ротора магнитного поля  $\nabla \times \mathbf{B}$  слева на оператор  $\nabla$ :

$$\nabla[\nabla \times \mathbf{B}] = [\nabla \times \nabla]\mathbf{B} = 0 = 4\pi\nabla\mathbf{j} + \frac{\partial\nabla\mathbf{E}}{\partial t}. \quad (5.26)$$

Учитывая, что  $\nabla\mathbf{E} = 4\pi\rho$ , получим *уравнение непрерывности*:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\mathbf{j} = 0, \quad (5.27)$$

которое выражает закон сохранения заряда. Это ясно видно, если уравнение непрерывности при помощи теоремы Гаусса переписать в интегральной форме, проинтегрировав по некоторому объёму  $V$ :

$$I = -\frac{dQ}{dt},$$

где введены полный заряд  $Q$ , находящийся внутри объёма, и ток  $I$ :

$$Q = \int_V \rho dV, \quad I = \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S}.$$

Таким образом, изменение заряда в объёме (производная по времени) связано с током  $I$ , проходящим через поверхность, которая окружает объём. Рассмотрим перемещение зарядов через поверхность подробнее.

Пусть  $v_n$  – нормальная (перпендикулярная) к поверхности составляющая скорости зарядов. Выделим небольшую площадку на поверхности и прилегающий к ней небольшой объём  $dS v_n dt$  (правый рисунок):



Количество заряда, которое через площадку  $dS$  покидает этот объём за время  $dt$ , равно

$$dQ = \rho dV = \rho v_n dt dS = (\rho \mathbf{v} d\mathbf{S}) dt = (\mathbf{j} d\mathbf{S}) dt.$$

Другими словами, за время  $dt$  из объёма  $dV$  уйдут все заряды, имеющие в направлении  $d\mathbf{S}$  скорость  $v_n$  и находящиеся не далее расстояния  $v_n dt$  от поверхности. Если  $\mathbf{j}$  направлен наружу, то заряд в объёме уменьшается, если вовнутрь – увеличивается. Говоря об уменьшающемся заряде, мы считаем, что он имеет положительный знак, такой как, например, у протона.

Отметим *локальный характер* закона сохранения в форме уравнения непрерывности (5.27). Изменение заряда в сколь угодно малом объёме сопровождается перемещением зарядов через границу этого объёма. В принципе, можно представить себе и глобальный закон сохранения. Например, заряд, исчезнув в одном месте, *одновременно* появляется в другом, отдалённом месте. Однако это бы противоречило теории относительности. Действительно, в силу относительности одновременности подобное исчезание и появление одновременное в одной системе отсчёта не будет одновременным в других системах. Если мы хотим, чтобы закон сохранения выполнялся для всех наблюдателей, то он должен иметь локальный характер.

Сохранение заряда выглядит достаточно простым и естественным законом. Особенно, если под зарядом понимать число заряженных частиц. Электрон имеет отрицательный заряд, протон имеет такой же по модулю, но положительный заряд, и т.д. Если частицы не уничтожаются, то, чтобы найти суммарный заряд, необходимо сложить в данной области пространства все частицы с положительным зарядом и вычесть число частиц с отрицательным зарядом. Наблюдения за различными реакциями при взаимодействии элементарных частиц показывают, что, даже если частицы уничтожаются или рождаются, суммарный заряд, тем не менее, всегда остаётся неизменным.

Интересно выяснить, в какой степени уравнения Максвелла являются независимыми, считая, что выполняется уравнение непрерывности (5.27). Подставим в (5.26) вместо  $\nabla \mathbf{j}$  из уравнения непрерывности производную  $-\partial \rho / \partial t$ . Аналогично можно взять дивергенцию от уравнения  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ . В результате получатся два уравнения:

$$\frac{\partial(\nabla \mathbf{E} - 4\pi \rho)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \nabla \mathbf{B}}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, из уравнений Максвелла для роторов и уравнения непрерывности “почти” следуют уравнения для дивергенций:

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho + f(x, y, z), \quad \nabla \mathbf{B} = g(x, y, z),$$

где  $f$  и  $g$  – произвольные функции, которые зависят только от координат, но не зависят от времени. Как мы знаем, они на самом деле равны нулю, однако доказать это строго нельзя. В этом смысле все 4 уравнения Максвелла являются независимыми и все они требуются для последовательного описания электромагнитного взаимодействия. Говоря о 4-х уравнениях, не стоит забывать, что их на самом деле 8 (каждое уравнение для роторов является векторным и эквивалентно трём уравнениям в компонентах).



• Дополнительное понимание физического смысла уравнений Максвелла возникает при их записи в интегральном виде. Для этого необходимы теоремы Гаусса и Стокса. Прежде всего запишем знакомый нам из электростатики *закон Гаусса* для электрического поля:

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho \quad \Rightarrow \quad \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi Q.$$

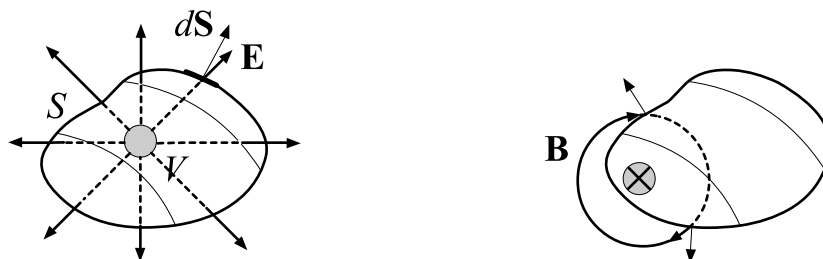
Как мы видели выше, закон Гаусса – это чуть больше, чем закон Кулона. Ему удовлетворяет как сферически симметричное электрическое поле неподвижного заряда, так и сплюснутое поле движущегося заряда.

Аналогичный *закон Гаусса для магнитного поля*:

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$$

свидетельствует об отсутствии магнитных зарядов. Подчеркнём ещё раз, что магнитное поле – это релятивистский кинематический эффект. Его источником является движение заряженных частиц.

Ниже на рисунке условно изображены интегральные теоремы Гаусса для электрического и магнитного полей:



Если один или несколько зарядов находятся внутри объёма, окруженного поверхностью  $S$ , то их силовые линии будут “торчать наружу”, в результате чего поток через поверхность будет ненулевой. Напомним, что вектор элемента поверхности  $d\mathbf{S}$  направлен перпендикулярно к поверхности и *наружу* из объёма. Поэтому, если все силовые линии выходят из объёма, то скалярное произведение  $\mathbf{E} d\mathbf{S}$  оказывается положительным, а полный поток – ненулевым.

Для магнитного поля поток всегда равен нулю, независимо от того, находится ли движущийся заряд внутри или снаружи объёма. На рисунке выше он движется от читателя. Иногда на основании симметрии ковариантных уравнений электродинамики, которые мы рассмотрим чуть позже, высказывается гипотеза о возможности существования магнитных монополей (магнитных зарядов). Если воспринимать магнитное поле, как релятивистский эффект, возникающий при движении зарядов, то эта гипотеза на самом деле выглядит не столь уж и правдоподобной.

Для ротора магнитного поля интегральная форма имеет вид:

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \oint_L \mathbf{B} d\mathbf{r} = 4\pi I + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S},$$

где  $I$  – это полный ток зарядов, проходящих через площадь  $S$ . Из этого уравнения следует, что циркулирующее магнитное поле возникает как вокруг движущихся зарядов (ток), так и вокруг переменного электрического поля. Это уравнение часто называется *законом Ампера-Максвелла*.



Если в цепи переменного электрического тока (меняющего своё направление) находится конденсатор (две металлические пластины), то между ними возникает переменное электрическое поле. Оно, в свою очередь, порождает циркуляцию магнитного поля, такую же, как и вокруг проводов, по которым течёт ток (см. выше правый рисунок).

Ротор электрического поля, в силу уравнений Максвелла, в общем случае не равен нулю:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}.$$

Это уравнение выражает *закон электромагнитной индукции Фарадея*. Подчеркнём, что интегральная версия закона Фарадея, как и остальных записанных выше интегральных соотношений, предполагает простую топологию контура и ограниченной им поверхности. Это означает, что контур, деформируя его без разрывов, можно превратить в окружность, а поверхность деформировать в круг, находящийся внутри этой окружности. Допустимыми являются конфигурации контура и поверхности, которые из этого круга можно получить любыми изгибаниями и растягиваниями (без разрывов). Возможны также и более сложные топологии контуров и поверхностей (например, с дырками), однако в этом случае необходимо аккуратное использование интегральной теоремы Стокса.

Заметим, что не стоит считать, что всегда изменение потока магнитного поля является причиной, а циркуляция электрического – следствием. Функции  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  входят в уравнения Максвелла равноправным образом. Что является следствием, а что причиной – зависит от задачи.

Пусть вдоль замкнутого контура расположен *тонкий* проводник, в котором могут двигаться заряды. Тогда под воздействием циркулирующего электрического поля в нём возникнет электрический ток. Закон электромагнитной индукции Фарадея часто записывают в следующем виде:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (5.28)$$

где  $\Phi$  – поток магнитного поля через поверхность, а

$$\mathcal{E} = \oint_L (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{r}$$

– *электродвижущая сила* (ЭДС), т.е. суммарная сила Лоренца, действующая на единичный заряд вдоль замкнутого контура. Для тонкого *неподвижного* контура магнитная составляющая ЭДС роли не играет. Действительно, в этом случае скорость  $\mathbf{v}$  параллельна смещению  $d\mathbf{r}$  вдоль контура и смешанное произведение  $[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] d\mathbf{r} = [d\mathbf{r} \times \mathbf{v}] \mathbf{B} = 0$ .

Закон Фарадея в форме (5.28) справедлив и в случае постоянного магнитного поля, если контур меняется. Он может изменять свою площадь или менять свою ориентацию (например, вращаться в магнитном поле). Если в этих случаях происходит изменение магнитного потока, то в проводнике возникнет ЭДС и, следовательно, ток. Однако, если магнитное поле не меняется во времени, причина возникновения ЭДС кроется не в уравнении Максвелла  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ , а в силе Лоренца.

Рассмотрим, например, проводник в виде окружности, расположенной перпендикулярно однородному (постоянному) магнитному полю. Пусть радиус этой окружности увеличивается со временем  $r = r(t)$ . Соответственно увеличивается площадь поверхности, которую будем считать плоским кругом. Любой заряд в проводнике, в том числе, движется в радиальном направлении со скоростью  $v = dr/dt$ . В результате магнитной составляющей в силе Лоренца возникает ЭДС, равная  $vB 2\pi r$ , где  $2\pi r$  – длина окружности. С другой стороны, изменение потока магнитного поля, возникающее из-за изменения площади, равно:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(B\pi r^2)}{dt} = 2\pi r v B,$$

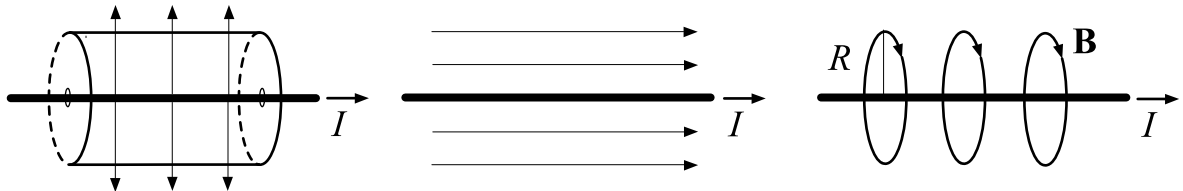
т.е. по модулю равно ЭДС. В качестве упражнения предлагается проанализировать знак, определяемый направлением магнитного поля и свойствами векторного произведения в определении ЭДС. Совпадение с (5.28) в данном частном примере является на самом деле общим результатом, выполняющимся для произвольно движущегося контура. Таким образом, закон Фарадея для замкнутого контура определяется сразу двумя факторами – одним из уравнений Максвелла и силой Лоренца.

## 5.4 Магнитостатика

• Рассмотрим такую конфигурацию токов, при которой напряжённости поля не зависят от времени. В этом случае уравнения Максвелла для магнитного поля имеют вид:

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}. \quad (5.29)$$

В случаях, обладающих явной симметрией, магнитное поле можно найти при помощи интегральных теорем. Рассмотрим, например, бесконечный проводник, по которому течёт постоянный ток. С направлением тока связано выделенное направление, поэтому возможны три разновидности силовых линий с цилиндрической симметрией.



Однако уравнениям магнитостатики удовлетворяет только третья картинка. Действительно, запишем интегральную форму уравнений (5.29):

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad \oint_L \mathbf{B} d\mathbf{r} = 4\pi I,$$

где  $I$  – ток, текущий через поверхность, которая имеет своей границей контур  $L$ . Выберем для первого интеграла в качестве поверхности цилиндр с осью, проходящей через проводник. Вектор площади  $d\mathbf{S}$  перпендикулярен поверхности, и, как несложно видеть, конфигурация поля на первой картинке приводит к ненулевому потоку (через боковую поверхность цилиндра). В качестве контура для второго интеграла возьмём окружность радиуса  $r$ , симметрично окружающую проводник. Вектор  $d\mathbf{r}$  касателен контуру, поэтому вторая конфигурация приводит к нулевой циркуляции. Отличную от нуля циркуляцию имеет только третий случай:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{r} = |\mathbf{B}| 2\pi R = 4\pi I \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{B}| = \frac{2I}{R},$$

где  $R$  – расстояние от проводника. Обратим внимание, что напряжённость магнитного поля убывает, как  $1/R$ . Такая же зависимость от расстояния к проводнику справедлива и для электрического поля бесконечной заряженной нити (стр. 267). Хотя в этом случае вектор напряжённости  $\mathbf{E}$  направлен так, как это изображено выше на первом рисунке.

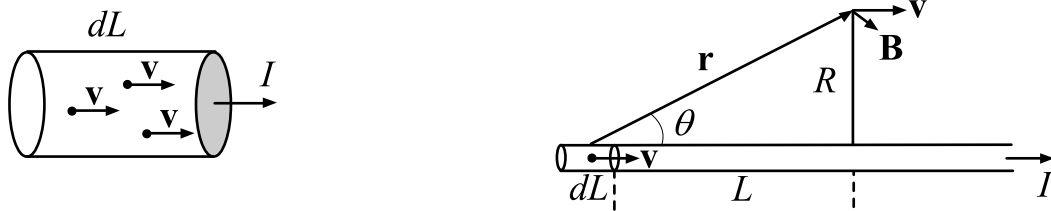
Убедимся, что такой же результат получается, если просуммировать магнитные поля от множества точечных зарядов, создающих ток. Текущий через проводник ток – это количество заряда  $dQ$ , проходящее через сечение провода в единицу времени  $dt$ . Если мы возьмём маленький участок провода  $dL$ , то его сечение за время  $dt$  пересечёт заряд, движущийся со скоростью  $v = dL/dt$ :

$$dQ = Idt = IdL/v.$$

Магнитное поле от такого заряда, в соответствии с (5.17), стр. 271 равно:

$$d\mathbf{B} = \frac{dQ \gamma [\mathbf{v} \times \mathbf{r}]}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2)^{3/2}}.$$

Введём угол  $\theta$  между направлением скорости  $\mathbf{v}$  и радиус-вектором  $\mathbf{r}$ .



Если  $R$  – расстояние от точки наблюдения к проводнику (см. рисунок), то

$$\cos \theta = \frac{L}{r}, \quad \sin \theta = \frac{R}{r}, \quad r = \sqrt{L^2 + R^2}.$$

Векторное произведение  $[\mathbf{v} \times \mathbf{r}]$  направлено по окружности к проводнику и по модулю равно  $|\mathbf{v} \times \mathbf{r}| = vr \sin \theta$ , поэтому:

$$|\mathbf{B}| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I \gamma r \sin \theta dL}{(r^2 + \gamma^2 v^2 r^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I \gamma R dL}{(R^2 + \gamma^2 L^2)^{3/2}} = \frac{I}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}},$$

где учтено, что  $\gamma^2 v^2 = \gamma^2 - 1$ , и сделана замена  $x = \gamma L/R$ . Дифференцируя, можно проверить, что первообразная интеграла – это  $x/\sqrt{1+x^2}$ . Поэтому определённый интеграл равен 2, и мы приходим к полученному из соображений симметрии выражению  $|\mathbf{B}| = 2I/R$ .

Понятно, что если заряды всё время приходят из бесконечности и туда же уходят, то такое магнитное поле будет стационарным. Эта ситуация отличается от магнитного поля одиночного заряда. Последнее зависит от времени и по мере удаления заряда от точки наблюдения уменьшается.

• Первое уравнение магнитостатики  $\nabla \mathbf{B} = 0$  можно тождественно выполнить, если ввести *векторный потенциал*, ротор которого даёт магнитное поле:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Так как векторное произведение вектора самого на себя равно нулю, по правилу “выталкивания” имеем:  $\nabla \mathbf{B} = \nabla[\nabla \times \mathbf{A}] = [\nabla \times \nabla] \mathbf{A} = 0$ . По этой же причине прибавление к векторному потенциалу градиента произвольной скалярной функции не изменяет магнитного поля:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}.$$

Выбором того или иного вида функции  $f$  можно добиться выполнения определённого условия на векторный потенциал, которое называется *калибровочным условием*. Например, можно потребовать, чтобы выполнялась *кулоновская калибровка*:

$$\nabla \mathbf{A} = 0.$$

Действительно, пусть  $\mathbf{A}'$  не удовлетворяет этому условию и в правой части стоит не ноль, а некоторая функция  $\nabla \mathbf{A}' = g$ . Перейдём к другому потенциалу  $\nabla \mathbf{A}' = \nabla(\mathbf{A} + \nabla f) = \nabla \mathbf{A} + \Delta f = g$ . Если выбрать функцию  $f$  как решение уравнения Лапласа  $\Delta f = g$ , то новый векторный потенциал  $\mathbf{A}$  будет удовлетворять кулоновской калибровке. В этой калибровке второе уравнение магнитостатики приобретает вид уравнения Лапласа. По формуле “бац минус цаб” имеем

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}] = \nabla(\nabla \mathbf{A}) - (\nabla \nabla) \mathbf{A} = 4\pi \mathbf{j}.$$

Первое слагаемое равно нулю, поэтому:

$$\Delta \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{j}.$$

Это уравнение для каждой компоненты имеет вид уравнения (5.8), стр. 268, поэтому для ограниченных токов можно записать его решение:

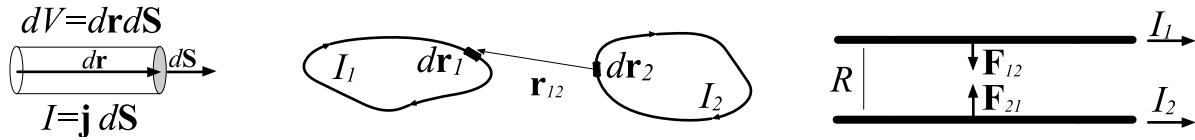
$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|}. \quad (5.30)$$

Взяв ротор от этого выражения, получаем магнитное поле:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{r})}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^3} d^3 \mathbf{r}, \quad (5.31)$$

где учтено, что  $\nabla(1/|\mathbf{x}|) = -\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3$ , и при взятии ротора  $\nabla \times \mathbf{A}$  под интегралом векторы в векторном произведении переставлены местами:  $-(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{r})$ .

В 1819 г. Ганс Христиан Эрстед обнаружил, что ток, текущий по проводнику, создаёт магнитное поле, которое влияет, например, на стрелку компаса. В 1920 г. Био и Савар, а затем в более точных опытах Андре Мари Ампер изучили магнитное взаимодействие стационарных токов.



Для тонкого проводника плотность тока  $\mathbf{j}$  сосредоточена вдоль  $d\mathbf{r}$  проводника. Поэтому объёмный интеграл (5.31) превращается в контурный:  $\mathbf{j} d^3\mathbf{r} \mapsto I d\mathbf{r}$ , где вектор  $d\mathbf{r}$  направлен вдоль направления тока (см. выше первый рисунок). Если  $\mathbf{r}$  направлен от  $d\mathbf{r}$  в точку наблюдения, то результирующее магнитное поле (5.31) получается при интегрировании выражения:

$$d\mathbf{B} = I \frac{d\mathbf{r} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (5.32)$$

Сила, действующая на второй проводник, определяется силой Лоренца, которая в непрерывном случае имеет вид:

$$\mathbf{F} = \int [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] d^3\mathbf{r} = \sum Q_k [\mathbf{u}_k \times \mathbf{B}], \quad (5.33)$$

где суммарная сила Лоренца получается для системы точечных зарядов  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum Q_k \mathbf{u}_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)$ . Переходя для проводника от объёмного интеграла к контурному, запишем элемент силы:

$$d\mathbf{F} = I [d\mathbf{r} \times d\mathbf{B}].$$

Сила со стороны второго проводника на первый (см. рисунок) равна:

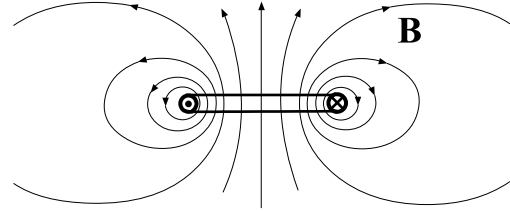
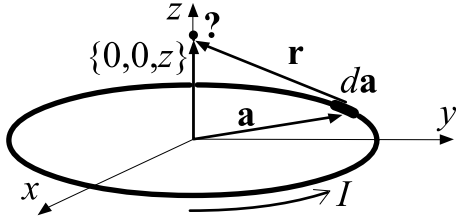
$$\frac{d\mathbf{F}_{12}}{I_1 I_2} = \frac{d\mathbf{r}_1 \times [d\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_{12}]}{|\mathbf{r}_{12}|^3} = \frac{(\mathbf{r}_{12} d\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_{12}|^3} d\mathbf{r}_2 - \frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3} (d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2),$$

где  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  и во втором равенстве применена формула “бац минус цаб”. Первое слагаемое во втором равенстве является полным дифференциалом ( $\llcorner \text{H}_{39}$ ) по  $\mathbf{r}_1$ :  $-d(1/|\mathbf{r}_{12}|)$ . Поэтому при интегрировании по замкнутому контуру или проводнику, приходящему и уходящему в бесконечности, это слагаемое будет равно нулю. В результате:

$$\mathbf{F}_{12} = -I_1 I_2 \int \int \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2).$$

В частности, два линейных параллельных проводника на единицу длины притягиваются с силой  $F = 2I_1 I_2 / R$ , где  $R$  – расстояние между проводниками и токи направлены в одну сторону ( $\llcorner \text{H}_{40}$ ). Если же токи противоположны, то проводники отталкиваются.

• Применим полученные выше формулы для нахождения магнитного поля, создаваемого постоянным током  $I$ , текущим по круговому контуру радиуса  $a$ . Пусть окружность контура лежит в плоскости  $x, y$  с центром в начале координат. Найдём поле на оси  $z$ . Проведём вектор  $\mathbf{a} = \{ac_\phi, as_\phi, 0\}$  от начала координат к некоторой точке окружности. Как и раньше,  $c_\phi = \cos \phi$ , и т.д.



Радиус-вектор, соединяющий точку на контуре и точку наблюдения, по правилу сложения векторов равен:

$$\mathbf{r} = \{0, 0, z\} - \mathbf{a} = \{-ac_\phi, -as_\phi, z\}, \quad r^2 = a^2 + z^2.$$

Смещение вдоль контура равно  $d\mathbf{a} = \{-as_\phi d\phi, ac_\phi d\phi, 0\}$  (выше мы обозначали его, как  $d\mathbf{r}$ ). Поэтому:

$$d\mathbf{a} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -as_\phi & ac_\phi & 0 \\ -ac_\phi & -as_\phi & z \end{vmatrix} d\phi = \{azc_\phi, -azs_\phi, a^2\} d\phi.$$

Магнитное поле в соответствии с (5.32) равно:

$$\mathbf{B} = I \int_L \frac{d\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{r^3} = I \int_0^{2\pi} \frac{\{azc_\phi, -azs_\phi, a^2\}}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\phi = \{0, 0, 1\} \frac{2\pi a^2 I}{(a^2 + z^2)^{3/2}},$$

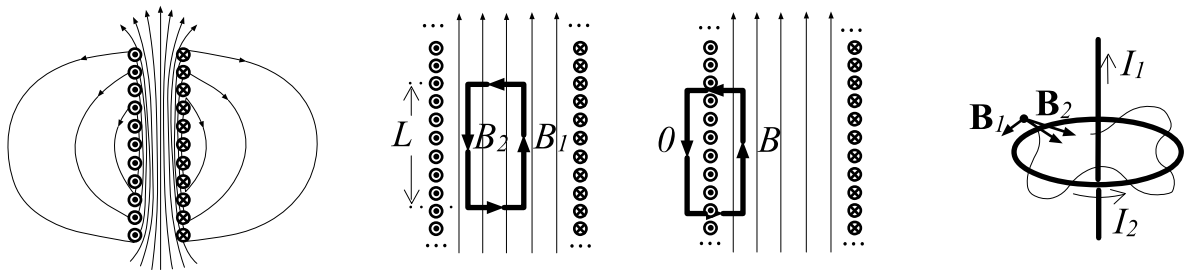
где учтено, что интегралы по периоду косинуса и синуса равны нулю. Таким образом, магнитное поле на оси  $z$  направлено вдоль этой оси и убывает с ростом  $z$ , как  $1/z^3$ .

Для вычисления поля в произвольной точке необходимо проделать аналогичные выкладки. В этом случае возникает т.н. эллиптический интеграл. Если же контур с током имеет некруговую форму ( $a = a(\phi)$ ), интеграл, скорее всего, не сведётся к известным функциям, но будет одномерным (по углу  $\phi$ ), поэтому легко вычисляется численно.

Выше на правом рисунке приведены магнитные силовые линии, возникающие вокруг кольцевого тока. Рисунок выполнен в сечении (для фиксированного полярного угла  $\phi$ ). Магнитные линии замкнуты (как и в случае движущегося точечного заряда или бесконечного проводника). Исключением является магнитное поле на оси  $z$ , силовая линия которого приходит из бесконечности и в бесконечность уходит.



Из “поставленных стопкой” круговых колец с током можно составить соленоид. На практике он организуется при помощи единого проводника, скрученного в спираль. Если шаг спирали много меньше её радиуса, то такая спираль эквивалентна “стопке” колец (ниже первый рисунок). Внутри соленоида магнитное поле “плотное” и его силовые линии почти параллельны. Вне соленоида напряжённость поля очень небольшая. В пределе бесконечного соленоида (бесконечная стопка) магнитное поле снаружи оказывается равным нулю, а внутри постоянно и однородно.



Это можно доказать при помощи простых рассуждений. Из соображений симметрии магнитные силовые линии должны быть параллельны. Пусть вне соленоида магнитное поле убывает при удалении от его оси. В силу интегральной версии уравнения  $\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}$  интеграл  $\mathbf{B}d\mathbf{r}$  по замкнутому контуру равен току, проходящему через натянутую на него поверхность. Если тока нет, интеграл равен нулю. Если контур имеет форму прямоугольника, интеграл по его горизонтальным сторонам равен нулю ( $\mathbf{B}$  перпендикулярно  $d\mathbf{r}$ ), а по вертикальным:  $(B_1 - B_2)L$ , где  $L$  – длина стороны прямоугольника, а  $B_1$  и  $B_2$  – значения поля на его сторонах. Поэтому для контура внутри соленоида и снаружи  $B_1 = B_2$  независимо от его положения. Поэтому  $\mathbf{B} = const$ . Так как на бесконечности  $\mathbf{B} = 0$ , то из  $\mathbf{B} = const$  следует, что поле будет равно нулю везде вне соленоида. Если контур охватывает ток (выше третий рисунок), то  $BL = 4\pi I$ , поэтому однородное поле внутри соленоида равно  $B = 4\pi I/L$ , где  $I/L$  – ток на единицу высоты “стопки”.

В качестве упражнения предлагается проверить, что векторный потенциал внутри соленоида равен  $\mathbf{A} = (B/2)[\mathbf{k} \times \mathbf{r}]$ , где  $\mathbf{k}$  – единичный вектор вдоль оси. Вне соленоида потенциал равен  $\mathbf{A} = (Ba^2/2)[\mathbf{k} \times \mathbf{r}]/R$ , где  $R = (\mathbf{r}^2 - (\mathbf{k}\mathbf{r}))^{1/2}$  – расстояние от оси до точки наблюдения.

В заключение заметим, что магнитные силовые линии могут иметь бесконечную длину, но находиться в ограниченном пространстве. Так, если к магнитному полю кольца добавляется магнитное поле бесконечного тока вдоль оси  $z$ , то их сумма, в общем случае, даёт незамкнутую силовую линию, плотно “навивающуюся” на торообразную поверхность, полностью её заполняя (выше последний рисунок) [25].

## 5.5 Дипольный и магнитный моменты

• Если заряды сосредоточены в некоторой области пространства, то можно найти приближенное значение интегралов (5.9), (5.10), стр. 268, на большом расстоянии от зарядов. Будем считать, что  $r \ll |\mathbf{x}|$ , и, пренебрегая вторым порядком малости по  $r/|\mathbf{x}|$ , запишем разложение:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{r})^2}} \approx (\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x}\mathbf{r})^{-1/2} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \left(1 - \frac{2\mathbf{x}\mathbf{r}}{\mathbf{x}^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x}\mathbf{r}}{|\mathbf{x}|^3},$$

где в последнем приближенном равенстве мы воспользовались разложением  $(1 + \varepsilon)^a \approx 1 + a\varepsilon$ . Вводя полный заряд  $Q$ , как интеграл по объёму от плотности заряда и вектор *дипольного момента*  $\mathbf{d}$ :

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad \mathbf{d} = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r},$$

выражение для потенциала (5.9) можно записать в следующем виде:

$$\varphi(\mathbf{x}) \approx \frac{Q}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x}\mathbf{d}}{|\mathbf{x}|^3} + \dots$$

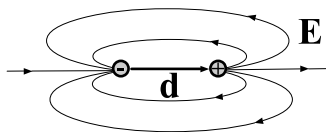
Беря градиент от потенциала, получаем электрическое поле  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ . Градиент от первого слагаемого даёт кулоновское поле, а градиент от второго вычисляется, как производная произведения:

$$\nabla \frac{\mathbf{x}\mathbf{d}}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{\nabla(\mathbf{x}\mathbf{d})}{|\mathbf{x}|^3} + (\mathbf{x}\mathbf{d})\nabla \frac{1}{(\mathbf{x}^2)^{3/2}} = \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{x}|^3} - (\mathbf{x}\mathbf{d}) \frac{3}{2} \frac{2\mathbf{x}}{(\mathbf{x}^2)^{5/2}},$$

где при взятии производной мы проигнорировали сингулярность, так как значение поля нас интересует на больших расстояниях от начала координат. Вводя единичный вектор  $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ , окончательно имеем:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) \approx Q \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{3(\mathbf{n}\mathbf{d})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{|\mathbf{x}|^3} + \dots$$

Ведущее кулоновское приближение является центрально симметричным полем. Дипольное слагаемое нарушает эту симметрию, так как появляется выделенное направление, определяемое вектором  $\mathbf{d}$ , например:



$$\mathbf{d} = \sum q_k \mathbf{r}_k = q_1 \mathbf{r}_1 + q_2 \mathbf{r}_2.$$

Дипольный момент направлен от отрицательного заряда к положительному. Если заряды по модулю одинаковые ( $q_1 = -q_2 = q$ ), момент равен заряду, умноженному на расстояние между зарядами  $\mathbf{d} = q(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ . В этом случае  $Q = q_1 + q_2 = 0$  и поле  $\mathbf{E}$  на оси диполя убывает как  $2|\mathbf{d}|/|\mathbf{x}|^3$ .

Найдём силу, действующую на диполь во внешнем электрическом поле. Будем считать, что диполь достаточно маленький по сравнению со степенью неоднородности электрического поля. Поэтому последнее разложим в ряд Тейлора по каждой компоненте:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}(0) + x \frac{\partial \mathbf{E}(0)}{\partial x} + y \frac{\partial \mathbf{E}(0)}{\partial y} + z \frac{\partial \mathbf{E}(0)}{\partial z} + \dots = \mathbf{E}_0 + (\mathbf{r} \nabla) \mathbf{E}_0 + \dots,$$

где  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}(0)$  и производная во втором слагаемом вычисляется в начале координат, где расположен диполь. Суммарная сила, действующая на систему точечных зарядов, может быть переписана в виде интеграла:

$$\mathbf{F} = \sum Q_k \mathbf{E}_k = \int \mathbf{E} \rho d^3 \mathbf{r}.$$

Если  $\rho = \rho(\mathbf{r}) = \sum Q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)$ , то интеграл переходит в сумму по всем зарядам. Подставляя разложение для электрического поля, имеем

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{E}_0 \int \rho d^3 \mathbf{r} + \int (\mathbf{r} \nabla) \mathbf{E}_0 \rho d^3 \mathbf{r} = Q \mathbf{E}_0 + (\mathbf{d} \nabla) \mathbf{E}_0,$$

где введены полный заряд системы  $Q$  и дипольный момент  $\mathbf{d}$ , а постоянные коэффициенты разложения поля вынесены за интеграл.

Так как ротор электрического поля в электростатике равен нулю, справедливо тождество, получаемое раскрытием двойного векторного произведения по формуле “бац минус цаб”:

$$\mathbf{d} \times [\nabla \times \mathbf{E}_0] = \nabla(\mathbf{d} \mathbf{E}_0) - (\mathbf{d} \nabla) \mathbf{E}_0 = 0.$$

Поэтому выражение для силы можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{F} \approx Q \mathbf{E}_0 + \nabla(\mathbf{d} \mathbf{E}_0).$$

Сила – это градиент потенциальной энергии с обратным знаком:  $\mathbf{F} = -\nabla U$ , следовательно, потенциальная энергия электрически нейтрального диполя ( $Q = 0$ ) равна:

$$U \approx -\mathbf{d} \mathbf{E}_0.$$

Потенциальная энергия достигает минимума, когда диполь разворачивается по электрическому полю. Подобный разворот возникает в результате воздействия суммарного момента силы, который мы запишем в первом приближении по неоднородности электрического поля:

$$\mathbf{N} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{E} \rho d^3 \mathbf{r} \approx \mathbf{d} \times \mathbf{E}_0.$$

Когда  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{E}_0$  параллельны, момент силы становится нулевым.

• Статические магнитные поля создаются постоянными токами, уходящими на бесконечность, или замкнутыми токами. Если замкнутые токи локализованы в пространстве, то можно получить приближенное выражение для магнитного поля на больших расстояниях от такого тока. Будем считать, что  $r \ll |\mathbf{x}|$ , и, аналогично дипольному разложению, ряд для  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{r}|$  подставим в (5.30), стр. 284:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} + \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \int (\mathbf{x}\mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}.$$

Интеграл по замкнутым стационарным токам внутри объёма равен нулю (первый интеграл). Например, для тонкого проводника  $\mathbf{j} d^3\mathbf{r} \mapsto I d\mathbf{r}$  и объёмный интеграл переходит в контурный, равный нулю для замкнутого контура (замкнутого проводника). Подынтегральную функцию второго интеграла можно записать следующим образом:

$$(\mathbf{x}\mathbf{r}) \mathbf{j} = (\mathbf{x}\mathbf{j}) \mathbf{r} - \mathbf{x} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{j}]. \quad (5.34)$$

Уравнение непрерывности для сохранения заряда (5.27), стр. 277, в стационарном случае имеет вид  $\nabla \mathbf{j} = 0$ . Учитывая это, раскроем производную произведения ( $\ll H_{41}$ ):

$$\nabla(r_i r_j \mathbf{j}) = r_j j_i + r_i j_j \quad \Rightarrow \quad \int r_i j_j d^3\mathbf{r} = - \int j_i r_j d^3\mathbf{r}.$$

При получении интегрального соотношения учтено, что  $\nabla(r_i r_j \mathbf{j})$  при интегрировании по объёму переходит в поверхностный интеграл, который равен нулю, так как токи локализованы и из объёма не вытекают. Поэтому интеграл от левой части (5.34) равен с обратным знаком интегралу от первого слагаемого в правой части:  $(\mathbf{x}\mathbf{r}) \mathbf{j}_i = x_j r_j j_i$ ,  $(\mathbf{x}\mathbf{j}) \mathbf{r}_i = x_j j_j r_i$ . В результате для  $\nabla \mathbf{j} = 0$  и любого постоянного вектора  $\mathbf{x}$  имеем:

$$\int (\mathbf{x}\mathbf{r}) \mathbf{j} d^3\mathbf{r} = -\frac{1}{2} \int \mathbf{x} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] d^3\mathbf{r}. \quad (5.35)$$

Введя магнитный момент:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})] d^3\mathbf{r}, \quad (5.36)$$

потенциал магнитного поля можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}.$$

Взяв ротор от этого выражения, получаем магнитное поле:

$$\mathbf{B} = \frac{3(\mathbf{n}\mathbf{m})\mathbf{n} - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3}, \quad (5.37)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$  – единичный вектор в направлении радиус-вектора  $\mathbf{x}$ .

Пусть постоянный ток  $I$  течёт по плоскому витку тонкого провода. Аналогично выводу выражения для силы взаимодействия двух проводников (стр. 285) перейдём в (5.36) от интеграла по объёму к контурному интегралу ( $\mathbf{j} d^3\mathbf{r} \mapsto I d\mathbf{r}$ ):

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r}.$$

Площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{r}$  и  $d\mathbf{r}$ , равна половине площади параллелограмма  $[\mathbf{r} \times d\mathbf{r}]/2$  (см. ниже первый рисунок), поэтому

$$\mathbf{m} = I S \mathbf{k},$$

где  $S$  – площадь витка провода, а  $\mathbf{k}$  – нормаль к нему. В частности, магнитный момент кольцевого тока радиуса  $R$  равен  $\mathbf{m} = \pi R^2 I \mathbf{k}$ .

На больших расстояниях от тока магнитное поле (5.37) похоже на поле электрического диполя. Однако для диполя линии напряжённости электрического поля начинаются на зарядах. Для кольцевого тока они “наизаны” вокруг кольца аналогично тому, как они окружали бесконечный прямолинейный ток:



Найдём магнитный момент (5.36) системы точечных частиц, имеющих постоянное отношение заряда к массе  $Q_k/m_k = Q/m = const$  (например, как у электронов):

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \oint \mathbf{r} \times \left[ \sum_{k=1}^n Q_k \mathbf{u}_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \right] d^3\mathbf{r} = \frac{Q}{2m} \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times m \mathbf{u}_k.$$

Вводя *нерелятивистский* момент импульса  $k$ -й частицы  $\mathbf{L}_k = \mathbf{r}_k \times m \mathbf{u}_k$ , получаем:

$$\mathbf{m} = \frac{Q}{2m} \mathbf{L}, \quad (5.38)$$

где в правой части стоит суммарный *нерелятивистский* момент импульса системы. В ряде стационарных случаев (например, для кольцевого тока) скорость частиц по модулю постоянна. Поэтому для скорости можно записать  $\mathbf{u}_k = \mathbf{p}_k/\mathbb{E}$ , где  $\mathbf{p}_k$ ,  $\mathbb{E}$  – релятивистские импульс и энергия. Так как энергия для всех частиц одинакова, её можно вынести за сумму, и в выражении выше будет стоять релятивистский момент импульса и  $m \mapsto \mathbb{E}$ .

• Магнитный момент определяет силу и момент силы, действующие на “маленький” замкнутый ток во внешнем магнитном поле. Запишем разложение в ряд Тейлора по каждой компоненте слабо неоднородного магнитного поля в окрестности начала координат (см. также стр. 289):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 + (\mathbf{r} \nabla) \mathbf{B}_0 + \dots,$$

где  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}(\mathbf{0})$  и производные от магнитного поля вычислены в точке  $\mathbf{r} = 0$ . Подставляя разложение для магнитного поля в интегральное представление силы Лоренца (5.33), стр. 285, имеем:

$$\mathbf{F} = \int [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] d^3\mathbf{r} = -\mathbf{B}_0 \times \int \mathbf{j} d^3\mathbf{r} + \int [\mathbf{j} \times (\mathbf{r} \nabla) \mathbf{B}_0] d^3\mathbf{r}.$$

Для замкнутого ограниченного тока первый интеграл от  $\mathbf{j}$  равен нулю. Для вычисления второго интеграла заметим, что ротор магнитного поля в точке, где нет токов, *которые создают* это поле, равен нулю. Поэтому

$$0 = \mathbf{r} \times [\nabla \times \mathbf{B}_0] = \nabla(\mathbf{r} \mathbf{B}_0) - (\mathbf{r} \nabla) \mathbf{B}_0, \quad (5.39)$$

где здесь и ниже оператор набла действует *только* на магнитное поле. Таким образом, подынтегральная функция равна:

$$\mathbf{j} \times (\mathbf{r} \nabla) \mathbf{B}_0 = \mathbf{j} \times \nabla(\mathbf{r} \mathbf{B}_0) = -\nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r} \mathbf{B}_0).$$

Учитывая тождество (5.35), справедливое для  $\nabla \mathbf{j} = 0$  и любого постоянного (относительно переменной интегрирования) вектора, в качестве которого возьмём  $\mathbf{B}_0$ , имеем:

$$\mathbf{F} = -\nabla \times \int (\mathbf{B}_0 \mathbf{r}) \mathbf{j} d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2} \nabla \times \int [\mathbf{B}_0 \times [\mathbf{r} \times \mathbf{j}]] d^3\mathbf{r}.$$

Вводя магнитный момент, получаем силу, действующую на замкнутый ток в слабо неоднородном поле:

$$\mathbf{F} = \nabla \times [\mathbf{B}_0 \times \mathbf{m}] = (\mathbf{m} \nabla) \mathbf{B}_0 = \nabla(\mathbf{m} \mathbf{B}_0), \quad (5.40)$$

где учтено  $\nabla \mathbf{B}_0 = 0$  и (5.39) с  $\mathbf{m}$  вместо  $\mathbf{r}$ . Производные  $\nabla$  действуют, естественно, только на магнитное поле и вычисляются в “центре” замкнутого тока, т.е. в точке относительно которой рассчитывается магнитный момент. Градиент потенциальной энергии частицы равен с обратным знаком силе  $\mathbf{F} = -\nabla U$ . Поэтому потенциальная энергия маленького замкнутого тока равна

$$U = -\mathbf{m} \mathbf{B}_0. \quad (5.41)$$

Как и для электрического диполя (стр. 288), потенциальная энергия достигает минимума, когда вектор магнитного момента ориентирован по магнитному полю.

Учитывая только ведущий член разложения магнитного поля (приближение однородного поля), можно найти суммарный момент силы:

$$\mathbf{N} = \int \mathbf{r} \times [\mathbf{j} \times \mathbf{B}_0] d^3\mathbf{r} = \int (\mathbf{B}_0 \mathbf{r}) \mathbf{j} d^3\mathbf{r} - \mathbf{B}_0 \int (\mathbf{j} \mathbf{r}) d^3\mathbf{r}.$$

Второй интеграл равен нулю. Это следует из производной произведения:

$$\nabla(\mathbf{j} \mathbf{r}^2) = (\mathbf{j} \nabla) \mathbf{r}^2 + \mathbf{r}^2(\nabla \mathbf{j}) = 2\mathbf{j} \mathbf{r},$$

где во втором равенстве учтено, что  $\nabla \mathbf{j} = 0$ . При интегрировании по объёму, дивергенция в левой части этого соотношения (по теореме Гаусса) даёт интеграл по поверхности, равный нулю, так как токи из объёма не вытекают. В результате, учитывая (5.35), получаем момент силы, равный:

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_0.$$

Момент силы определяет изменение момента импульса системы частиц:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k = \sum \mathbf{u}_k \times \mathbf{p}_k + \sum \mathbf{r}_k \times \frac{d\mathbf{p}_k}{dt} = \sum \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k = \mathbf{N}.$$

Поэтому при малых скоростях, учитывая (5.38), можно записать:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\frac{Q}{2m} [\mathbf{B}_0 \times \mathbf{L}]. \quad (5.42)$$

Из этого уравнения следует, что момент импульса  $\mathbf{L}$  системы зарядов вращается с угловой скоростью  $QB_0/2m$  вокруг магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ , не меняя своей длины и угла с полем. Такое вращение называется *лармовской прецессией*.

Большинство элементарных частиц обладают спином – собственным моментом вращения. Спин  $\mathbf{S}$  – это момент импульса в системе покоя частицы. При взаимодействии частиц сохраняется полный момент системы, равный сумме моментов импульса движения и спинов частиц. Для фермионов спин всегда полуцелый (в долях постоянной Планка):  $\hbar/2, 3\hbar/2, \dots$  Для бозонов он целый:  $\hbar, 2\hbar, \dots$  Изучение взаимодействия частиц с внешним магнитным полем позволяет измерять их магнитные моменты. Между магнитным моментом и спином существует пропорциональность, аналогичная соотношению (5.38). Однако коэффициент пропорциональности для различных частиц разный:

$$\mathbf{m} = g \frac{Q}{2m} \mathbf{S}, \quad (5.43)$$

где индивидуальный для частиц данного типа параметр  $g$  называется *g-фактором*. Так, для электрона он приближённо равен  $g = 2$ . Вычисление  $g$ -факторов производится при помощи квантовой электродинамики и даёт результаты, совпадающие с экспериментом с высокой точностью.

## 5.6 Симметрии электродинамики

Второй закон Ньютона или уравнения Максвелла являются векторными дифференциальными уравнениями. При решении конкретной задачи мы относим их к определённой системе отсчета (обычно инерциальной), в которой задана фиксированная система координат (например, в виде трех перпендикулярных декартовых осей). Из общих соображений симметрии следует, что уравнения должны быть инвариантными относительно выбора ориентации системы координат (изотропность пространства), положения её начала (однородность пространства) и выбора системы отсчета (принцип относительности). Эти симметрии являются непрерывными. Существуют также дискретные симметрии. Уравнения не должны зависеть от того, используем ли мы правую или левую систему координат (инверсия всех осей). Кроме этого, многие физические процессы обратимы, а соответствующие уравнения инварианты относительно смены направления течения времени. Последние две дискретные симметрии называются *P-симметрией* (parity inversion) и *T-симметрией* (time inversion). Наконец, опыт показывает, что во многих реакциях превращений элементарных частиц одинаковыми свойствами обладают частицы и античастицы. Это называется *C-симметрией*, т.е. инвариантностью относительно зарядовой (charge) инверсии.

Рассмотрим уравнение классического одномерного осциллятора, находящегося под воздействием силы трения, пропорциональной скорости:

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 2\lambda \frac{dq(t)}{dt} + \omega^2q(t) = 0. \quad (5.44)$$

Выясним, является ли это уравнение инвариантным при обращении времени. Пусть при данном выборе направления оси  $t$  мы получили некоторое решение  $q(t)$ .  $T$ -инвариантность означает, что функция  $q(-t)$  также должна быть решением уравнения (5.44):

$$\frac{d^2q(-t)}{dt^2} + 2\lambda \frac{dq(-t)}{dt} + \omega^2q(-t) = 0.$$

Заменяя в уравнении  $t$  на  $-t$ , получаем:

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} - 2\lambda \frac{dq(t)}{dt} + \omega^2q(t) = 0.$$

Если трение есть ( $\lambda \neq 0$ ), то это уравнение отличается от (5.44) и, следовательно, (5.44) неинвариантно относительно  $T$ -инверсии. Если же  $\lambda = 0$ , то оно инвариантно. Такие подробные выкладки обычно не проводят, а сразу в уравнении делают замену  $t \mapsto -t$ . Первые производные по  $t$  меняют свой знак, а вторые (в общем случае чётные) – нет.



Рассмотрим инверсию времени ( $T$  – преобразование) в электродинамике. Пусть при  $t \mapsto -t$  координатные оси остаются неизменными:  $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}$ . Тогда скорость  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  изменит свой знак:  $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$ . В тоже время ускорение (вторая производная) останется без изменения. Сила Лоренца:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

является определением электрического и магнитного поля (мы разбиваем силу на составляющие, одна из которых зависит от скорости пробного заряда, а вторая – нет). Левая часть уравнения инвариантна относительно инверсии времени (производная от скорости). Поэтому инвариантным будет и электрическое поле. Магнитное поле должно изменить знак (для компенсации его изменения у скорости). По этой же причине меняют знак векторный потенциал (так как  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ) и ток  $\mathbf{j} = \mathbf{v}\rho$ . Таким образом, при инверсии времени происходят следующие изменения:

$$T : \quad t \mapsto -t, \quad \mathbf{j} \mapsto -\mathbf{j}, \quad \mathbf{E} \mapsto \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \mapsto -\mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \mapsto -\mathbf{A}.$$

Обратим внимание, что в преобразованиях происходит также изменение аргументов функций. Например,  $\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) \mapsto -\mathbf{j}(-t, \mathbf{r})$  и т.д. Несложно видеть, что все уравнения Максвелла:

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad \nabla \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

при таком преобразовании остаются неизменными и, следовательно, электродинамические явления обратимы.

Обратимыми являются многие уравнения классической механики, если в соответствующих им системах не происходит потери энергии. Однако, в нашем мире мы регулярно сталкиваемся с проявлением необратимости (разбитая чашка или эволюционирующая Вселенная). Часть подобных явлений связана с законом больших чисел. Вероятность обнаружить все молекулы воздуха в одном углу комнаты существенно меньше, чем вероятность их относительно равномерного распределения. Поэтому, если открыть перегородку отделяющую часть объема с воздухом от части без воздуха, то молекулы равномерно заполнят весь объём и обратно в одну половину уже не соберутся (процесс необратим).

Тем не менее, в микромире существуют реакции элементарных частиц которые можно интерпретировать как свидетельство нарушения  $T$ -инвариантности на самом фундаментальном уровне. Эволюция Вселенной, возможно, является еще одним примером фундаментальной необратимости времени.

• Перейдем к пространственной инверсии. В 3-мерном пространстве можно ввести два базиса, которые не могут быть сведены друг к другу при помощи вращения. Один такой базис называют *правым*, а второй – *левым*. При обращении одной или трёх осей с последующим поворотом, правый базис можно превратить в левый и наоборот. Далее под инверсией будем понимать перевертывание всех трёх осей, при котором координаты (проекции) радиус-вектора меняют свой знак:  $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$ .

Относительно инверсии координат все векторы разбиваются на две группы – *полярные* и *аксиальные* векторы. Проекции полярных векторов (“направленных отрезков”) на декартовы оси меняют свой знак при инвертировании осей. Например, если полярный вектор  $\mathbf{a}$  в правой системе координат имеет проекции  $\{1, 3, -5\}$ , то в левой системе координат его проекции будут равны  $\{-1, -3, 5\}$ . Аксиальные векторы при инверсии свои компоненты *не меняют*. Такие векторы возникают в результате векторного произведения полярных векторов. По определению, компоненты векторного произведения равны:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \{c_1, c_2, c_3\} = \{a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1\}.$$

Если  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  полярные векторы, то при инверсии координатных осей их компоненты изменят знак:  $a_i \mapsto -a_i$ ,  $b_i \mapsto -b_i$ , а компоненты вектора  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  не изменятся.

Наиболее наглядно разница между полярными и аксиальными векторами проявляется при наблюдении за отражением предметов (при этом инвертируется одна ось). Придвиньте эту книгу к зеркалу. Ваше зазеркальное “Я” сделает тоже самое, и книги будут двигаться *навстречу* (векторы скорости направлены в противоположные стороны – это полярные векторы). Теперь начните вращать книгу. Ваше Я будет её крутить в *той же* направлении (угловые скорости вращения книг направлены одинаковым образом – это аксиальные векторы).

Примерами полярных векторов являются радиус-вектор и напряженность электрического поля (которая для точечного заряда пропорциональна радиус-вектору). С другой стороны, угловая скорость, момент импульса и магнитное поле – это аксиальные векторы.

То, что момент импульса является аксиальным вектором, следует из его определения:  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . Радиус-вектор  $\mathbf{r}$  (направленный отрезок) является полярным вектором. Импульс  $\mathbf{p}$  пропорционален скорости  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ , являющейся бесконечно малым изменением радиус-вектора (это уже не направленный отрезок, т.к. скорость относится к одной точке). Поэтому  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{p}$  являются полярными векторами. Векторное произведение двух полярных векторов даёт аксиальный вектор.

Сила Лоренца – полярный вектор, поэтому  $\mathbf{E}$  и  $[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$  – это также полярные векторы. А вот напряженность магнитного поля  $\mathbf{B}$  – это аксиальный вектор. При инверсии его компоненты не меняются и  $[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$  благодаря скорости  $\mathbf{v}$  изменит свой знак. Так как  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  – векторный потенциал  $\mathbf{A}$  – это полярный вектор. Таким образом, в электродинамике при пространственной инверсии происходят такие изменения:

$$P: \quad \mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}, \quad \mathbf{j} \mapsto -\mathbf{j}, \quad \mathbf{E} \mapsto -\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \mapsto \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \mapsto -\mathbf{A}.$$

Уравнения Максвелла остаются инвариантными относительно этого преобразования (при  $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$  оператор наблы  $\nabla$  меняет свой знак). Скалярное произведение двух полярных или двух аксиальных векторов является *скаляром* (не меняет свой знак при инверсии). Скалярное произведение полярного и аксиального вектора – это *псевдоскаляр* (при инверсии его знак меняется). Так,  $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$  – скаляр, а  $\mathbf{E}\mathbf{B}$  – псевдоскаляр.

Естественно, если уравнения инвариантны и относительно  $P$  и относительно  $T$  преобразований, то они будут инвариантными и относительно их композиции ( $PT$  – симметрии). Однако это утверждение не работает в обратную сторону. Из  $PT$  инвариантности, вообще говоря, не следует по отдельности  $P$  и  $T$  инвариантности. Например, представим мир, в котором закон Фарадея напоминает закон Ампера-Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 4\pi\mathbf{j} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

$P$  и  $T$  преобразования изменяют вид этого уравнения, а их последовательное применение – нет:

$$P: \quad \nabla \times \mathbf{E} = -4\pi\mathbf{j} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad PT: \quad \nabla \times \mathbf{E} = 4\pi\mathbf{j} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Поэтому в *таком* мире зеркальное отражение с одновременной “перемоткой” процессов в обратном направлении не будет отличаться от исходного, хотя и нет равноправия между электродинамическими процессами и их зеркальными отражениями.

*Зарядовое сопряжение* ( $C$  – инверсия) изменяет знак зарядов на противоположный. Так как положительные и отрицательные заряды в электродинамике ведут себя равноправным образом, уравнения Максвелла и сила Лоренца должны быть инвариантными относительно смены знака у плотности заряда  $\rho \mapsto -\rho$  и тока  $\mathbf{j} \mapsto -\mathbf{j}$ . Отсюда следуют следующие правила изменения остальных величин при зарядовом сопряжении:

$$C: \quad \rho \mapsto -\rho, \quad \mathbf{j} \mapsto -\mathbf{j}, \quad \mathbf{E} \mapsto -\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \mapsto -\mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \mapsto -\mathbf{A}.$$

Меняет знак также скалярный потенциал  $\varphi \mapsto -\varphi$ , так как  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ . В тоже время, при  $P$  и  $T$  инверсиях он остается без изменений.

• Важнейшей непрерывной симметрией уравнений Максвелла являются преобразования Лоренца. Найдём как связаны электрическое  $\mathbf{E}$  и магнитное  $\mathbf{B}$  поля в двух инерциальных системах отсчёта  $S$  и  $S'$ . Обозначим через  $\mathbf{v}$  скорость системы  $S'$  относительно  $S$ . Пусть сила, действующая на единичный заряд ( $q = 1$ ), имеет лоренцевский вид:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + [\mathbf{u} \times \mathbf{B}],$$

где  $\mathbf{u}$  – скорость частицы относительно  $S$ . Любая сила в теории относительности преобразуется следующим образом (стр. 163):

$$\frac{\mathbf{F}}{\gamma(1 - \mathbf{v}\mathbf{u})} = \mathbf{F}' + \gamma\mathbf{v}(\mathbf{u}'\mathbf{F}') + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{F}'), \quad (5.45)$$

где, как обычно,  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$  и  $\Gamma = \gamma^2/(\gamma + 1)$ . Если частица в  $S$  покоится ( $\mathbf{u} = 0$ ), то её скорость в системе  $S'$  равна  $\mathbf{u}' = -\mathbf{v}$ , поэтому:

$$\mathbf{F} = \gamma\mathbf{F}' - \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{F}'),$$

где учтено, что  $\gamma - \Gamma = \Gamma/\gamma$ . При нулевой скорости  $\mathbf{u}$  в системе  $S$  сила равна электрическому полю  $\mathbf{F} = \mathbf{E}$ , а в системе  $S'$ :  $\mathbf{F}' = \mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}'$ :

$$\mathbf{E} = \gamma(\mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}') - \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{E}'). \quad (5.46)$$

Поля *не зависят* от заряда и скорости пробной частицы, поэтому это преобразование выполняется при *любых*  $q, \mathbf{u}$ . Обратное преобразование, как обычно, получается при помощи замены  $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{E}). \quad (5.47)$$

Это можно доказать, если сначала получить соотношение

$$\mathbf{v}\mathbf{E}' = \mathbf{v}\mathbf{E}, \quad (5.48)$$

следующее из (5.46), а затем повторить предыдущие рассуждения, положив в (5.45)  $\mathbf{u}' = 0$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  и соответственно  $\mathbf{F}' = \mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

Запишем теперь преобразование для силы (5.45) в случае, когда  $\mathbf{u}\mathbf{v} = 0$ , и умножим его слева векторно на  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{v} \times \mathbf{E} + \mathbf{v} \times [\mathbf{u} \times \mathbf{B}] = \gamma\mathbf{v} \times \mathbf{E}' + \gamma\mathbf{v} \times [\mathbf{u}' \times \mathbf{B}'].$$

Подставим слева  $\mathbf{E}$  из (5.46), а справа  $\mathbf{u}' = -\mathbf{v} + \mathbf{u}/\gamma$  [см. (5.13), стр. 270, при  $\mathbf{u}\mathbf{v} = 0$ ]. В результате, учитывая, что  $\mathbf{u}\mathbf{v} = 0$ , получаем соотношение:

$$\mathbf{v}\mathbf{B}' = \mathbf{v}\mathbf{B}. \quad (5.49)$$

Таким образом, продольные (к скорости) компоненты электрического и магнитного полей одинаковы в обеих системах отсчёта.

Осталось найти преобразование для магнитного поля, аналогичное (5.47). Для этого умножим (5.47) векторно на  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{E}' = \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{E} + \gamma [\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]].$$

Подставляя справа  $\mathbf{E}$  из (5.46), получаем:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{E}' = \gamma^2 \mathbf{v} \times \mathbf{E}' - \gamma^2 [\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}']] + \gamma [\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]].$$

Раскроем двойное векторное произведение по формуле “бац минус цаб” и учтём, что  $\gamma^2 - 1 = v^2 \gamma^2$ :

$$0 = \gamma v^2 [\mathbf{v} \times \mathbf{E}'] - \gamma \mathbf{v}(\mathbf{vB}') + v^2 \gamma \mathbf{B}' + \mathbf{v}(\mathbf{vB}) - v^2 \mathbf{B}.$$

Учитывая, что  $\mathbf{vB}' = \mathbf{vB}$ , и перенося  $v^2 \mathbf{B}$  влево, окончательно получаем:

$$\mathbf{B} = \gamma (\mathbf{B}' + \mathbf{v} \times \mathbf{E}') - \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{vB}').$$

Обратное преобразование получается перестановкой штрихованных и нештрихованных величин и заменой  $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$ .

Таким образом, преобразования Лоренца для электрического и магнитного полей имеют следующий вид:

$$\mathbf{E}' = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{vE}), \quad (5.50)$$

$$\mathbf{B}' = \gamma (\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}) - \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{vB}). \quad (5.51)$$

Их можно ( $\ll N_{42}$ ) также расписать по компонентам:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma (E_y - vB_z), & E'_z &= \gamma (E_z + vB_y), \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma (B_y + vE_z), & B'_z &= \gamma (B_z - vE_y), \end{aligned}$$

где ось  $x$  выбрана в направлении относительной скорости:  $\mathbf{v} = \{v, 0, 0\}$ . Заметим, что (5.51) формально можно получить из (5.50), сделав замену:  $\mathbf{E} \mapsto \mathbf{B}$  и  $\mathbf{B} \mapsto -\mathbf{E}$ . Кроме этого, полученные преобразования совпадают с преобразованиями компонент антисимметричного тензора второго ранга для момента импульса (стр.185). Как мы увидим в главе 7, это совпадение не случайно.

Аналогично упражнению  $\ll N_{25}$  можно проверить инвариантность следующих скалярных выражений:

$$\mathbf{E}\mathbf{B} = inv, \quad \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = inv, \quad (5.52)$$

которые имеют одинаковое значение во всех инерциальных системах. В главе 7 мы запишем уравнения Максвелла в явно ковариантном виде, демонстрирующем их инвариантность для всех инерциальных систем отсчета.

Обратим внимание на тесную связь электрического и магнитного полей в преобразованиях (5.50) и (5.51). Именно благодаря ей обычно говорят о едином *электромагнитном поле*, которое имеет два “лица”:  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Они меняются при смене системы отсчёта, “порождая” друг друга. Например, пусть в системе  $S'$  нет магнитного поля  $\mathbf{B}' = 0$ . Тогда в системе  $S$  будет наблюдаться магнитное поле, перпендикулярное как относительной скорости, так и электрическому полю. Действительно, из (5.49) и (5.51) следует:

$$\mathbf{B}' = 0, \quad \mathbf{vB} = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (5.53)$$

Получим ещё раз выражение для напряжённости электромагнитного поля движущегося со скоростью  $\mathbf{v}$  заряда  $Q$  (стр. 271). В системе отсчёта, в которой заряд покоится, магнитное поле равно нулю, а электрическое определяется законом Кулона:

$$\mathbf{B}' = 0, \quad \mathbf{E}' = Q \frac{\mathbf{r}'}{r'^3}.$$

Используя преобразования для электрического поля (5.47), имеем:

$$\mathbf{E} = \gamma \mathbf{E}' - \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{vE}') = Q \frac{\gamma \mathbf{r}' - \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{vr}')}{r'^3}$$

В момент времени  $t = 0$ , когда начала систем отсчёта совпадают, справедливы преобразования (5.15), стр. 270. Подставляя их, получаем:

$$\mathbf{E} = \frac{Q\gamma \mathbf{r}}{(\mathbf{r}^2 + \gamma^2 (\mathbf{vr})^2)^{3/2}}.$$

С учётом (5.53) магнитное поле равно  $\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}$ , что совпадает с (5.17), стр. 271.

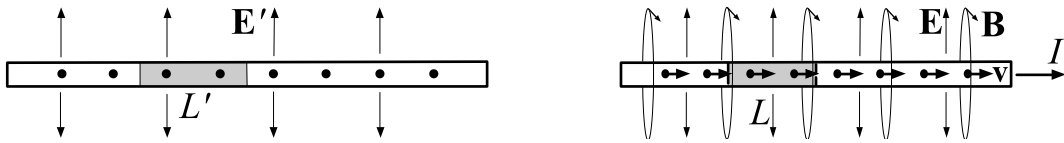
Заметим, что разделение на магнитное и электрическое поле единого силового влияния на пробную частицу достаточно условно. Магнитное поле содержится в составляющей силы, которая зависит от скорости частицы. Когда изменяется система отсчёта, меняется и скорость. Соответственно, происходит определённое перераспределение между электрическим и магнитным полями.

Можно было бы, конечно, работать с единым силовым полем  $\mathbf{F}$ . Однако в этом случае дифференциальные уравнения для такого поля оказались зависящими от скорости конкретной пробной частицы. Именно разделение силы  $\mathbf{F}$  на два поля позволило записать для них уравнения Максвелла, не зависящие от параметров пробной частицы. Это позволяет, решая уравнения, получать электрическое и магнитное поля, а затем выяснять, как они действуют (при помощи силы Лоренца) на любую пробную частицу или систему таких частиц.

• Приведём ещё один простой пример преобразования полей. Рассмотрим бесконечную тонкую заряженную нить. В системе отсчёта, в которой заряды неподвижны, существует электрическое поле, перпендикулярное к нити и убывающее с расстоянием от неё следующим образом (стр. 267):

$$|\mathbf{E}'| = \frac{2\mu'}{r'}, \quad \mathbf{B}' = 0,$$

где  $\mu = Q/L$  – заряд, приходящийся на единицу длины нити. Магнитного поля в этой системе отсчёта нет (левый рисунок):



Пусть теперь нить перемещается вдоль оси  $x$  со скоростью  $v$ . Так как заряды движутся, существует ток  $I$  и, следовательно, магнитное поле (стр. 282). Нить по-прежнему остаётся заряженной, поэтому есть и электрическое поле:

$$|\mathbf{E}| = \frac{2\mu}{r}, \quad |\mathbf{B}| = \frac{2I}{r}.$$

Найдём, как связаны между собой линейные плотности зарядов  $\mu$ ,  $\mu'$  и ток  $I$ . Поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  перпендикулярны друг другу и скорости. Поэтому обратные к (5.50) и (5.51) преобразования имеют вид:

$$\mathbf{E} = \gamma \mathbf{E}', \quad \mathbf{B} = \gamma [\mathbf{v} \times \mathbf{E}'].$$

Подставляя выражения для электрического поля, получаем следующую связь для удельных зарядов на единицу длины:

$$\frac{Q}{L} = \mu = \gamma \mu' = \frac{Q'}{L' \sqrt{1 - v^2}},$$

где учтено, что расстояния в перпендикулярном к скорости направлении не изменяются  $r' = r$ . Полученное соотношение является следствием лоренцевского сокращения длины. Так как заряд инвариантен ( $Q' = Q$ ), а участок нити, на котором он находится, при движении сокращается  $L = L' \sqrt{1 - v^2}$ , то удельный заряд для неподвижного наблюдателя будет увеличиваться в  $\gamma$  раз. Во столько же раз “сжимаются” силовые линии, увеличивая напряжённость электрического поля.

Аналогично из выражения для магнитного поля получается связь тока и скорости зарядов для неподвижного наблюдателя:

$$I = \gamma \mu' v = \mu v = \frac{dQ}{dL} \frac{dL}{dt} = \frac{dQ}{dt}.$$

Так и должно быть в силу определения тока, как скорости “протекания” заряда через сечение проводника.

## 5.7 Электромагнитные волны

Напомним, что, записав в первом разделе дифференциальные уравнения, которым удовлетворяет закон Кулона, мы получили несколько более общие законы, чем исходная сила Кулона. Уравнению  $\nabla \mathbf{E} = 4\pi Q \delta(\mathbf{r})$  удовлетворяет сферически симметричная напряжённость поля. Однако ему *также* удовлетворяет напряжённость движущегося заряда, не обладающая такой симметрией!

Аналогична ситуация и с полной системой уравнений Максвелла. По сути их вывода они выполняются для напряженности электромагнитного поля, создаваемого системой равномерно движущихся зарядов. Однако уравнения Максвелла также содержат в себе принципиально новые классы решений. Так, пусть в пространстве нет зарядов и токов, тогда:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{E} &= 0, & \nabla \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Вторая пара уравнений зависит одновременно и от электрического, и от магнитного поля. Если от этих уравнений взять ротор, то получатся *волновые уравнения* второго порядка, зависящие отдельно от  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{B} = 0, \quad (5.54)$$

где  $\Delta = \nabla^2$  - оператор Лапласа. Действительно, например, ротор от левой части уравнения  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  равен:

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}] = \nabla(\nabla \mathbf{E}) - (\nabla \nabla) \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E},$$

где мы учли равенство нулю дивергенции электрического поля (первое уравнение Максвелла в пустоте). С другой стороны, ротор от правой части имеет вид:

$$-\left[\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right] = -\frac{\partial}{\partial t}[\nabla \times \mathbf{B}] = -\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Очевидным решением уравнений Максвелла в пустоте и следующих из них волновых уравнений являются поля, не зависящие от координат и времени  $\mathbf{E}_0 = const$ ,  $\mathbf{B}_0 = const$ . Их частным случаем является пространство, в котором полей нет вообще. Однако это не единственная возможность.



• Рассмотрим решение уравнений Максвелла, в которых электрическое и магнитное поля зависят от следующей комбинации координат и времени:  $u = \mathbf{n}\mathbf{r} - t$ , где  $\mathbf{n}$  - некоторый постоянный вектор:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(u), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(u), \quad u = \mathbf{n}\mathbf{r} - t.$$

Вычислим производные по координатам и времени от  $j$ -той компоненты электрического поля:

$$\nabla_i \mathbf{E}_j = \frac{\partial \mathbf{E}_j}{\partial r_i} = \frac{d\mathbf{E}_j}{du} \frac{\partial u}{\partial r_i} = n_i \frac{d\mathbf{E}_j}{du}, \quad \frac{\partial \mathbf{E}_j}{\partial t} = -\frac{d\mathbf{E}_j}{du}.$$

Аналогичные соотношения справедливы и для магнитного поля. Подставим эти производные в уравнения Максвелла в пустоте для дивергенций. В этом случае  $\nabla \mathbf{E} = \nabla_i \mathbf{E}_i$ , где по  $i$ -сумма от 1 до 3. Поэтому выше необходимо положить  $i = j$  и просуммировать. В результате:

$$\frac{d(\mathbf{nE})}{du} = 0, \quad \frac{d(\mathbf{nB})}{du} = 0.$$

Так как вектор  $\mathbf{n}$  является константой его можно внести под знак производной. Аналогично для роторов:

$$\frac{d}{du} ([\mathbf{n} \times \mathbf{E}] - \mathbf{B}) = 0, \quad \frac{d}{du} ([\mathbf{n} \times \mathbf{B}] + \mathbf{E}) = 0.$$

Интегрируя эти уравнения по  $u$  и опуская константы интегрирования, которые соответствуют постоянным составляющим электрического и магнитного полей, получаем:

$$\mathbf{nE} = 0, \quad \mathbf{nB} = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\mathbf{n} \times \mathbf{B}.$$

Эти соотношения являются связями, накладываемыми на векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{n}$ , которые необходимы для выполнения уравнений Максвелла. Подставляя третье соотношение в четвёртое:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = -\mathbf{n}(\mathbf{nE}) + \mathbf{n}^2 \mathbf{E} = \mathbf{n}^2 \mathbf{E},$$

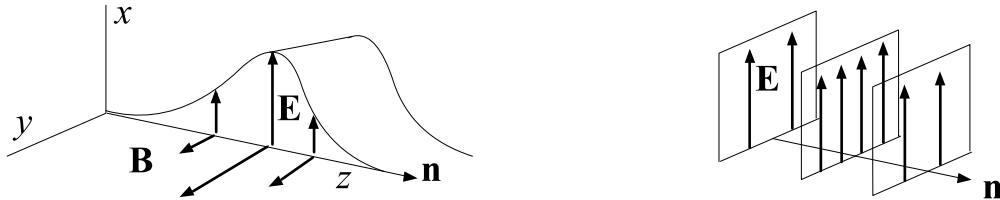
приходим к выводу, что вектор  $\mathbf{n}$  должен быть единичным  $\mathbf{n}^2 = 1$ .

Таким образом, мы получили нетривиальное решение уравнений Максвелла в пустоте:

$$\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{nE} = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1, \quad (5.55)$$

в котором функция напряжённости электрического поля  $\mathbf{E}$  может произвольным образом зависеть от  $u = \mathbf{n}\mathbf{r} - t$  и векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{n}$  взаимно перпендикулярны друг другу.

• Разберёмся с физическим смыслом полученного решения. Направим ось  $z$  вдоль вектора  $\mathbf{n}$  так, что  $\mathbf{n}\mathbf{r} = z$ , а ось  $x$  вдоль электрического поля перпендикулярно  $\mathbf{n}$ . Магнитное поле перпендикулярно электрическому и лежит вдоль оси  $y$ . Пусть функция  $\mathbf{E}(u)$  при  $u = 0$  имеет максимум. Ниже на левом рисунке изображено значение электромагнитного поля в точках, находящихся в плоскости  $(z, y)$ , в момент времени  $t$ :



С течением времени этот максимум  $\mathbf{E}(u) = \mathbf{E}(z - t)$  перемещается вдоль оси  $z$  (по направлению вектора  $\mathbf{n}$ ) с единичной скоростью, которая в принятой нами системе единиц соответствует скорости света. Обратим внимание, что на левом рисунке векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  изображены для точек, лежащих на оси  $z$ . Электрическое поле  $\mathbf{E}$  не зависит от  $x$  и  $y$  и, вообще говоря, при обычном соглашении должно рисоваться параллельными линиями в плоскости  $(x, y)$ , густота которых соответствует напряженности поля. На правом рисунке выше сделана попытка такого представления.

Таким образом, данное решение представляет собой однородное (при фиксированном  $z$ ) поле с одинаковой напряженностью во всей плоскости  $(x, y)$ . Поэтому подобный класс решений называется *плоскими волнами*. Скорость перемещения области сгущения напряженности поля называется фазовой скоростью.

Важный класс *монохроматических плоских волн* получается, когда поля являются периодическими функциями  $u$ . Рассмотрим сначала случай *линейной поляризации*:

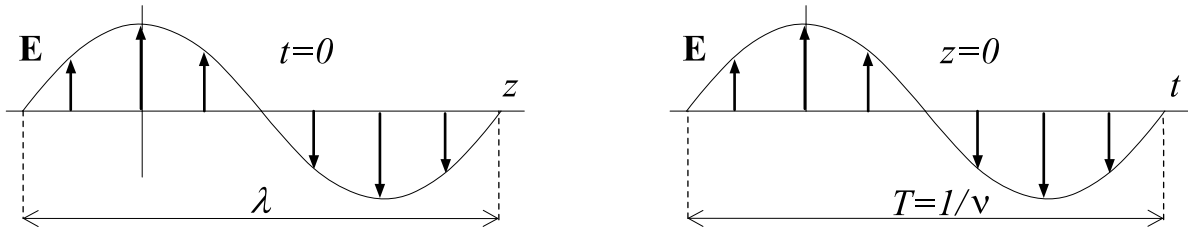
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \phi_0), \quad \mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0] \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \phi_0).$$

Постоянный вектор  $\mathbf{E}_0$  определяет амплитуду колебаний и одновременно задаёт направление, вдоль которого происходит колебание. Вторая константа  $\phi_0$  – сдвиг фазы, возникающий при выборе того или иного начального значения поля при  $t = 0$  (не путать с потенциалом  $\varphi$ !). Наконец, вектор  $\mathbf{k}$  называется *волновым вектором*, а  $\omega$  – *круговой частотой*. Чтобы получилось решение с  $u = \mathbf{n}\mathbf{r} - t$ , частота и волновой вектор должны быть связаны между собой следующим образом:

$$\mathbf{k} = \omega \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор, задающий направление распространения электромагнитной волны. Выражение  $\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}$  называется *фазой*.

Нарисуем плоскую волну в данный момент времени (слева,  $t = 0$ ) и в данной точке пространства (справа,  $\mathbf{kr} = \text{const}$ ), с  $\phi_0 = 0$ :



Модуль волнового вектора связан с длиной волны  $\lambda$ , а круговая частота – с частотой колебаний  $\nu$  (или периодом  $T = 1/\nu$ ) следующим образом:

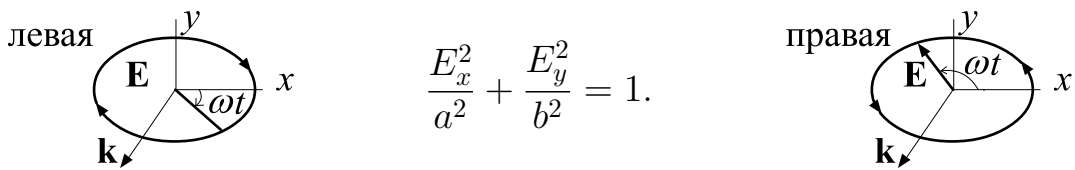
$$|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi\nu, \quad \lambda\nu = 1.$$

Каждый “гребень” плоской монохроматической линейно-поляризованной волны перемещается в пространстве со скоростью света.

Рассмотрим теперь несколько более общий вариант поляризации. Ось  $z$  снова направим вдоль вектора  $k$ . В этом случае электрическое и магнитное поля будут лежать в плоскости  $(x, y)$ . Например,  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$ . Пусть по каждой компоненте электрическое поле совершает гармонические колебания с амплитудами  $a$  и  $b$  следующего вида:

$$E_x = a \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \phi_0), \quad E_y = b \sin(\omega t - \mathbf{kr} + \phi_0).$$

В фиксированной точке пространства  $\phi_0 - \mathbf{kr} = \text{const}$  вектор  $\mathbf{E}$  совершает движения по эллипсу с круговой частотой  $\omega$ :



Такая поляризация называется *эллиптической*. Если  $a = \pm b$ , то это, соответственно, *круговая поляризация*. При эллиптической или круговой поляризации вектор напряжённости описывает в пространстве спираль, направление “вкручивания” которой зависит от знаков амплитуд  $a$  и  $b$ . Предположим, что мы смотрим *навстречу* распространению волны. Если электрическое поле поворачивается по часовой стрелке, то такая волна называется *левополяризованной*, если против, то *правополяризованной*.

Вообще говоря, оси координат  $x, y$  могли быть выбраны не вдоль главных полуосей эллипса. В этом случае колебания вдоль каждой оси имели бы различные фазы, разность которых соответствовала бы углу поворота эллипса в плоскости  $(x, y)$ .

Подытожим предыдущие разделы. Мы начали с закона Кулона и формально ввели электрическое поле как силу, действующую на единичный пробный заряд. Мы предположили, что заряд является собственной характеристикой частицы и имеет одинаковое значение независимо от скорости движения. Затем при помощи преобразований Лоренца было получено выражение для силы, действующей на пробный заряд со стороны движущегося со скоростью  $\mathbf{v}$  заряда  $Q$ . Эта сила естественным образом разбилась на два слагаемых, в которых мы, опять же формально, выделили две векторные функции - электрическое поле  $\mathbf{E}$  и магнитное поле  $\mathbf{B}$ . Мы добавили ещё одно предположение под названием “принцип суперпозиции”: силы, действующие на пробный заряд со стороны системы зарядов (имеющих различные и произвольные постоянные скорости), оказывают независимое воздействие и векторно складываются.

В результате выяснилось, что функции  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  удовлетворяют простым дифференциальным уравнениям Максвелла, которые, аналогично закону Гаусса в электростатике, зависят только от плотности заряда и тока частиц. Решив эти уравнения и подставив их в выражение для силы Лоренца, мы можем найти траекторию движения пробного заряда в электромагнитном поле.

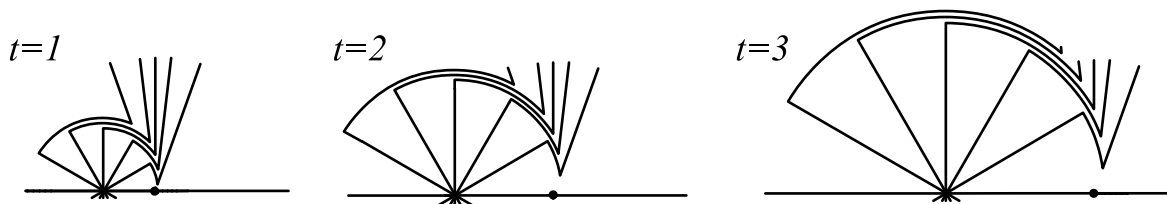
Хотя уравнения Максвелла были выведены для системы равномерно движущихся зарядов, оказалось, что они имеют нетривиальные решения даже в отсутствие зарядов. При этом электромагнитное поле распространяется в пространстве с фундаментальной скоростью  $c$ . Мы специально не “закладывали” подобных свойств решений в уравнения. Они возникли автоматически.

Однако откуда в пустом пространстве всё же берутся электромагнитные волны? Чтобы понять это на качественном уровне, вернёмся к равномерно движущемуся заряду и попробуем разобраться, что происходит с его полем при изменении скорости заряда. Пусть до момента времени  $t = 0$  заряд в системе  $S$  двигался с постоянной скоростью  $v$ . Соответственно, в связанной с ним системе  $S'$  существовало только электрическое поле в виде симметричного ёжика силовых линий. В системе  $S$  ежик электрического поля выглядит сплюснутым, а кроме этого, существует магнитное поле. Силовые линии этих полей с постоянной скоростью перемещаются мимо наблюдателей в  $S$ .

В момент времени  $t = 0$  заряд, в результате внешнего воздействия, резко останавливается. Что будет происходить с его электрическим и магнитным полями?

Мы знаем, что любое движение не может происходить быстрее фундаментальной скорости. Это же относится и к темпу распространения в пространстве изменения поля, возникшего в результате торможения заряда. Так как при  $t > 0$  заряд в системе отсчёта  $S$  неподвижен, вокруг него должно исчезнуть магнитное поле, а электрическое поле должно стать сферически симметричным. Однако сразу во всём пространстве это произойти не может. Вокруг заряда с фундаментальной скоростью  $c = 1$  расширяется сфера, внутри которой  $\mathbf{E} = Q\mathbf{r}/r^3$ ,  $\mathbf{B} = 0$ . Снаружи этой сферы всё осталось без изменений. Есть и магнитное, и сплюснутое электрическое поле. Их силовые линии *продолжают двигаться* в пространстве, хотя заряд уже остановился.

Ниже нарисованы последовательные картинки с равным шагом по времени, изображающие этот процесс. Скорость заряда до остановки была равна  $v = 0.96$ . Точка изображает “фантомное” положение заряда, т.е. это центр удалённых силовых линий, которые продолжают двигаться. Так как скорость “фантома” велика, он лишь немного отстаёт от сферического фронта “распространения информации” об остановке заряда (показана только верхняя часть силовых линий):



Сильный излом линий возникает из-за “мгновенности” остановки заряда. В реальности, естественно, излома не будет и силовые линии после начала торможения будут изгибаться плавнее. Однако в любом случае в окрестности сферического фронта происходит сгущение силовых линий. Они почти перпендикулярны направлению расширения поля, поэтому мы имеем дело со сферически распространяющимся сгущением *поперечного* электрического поля. Это сгущение увеличивается в направлении бывшего движения заряда. Снаружи вокруг сферы, перпендикулярно электрическим силовым линиям, в виде окружностей перемещаются в пространстве силовые линии магнитного поля.

В результате заряд при остановке как бы “сбрасывает” с себя часть электромагнитного поля, которое “по инерции” продолжает двигаться вперёд в виде электромагнитной волны, получив право на самостоятельное существование. Даже если заряд исчезает (например, в результате аннигиляции отрицательного электрона и положительного позитрона), то его поле (силовое воздействие на пробные частицы) будет продолжать перемещаться в пространстве.

Обратим внимание, что не всегда электромагнитное поле распространяется с фундаментальной скоростью (скоростью света). Это происходит, например, при расширении сферического фронта после остановки заряда. В то же время удалённые силовые линии от “фантомного” заряда движутся в пространстве со скоростью заряда в прошлом, которая, естественно, меньше фундаментальной.

Со скоростью света распространяется “информация” об *изменении скорости* зарядов. Она “становится известной” в удалённых точках только через время, равное расстоянию от заряда к этой точке, делённому на скорость света. Фактически это требование оказалось “заложенным” в уравнения Максвелла, о чём свидетельствует наличие решений, распространяющихся с фундаментальной скоростью. Однако этого могло и не произойти, если бы закон Кулона имел отличное от  $1/r^2$  поведение. В этом случае в уравнениях электромагнетизма появились бы дополнительные слагаемые, которые изменили бы волновое уравнение. В результате скорость электромагнитных волн оказалась бы меньше фундаментальной. Таким образом, скорость электромагнитной волны тесно связана с формой *статического закона* взаимодействия между двумя зарядами (см. также стр. 435).

Ещё один важный момент, на который стоит обратить внимание. Уравнения Максвелла, записанные выше, фактически были выведены для системы зарядов, движущихся с постоянными скоростями. В силу принципа суперпозиции эти скорости могут иметь различные значения в различных точках пространства. Однако они постоянны. В дальнейшем мы будем предполагать, что уравнения Максвелла справедливы и в том случае, когда заряды движутся с переменной скоростью. Например, таким был резко тормозящий заряд, рассмотренный выше. Другими словами, в правых частях уравнений Максвелла присутствуют только скорости зарядов, создающих поле (в векторе тока), но *не их ускорения*. Это простейшая форма уравнений, и оправдана она может быть экспериментами.

Часто, следуя историческому пути, уравнения Максвелла записывают, как обобщение множества экспериментальных законов, открытых в 18-19 веках. Затем из уравнений электромагнетизма “получают” теорию относительности. Такой путь вполне приемлем, и любая *правильно* построенная теория конкретного взаимодействия содержит в себе и общие свойства пространства и времени. Однако в этой книге мы используем обратный путь, так как теория относительности может быть выведена из достаточно общих и простых постулатов. После того, как она построена, можно анализировать частные теории, подобные электродинамике.

Перечислим ещё раз исходные постулаты, лежащие в основе электродинамики:

- 1) Справедлив закон Кулона для неподвижного заряда  $\mathbf{F} = qQ\mathbf{r}/r^3$ .
- 2) Заряд частицы одинаков для всех наблюдателей  $Q' = Q$ .
- 3) Выполняется принцип суперпозиции: силовые воздействия на пробный заряд со стороны различных зарядов векторно суммируются.
- 4) Дифференциальные уравнения первого порядка для электромагнитного поля не зависят от ускорений зарядов, создающих это поле.

Естественно, предполагается справедливой и теория относительности.

Можно задать вопрос: “*Реальны ли электромагнитные поля?*”. В принципе, мы можем отказаться от полевого описания заряженных частиц, оперируя только их координатами. Однако уравнения движения, которым должны удовлетворять эти частицы, становятся очень сложными. В частности, чтобы предсказать поведение частиц, нам необходимо знать не только их начальные координаты и скорости, а, вообще говоря, всю предыдущую историю их движения. Действительно, с точки зрения полевого подхода ускоренно движущиеся частицы излучают электромагнитные волны, которые воздействуют на другие частицы. Те, в свою очередь, излучают волны, которые действуют на исходные частицы, и т.д. Таким образом, в данный момент времени в пространстве существует достаточно сложная конфигурация поля, зависящая от всей предыстории, которая в соответствии с силой Лоренца действует на частицы. Поэтому, отказавшись от полей, мы вынуждены будем для силы записать очень замысловатое выражение. Вместо этого считается справедливым простое уравнение движения (сила Лоренца). Для его решения необходимо знать только начальную скорость и положение частицы. Платой служит необходимость задания начальной конфигурации электромагнитного поля во всём пространстве и, для описания его динамики, решение уравнений Максвелла.

Таким образом, чтобы описание взаимодействия заряженных частиц упростилось, необходимо ввести новую сущность - электромагнитное поле. Вся физика, в конечном счёте, строится на основе введения различных модельных сущностей, математическое описание которых позволяет делать некоторые предсказания. Если введение данного объекта приводит к математическому упрощению теории, то можно считать, что эти объекты действительно существуют как самостоятельные сущности. В этом смысле электромагнитное поле так же реально, как и диван, на котором пишутся эти строки.

## 5.8 Законы сохранения

• Закон сохранения заряда (стр. 277) – не единственный закон сохранения, который содержат в себе уравнения Максвелла. Введём следующие величины:

$$W = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi}, \quad \mathbf{P} = \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{4\pi}. \quad (5.56)$$

Вычислим производную от  $W$  по времени, заменив затем производные полей при помощи уравнений Максвелла  $\partial\mathbf{E}/\partial t = [\nabla \times \mathbf{B}] - 4\pi\mathbf{j}$  и  $\partial\mathbf{B}/\partial t = -[\nabla \times \mathbf{E}]$ :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \frac{\mathbf{E}[\nabla \times \mathbf{B}] - \mathbf{B}[\nabla \times \mathbf{E}]}{4\pi} - \mathbf{Ej}.$$

С другой стороны, вычисляя дивергенцию вектора  $\mathbf{P}$  как производную произведения, имеем:

$$4\pi\nabla\mathbf{P} = \nabla[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B}[\nabla \times \mathbf{E}] - \mathbf{E}[\nabla \times \mathbf{B}].$$

Подставляя это выражение в производную по времени от  $W$ , получаем уравнение, которое называют *теоремой Пойнтинга*:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathbf{Ej} + \nabla\mathbf{P} = 0. \quad (5.57)$$

Для выяснения его физического смысла запишем интегральную форму этого уравнения, проинтегрировав по произвольному объёму:

$$\frac{d}{dt} \int W dV + \int \mathbf{Ej} dV = - \oint \mathbf{P} d\mathbf{S},$$

где в правой части мы воспользовались теоремой Гаусса. Рассмотрим точечные заряды, находящиеся в точках  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$  внутри объёма:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k),$$

где  $\mathbf{u}_k$  - скорости зарядов  $q_k$ . В результате интеграл от  $\mathbf{Ej}$ :

$$\int \mathbf{Ej} dV = \sum_{k=1}^n q_k \mathbf{u}_k \mathbf{E}(\mathbf{r}_k)$$

сводится к сумме скоростей зарядов, умноженных на напряжённость электрического поля в точке, где они находятся.



Запишем силу Лоренца, которая действует на каждый заряд:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{u} \times \mathbf{B}].$$

Так как магнитная составляющая силы перпендикулярна скорости, произведение  $\mathbf{u}$  на силу определяется только электрическим полем, и производная энергии движения  $\mathbb{E} = m/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$  заряда по времени равна:

$$\frac{d\mathbb{E}}{dt} = \mathbf{u}\mathbf{F} = q\mathbf{u}\mathbf{E}.$$

В результате интегральная версия закона сохранения (5.57) имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int W dV + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_k \right\} = - \oint \mathbf{P} d\mathbf{S}. \quad (5.58)$$

Если заряды сосредоточены в некоторой области пространства и поля на бесконечности равны нулю, то при интегрировании по *всему* пространству правая часть (поверхностный интеграл) будет равна нулю, и

$$\int \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} dV + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_k = const.$$

Это уравнение может быть интерпретировано, как закон сохранения энергии, в котором первое слагаемое является энергией электромагнитного поля, а второе – суммарной кинетической энергией заряженных частиц. Величину  $W$  естественно назвать плотностью энергии электромагнитного поля. Если область интегрирования конечна, то поверхностный интеграл от  $\mathbf{P}$  в общем случае отличен от нуля. Его можно, аналогично закону сохранения заряда, считать потоком энергии электромагнитного поля, уходящей из объёма (или, наоборот, туда попадающей). Соответственно,  $\mathbf{P}$  – это плотность потока. Она также называется *вектором Умова-Пойнтинга* или плотностью импульса электромагнитного поля.

Заметим, что до сих пор мы различали заряды, создающие поле и пробные заряды, которые в этом поле движутся под воздействием силы Лоренца, не искажая значения полей. При интерпретации закона сохранения мы объединили эти два вида зарядов, считая, что заряды, входящие в виде  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  в уравнения Максвелла, одновременно подвержены силе Лоренца со стороны полей, создаваемых *всеми* зарядами. Иначе говоря, поле, создаваемое данным зарядом, может действовать на этот же заряд. Как мы увидим в главе 7, такое “самодействие” приводит к определённым трудностям.

• Найдём ещё один закон сохранения. Для этого вычислим частную производную импульса поля:

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = - \frac{\mathbf{B} \times [\nabla \times \mathbf{B}] + \mathbf{E} \times [\nabla \times \mathbf{E}]}{4\pi} - \mathbf{j} \times \mathbf{B},$$

где снова подставлены производные полей из уравнений Максвелла. Воспользуемся следующим тождеством, проверяемым раскрытием двойного векторного произведения ( $\ll H_{43}$ ):

$$\mathbf{E} \times [\nabla \times \mathbf{E}] = \nabla \left( \frac{\mathbf{E}^2}{2} \right) - \nabla_i (E_i \mathbf{E}) + \mathbf{E} (\nabla \mathbf{E}). \quad (5.59)$$

В правой части индексом  $i$  помечено, какие векторы участвуют в скалярном произведении (по  $i$  сумма от 1 до 3). Такое же выражение получится и для магнитного поля. Запишем  $j$ -ю проекцию уравнения для  $\partial \mathbf{P} / \partial t$  и подставим в него тождество (5.59). Затем, при помощи символа Кронекера, запишем  $\nabla_j = \nabla_i \delta_{ij}$ . В результате, объединение первых двух слагаемых из каждого тождества приведёт к выражению  $\nabla_i \sigma_{ij}$ , где:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} W - \frac{E_i E_j + B_i B_j}{4\pi}$$

называется *тензором потока импульса*. Используя оставшиеся уравнения Максвелла  $\nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho$  и  $\nabla \mathbf{B} = 0$ , получаем:

$$\frac{\partial P_j}{\partial t} + \nabla_i \sigma_{ij} + \rho E_j + [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]_j = 0. \quad (5.60)$$

При интегрировании по всему объёму слагаемое с  $\nabla_i \sigma_{ij}$  превращается в поверхностный интеграл и обращается в ноль (если поля на бесконечности нулевые). Рассматривая, как и выше, для плотности заряда и тока сумму дельта-функций точечных частиц, приходим к уравнению (индекс  $k$  нумерует частицы, а не компоненты векторов):

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{P} dV + \sum_{k=1}^n q_k \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}_k) + \mathbf{u}_k \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_k) \} = 0.$$

Под знаком суммы находится сила Лоренца. Если мы снова “разрешаем” полям воздействовать на заряды, которые эти поля создают, то вместо силы Лоренца можно записать производную импульса каждой частицы по времени. В результате получается следующий закон сохранения:

$$\int \mathbf{P} dV + \sum_{k=1}^n \mathbf{p}_k = \text{const}. \quad (5.61)$$

Он имеет естественную интерпретацию сохранения суммарного импульса поля и зарядов, которые в нём находятся.

• Третий закон, который мы рассмотрим, связан с сохранением момента импульса. Умножим уравнение (5.60) векторно на радиус-вектор. В слагаемом  $\nabla_i \sigma_{ij}$  этот вектор можно внести под оператор набла. Действительно, записывая при помощи символа Леви-Чевиты в индексном виде векторное произведение, имеем:

$$\varepsilon_{jpr} x_p \nabla_i \sigma_{iq} = \varepsilon_{jpr} \nabla_i (x_p \sigma_{iq}) - \varepsilon_{jpr} \sigma_{iq} \nabla_i x_p.$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как  $\nabla_i x_p = \delta_{ip}$ , и свёртка с символом Кронекера даёт  $\varepsilon_{jip} \sigma_{iq}$ . Тензор  $\sigma_{iq}$  является симметричным, а  $\varepsilon_{jip}$  – антисимметричным. Их свёртка будет равна нулю (стр. 763). Таким образом, можно записать следующий дифференциальный закон сохранения:

$$\frac{\partial [\mathbf{r} \times \mathbf{P}]_j}{\partial t} + \nabla_i (\varepsilon_{jqp} x_q \sigma_{ip}) + [\mathbf{r} \times (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B})]_j = 0.$$

При интегрировании по всему объёму второе слагаемое выражается через поверхностный интеграл от  $\varepsilon_{jqp} x_q \sigma_{ip} dS_i$ . Если поля на бесконечности убывают быстрее, чем  $1/r^3$ , этот интеграл равен нулю. Переходя, как и выше, к системе точечных заряженных частиц, получаем следующий закон сохранения

$$\int [\mathbf{r} \times \mathbf{P}] dV + \sum_{k=1}^n [\mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k] = const. \quad (5.62)$$

Первый член является моментом импульса электромагнитного поля, а второй – суммарным моментом импульса системы заряженных частиц.

Таким образом, электромагнитное поле может переносить энергию, импульс и момент импульса, меняя соответствующие механические характеристики заряженных частиц. Естественно, такое же влияние существует и в обратную сторону.

Во всех трёх законах сохранения присутствуют полевые вклады и вклады от зарядов. По смыслу получения этих законов заряды не являются “пробными”, так как плотности заряда и тока взяты из правых частей уравнений Максвелла. Это те заряды, которые поля создают. Полевые части дают, например, величину потери энергии, импульса и момента импульса зарядом при излучении им электромагнитной волны. Если же мы хотим получить воздействие внешнего поля на пробный заряд, необходимо добавлять к внешнему полю поле самого заряда, иначе он не “появится” в законе сохранения. Игнорирование этого факта приводит к ошибочному выводу о сохранении энергии зарядов в электростатическом поле или отсутствии давления электромагнитной волны на заряд, движущийся в поле такой волны.

• Рассмотрим в качестве примера случай статического расположения зарядов. Ранее, чтобы ввести понятие поля, мы отличали заряд, создающий силу (поле), от пробного заряда, на который эта сила действует. В реальности все заряды равноправны, и подобный метод является идеализацией, справедливой, когда “пробный” заряд много меньше зарядов, “создающих” поле.

Если заряды одного порядка, то они равноправно взаимодействуют друг с другом при помощи силы Кулона. Например, чтобы сблизить два положительных заряда, необходимо приложить усилие (затратить энергию). Эта энергия окажется “запасённой” в этой системе. Если заряды “отпустить”, они разлетятся, и энергия перейдёт в энергию их движения.

Зафиксируем все заряды, кроме одного (“ $k$ -того”). Тогда его движение во внешнем поле характеризуется потенциальной энергией  $Q_k\varphi(\mathbf{r}_k)$  (стр. 269), где  $\mathbf{r}_k$  – положение заряда, а  $\varphi(\mathbf{r})$  – потенциал, создаваемый остальными зарядами. Это та энергия, которую необходимо затратить, чтобы переместить заряд из бесконечности в точку  $\mathbf{r}_k$ . Пусть в пространстве уже находится заряд  $Q_1$ . Приблизим к нему  $Q_2$  и “зафиксируем” оба заряда. Затем к ним добавим  $Q_3$ , и т.д. Энергия, затрачиваемая на формирование всей системы зарядов, будет равна:

$$U = Q_2 \frac{Q_1}{r_{12}} + Q_3 \left( \frac{Q_1}{r_{13}} + \frac{Q_2}{r_{23}} \right) + \dots = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}},$$

где  $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ . Несложно видеть, что в сумме (первое равенство) перебираются по одному разу все возможные пары зарядов: (1,2); (1,3); (2,3), и т.д. Это в компактном виде записано в виде последней суммы. Символ  $i \neq j$  означает, что суммирование ведётся по двум индексам  $i, j$  за исключением их совпадающих значений. В такой сумме пары будут дублироваться [т.е. встречается (1,2) и (2,1)], поэтому поставлен множитель  $1/2$ .

Найдём эту же энергию, интегрируя выражение для плотности (5.8). Так как магнитного поля нет, в статическом случае  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , поэтому суммарная энергия поля равна:

$$U = \int \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} dV = - \int \frac{\mathbf{E}\nabla\varphi}{8\pi} dV = \int \frac{\varphi\nabla\mathbf{E}}{8\pi} dV = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dV,$$

где выполнено интегрирование по частям  $\nabla(\varphi\mathbf{E}) = \mathbf{E}\nabla\varphi + \varphi\nabla\mathbf{E}$  (в предположении, что поля на бесконечности по теореме Гаусса достаточно быстро убывают и интеграл от  $\nabla(\varphi\mathbf{E})$  равен нулю) и подставлено уравнение Максвелла  $\nabla\mathbf{E} = 4\pi\rho$ .

Записывая для точечных зарядов плотность  $\rho(\mathbf{r}) = \sum Q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)$ , получим:

$$U = \frac{1}{2} \sum_k Q_k \varphi(\mathbf{r}_k) \mapsto \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}}.$$

Заметим, что на самом деле суммирование должно производиться по всем  $i, j$ , а не только в случае, когда  $i \neq j$ . Действительно, в выражение для  $\varphi(\mathbf{r}_k)$  входит общий потенциал, создаваемый всеми зарядами, в т.ч. и  $k$ -тым зарядом. Поэтому выше мы поставили не знак равенства, а стрелочку. В результате такого перехода мы отбросили бесконечные (но постоянные, т.е. не зависящие от положения зарядов) члены самодействия типа  $Q_1 Q_1 / |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1|$ , т.к. энергия всегда определена с точностью до константы. Тем не менее, не очень хорошо, что эта константа получилась бесконечной. Проблему самодействия и подобных бесконечностей мы подробно рассмотрим в главе 7.

Аналогично электростатической энергии можно вычислить энергию постоянных токов в магнитостатике:

$$U = \int \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} dV = \int \frac{\mathbf{B}[\nabla \times \mathbf{A}]}{8\pi} dV = \int \frac{\mathbf{A}[\nabla \times \mathbf{B}]}{8\pi} dV = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \mathbf{j} dV,$$

где использовано тождество  $\nabla(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}[\nabla \times \mathbf{A}] - \mathbf{A}[\nabla \times \mathbf{B}]$  (дивергенция  $\nabla(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  даёт по теореме Гаусса поверхностный интеграл, равный нулю на бесконечности для убывающих полей). В последнем равенстве подставлено уравнение Максвелла  $\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}$  магнитостатики. Учитывая решение для векторного потенциала (5.30), стр. 284, энергию можно переписать в следующем виде:

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1) \mathbf{j}(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2.$$

Если постоянные токи текут в наборе из  $n$  тонких замкнутых проводников ( $\mathbf{j} dV \mapsto I d\mathbf{r}$ ), то энергию можно также представить в следующем виде:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \int_{L_k} \mathbf{A} d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \int_{S_k} [\nabla \times \mathbf{A}] d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Phi_k,$$

где применена теорема Стокса и  $\Phi_k$  – поток магнитного поля через поверхность, натянутую на  $k$ -й замкнутый проводник с током. В частности, энергия одного замкнутого проводника равна  $U = I\Phi/2$ .

• Рассмотрим теперь плоскую электромагнитную волну (стр. 302), распространяющуюся вдоль единичного вектора  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{nE} = 0, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{nr} - t).$$

Плотность энергии и импульса такой волны равны:

$$W = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} = \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi}, \quad \mathbf{P} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi} = \mathbf{n} \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi},$$

где подставлено  $\mathbf{B}$  и учтено, что  $\mathbf{nE} = 0$ . Заметим, что между *плотностями* энергии и импульса волны выполняется стандартная связь для энергии и импульса частицы, движущейся со скоростью света:

$$\mathbf{P} = \mathbf{n}W.$$

Если волна падает на поверхность, то эта поверхность испытывает *световое давление*, возникающее в результате поглощения (или отражения) поверхностью импульса поля. Экспериментально световое давление было впервые измерено П. Н. Лебедевым в 1899 г. Оно очень маленькое. Так, интенсивность солнечного света на поверхности Земли составляет около  $J = 1000 \text{ Вт/м}^2$ . Сила  $F$  равна отношению изменения импульса за время  $\Delta t$ , поэтому световое давление на зеркало (полное отражение) площадью  $S$  составляет (восстановлена скорость света  $c$ ):

$$P = \frac{F}{S} = \frac{\Delta p}{S\Delta t} = \frac{2p}{S\Delta t} = \frac{2E/c}{S\Delta t} = \frac{2J}{c} \approx \frac{2 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} \approx 7 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Такое же давление окажет стальная гирька массой 7 миллиграммов, если её удастся “раскатать” в пластину размером метр на метр.

Момент импульса волны (независимо от её поляризации) не направлен вдоль волнового вектора. Действительно, так как вектор  $\mathbf{P}$  параллелен  $\mathbf{n}$ , векторное произведение  $\mathbf{r} \times \mathbf{P}$  будет перпендикулярно  $\mathbf{n}$ . Плотность момента импульса циркулирует по окружностям в плоскостях, перпендикулярных  $\mathbf{n}$ . Если вычислить полный момент, проинтегрировав плотность по цилиндру с осью вдоль  $\mathbf{n}$ , то получится ноль. Этот факт называют *проблемой момента импульса плоской волны*. Проблема состоит в том, что для поляризованной по кругу волны обычно ожидают получить отличный от нуля момент импульса. Например, на квантовом уровне такая волна является потоком поляризованных фотонов, каждый из которых несёт спин  $\hbar$ . Одно из возможных решений этой проблемы состоит в переходе от плоской волны к более реалистичным ограниченным пучкам, интенсивность поля которых постепенно снижается при удалении от линии распространения. Пример расчёта момента импульса поля такого пучка будет дан несколько позже (стр. 334).

• В связи с законами сохранения сделаем несколько замечаний. Простейший подход к решению электродинамических задач выглядит следующим образом. Предполагается, что есть некоторые *заданные* заряды и токи, которые создают поле (его находят, решая уравнения Максвелла). Кроме этого, существуют *пробные* заряды, которые в этом поле движутся под воздействием силы Лоренца. Их движение не изменяет внешнего поля, а сами заряды не излучают. Несмотря на искусственность подобного алгоритма, он позволяет точно решить многие задачи и оказывается неплохим первым приближением к реальности.

При получении законов сохранения был рассмотрен несколько более общий подход, в котором заряды одновременно создавали поле и были подвержены его воздействию. В совместных законах сохранения поля и зарядов часть энергии (импульса или момента импульса) поля передаётся зарядам. Само поле при этом должно терять энергию. При решении задачи о поведении пробного заряда, например, в поле электромагнитной волны этого не происходит. Внешнее для него поле остаётся без изменений и не теряет энергию, которая “передаётся” заряду. Поэтому на пробный заряд световая волна не оказывает давления, точнее, закон сохранения импульса поля + заряда в этом случае неприменим.

Законы сохранения можно применять, когда нет разделения на пробные заряды и внешнее поле. Пусть электромагнитная волна поглощается пластинкой из некоторого материала. Как и “положено” для законов сохранения, можно не рассматривать детали взаимодействия волны и пластинки, подсчитав величины, входящие в (5.58), (5.62), (5.61) до и после взаимодействия. На микроуровне процесс поглощения электромагнитной волны связан с тем, что заряды пластинки испытывают воздействие со стороны волны и начинают излучать. Это излучение “гасит” исходную волну, в результате чего происходит её поглощение. В этом случае в законе сохранения “после взаимодействия” должны стоять напряжённости не падающей волны, а суммарного поля, возникающего в результате сложения поля исходной волны и вторичных волн от зарядов пластины.

Заметим также, что в каждом законе сохранения присутствуют поверхностные члены или дивергенции в дифференциальной форме. Сохраняющую величину мы получаем, когда отбрасываем эти члены при интегрировании по всему пространству. Однако подобное действие не даёт нам ответа на вопрос, как по пространству распределена, например, энергия поля. С этим вопросом тесно связана проблема неоднозначности выбора плотностей сохраняющихся величин. Мы вернёмся к этим вопросам в главе 7.

## 5.9 Потенциалы поля

• Уравнения Максвелла состоят из двух пар уравнений. Одна пара (закон Гаусса для магнитного поля и закон Фарадея) не зависит от плотности заряда и тока. Поэтому возможно сразу построить решение этих уравнений. Начнём с закона Гаусса. Так как дивергенция ротора равна нулю, из равенства нулю дивергенции магнитного поля следует:

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

где  $\mathbf{A}$  называется *векторным потенциалом*. Заметим, что стрелка следования направлена в обе стороны. Следование справа налево проверяется просто ( $\nabla[\nabla \times \mathbf{A}] = [\nabla \times \nabla]\mathbf{A} = 0$ ). Обратное следование требует, вообще говоря, убывания полей на бесконечности [1].

Возьмём ещё одно уравнение Максвелла, в котором нет зарядов (закон электромагнитной индукции Фарадея). При помощи векторного потенциала его можно переписать в следующем виде:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Аналогично дивергенции, если ротор некоторого векторного поля равен нулю, то это поле выражается через градиент скалярной функции. В одну сторону это утверждение доказывается элементарно. Можно показать, что оно справедливо и в обратную сторону [1]. Таким образом, *решение* двух уравнений Максвелла для дивергенции магнитного поля и ротора электрического поля выражается через четыре функции: скалярный потенциал  $\varphi$  и три компоненты векторного потенциала  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (5.63)$$

Решения для электрического и магнитного поля, выраженные через скалярный и векторный потенциалы, можно подставить в оставшуюся пару уравнений  $\nabla \mathbf{E} = 4\pi\rho$  и  $\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j} + \partial\mathbf{E}/\partial t$ :

$$\partial^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \mathbf{A} \right) = 4\pi\rho, \quad \partial^2 \mathbf{A} + \nabla \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \mathbf{A} \right) = 4\pi\mathbf{j}, \quad (5.64)$$

где  $\partial^2$  – дифференциальный оператор Д'Аламбера:

$$\partial^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta,$$

а  $\Delta = \nabla^2$  – как обычно, оператор Лапласа. Уравнения (5.64) вместе с определениями (5.63) эквивалентны исходным уравнениям Максвелла.



• Введенные выше потенциалы определены неоднозначно. Точнее, если провести следующие замены:

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla f, \quad \varphi \mapsto \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (5.65)$$

где  $f$  - произвольная функция координат и времени, то значения электрического и магнитного полей (5.63) не изменятся. Проверим это для напряжённости электрического поля:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \mapsto -\nabla\left(\varphi - \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{A} + \frac{\nabla f}{\partial t}\right) = \mathbf{E},$$

где учтено, что частные производные по времени и координатам ( $\nabla$ ) могут быть переставлены местами. Подобная неоднозначность позволяет наложить на потенциалы дополнительное условие:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\mathbf{A} = 0, \quad (5.66)$$

которое называется *калибровкой Лоренца*. Разберёмся, почему это можно сделать. Предположим, что данному электрическому и магнитному полю соответствуют потенциалы, которые не удовлетворяют этому условию. Точнее, в правой части калибровочного условия оказывается не ноль, а некоторая функция  $g = g(\mathbf{r}, t)$ . Тогда, проведя замены потенциалов, при помощи функции  $f$ , которая удовлетворяет уравнению  $\partial^2 f = g$ , можно добиться равенства нулю калибровочного условия Лоренца:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi - \frac{\partial f}{\partial t}\right) + \nabla(\mathbf{A} + \nabla f) = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\mathbf{A} - \partial^2 f = g - \partial^2 f = 0.$$

Итак, без нарушения общности можно считать, что выполняется (5.66). В этом случае уравнения (5.64) для потенциалов принимают простой вид:

$$\partial^2 \varphi = 4\pi\rho, \quad \partial^2 \mathbf{A} = 4\pi\mathbf{j}. \quad (5.67)$$

В отсутствие зарядов ( $\rho = 0$ ,  $\mathbf{j} = 0$ ) эти уравнения становятся волновыми уравнениями для скалярной  $\varphi$  и векторной  $\mathbf{A}$  функций.

Если ввести 4-векторы потенциала  $A^\alpha = \{\varphi, \mathbf{A}\}$  и тока  $j^\alpha = \{\rho, \mathbf{j}\}$ , то эти два уравнения можно записать, как одно:

$$\partial^2 A^\alpha = 4\pi j^\alpha. \quad (5.68)$$

Естественно, уравнений на самом деле 4, так как их необходимо расписывать отдельно для каждой компоненты  $\nu = 0, 1, 2, 3$ .

• Выясним, как преобразуются потенциалы поля при смене инерциальной системы отсчёта. Для этого нам потребуется закон преобразования для производных. Рассмотрим функцию  $f = f(t, \mathbf{r})$  координат и времени некоторого события, наблюдаемого из системы  $S$ . В силу преобразований Лоренца она также зависит от координат и времени этого же события в системе  $S'$ . Поэтому  $f = f(t(t', \mathbf{r}'), \mathbf{r}(t', \mathbf{r}'))$ . Возьмём производные, как производные сложной функции ( $\mathbf{r} = \{x, y, z\} = \{x_1, x_2, x_3\}$ ):

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t'}, \quad \frac{\partial f}{\partial x'_i} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x'_i} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}. \quad (5.69)$$

По индексу  $j$  компонент радиус-вектора  $x_j$  подразумевается суммирование от 1 до 3. Записав обратное преобразование Лоренца (см. (5.12), стр. 270, с  $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$ ):

$$t = \gamma(t' + \mathbf{v}\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \gamma\mathbf{v}t' + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'),$$

несложно найти соответствующие производные:

$$\frac{\partial t}{\partial t'} = \gamma, \quad \frac{\partial x_i}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial x'_i} = \gamma v_i, \quad \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \delta_{ij} + \Gamma v_i v_j,$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Обозначим производную по времени, как  $\partial_0 = \partial/\partial t$ , а для производной по координатам в векторном виде будем использовать знак наблы  $\nabla_i = \partial/\partial x_i$ . Опуская функцию  $f$ , запишем преобразование производных (5.69) в операторном виде:

$$\partial'_0 = \gamma(\partial_0 + \mathbf{v}\nabla), \quad \nabla' = \nabla + \gamma\mathbf{v}\partial_0 + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla). \quad (5.70)$$

Обратим внимание, что, в отличие от прямых преобразований Лоренца, эти преобразования выглядят, как обратные, хотя в правой части стоят штрихованные величины, а в левой не – штрихованные. Как мы видели во второй главе, такое преобразование характерно для 4-ковекторов. Поэтому оператор производной является ковектором:

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right\},$$

где в ковариантных обозначениях компоненты 4-вектора события обозначены, как  $x^\alpha = \{t, \mathbf{r}\}$ . Напомним, что у 4-вектора индекс находится всегда вверху, а у 4-ковектора – внизу. Для запоминания можно считать, что при взятии производной  $\partial/\partial x^\alpha$  индекс  $\alpha$  лишь “перебирается” через знак дроби, оставаясь внизу так, что получившийся оператор является 4-ковектором  $\partial_\alpha$  с индексом внизу.

Замечательным свойством потенциалов является то, что они преобразуются, как компоненты 4-вектора  $A^\nu = \{\varphi, \mathbf{A}\}$ :

$$\varphi' = \gamma(\varphi - \mathbf{v}\mathbf{A}), \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \gamma\mathbf{v}\varphi + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{A}). \quad (5.71)$$

Используя преобразования для полей (5.50), (5.51), стр. 299, это несложно проверить. Так, например, перемножая векторно (5.70) и (5.71), имеем:

$$\mathbf{B}' = \nabla' \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \gamma\mathbf{v} \times (\nabla\varphi + \partial_0\mathbf{A}) + \Gamma\{(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \times \mathbf{A} - \mathbf{v} \times \nabla(\mathbf{v}\mathbf{A})\}.$$

Учитывая тождество:  $\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{A}]] = [\mathbf{v} \times \nabla](\mathbf{v}\mathbf{A}) - (\mathbf{v}\nabla)[\mathbf{v} \times \mathbf{A}]$ , получаемое раскрытием двойного векторного произведения  $\mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{A}]$ , и связь электрического и магнитного поля с потенциалами, приходим к преобразованию для магнитного поля (5.51):

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \gamma\mathbf{v} \times \mathbf{E} - \Gamma[\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]] = \gamma(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}) - \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{B}).$$

Аналогичные, чуть более громоздкие выкладки с учётом  $\gamma^2 - \gamma\Gamma = \Gamma$  приводят к преобразованиям для электрического поля (5.50).

В качестве упражнения стоит проверить, что калибровка Лоренца (5.66) имеет одинаковый вид во всех системах отсчёта. В ковариантных обозначениях уравнение калибровки является свёрткой 4-вектора  $A^\alpha$  и 4-ковектора  $\partial_\alpha$ :

$$\partial_\alpha A^\alpha = \partial_0 A^0 + \partial_i A^i = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\mathbf{A} = 0, \quad (5.72)$$

где повторяющиеся греческие индексы суммируются от 0 до 3, а латинские от 1 до 3. Аналогично оператор Д'Аламбера имеет одинаковый вид для всех наблюдателей, так как в ковариантных обозначениях он равен:

$$\partial^2 = \partial_\alpha \partial^\alpha = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta = \partial_0^2 - \partial_i \partial_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

Поэтому уравнения (5.68) выглядят одинаково для всех наблюдателей, если величина  $j^\alpha = (\rho, \mathbf{j})$  является 4-вектором. Покажем это, записав 4-ток следующим образом:

$$j^\alpha = \rho \frac{dx^\alpha}{dt} = \underbrace{\rho d^3\mathbf{x}}_Q \frac{dx^\alpha}{d^4x}. \quad (5.73)$$

При  $\alpha = 0$  получаем  $j^0 = \rho$ , иначе  $j^i = \mathbf{j} = \rho\mathbf{u}$ . Смещение в 4-пространстве  $dx^\alpha$  – это 4-вектор. Объём 4-пространства  $d^4x = dt d^3\mathbf{x}$  является инвариантом, что проверяется нахождением якобиана от преобразований Лоренца ( $\leq N_{44}$ ). Наконец,  $\rho d^3\mathbf{x}$  – это заряд в элементарном объёме, который инвариантен в силу принятых постулатов. В результате, 4-ток оказывается 4-вектором.

• Найдём теперь общее решение уравнений (5.67) в случае, когда функции плотности заряда  $\rho(\mathbf{x}, t)$  и плотности тока  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$  заданы. Скалярный потенциал в калибровке Лоренца удовлетворяет уравнению Д'Аламбера:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = 4\pi\rho,$$

где  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  – некоторая заданная функция, а  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$  – неизвестная функция, которую необходимо найти.

С математической точки зрения это линейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка. Линейность означает, что если нам известны два его решения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , то, как легко видеть, их линейная комбинация  $C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$ , где  $C_i$  – произвольные константы, также будет решением. Однородным это уравнение станет, когда  $\rho = 0$ , и тогда его называют *волновым уравнением*.

Для решения уравнения необходимо задать начальные условия. Так как в нём есть производная по времени второго порядка, потребуется две функции координат: собственно  $\varphi(\mathbf{x}, 0)$  и значение её производной по времени  $\partial\varphi(\mathbf{x}, 0)/\partial t$  в начальный момент  $t = 0$ . Общее решение уравнения Д'Аламбера может быть записано следующим образом:

$$\varphi = \varphi_0(\mathbf{x}, t) + \varphi_1(\mathbf{x}, t),$$

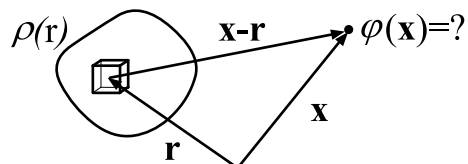
где  $\varphi_0(\mathbf{x}, t)$  – *общее решение* однородного уравнения ( $\rho = 0$ ), а  $\varphi_1(\mathbf{x}, t)$  – *любое частное решение* неоднородного уравнения ( $\rho \neq 0$ ). Общее решение однородного уравнения обеспечит выполнение произвольных начальных условий, а частное решение – собственно выполнение самого уравнения.

Попробуем угадать вид частного решения, а затем проверим его подстановкой в уравнение. Если бы производной по времени не было, вместо уравнения Д'Аламбера получилось бы уравнение Пуассона:

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho.$$

Его решение мы уже записывали в электростатике, как сумму (интеграл) по элементарным зарядам, создающим кулоновский потенциал:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}$$



где  $d^3\mathbf{r} = dV$  – элементарный объём, соответствующий переменной интегрирования  $\mathbf{r}$ . Интегрирование ведётся по всему пространству.

Если задача нестационарна и заряды движутся, то их плотность в данном элементарном объёме всё время изменяется. Однако информация об этом изменении достигает точки наблюдения поля только через время, равное расстоянию  $|\mathbf{x} - \mathbf{r}|$  (единичная скорость распространения). Поэтому предположим, что пуассоновский интеграл остаётся в силе, однако плотность заряда в нём необходимо брать с учётом запаздывания в предшествующий момент времени  $t - |\mathbf{x} - \mathbf{r}|$ :

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi_0(\mathbf{x}, t) + \int \frac{\rho(\mathbf{r}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{r}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}. \quad (5.74)$$

Это предположение оказывается верным. Убедимся в этом прямыми вычислениями. Обозначим расстояние (=время) запаздывания через  $R = |\mathbf{x} - \mathbf{r}|$ . Соответственно,  $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{r}$ . Возьмём лапласиан от подынтегрального выражения по переменной  $\mathbf{x}$  (или эквивалентно по  $\mathbf{R}$ ) как вторую производную произведения функций:

$$\nabla\nabla\left(\frac{\rho}{R}\right) = \nabla\left(\frac{\nabla\rho}{R} + \rho\nabla\frac{1}{R}\right) = \frac{\Delta\rho}{R} - 2(\nabla\rho)\frac{\mathbf{R}}{R^3} + \rho\Delta\frac{1}{R}. \quad (5.75)$$

Во втором слагаемом последнего равенства учтено значение градиента  $\nabla(1/R) = -\mathbf{R}/R^3$ . Градиент и лапласиан от плотности равны:

$$\nabla\rho = -\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\partial R}{\partial\mathbf{x}} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \Delta\rho = \frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}\left(\frac{\mathbf{R}}{R}\right)^2 - \frac{\partial\rho}{\partial t}\nabla\frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} - \frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{2}{R}.$$

Подставляя всё это в (5.75), получаем, что все слагаемые, кроме  $\rho\Delta(1/R)$ , сокращаются. Для лапласиана от  $1/R$  справедливо соотношение:

$$\Delta\frac{1}{R} = -4\pi\delta(\mathbf{R}).$$

Оно следует из закона Гаусса для точечного заряда  $\nabla\mathbf{E} = 4\pi\delta(\mathbf{R})$  и связи  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ . Поэтому окончательно получаем:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = 4\pi \int \rho(\mathbf{r}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{r}|) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 4\pi\rho(\mathbf{x}, t).$$

При интегрировании с дельта-функцией интеграл опускается, а переменная интегрирования становится равной  $\mathbf{r} = \mathbf{x}$ .

Такое же решение можно записать и для каждой компоненты векторного потенциала:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}_0(\mathbf{x}, t) + \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{r}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}. \quad (5.76)$$

Значения потенциалов с индексом “0” по определению удовлетворяют однородным (волновым) уравнениям. Они описывают общие решения в отсутствие зарядов.

## 5.10 Дипольное излучение

В разделе 5.5 были получены выражения для электрического и магнитного полей на больших расстояниях от зарядов и токов в статическом случае. Проведём аналогичные вычисления в ситуации, когда токи, положение зарядов, а следовательно, и напряжённость электромагнитного поля меняются со временем.

Пусть расстояние от точки наблюдения полей до компактной системы зарядов равно  $|\mathbf{x}|$ . Тогда любые изменения, происходящие с этими зарядами, будут наблюдаться в прошлом, отдалённом от текущего момента на время  $|\mathbf{x}|/c$ , где  $c = 1$  – фундаментальная скорость. На самом деле, всё в этом мире мы наблюдаем в прошлом. Любые сигналы распространяются со скоростью, равной или меньшей фундаментальной. Чем дальше от нас объект, тем более отдалённое его прошлое мы видим. То, что происходит с Солнцем, мы узнаём только через 8 минут, а соседнюю галактику Андромеды мы видим такой, какой она была 2.5 миллиона лет назад.

Запишем решение уравнений Максвелла для скалярного потенциала (5.74), стр. 323:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{r}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r},$$

опустив часть решения  $\varphi_0(\mathbf{x}, t)$  свободных уравнений. Разложим в ряд расстояние от элементарного объёма  $d^3\mathbf{r}$  до точки наблюдения (см. также стр. 288):

$$|\mathbf{x} - \mathbf{r}| \approx \sqrt{\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x}\mathbf{r}} \approx |\mathbf{x}| - \mathbf{n}\mathbf{r},$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ . Разложим также плотность заряда в ряд Тейлора по  $\mathbf{n}\mathbf{r}$ :

$$\rho(\mathbf{r}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{r}|) \approx \rho(\mathbf{r}, T + \mathbf{n}\mathbf{r}) \approx \rho(\mathbf{r}, T) + \dot{\rho}(\mathbf{r}, T) (\mathbf{n}\mathbf{r}) + \dots,$$

где  $T = t - |\mathbf{x}|$  – время в прошлом от текущего момента  $t$ , в котором наблюдатель, расположенный в  $\mathbf{x}$ , “видит” систему зарядов. Точка над  $\rho$  – частная производная по времени. Аналогично разложим в ряд знаменатель под интегралом:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} \approx \frac{1}{|\mathbf{x}|(1 - \mathbf{n}\mathbf{r}/|\mathbf{x}|)} \approx \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}}{|\mathbf{x}|^2},$$

ограничившись порядком малости  $\mathbf{n}\mathbf{r}/|\mathbf{x}|$ .

Перемножая эти два ряда с точностью до  $\mathbf{nr}$ , получаем:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) \approx \frac{Q}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{nd}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{\dot{\mathbf{nd}}}{|\mathbf{x}|},$$

где введены суммарный заряд и дипольный момент системы зарядов:

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}, T) d^3\mathbf{r}, \quad \mathbf{d} = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, T) d^3\mathbf{r}.$$

Первое слагаемое является кулоновским потенциалом. Если система зарядов замкнута, то её заряд постоянен и кулоновский член не зависит от времени и эффекта запаздывания. Дальше для простоты будем рассматривать случай  $Q = 0$ . Второе и третье слагаемые в разложении потенциала определяются дипольным моментом и скоростью его изменения. При этом второе слагаемое совпадает с выражением, полученным в электростатике §5.5 (за исключением эффекта запаздывания). Дипольный момент даже замкнутой системы зарядов (в отличие от полного заряда) является функцией времени. На расстоянии  $|\mathbf{x}|$  он должен браться в момент времени  $T = t - |\mathbf{x}|$ . Третье слагаемое на больших расстояниях убывает существенно медленнее, чем второе. Поэтому именно оно описывает излучаемую электромагнитную волну. Такое излучение называется *дипольным электрическим излучением*.

В силу уравнения непрерывности (5.27), стр. 277, производную по времени от дипольного момента можно переписать следующим образом:

$$\dot{\mathbf{d}} = \frac{d}{dT} \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, T) d^3\mathbf{r} = - \int \mathbf{r} (\nabla \mathbf{j}) d^3\mathbf{r} = \int \mathbf{j} d^3\mathbf{r},$$

где  $\nabla$  действует на  $\mathbf{r}$  и последнее равенство получается в результате интегрирования по частям. Действительно, запишем  $i$ -ю компоненту производной дипольного момента:

$$\dot{d}_i = - \int r_i (\nabla \mathbf{j}) d^3\mathbf{r} = - \int \nabla(r_i \mathbf{j}) d^3\mathbf{r} + \int (\mathbf{j} \nabla) r_i d^3\mathbf{r} = \int j_i d^3\mathbf{r}.$$

(интеграл от полной дивергенции равен нулю в силу теоремы Гаусса, т.к. на поверхности объёма, удалённой от зарядов, токов нет).

Напомним, что при рассмотрении стационарных задач в магнитоэлектростатике мы считали, что пространственный интеграл от плотности тока  $\mathbf{j}$  равен нулю (в стационарном случае ограниченный ток должен быть замкнутым). Если токи зависят от времени, это не так. Например, поле может создавать одиночный заряд, движущийся с переменной скоростью. В этом случае  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(\mathbf{T})) \mathbf{v}(T)$  и интеграл от тока равен  $Q\mathbf{v}(T)$ .

Аналогично записывается разложение интеграла (5.76), стр. 323 для векторного потенциала. Мы ограничимся только ведущим приближением:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \approx \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, T) d^3\mathbf{r} = \frac{\dot{\mathbf{d}}(T)}{|\mathbf{x}|}.$$

Как и в случае с третьим слагаемым в разложении скалярного потенциала, это выражение называется электрическим дипольным излучением.

Найдём электромагнитное поле на больших расстояниях, взяв для скалярного потенциала третье слагаемое ( $Q = 0$ ,  $|\mathbf{x}|^2 \gg |\mathbf{x}'|^2$ ):

$$\varphi(\mathbf{x}, t) \approx \frac{\mathbf{n}\dot{\mathbf{d}}(T)}{|\mathbf{x}|}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \approx \frac{\dot{\mathbf{d}}(T)}{|\mathbf{x}|}.$$

Будем пренебрегать членами порядка  $1/|\mathbf{x}|^2$  по сравнению с линейно убывающими по  $|\mathbf{x}|$ . Поэтому при взятии ротора от  $\mathbf{A}$  можно  $1/|\mathbf{x}|$  вынести за знак наблы, так как её действие на этот множитель даст вклад порядка  $1/|\mathbf{x}|^2$ . При дифференцировании по координатам дипольного момента необходимо учесть, что  $\mathbf{d} = \mathbf{d}(t - |\mathbf{x}|)$ , поэтому:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{d}}}{\partial x_i} = -\ddot{\mathbf{d}} \frac{\partial |\mathbf{x}|}{\partial x_i} = -\ddot{\mathbf{d}} \frac{x_i}{|\mathbf{x}|} = -\ddot{\mathbf{d}} n_i,$$

где, как и раньше,  $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$  – единичный вектор в направлении точки наблюдения. Следовательно, магнитное поле равно:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} [\ddot{\mathbf{d}} \times \nabla]|\mathbf{x}| = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{x}|}.$$

Аналогично вычисляется электрическое поле:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}})\mathbf{n} - \ddot{\mathbf{d}}}{|\mathbf{x}|} = \frac{\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]}{|\mathbf{x}|}.$$

Таким образом, в приближении электрического дипольного излучения:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\ddot{\mathbf{d}}(T) \times \mathbf{n}}{|\mathbf{x}|}.$$

Заметим, что электрическое и магнитное поля оказались перпендикулярными. Дальнейшие члены разложения скалярного потенциала приводят к поправкам к этим выражениям, называемым квадрупольным (и далее мультипольным) излучением. Следующие члены разложения векторного потенциала дают т.н. *магнитно-дипольное* излучение, зависящее от вторых производных магнитного момента  $\dot{\mathbf{m}}$ . Подобный ряд можно строить сколь угодно длинным, получая всё более точное приближение к интегральному представлению запаздывающих потенциалов.



Плотность импульса электромагнитного поля дипольного излучения равна:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi} = \frac{[\mathbf{B} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{B}}{4\pi} = \mathbf{n} \frac{\mathbf{B}^2}{4\pi} = \mathbf{n} \frac{[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2}{4\pi \mathbf{x}^2},$$

где учтено, что  $\mathbf{nB} = 0$ . В силу закона сохранения электромагнитной энергии (5.57), стр. 310, убывание энергии в объёме связано с её потоком  $\mathbf{P}$  через поверхность. Интеграл от  $\mathbf{P}$  по этой поверхности равен “уходу” энергии за единицу времени.

Интенсивность излучения  $dI$  в направлении телесного угла  $d\Omega$  определяется, как поток энергии, проходящий в единицу времени через элемент поверхности  $dS = \mathbf{x}^2 d\Omega$  сферы радиуса  $|\mathbf{x}|$ :

$$\frac{dI}{d\Omega} = \mathbf{x}^2 (\mathbf{nP}) = \frac{[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2}{4\pi}.$$

Введя угол  $\theta$  между  $\ddot{\mathbf{d}}$  и единичным вектором  $\mathbf{n}$ , интенсивность в телесном угле  $d\Omega$  можно записать следующим образом:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi} \sin^2 \theta.$$

Интенсивность излучения максимальна в направлении, перпендикулярном второй производной по времени от дипольного момента ( $\theta = \pi/2$ ).

Проинтегрируем интенсивность излучения по всему телесному углу ( $d\Omega = d\phi \sin \theta d\theta$ ):

$$I = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{2} \int_{-1}^1 (1 - z^2) dz.$$

В результате получается полная интенсивность излучения (суммарная энергия, теряемая системой зарядов в единицу времени):

$$I = \frac{2}{3} \ddot{\mathbf{d}}^2. \quad (5.77)$$

Наличие второй производной у дипольного момента означает, что излучение возникает, когда заряды движутся ускоренно. Например, для одиночного заряда  $\mathbf{d} = Q\mathbf{r}$  и  $\ddot{\mathbf{d}} = Q\mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}$  – ускорение заряда в момент времени  $T$ .

Выше разложение запаздывающих потенциалов производилось в предположении  $\mathbf{nr} \ll |\mathbf{x}|$ . Однако при вычислении напряжённостей поля возникают производные по времени. Поэтому подобное разложение также предполагает относительную малость скоростей и ускорений зарядов.

• В качестве примера рассмотрим диполь, который периодически изменяется со временем с частотой  $\omega$ :

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \sin \omega t.$$

Таким диполем может выступать заряженная частица, испытывающая периодические колебания вдоль постоянного вектора  $\mathbf{d}_0$ . Вторую производную дипольного момента необходимо вычислить при  $T = t - |\mathbf{x}|$ . Поэтому:

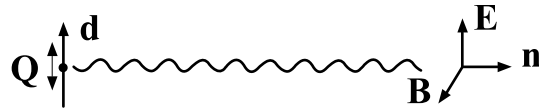
$$\ddot{\mathbf{d}} = -\mathbf{d}_0 \omega^2 \sin(\omega(t - |\mathbf{x}|)).$$

Соответственно, электрическое и магнитное поля равны:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{d}_0 - \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{d}_0)}{|\mathbf{x}|} \omega^2 \sin(\omega(t - |\mathbf{x}|)),$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{d}_0}{|\mathbf{x}|} \omega^2 \sin(\omega(t - |\mathbf{x}|)).$$

Если поля наблюдаются на линии, перпендикулярной вектору  $\mathbf{d}_0$ , то  $\mathbf{n}\mathbf{d}_0 = 0$  и электрическое поле параллельно  $\mathbf{d}_0$ . Направления полей приведены ниже на рисунке:



В окрестности рассматриваемой линии электромагнитное поле похоже на плоскую волну, амплитуда которой постепенно убывает с удалением от её источника.

Полная энергия излучения через сферу радиуса  $|\mathbf{x}|$  равняется:

$$I = \frac{2}{3} d_0^2 \omega^4 \sin^2(\omega(t - |\mathbf{x}|)),$$

где  $d_0$  – длина диполя (амплитуда колебания заряда). Эта энергия периодически изменяется с частотой  $\omega$ . Её среднее значение по периоду изменения равно:

$$\langle I \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} I dt = \frac{d_0^2 \omega^4}{3}.$$

Энергия излучения быстро растёт с ростом частоты колебаний диполя. Однако необходимо помнить, что дипольное приближение справедливо только при малых скоростях зарядов. Поэтому приведенные выше соотношения справедливы только при  $v \sim d_0 \omega \ll 1$ .

• В качестве второго примера рассмотрим электрон, движущийся вокруг протона по окружности радиуса  $r$  (неквантовая модель атома). Заряд электрона отрицательный  $-e < 0$ , а у протона – положительный  $e > 0$ . Свяжем начало системы отсчёта с протоном. Так как его масса в 1836 раз больше, чем у электрона, будем считать его неподвижным. Дипольный момент равен  $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$  и направлен от электрона к протону. Пусть скорость движения невелика, так что можно воспользоваться нерелятивистской динамикой. Запишем уравнения движения и энергию электрона (без учёта энергии покоя  $m$ ):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{e^2}{r^3}\mathbf{r}, \quad \mathcal{E} = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - \frac{e^2}{r}.$$

Если движение происходит по окружности, то ускорение по модулю равно  $a = v^2/r$  и направлено к центру (к протону). Поэтому:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{e^2}{mr}, \quad \mathcal{E} = -\frac{e^2}{2r}.$$

Полное излучение энергии в единицу времени равно:

$$I = \frac{2}{3}(ea)^2 = \frac{2}{3}\frac{e^6}{m^2r^4}.$$

Эта величина равна  $I = -\Delta\mathcal{E}/\Delta t$  (потеря энергии электрона за время  $\Delta t$ ). Относительное изменение энергии будет равно:

$$\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = -\frac{I}{\mathcal{E}}\Delta t = \frac{4}{3}\frac{e^4}{m^2r^3}\Delta t \mapsto \frac{4}{3}\frac{e^4}{m^2r^3c^4}c\Delta t,$$

где в последнем выражении восстановлена скорость света в результате подстановок  $e \mapsto e/c$ ,  $t \mapsto ct$ . Введём т.н. *классический радиус электрона*  $r_e$  и возьмём типичный радиус атома (боровский радиус)

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} = 2.817940 \cdot 10^{-15} \text{ м}, \quad r = \frac{r_e}{\alpha^2} = 0.529177 \cdot 10^{-10} \text{ м},$$

где  $\alpha = e^2/(\hbar c) \approx 1/137$  – безразмерная постоянная тонкой структуры. Тогда относительное изменение энергии электрона имеет вид:

$$\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \frac{4}{3}\frac{r_e^2}{r^3}c\Delta t.$$

Энергия электрона уменьшится в два раза всего за  $2 \cdot 10^{-11}$  секунды. Потребовалось создать квантовую теорию, чтобы, в том числе, объяснить устойчивость атомов. Заметим, что относительная скорость электрона равна постоянной тонкой структуры  $v/c = \sqrt{r_e/r} = \alpha$ . Поэтому за  $2 \cdot 10^{-11}$  секунды электрон совершит примерно  $n \sim 1/\alpha^3 = 2.5 \cdot 10^6$  оборотов вокруг протона.

### 5.11 Немного комплексных чисел \*

• Работая с напряжённостями электромагнитных волн, удобно использовать комплексные обозначения ( $i^2 = -1$ ). Так как на самом деле напряжённости действительны, в конечном выражении берётся действительная часть. Промежуточные же вычисления проводятся с комплексными величинами. Это часто упрощает выкладки.

Рассмотрим, например, эллиптически поляризованную волну (стр. 305), распространяющуюся вдоль оси  $z$ . Её можно записать в следующем компактном виде:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{n}_x a + i \mathbf{n}_y b) e^{-i(\omega t - kz)}, \quad (5.78)$$

где  $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y$  – единичные ортогональные векторы вдоль декартовых осей, и  $a, b$  – константы, определяющие амплитуду волны. Учитывая формулу Эйлера  $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ , действительную часть этого выражения можно переписать следующим образом:

$$\Re(\mathbf{E}) = \mathbf{n}_x a \cos(\omega t - kz) + \mathbf{n}_y b \sin(\omega t - kz).$$

Это и есть действительная напряжённость электрического поля волны с эллиптической поляризацией.

Мнимая единица в эйлеровском представлении равна  $i = e^{i\pi/2}$ . Поэтому умножение напряжённости поля в комплексной записи (5.78) на  $i$  приводит к сдвигу фазы волны на  $\pi/2$ . В частности, эллиптически поляризованную волну можно рассматривать, как суперпозицию (сумму) двух линейно поляризованных волн в перпендикулярных направлениях. При этом одна из этих волн должна быть сдвинута по фазе на  $\pi/2$ .

Рассмотрим в комплексных обозначениях *эффект модуляции*, когда происходит сложение двух волн с одинаковыми амплитудами и близкими частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Определим *среднюю частоту*  $\omega_a = (\omega_1 + \omega_2)/2$  и т.н. *частоту модуляции*  $\omega_m = (\omega_2 - \omega_1)/2$ . Опуская для компактности зависимость от  $z$ , запишем *суперпозицию* (сложение) волн:

$$ae^{-i\omega_1 t} + ae^{-i\omega_2 t} = ae^{-i(\omega_a - \omega_m)t} + ae^{-i(\omega_a + \omega_m)t} = a (e^{i\omega_m t} + e^{-i\omega_m t}) e^{-i\omega_a t}.$$

Выражение в круглых скобках, в силу теоремы Эйлера, равно удвоенному косинусу. Поэтому результат суперпозиции имеет вид:

$$2a \cos(\omega_m t) e^{-i\omega_a t}.$$

Если исходные частоты близки ( $\omega_1 \approx \omega_2$ ), то средняя частота  $\omega_a$  будет существенно больше частоты модулирования  $\omega_m$ . Поэтому результирующее колебание выглядит, как волна с частотой  $\omega_a$  и медленно изменяющейся амплитудой  $2a \cos(\omega_m t)$ . Именно эти колебания амплитуды называются модуляцией.

• Часто интерес представляет усреднение во времени некоторых выражений за период  $T = 2\pi/\omega$  колебания волны. Среднее значение от произвольной функции  $f(t)$  вычисляется по следующей формуле:

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

Среднее значение от напряжённости плоской волны с любой поляризацией равно нулю. Действительно, т.к.  $e^{\pm 2\pi i} = 1$ , имеем:

$$\overline{e^{-i\omega t}} = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{i\omega T} e^{-i\omega t} \Big|_0^{2\pi/\omega} = 0.$$

Однако среднее значение от произведения (скалярного или векторного) напряжённостей может быть отлично от нуля. Пусть  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t}$  и  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}$ , где  $\mathbf{A}_0$  и  $\mathbf{B}_0$  – комплексные величины, не зависящие от времени. Тогда для средних справедливо следующее соотношение:

$$\overline{\Re(\mathbf{A}) \Re(\mathbf{B})} = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{A}\mathbf{B}^*) = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{A}^*\mathbf{B}).$$

Действительно:

$$\Re(\mathbf{A}) \Re(\mathbf{B}) = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^*}{2} \frac{\mathbf{B} + \mathbf{B}^*}{2} = \frac{1}{4} (\mathbf{A}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{A}_0^* e^{i\omega t}) (\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{B}_0^* e^{i\omega t}).$$

Перемножая скобки и проводя усреднение (отбросив равные нулю средние от  $e^{\pm 2i\omega t}$ ), получаем:

$$\overline{\Re(\mathbf{A}) \Re(\mathbf{B})} = \frac{1}{4} (\mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0^* + \mathbf{A}_0^* \mathbf{B}_0) = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{A}\mathbf{B}^*),$$

где в последнем равенстве учтено, что при разложении комплексного числа на действительную и мнимую части (ниже индексы 1 и 2) имеем:

$$\Re(\mathbf{A}\mathbf{B}^*) = \Re((\mathbf{A}_1 + i\mathbf{A}_2)(\mathbf{B}_1 - i\mathbf{B}_2)) = \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 = \Re(\mathbf{A}^*\mathbf{B}).$$

Аналогично расписывается  $\mathbf{A}_0\mathbf{B}_0^* + \mathbf{A}_0^*\mathbf{B}_0$  для  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + i\mathbf{A}_1$  и для  $\mathbf{B}$ .

Найдём, например, среднее от квадрата напряжённости электрического поля эллиптически поляризованной волны:

$$\overline{\mathbf{E}^2} = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{E}\mathbf{E}^*) = \frac{1}{2} (\mathbf{n}_x a + i\mathbf{n}_y b)(\mathbf{n}_x a - i\mathbf{n}_y b) = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Естественно, это же значение можно получить и прямым усреднением выражения  $E_x^2 + E_y^2 = a^2 \cos^2(\omega t - kz) + b^2 \sin^2(\omega t - kz)$ , записанного в действительных обозначениях.

• Для построения общего решения волнового уравнения удобно использовать фурье-преобразование. Любую функцию координат можно представить в виде интеграла:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3\mathbf{r}}{(2\pi)^3},$$

где записаны прямое и обратное фурье-преобразования. Хотя мы обозначаем  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, t)$  одинаковыми буквами, это, естественно, различные функции, которые мы будем отличать переменной в аргументе. Подынтегральная функция  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, t)$  является комплексной. Чтобы напряжённость электрического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  была действительной, необходимо, чтобы при её комплексном сопряжении менялся знак при векторе  $\mathbf{k}$  в аргументе ( $\llcorner$  Н<sub>45</sub>):

$$\mathbf{E}^*(\mathbf{k}, t) = \mathbf{E}(-\mathbf{k}, t). \quad (5.79)$$

Подставим фурье-разложение в волновое уравнение (5.54), стр. 302:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} = 0.$$

Под интегралом лапласиан действует только на  $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  и даёт множитель  $(i\mathbf{k})^2 = -\mathbf{k}^2$ . В результате волновое уравнение выполняется тождественно, если справедливо ( $\llcorner$  Н<sub>46</sub>) следующее уравнение для фурье-образа напряжённости поля:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{k}, t)}{\partial t^2} + \omega^2 \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) = 0,$$

где  $\omega^2 = \mathbf{k}^2$ . Это уравнение для гармонического осциллятора со следующим решением:  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{k}) e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_2(\mathbf{k}) e^{i\omega t}$ . Поэтому:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \left[ \mathbf{E}_1(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{E}_2(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega t)} \right] d^3\mathbf{k}.$$

Разобьём интеграл на два и во втором сделаем замену  $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{k}$  ( $\llcorner$  Н<sub>45</sub>). В результате получим общее решение волнового уравнения:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \left[ \mathbf{E}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{E}^*(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right] d^3\mathbf{k}, \quad (5.80)$$

которое явным образом действительно, хотя и зависит от комплексной функции  $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ . Она связана с “константами” решения уравнения осциллятора следующим образом:  $\mathbf{E}(\mathbf{k}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{E}^*(\mathbf{k}) = \mathbf{E}_2(-\mathbf{k})$ , т.е. условие действительности электрического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  приводит к тому, что решение определяется одной комплексной функцией  $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ . Различный её выбор будет приводить к различным вариантам решения волнового уравнения.

Чтобы полностью определить решение, необходимо задать начальное значение поля и значение его производной по времени, например, в момент времени  $t = 0$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) = \int [\mathbf{E}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{E}^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}] d^3\mathbf{k},$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} = \int [\mathbf{E}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \mathbf{E}^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}] \frac{\omega}{i} d^3\mathbf{k}.$$

Если поле и его производная заданы, то можно при помощи обратного фурье-интегрирования найти действительную и мнимую части функции  $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ . Подставив их в общее решение (5.80), мы получим зависимость электрического поля от времени.

Абсолютно аналогично проводятся вычисления для магнитного поля:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \int [\mathbf{B}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{B}^*(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}] d^3\mathbf{k}. \quad (5.81)$$

Необходимо помнить, что, решая волновое уравнение, мы “теряем связь” между электрическим и магнитным полем. Чтобы её найти, подставим общие решения (5.80), (5.81) в исходные уравнения Максвелла в вакууме для роторов (стр. 302). В результате появляется следующая связь между фурье-образами напряжённостей поля:

$$\omega \mathbf{B}(\mathbf{k}) = \mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}), \quad \omega \mathbf{E}(\mathbf{k}) = -\mathbf{k} \times \mathbf{B}(\mathbf{k}). \quad (5.82)$$

Поэтому функции  $\mathbf{E}(\mathbf{k})$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{k})$  должны быть перпендикулярны друг другу и вектору  $\mathbf{k}$ . Напомним также, что  $\omega = |\mathbf{k}|$ .

Решения (5.80), (5.81) имеют смысл суммы плоских монохроматических волн с различной частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Коэффициенты при этих волнах  $\mathbf{E}(\mathbf{k})$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{k})$  являются их амплитудами. Для каждого волнового вектора должны выполняться условия ортогональности (5.82).

При помощи формулы Эйлера  $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$  и разложения амплитуд на действительную и мнимую части  $\mathbf{E}(\mathbf{k}) = \mathbf{E}_R(\mathbf{k}) + i\mathbf{E}_I(\mathbf{k})$  решение можно переписать через косинусы и синусы:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 2 \int [\mathbf{E}_R(\mathbf{k}) \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}) + \mathbf{E}_I(\mathbf{k}) \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})] d^3\mathbf{k}.$$

Выражение для плоской волны получается, если функция  $\mathbf{E}(\mathbf{k})$  пропорциональна дельта-функции Дирака. Например, при распространении вдоль оси  $z$  можно выбрать  $\mathbf{E}(k_x, k_y, k_z) = \mathbf{E}_0 \delta(k_x) \delta(k_y) \delta(k_z - k)$ .

• В качестве примера работы с комплексными обозначениями рассмотрим напряжённость ограниченной электромагнитной волны (*световой пучок*), распространяющейся вдоль оси  $z$ . Пусть в плоскости  $x, y$  амплитуда напряженностей поля примерно постоянна в окрестности оси  $z$ , а при удалении от неё постепенно уменьшается, падая на больших радиальных расстояниях до нуля. Приближенное выражение для напряжённостей подобной волны может быть записано следующим образом [24]:

$$\mathbf{E} = \{(\mathbf{n}_x \pm i\mathbf{n}_y)F + \frac{\mathbf{n}_z}{k}(i\partial_x F \mp \partial_y F)\}e^{i(kz - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = \mp i\mathbf{E}, \quad (5.83)$$

где функция  $F = F(x, y)$  задаёт профиль амплитуды волны в плоскости  $x, y$ ,  $\partial_x F = \partial F / \partial x$  и  $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$  – единичные ортогональные базисные векторы. Два знака ( $\pm$ ) в (5.83) соответствуют правой и левой круговой поляризации. Если  $F = \text{const}$ , получается (5.78).

Несложно проверить, что  $\nabla \mathbf{E} = 0$  и  $\nabla \mathbf{B} = 0$ . Уравнения для роторов выполняются, если считать, что вторые производные от функции  $F$  много меньше первых производных и самой функции  $F$  (плавное изменение амплитуды). Для простоты положим, что  $F = F(\rho)$ , где  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  – расстояние от оси  $z$ . Гладкость функции  $F(\rho)$  означает:

$$\frac{F''}{k^2} \ll \frac{F'}{k} \ll F. \quad (5.84)$$

Запишем среднее значение плотности энергии:

$$W = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{E}\mathbf{E}^* + \mathbf{B}\mathbf{B}^*}{8\pi} = \frac{F^2(\rho)}{4\pi} + \frac{F'^2(\rho)}{8\pi k^2} \approx \frac{F^2(\rho)}{4\pi},$$

где в приближенном равенстве учтено условие малости (5.84). Это означает, что в выражении  $F^2 + F'^2/k^2 = F^2(1 + (F'/kF)^2) \approx F^2$  мы пренебрегаем вторым порядком малости по  $F'/kF$  (аналогично пренебрежению вторыми производными). Плотность импульса ограниченной плоской волны равна:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*}{4\pi} = \frac{F^2(\rho)}{4\pi} \mathbf{n}_z \pm \frac{F(\rho)F'(\rho)}{4\pi k\rho} (y\mathbf{n}_x - x\mathbf{n}_y),$$

где также проведено усреднение по времени. При интегрировании по объёму цилиндра плотности импульса последнее слагаемое равно нулю, а первое даёт суммарный импульс:

$$\int \mathbf{P} dV = \frac{\mathbf{n}_z}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L F^2(\rho) \rho d\rho d\phi dz = \frac{\mathbf{n}_z L}{2} \int_0^R F^2(\rho) \rho d\rho = \mathbf{n}_z \int W dV,$$

где  $L$  – длина цилиндра по оси  $z$ , а  $R$  – радиус основания цилиндра.



Найдём теперь плотность момента импульса (стр. 313):

$$\mathbf{r} \times \mathbf{P} = \frac{F^2}{4\pi} (y\mathbf{n}_x - x\mathbf{n}_y) \pm \frac{FF'}{4\pi k} (z\mathbf{n}_\rho - \rho\mathbf{n}_z),$$

где  $\mathbf{n}_\rho = (x\mathbf{n}_x + y\mathbf{n}_y)/\rho$  – единичный вектор в радиальном к оси  $z$  направлении. При интегрировании этого выражения по объёму цилиндра равны нулю все слагаемые, за исключением последнего:

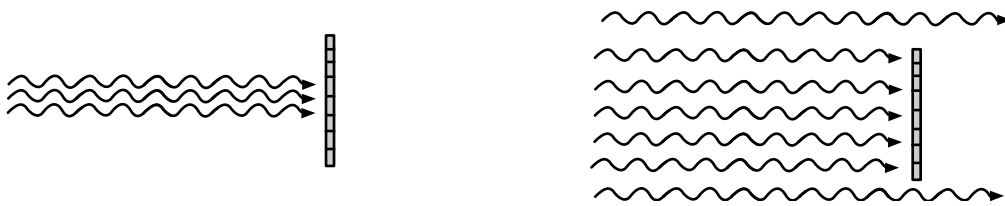
$$\int [\mathbf{r} \times \mathbf{P}] dV = \mp \mathbf{n}_z \frac{L}{2k} \int_0^R FF' \rho^2 d\rho = \mp \frac{\mathbf{n}_z L}{2k} \left\{ \frac{F^2(\rho)\rho^2}{2} \Big|_0^R - \int_0^R F^2(\rho) \rho d\rho \right\},$$

где выполнено интегрирование по частям. Так как мы рассматриваем ограниченную плоскую волну с конечной энергией на единицу длины  $L$ , то функция  $F(\rho)$  при больших  $\rho$  должна убывать по крайней мере, как  $1/\rho^{1+\epsilon}$ ,  $\epsilon > 0$ . Поэтому поверхностный член при интегрировании по частям при больших радиусах цилиндра  $R$  стремится к нулю. В результате суммарный момент прямо пропорционален энергии волны и обратно пропорционален её частоте:

$$\int [\mathbf{r} \times \mathbf{P}] dV = \pm \frac{\mathbf{n}_z}{\omega} \int W dV. \quad (5.85)$$

Подобное соотношение выполняется и в квантовой теории для фотона со спином  $\pm\hbar$  и энергией  $\hbar\omega$ .

Таким образом, если пластинка поглощает падающую волну и имеет размер больший, чем характерная ширина светового пучка, то она постоянно получает момент импульса волны (ниже левый рисунок).

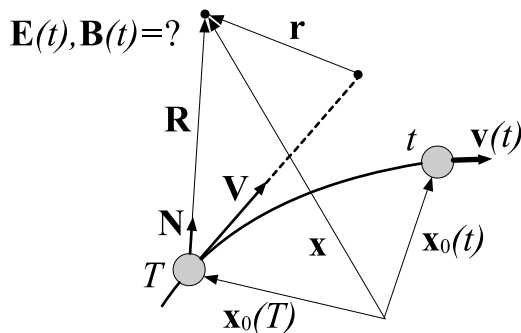


Чуть иначе расчёт выглядит, если пластина находится в зоне плоской волны. Чтобы найти момент импульса пластины, необходимо найти момент импульса финального распределения напряжённости в поле волны (правый рисунок выше). Для этого надо окружить пластинку и поле цилиндром достаточно большого радиуса так, чтобы его боковая поверхность находилась в зоне плоской волны с постоянной амплитудой ( $F = const$ ). Слева от пластинки интегральный момент импульса равен нулю. Справа он вычисляется аналогично моменту светового пучка, однако при этом падение амплитуды волны происходит не при удалении от оси  $z$ , а при приближении к ней (тень от пластинки). В итоге снова получается (5.85).

### 5.12 Произвольно движущийся заряд \*

Пусть заряд движется с переменной скоростью  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ . Найдём электромагнитное поле, создаваемое зарядом в момент времени  $t$  в точке пространства  $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ . Рассмотрим момент времени  $T = t - R$  в прошлом, когда заряд находился на расстоянии  $R$  от точки наблюдения и имел скорость  $\mathbf{V} = \mathbf{v}(T)$ . Выделенность этого момента состоит в том, что информация об изменении скорости заряда, распространяясь с фундаментальной единичной скоростью, к текущему моменту времени как раз проходит расстояние  $R = t - T$ . Все величины, относящиеся к прошлому, будем обозначать заглавными буквами. Так,  $\mathbf{N} = \mathbf{R}/R$  — единичный вектор от заряда в точку наблюдения в момент времени  $T$ .

Из решения уравнений для потенциалов (5.74), (5.76) следует, что их значения в момент времени  $t$  определяются положением заряда и его скоростью в момент времени  $T$  и *не зависят от ускорения* заряда. Поэтому заряд, движущийся с переменной скоростью  $\mathbf{v}(t)$ , в момент времени  $t$  неотличим от совпадающего с ним в прошлом (время  $T$ ) заряда, движущегося далее равномерно и прямолинейно со скоростью  $\mathbf{V} = \mathbf{v}(T)$ . Такое движение будем называть “фантомным”. Ниже на рисунке оно представлено в виде пунктирной прямой линии. Сам заряд движется по, вообще говоря, искривлённой траектории с переменной скоростью. Однако, так как от ускорения заряда в момент времени  $T$  потенциалы не зависят, удобно считать, что в этот момент от заряда “отрывается” его двойник-фантом, который движется равномерно и прямолинейно, проходя за время  $R = t - T$  расстояние  $\mathbf{V}R$ . Основные соотношения, следующие из геометрии введенных величин, приведены справа от рисунка:



$$R = t - T = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(T))^2}, \quad (5.86)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{V}R,$$

$$\sqrt{r^2 + \gamma^2(\mathbf{V}\mathbf{r})^2} = \gamma(R - \mathbf{V}\mathbf{R}), \quad (5.87)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ . Последняя формула проверяется возведением в квадрат и подстановкой  $\mathbf{R} - \mathbf{V}R$  вместо  $\mathbf{r}$ .

Заметим, что  $T = T(\mathbf{x}, t)$  является функцией текущего времени и точки наблюдения. Её вид определяется траекторией  $\mathbf{x}_0(t)$  заряда и получается из решения уравнения (5.86). При этом  $R = R(\mathbf{x}, t) = t - T(\mathbf{x}, t)$ .

Свяжем с фантомным зарядом в момент времени  $t$  инерциальную систему отсчёта  $S'$ . Так как в ней он покоится, для потенциалов поля справедливы кулоновские выражения:

$$\varphi' = \frac{Q}{r'}, \quad \mathbf{A}' = 0.$$

Подставим их в обратные преобразования Лоренца для потенциалов [в (5.71), стр. 321 переставим местами штрихованные и нештрихованные величины и сделаем замену  $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$ ]:

$$\varphi = \gamma \frac{Q}{r'} = \frac{Q\gamma}{\sqrt{r^2 + \gamma^2(\mathbf{V}\mathbf{r})^2}}, \quad \mathbf{A} = \gamma\mathbf{V}\varphi' = \mathbf{V}\varphi, \quad (5.88)$$

где для расстояния от фантомного заряда в момент времени  $t = 0$  до точки наблюдения использовано преобразование для модуля радиус-вектора (см. стр. 270). При помощи (5.87) потенциалы можно также переписать следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{Q}{R - \mathbf{V}\mathbf{R}}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{Q\mathbf{V}}{R - \mathbf{V}\mathbf{R}}. \quad (5.89)$$

Эти потенциалы для произвольно движущегося заряда называют *потенциалами Лиенара-Вихерта*. В качестве полезного упражнения по работе с дельта-функцией стоит вывести эти же соотношения непосредственно из общего решения (5.74), (5.76). Например, для плотности заряда необходимо записать выражение  $\rho(\mathbf{x}, t) = Q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t))$ .

Отметим один любопытный момент. Уравнения Максвелла были получены для системы равномерно движущихся зарядов. Затем постулировалось, что они справедливы и для ускоренного движения зарядов. Хотя уравнения Максвелла явно не зависят от ускорений, это не означает, что от ускорений не зависят напряжённости поля. Дело в том, что уравнения Максвелла в исходной записи являются системой дифференциальных уравнений первого порядка. Из этой системы можно исключить, например, магнитное поле, получив для электрического поля уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} = -4\pi \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - 4\pi \nabla \rho.$$

Оно имеет форму уравнения Д'Аламбера, однако источники, стоящие в правой части, содержат производную по времени от тока. Именно это и приводит к тому, что напряжённости окажутся зависящими от ускорения заряда (в то время как потенциалы - нет).

- Найдём напряженности электрического и магнитного полей

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Производные потенциалов берутся по координатам фиксированной точки пространства  $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$  и по текущему моменту времени  $t$ , а выражения для потенциалов (5.89) зависят (в правых частях) от величин в момент времени  $T$ . Поэтому потребуются определённые математические хитрости. Возьмём дифференциал от условия запаздывания:  $t = T + R = T + \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(T))^2}$ .

$$dt = dT + \frac{\mathbf{R} d\mathbf{x} - \mathbf{V}\mathbf{R} dT}{R} \quad \Rightarrow \quad dT = \frac{Rdt}{R - \mathbf{V}\mathbf{R}} - \frac{\mathbf{R}d\mathbf{x}}{R - \mathbf{V}\mathbf{R}},$$

где  $\mathbf{V} = d\mathbf{x}_0(T)/dT$  – скорость в момент времени  $T$ , а  $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(T)$ . По определению дифференциала функции  $T = T(t, \mathbf{x})$  имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{R}{R - \mathbf{V}\mathbf{R}}, \quad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\mathbf{R}}{R - \mathbf{V}\mathbf{R}}.$$

Потенциалы зависят от  $\mathbf{x}$  явно и неявно через  $T = T(t, \mathbf{x})$ . Например, скалярный потенциал (5.89) имеет вид:

$$\varphi = \frac{Q}{\sqrt{\{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(T)\}^2 - \mathbf{V}\{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(T)\}}}.$$

Поэтому градиент и производная по  $t$  равны:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}} + \frac{\partial\varphi}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial\mathbf{x}}, \quad \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Для получения ротора векторного потенциала

$$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{V}\varphi) = \varphi \nabla \times \mathbf{V} - \mathbf{V} \times \nabla\varphi$$

необходимо найти также ротор от скорости

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{\partial T}{\partial\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial T} \times \mathbf{V} = -\frac{\mathbf{R} \times \mathbf{W}}{R - \mathbf{V}\mathbf{R}},$$

где  $\mathbf{W} = d\mathbf{V}/dT$  – ускорение частицы в момент времени  $T$ . Вычисляя все производные и проводя несложные алгебраические преобразования ( $\llcorner$  Н<sub>47</sub>), получим:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{R^2} \frac{(1 - V^2)(\mathbf{N} - \mathbf{V})}{(1 - \mathbf{V}\mathbf{N})^3} + \frac{Q}{R} \frac{\mathbf{N} \times [(\mathbf{N} - \mathbf{V}) \times \mathbf{W}]}{(1 - \mathbf{V}\mathbf{N})^3}, \quad (5.90)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{N} \times \mathbf{E}, \quad (5.91)$$

где  $\mathbf{N} = \mathbf{R}/R$ . Магнитное поле оказывается перпендикулярным электрическому и радиус-вектору  $\mathbf{R}$  от заряда в момент времени  $T = T(\mathbf{x}, t)$ .

При помощи радиус-вектора  $\mathbf{r}$  от фантомного заряда к точке наблюдения электрическое поле можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{E} = Q \frac{\gamma \mathbf{r}}{(r^2 + \gamma^2 (\mathbf{V}\mathbf{r})^2)^{3/2}} + Q \frac{\gamma^3 [\mathbf{R} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{W}]]}{(r^2 + \gamma^2 (\mathbf{V}\mathbf{r})^2)^{3/2}}.$$

Первое слагаемое является напряжённостью электрического поля равномерно движущегося со скоростью  $\mathbf{V}$  фантомного заряда. Если бы заряд не менял свою скорость, он совпадал бы с этим фантомом.

Напряжённость электрического поля можно также переписать в следующем изящном виде, найденном Ричардом Фейнманом ( $\leq H_{50}$ ):

$$\mathbf{E} = Q \frac{\mathbf{N}}{R^2} + QR \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{N}}{R^2} \right) + Q \frac{d^2 \mathbf{N}}{dt^2}.$$

Обратим внимание, что все производные вычисляются по текущему времени  $t = T + R(T)$ , а не по  $T$ , к которому относятся величины  $R$  и  $\mathbf{N}$ .

Если скорость заряда мала, то напряжённость электрического поля можно приближённо записать следующим образом:

$$\mathbf{E} \approx \frac{Q}{R^2} \mathbf{N} + \frac{Q}{R} [\mathbf{N} \times [\mathbf{N} \times \mathbf{W}]].$$

Второе слагаемое убывает, как  $1/R$ . Первый же (“кулоновский”) член убывает, как  $1/R^2$ , т.е. существенно быстрее. Пренебрегая на больших расстояниях первым слагаемым, найдём импульс электромагнитной волны. Так как второе слагаемое перпендикулярно  $\mathbf{R}$ , т.е.  $\mathbf{E}\mathbf{R} = 0$ , имеем:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi} = \frac{\mathbf{E} \times [\mathbf{R} \times \mathbf{E}]}{4\pi R} = \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi} \mathbf{N} \approx \frac{Q}{4\pi} \frac{\mathbf{W}^2 - (\mathbf{W}\mathbf{N})^2}{R^2} \mathbf{N}.$$

*Интенсивность излучения*  $dI$  в направлении телесного угла  $d\Omega$  определяется, как поток энергии, проходящий в единицу времени через элемент поверхности  $dS = R^2 d\Omega$  сферы радиуса  $R$  (см. стр. 327).

$$\frac{dI}{d\Omega} = R^2 (\mathbf{N}\mathbf{P}) \approx \frac{Q^2}{4\pi} W^2 \sin^2 \theta,$$

где  $\theta$  – угол между ускорением и направлением в точку наблюдения из запаздывающего положения заряда  $\mathbf{N}$ . Интеграл по всему телесному углу  $d\Omega = d\phi \sin \theta d\theta$  даёт полное излучение заряда (*формула Лармора*):

$$I \approx \frac{2}{3} Q^2 W^2. \quad (5.92)$$

Его можно сравнить с излучением в дипольном приближении (стр. 327). Для одиночного заряда  $\mathbf{d}(T) = Q\mathbf{x}_0(T)$  и, соответственно,  $\ddot{\mathbf{d}} = Q\mathbf{W}$ .

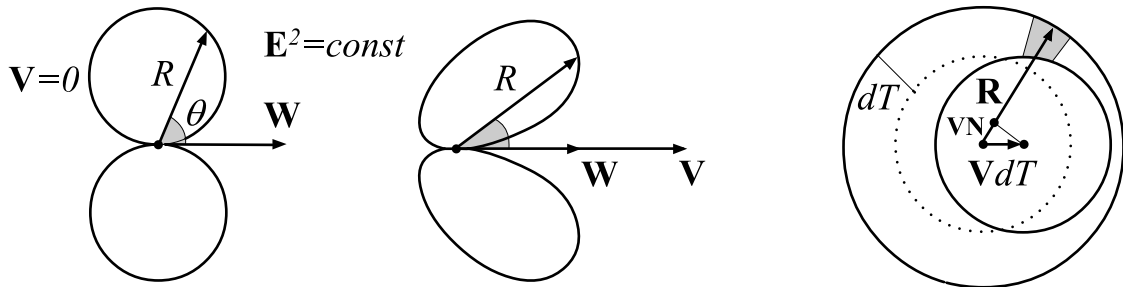
• Изучим теперь излучение заряда, не считая его скорость маленькой. На больших расстояниях от заряда напряжённости поля равны:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{R} \frac{\mathbf{N} \times [(\mathbf{N} - \mathbf{V}) \times \mathbf{W}]}{(1 - \mathbf{V}\mathbf{N})^3}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{N} \times \mathbf{E}.$$

Пусть скорость  $\mathbf{V}$  и ускорение  $\mathbf{W}$  параллельны, так что  $\mathbf{V} \times \mathbf{W} = 0$ . В этом случае интенсивность излучения равна:

$$\frac{dI}{d\Omega} = R^2 \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi} = \frac{Q^2 W^2}{4\pi} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - V \cos \theta)^6}.$$

Для медленного заряда излучение максимально в направлении, перпендикулярном ускорению. Чем ближе скорость заряда к скорости света, тем сильнее максимум излучения смещается в направлении движения (см. ниже первые два рисунка). Похожим свойством обладает движущийся изотропный (в собственной системе отсчёта) источник света в результате абберации (стр. 112).



Найдём суммарную интенсивность излучения. Интеграл по  $\phi$  даст  $2\pi$ , а для интегрирования по  $\theta$  сделаем замену  $z = \cos \theta$ :

$$I = \frac{Q^2 W^2}{2} \int_{-1}^1 \frac{1 - z^2}{(1 - Vz)^6} dz = \frac{2Q^2 W^2}{15} \frac{5 + V^2}{(1 - V^2)^4}. \quad (5.93)$$

Интеграл по  $z$  находится при помощи дифференцирования определённого интеграла по параметру. Эти вычисления несложны, но сравнительно громоздки ( $\ll N_{49}$ ).

Найдём энергию, теряемую зарядом при излучении за единицу времени. Её величина для движущегося заряда отличается от  $I$ . Действительно, проследим за излучённой в прошлом энергией между моментами времени  $T$  и  $T + dT$ . Если бы заряд был неподвижен, к текущему моменту эта энергия была бы сконцентрирована между двумя сферами с радиусами  $R$  и  $R - dT$  и совпадающими центрами. При движении заряда за время  $dT$  центр внутренней сферы смещается на  $\mathbf{V}dT$ , а её поверхность прижимается к внешней сфере в направлении движения (3-й рисунок).

В результате толщина зазора между сферами в направлении  $\mathbf{N}$  уменьшается на  $\mathbf{N}\mathbf{V}dT$ . Если  $\mathbf{V} = 0$ , то толщина зазора равна  $dT$ . При  $\mathbf{V} \neq 0$  она равна  $dT(1 - \mathbf{V}\mathbf{N})$ . Соответственно, в  $(1 - \mathbf{V}\mathbf{N})$  раз изменяется элемент объёма сферического слоя в направлении  $\mathbf{N}$  (хотя суммарный объём между сферами, конечно, не меняется). Энергия, расположенная между слоями в телесном углу  $d\Omega$ , равна:

$$d\mathcal{E} = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} R^2 d\Omega dT (1 - \mathbf{V}\mathbf{N}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\tilde{I}}{d\Omega} = \frac{d\mathcal{E}}{dT d\Omega} = R^2 \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi} (1 - \mathbf{V}\mathbf{N}).$$

Стоит сравнить множитель  $(1 - \mathbf{V}\mathbf{N})$  с соотношением (2.5), стр. 90 в эффекте Доплера (у векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{N}$  противоположные направления). В результате, интенсивность теряемой энергии  $\tilde{I}$  отличается от  $I$  множителем  $1 - \mathbf{V}\mathbf{N}$ . Интегрирование по всем телесным углам даёт ( $\ll H_{49}$ ):

$$\tilde{I} = \frac{Q^2 W^2}{2} \int_{-1}^1 \frac{1 - z^2}{(1 - Vz)^5} dz = \frac{2}{3} \frac{Q^2 W^2}{(1 - V^2)^3}.$$

Кроме линейного торможения (например, рентгеновское излучение при ударе электрона об электрод) существует ещё одна важная разновидность излучения. В магнитном поле заряд движется по окружности (или спирали). В этом случае скорость и ускорение перпендикулярны. При малой скорости заряда излучение направлено перпендикулярно плоскости орбиты и называется *циклотронным*. Если же скорость заряда ультрарелятивистская, то максимум излучения сконцентрирован в направлении текущего (с учётом запаздывания) мгновенного вектора скорости. Подобное излучение (касательное к окружности или спирали) называют *синхротронным*. Оно возникает в круговых ускорителях частиц (отсюда и происходит название). Его же регулярно наблюдают астрономы в окрестности самых разнообразных космических объектов.

Для произвольной ориентации скорости и ускорения теряемая в единицу времени энергия даётся ( $\ll H_{48}$ ) *формулой Льенара* (1898 г.):

$$\tilde{I} = \frac{2}{3} Q^2 \frac{\mathbf{W}^2 - [\mathbf{V} \times \mathbf{W}]^2}{(1 - V^2)^3}. \quad (5.94)$$

Эта формула может быть записана в следующем инвариантном виде:

$$\tilde{I} = \frac{2}{3} \frac{Q^2}{m^2} \left( \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right)^2,$$

где  $\mathbf{p} \equiv p^\nu = \{\mathbf{E}, \mathbf{p}\}$  – 4-импульс частицы массой  $m$ , а  $d\tau = dT\sqrt{1 - \mathbf{V}^2}$  – её собственное время с учётом эффекта запаздывания.

## V Закон Кулона

- **H<sub>33</sub>** Поле бесконечной тонкой заряженной нити (стр. 267)

Окружая нить цилиндром так, чтобы она проходила по его оси симметрии, имеем:

$$\int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = |\mathbf{E}| 2\pi r_{\perp} L = 4\pi Q,$$

где  $r_{\perp}$  – радиус цилиндра,  $L$  – его длина и  $2\pi r_{\perp} L$  – площадь его поверхности. Заряд  $Q$  находится на участке нити длиной  $L$ . Поэтому

$$\mathbf{E} = \frac{2Q/L}{r_{\perp}^2} \mathbf{r}_{\perp} = \frac{2\mu}{r_{\perp}^2} \mathbf{r}_{\perp},$$

где  $\mu = Q/L$  – удельный заряд нити (заряд на единицу длины  $L$ ).

Введём единичный вектор  $\mathbf{k}$  в направлении линии. Вектор, перпендикулярный нити  $\mathbf{r}_{\perp}$  (см. рисунок на стр. 267), можно выразить через радиус-вектор к произвольной точке пространства:

$$\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - (\mathbf{r}\mathbf{k})\mathbf{k} = \mathbf{k} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{k}], \quad \mathbf{r}_{\perp}^2 = \mathbf{r}^2 - (\mathbf{r}\mathbf{k})^2 = [\mathbf{r} \times \mathbf{k}]^2,$$

откуда получается напряжённость (стр. 267). Вычислим её дивергенцию:

$$\frac{\nabla \mathbf{E}}{2\mu} = \nabla \frac{\mathbf{r} - \mathbf{k}(\mathbf{r}\mathbf{k})}{r^2 - (\mathbf{r}\mathbf{k})^2 + a^2} = \frac{3 - \mathbf{k}^2}{r^2 - (\mathbf{r}\mathbf{k})^2 + a^2} - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{k}(\mathbf{r}\mathbf{k}))(\mathbf{2r} - \mathbf{2}(\mathbf{r}\mathbf{k})\mathbf{k})}{(r^2 - (\mathbf{r}\mathbf{k})^2 + a^2)^2}$$

Приводя к общему знаменателю ( $\mathbf{k}^2 = 1$ ), имеем:

$$\frac{\nabla \mathbf{E}}{2\mu} = \frac{2}{r_{\perp}^2 + a^2} - \frac{2r_{\perp}^2}{(r_{\perp}^2 + a^2)^2} = \frac{2a^2}{(r_{\perp}^2 + a^2)^2}.$$

При  $r_{\perp} > 0$  и  $a \rightarrow 0$  дивергенция стремится к нулю. Если  $r_{\perp} = 0$  и  $a = 0$ , получается бесконечность. Это так называемая дельта-функция с линейной сингулярностью. Пусть линия сингулярности (заряженная нить) расположена вдоль оси  $z$ . Вычислим интеграл в цилиндрических координатах, интегрируя по  $z$  вдоль участка длиной  $L$ :

$$\int_0^{\infty} r_{\perp} dr_{\perp} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz \frac{a^2/\pi}{(r_{\perp}^2 + a^2)^2} = 2L \int_0^{\infty} \frac{a^2 r_{\perp} dr_{\perp}}{(r_{\perp}^2 + a^2)^2} = L \int_0^{\infty} \frac{d\chi}{(\chi + 1)^2} = L.$$

Поэтому

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi\mu\delta_L(\mathbf{r}),$$

где  $\delta_L(\mathbf{r})$  – функция с линейной сингулярностью, интеграл от которой равен длине сингулярности, попадающей под интегрирование (см. стр. 788).



- **Н<sub>34</sub>** Тождества, следующие из преобразований Лоренца (стр. 270)

Соотношение  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{vr})$  получается непосредственно из преобразований Лоренца при  $t = 0$ . Возводя его в квадрат, имеем:

$$\mathbf{r}'^2 = \mathbf{r}^2 + (2\Gamma + \Gamma^2 \mathbf{v}^2)(\mathbf{vr})^2.$$

Учитывая определение фактора  $\Gamma$  (стр. 32), упростим выражение в скобках:

$$2\Gamma + \Gamma^2 \mathbf{v}^2 = \Gamma \left( 2 + \frac{\gamma - 1}{v^2} v^2 \right) = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\gamma + 1) = \gamma^2.$$

Аналогично, умножая  $\mathbf{r}'$  на скорость  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{vr}' = \mathbf{vr} + \Gamma \mathbf{v}^2(\mathbf{vr}) = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{v^2} v^2 \right) (\mathbf{vr}) = \gamma (\mathbf{vr}).$$

- **Н<sub>35</sub>** Соотношение для скорости (стр. 270)

Перемножим  $\mathbf{u}'$  и  $\mathbf{r}'$  при  $t = 0$ :

$$\mathbf{u}'\mathbf{r}' = \frac{(\mathbf{u} - \gamma \mathbf{v} + \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{vu}))(\mathbf{r} + \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{vr}))}{\gamma(1 - \mathbf{vu})}.$$

Раскрывая произведение скобок, имеем:

$$\mathbf{u}'\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{ur} - \gamma(1 + \Gamma \mathbf{v}^2)(\mathbf{vr}) + (2\Gamma + \Gamma^2 \mathbf{v}^2)(\mathbf{vr})(\mathbf{vu})}{\gamma(1 - \mathbf{vu})}$$

или, учитывая, что  $1 + \Gamma v^2 = \gamma$  и  $2\Gamma + \Gamma^2 \mathbf{v}^2 = \gamma^2$ :

$$\mathbf{u}'\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{ur} - \gamma^2(1 - \mathbf{vu})(\mathbf{vr})}{\gamma(1 - \mathbf{vu})} = \frac{\mathbf{ur}}{\gamma(1 - \mathbf{vu})} - \gamma(\mathbf{vr}).$$

- **Н<sub>36</sub>** Дивергенция  $\mathbf{E}$  движущегося заряда (стр. 273)

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{Q \gamma \nabla \mathbf{r}}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{vr})^2 + a^2)^{3/2}} + \mathbf{r} \nabla \frac{Q \gamma}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{vr})^2 + a^2)^{3/2}}$$

учитывая, что  $\nabla \mathbf{r} = 3$ ,  $\nabla r^2 = 2\mathbf{r}$ ,  $\nabla(\mathbf{vr}) = \mathbf{v}$ , имеем:

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{3Q \gamma}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{vr})^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \mathbf{r} \frac{Q \gamma (2\mathbf{r} + 2\gamma^2(\mathbf{vr})\mathbf{v})}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{vr})^2 + a^2)^{5/2}}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем:

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{3Q \gamma a^2}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{vr})^2 + a^2)^{5/2}}.$$

- **Н<sub>37</sub>** Тождество  $(\mathbf{v}\nabla)[\mathbf{v} \times \mathbf{r}] = 0$  (стр. 275)

Так как вектор  $\mathbf{v}$  – константа, скалярный оператор  $(\mathbf{v}\nabla)$  можно внести под векторное произведение:  $(\mathbf{v}\nabla)[\mathbf{v} \times \mathbf{r}] = [\mathbf{v} \times (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{r}] = [\mathbf{v} \times \mathbf{v}] = 0$ , где мы использовали тождество  $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{v}$ , проверяемое в компонентах.

- **Н<sub>38</sub>** Вычисление  $\mathbf{v}\nabla$  от электрического поля (стр. 275)

Берём, как производную сложной функции, учитывая  $(\mathbf{v}\nabla)r^2 = 2(\mathbf{v}\mathbf{r})$  и  $(\mathbf{v}\nabla)(\mathbf{v}\mathbf{r})^2 = 2(\mathbf{v}\mathbf{r})\mathbf{v}^2$ .

- **Н<sub>39</sub>** Полный дифференциал (стр. 285)

Интегрируя по  $\mathbf{r}_1$ , при фиксированном  $\mathbf{r}_2$  (константа) имеем:

$$d\left(\frac{1}{|\mathbf{r}_{12}|}\right) = \nabla_1\left(\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\right) d\mathbf{r}_1 = -\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} d\mathbf{r}_1 = -\frac{\mathbf{r}_{12} d\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_{12}|^3}.$$

- **Н<sub>40</sub>** Притяжение двух проводников (стр. 285)

Интегралы по проводникам берутся от  $-L/2$  до  $L/2$ , где  $L$  стремится в бесконечность. Из соображений симметрии ненулевой будет компонента силы перпендикулярная проводникам. Пусть проводники параллельны оси  $x$  ( $d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = dx_1 dx_2$ ) и  $x_1 = 0$ . Тогда интегрирование по  $x_2$  равно

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{R}{(R^2 + x_2^2)^{3/2}} dx_2 = \frac{x_2/R}{(R^2 + x_2^2)^{1/2}} \Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{L/R}{(R^2 + L^2/4)^{1/2}} \rightarrow \frac{2}{R},$$

где в конце  $L$  устремлено к бесконечности. Интегрирование по  $x_1$  дает  $L$  (которое бесконечно). Поэтому мы относим силу на единицу длины (эта величина будет конечна), т.е. делим  $F$  на  $L$ . Выбор  $x_1 = 0$  (опять же из соображений симметрии и бесконечности проводников) несущественен.

- **Н<sub>41</sub>** Производная  $\nabla(r_i r_j \mathbf{j})$  (стр. 290)

Напомним, что компонентами векторного оператора набла являются частные производные. Поэтому  $k$ -тая компонента вектора  $\nabla$  равна  $\nabla_k = \partial/\partial r_k$ . Кроме этого,  $\partial r_i/\partial r_j = \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера, равный 1, если  $i = j$ , и 0, если  $i \neq j$ . Поэтому, если  $\nabla \mathbf{j} = \nabla_k j_k = 0$ , то

$$\nabla(r_i r_j \mathbf{j}) = \nabla_k(r_i r_j j_k) = \delta_{ki} r_j j_k + r_i \delta_{kj} j_k = r_j j_i + r_i j_j,$$

где по повторяющемуся индексу  $k$  подразумевается суммирование от 1 до 3. В суммах выживает только одно слагаемое, для которого  $\delta_{ij} \neq 0$ .

- **Н<sub>42</sub>** Преобразования в компонентах (стр. 299)

Запишем  $\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{E})$  для  $\mathbf{v} = \{v, 0, 0\}$ :

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y - vB_z \\ E'_z + vB_y \end{pmatrix} - \frac{\gamma - 1}{v^2} (vE_x) \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- **Н<sub>43</sub>** Тождество для  $\mathbf{E} \times [\nabla \times \mathbf{E}]$  (стр. 312)

Формулу “бац минус цаб” запишем с индексом  $i$ , сумма от 1 до 3 по которому даёт свёртку скалярного произведения:

$$\mathbf{E} \times [\nabla \times \mathbf{E}] = E_i \nabla E_i - (\mathbf{E} \nabla) \mathbf{E} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{E}^2) - (\mathbf{E} \nabla) \mathbf{E},$$

Вычислим теперь производную произведения:

$$\nabla_i (E_i E_j) = E_j \nabla_i E_i + E_i \nabla_i E_j = E_j (\nabla \mathbf{E}) + (\mathbf{E} \nabla) E_j.$$

Выражая  $(\mathbf{E} \nabla) E_j$ , приходим к требуемому тождеству.

- **Н<sub>44</sub>** Якобиан преобразований Лоренца (стр. 321)

Якобиан является определителем матрицы, получаемой дифференцированием старых координат по новым. При переходе от интегрирования в штрихованной системе к нештрихованной, имеем:

$$d^4 x' = \det \left( \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right) d^4 x = \det \mathbf{\Lambda} d^4 x = d^4 x,$$

где учтено, что  $\det \mathbf{\Lambda} = 1$  (см. стр. 139). Это же можно показать более неформально. При движении, в силу сокращения длины, 3-объём в  $\gamma$  сокращается, а время  $dt$  в  $\gamma$  раз замедляется (удлиняется), поэтому их произведение  $d^4 x = dt dV$  остаётся неизменным.

- **Н<sub>45</sub>** Условие действительности фурье-разложения (стр. 332)

Возьмём комплексное сопряжение и сделаем замену  $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{E}^*(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3 \mathbf{k} = \int \mathbf{E}^*(-\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3 \mathbf{k}.$$

Это выражение должно совпасть с  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , поэтому  $\mathbf{E}^*(-\mathbf{k}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{k}, t)$  или  $\mathbf{E}^*(\mathbf{k}, t) = \mathbf{E}(-\mathbf{k}, t)$ . При замене  $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{k}$  появляется знак минус перед интегралом, который “уходит” после перестановки пределов интегрирования. Например, при однократном интегрировании

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(k) dk = - \int_{\infty}^{-\infty} f(-k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(-k) dk.$$

- **Н<sub>46</sub>** Фурье-разложение и волновое уравнение (стр. 332)

Поддействуем оператором Д’Аламбера на фурье-разложение:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \int \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3 \mathbf{k} = \int \left( \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mathbf{k}^2 \mathbf{E} \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3 \mathbf{k} = 0,$$

откуда получаем равенство нулю выражения в круглых скобках.

- **H<sub>47</sub>** *Напряжённости поля движущегося заряда  $\mathbf{x}_0(t)$*  (стр. 338)

Приведём детали вычислений. Так как  $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(T)$ , имеем:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dT} = \frac{d\mathbf{x}_0}{dT} = -\mathbf{V}, \quad \frac{dR}{dT} = \frac{d\sqrt{\mathbf{R}^2}}{dT} = -\frac{\mathbf{VR}}{R}.$$

Выражение для градиента скалярного поля равно:

$$\nabla\varphi = -\frac{Q}{(R - \mathbf{VR})^2} \left( \frac{\mathbf{R}}{R} - \mathbf{V} \right) - \frac{Q\mathbf{R}}{(R - \mathbf{VR})^3} \left( \frac{\mathbf{VR}}{R} + \mathbf{WR} - \mathbf{V}^2 \right),$$

где первый член – производная по  $\mathbf{x}$ , а второй – производная по  $T$  и  $\mathbf{W} = d\mathbf{V}/dT$  – ускорение заряда. Аналогично вычисляется производная по времени от векторного потенциала:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{QR\mathbf{W}}{(R - \mathbf{VR})^2} + \frac{QR\mathbf{V}}{(R - \mathbf{VR})^3} \left( \frac{\mathbf{VR}}{R} + \mathbf{WR} - \mathbf{V}^2 \right).$$

Собирая все производные вместе и учитывая тождество для двойного векторного произведения:

$$[\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - \mathbf{VR}) \times \mathbf{W}]] = (\mathbf{R} - \mathbf{VR})(\mathbf{RW}) - \mathbf{WR}(R - \mathbf{VR}),$$

получающееся по формуле “бац-минус-цаб”, находим напряжённость электрического поля:

$$\mathbf{E} = Q \frac{(1 - V^2)(\mathbf{R} - \mathbf{VR})}{(R - \mathbf{VR})^3} + Q \frac{[\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - \mathbf{VR}) \times \mathbf{W}]]}{(R - \mathbf{VR})^3}.$$

Ротор векторного потенциала:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{Q\mathbf{W} \times \mathbf{R}}{(R - \mathbf{VR})^2} + \frac{Q\mathbf{V} \times \mathbf{R}}{R(R - \mathbf{VR})^2} + \frac{Q\mathbf{V} \times \mathbf{R}}{(R - \mathbf{VR})^3} \left( \frac{\mathbf{VR}}{R} + \mathbf{WR} - \mathbf{V}^2 \right).$$

Приводя к общему знаменателю, имеем:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = Q \frac{\mathbf{VR}(1 - V^2) + \mathbf{VR}(\mathbf{WR}) + \mathbf{WR}(R - \mathbf{VR})}{(R - \mathbf{VR})^3} \times \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

Так как  $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = 0$ , несложно видеть, что это эквивалентно выражению:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{E}}{R},$$

которое является искомой напряжённостью магнитного поля.

- **H<sub>48</sub>** Полная энергия, теряемая зарядом (стр. 341)

Запишем второе слагаемое в (5.90), стр. 338, при помощи единичного вектора  $\mathbf{N} = \mathbf{R}/R$ :

$$\frac{R}{Q} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{N} \times [(\mathbf{N} - \mathbf{V}) \times \mathbf{W}]}{(1 - \mathbf{N}\mathbf{V})^3} = \frac{(\mathbf{N} - \mathbf{V})(\mathbf{N}\mathbf{W})}{(1 - \mathbf{N}\mathbf{V})^3} - \frac{\mathbf{W}}{(1 - \mathbf{N}\mathbf{V})^2}.$$

Возведём это выражение в квадрат:

$$\frac{R^2}{Q^2} \mathbf{E}^2 = \frac{\mathbf{W}^2}{(1 - \mathbf{N}\mathbf{V})^4} + \frac{2(\mathbf{V}\mathbf{W})(\mathbf{N}\mathbf{W})}{(1 - \mathbf{N}\mathbf{V})^5} - \frac{(\mathbf{N}\mathbf{W})^2(1 - V^2)}{(1 - \mathbf{N}\mathbf{V})^6}.$$

Введём следующее обозначение:

$$I_n = \frac{(1 + V)^n - (1 - V)^n}{nV(1 - V^2)^n},$$

при помощи которого запишем интегралы, возникающие при интегрировании по телесному углу ( $\llcorner$  H<sub>49</sub>):

$$\int \frac{d\Omega}{(1 - \mathbf{N}\mathbf{V})^4} = 2\pi I_3, \quad \int \frac{(\mathbf{N}\mathbf{W}) d\Omega}{(1 - \mathbf{N}\mathbf{V})^5} = 2\pi \frac{(\mathbf{W}\mathbf{V})}{V^2} (I_4 - I_3),$$

Третий необходимый интеграл имеет вид:

$$\int \frac{(\mathbf{N}\mathbf{W})^2 d\Omega}{(1 - \mathbf{N}\mathbf{V})^6} = \frac{[\mathbf{V} \times \mathbf{W}]^2}{V^2} \pi I_5 + \left( \frac{\mathbf{W}^2}{V^2} - \frac{3(\mathbf{W}\mathbf{V})^2}{V^4} \right) \pi (2I_4 - I_3 - I_5).$$

Учитывая их, после алгебраических преобразований получаем:

$$I = \int R^2 \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi} d\Omega = \frac{2Q^2}{15} \frac{\mathbf{W}^2(5 + V^2) - 2[\mathbf{V} \times \mathbf{W}]^2(2 + V^2)}{(1 - V^2)^4}.$$

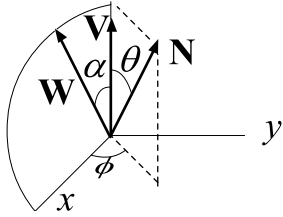
Чтобы найти потерю зарядом энергии, необходимо учесть дополнительный фактор  $1 - \mathbf{N}\mathbf{V}$  (стр. 341). Его можно также получить при помощи следующих рассуждений. Сфера с центром запаздывающего положения заряда, по которой проведено интегрирование, движется со скоростью  $\mathbf{V}$ . Внутри неё находится плотность энергии  $(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)/8\pi$ . Поэтому поток, теряемый зарядом, *без учёта переносимого поля* равен:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi} - \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} \mathbf{V} = \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi} (1 - \mathbf{N}\mathbf{V}) \mathbf{N}.$$

При интегрировании этого выражения во всех приведенных выше интегралах необходимо уменьшить на 1 индексы ( $I_k \mapsto I_{k-1}$ ). В результате чего получается формула Льенара (5.94), стр. 341.

• **H<sub>49</sub>** *Интегрирование интенсивности излучения* (стр. 841, 340)

В общем случае возникающие интегралы зависят от двух векторов  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{W}$ . Выберем сферическую систему координат таким образом, что  $\mathbf{V}$  направлен вдоль оси  $z$ , а  $\mathbf{W}$  лежит в плоскости  $(x, z)$ . Кроме сферических углов  $(\theta, \phi)$  введём угол  $\alpha$  между векторами  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{W}$ . Компоненты векторов и их скалярное произведение равны:



$$\mathbf{N} = \{s_\theta c_\phi, s_\theta s_\phi, c_\theta\}, \quad \mathbf{W} = W \{s_\alpha, 0, c_\alpha\}$$

$$\mathbf{NW} = W (s_\alpha s_\theta c_\phi + c_\alpha c_\theta),$$

где, как обычно,  $c$  и  $s$  с индексами обозначают косинус и синус с соответствующим аргументом. В подынтегральном выражении самого простого интеграла зависимости от  $\phi$  нет, поэтому для  $d\Omega = d\phi s_\theta d\theta$  имеем:

$$\int \frac{d\Omega}{(1 - \mathbf{NV})^4} = \int_0^\pi \frac{2\pi s_\theta d\theta}{(1 - Vc_\theta)^4} = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{dz}{(1 - Vz)^4} = 2\pi I_3,$$

где сделана замена  $z = c_\theta$  и введено обозначение:

$$I_n = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{(1 - Vz)^{n+1}} = \frac{1/(Vn)}{(1 - Vz)^n} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{(1 + V)^n - (1 - V)^n}{nV(1 - V^2)^n}.$$

Заметим, что при  $V = 0$  получается  $I_n = 2$ .

Второй интеграл требует предварительного интегрирования по  $\phi$ :

$$\int \frac{(\mathbf{NW}) d\Omega}{(1 - \mathbf{NV})^5} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (s_\alpha s_\theta c_\phi + c_\alpha c_\theta) d\phi \frac{W s_\theta d\theta}{(1 - Vc_\theta)^5} = \int_0^\pi \frac{2\pi c_\alpha c_\theta W s_\theta d\theta}{(1 - Vc_\theta)^5},$$

где линейное по  $c_\phi$  слагаемое при интегрировании от 0 до  $2\pi$  равно нулю. Учитывая, что  $\mathbf{VW} = WVc_\alpha$  и снова делая замену  $z = c_\theta$ , имеем:

$$\int \frac{(\mathbf{NW}) d\Omega}{(1 - \mathbf{NV})^5} = \frac{2\pi(\mathbf{WV})}{V^2} \int_{-1}^1 \frac{(1 - 1 + Vz) dz}{(1 - Vz)^5} = 2\pi \frac{(\mathbf{WV})}{V^2} (I_4 - I_3),$$

где под интегралом в числителе добавлена и вычтена 1.

Третий интеграл:

$$I = \int \frac{(\mathbf{NW})^2 d\Omega}{(1 - \mathbf{NV})^6} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (s_\alpha s_\theta c_\phi + c_\alpha c_\theta)^2 d\phi \frac{W^2 s_\theta d\theta}{(1 - V c_\theta)^6}$$

также сначала требует интегрирования по  $\phi$ :

$$\int_0^{2\pi} (s_\alpha^2 s_\theta^2 c_\phi^2 + c_\alpha^2 c_\theta^2) d\phi = \pi s_\alpha^2 s_\theta^2 + 2\pi c_\alpha^2 c_\theta^2,$$

где опущено линейное по  $c_\phi$  слагаемое, равное нулю, и подставлен косинус двойного угла  $c_\phi^2 = (1 + c_{2\phi})/2$ . Теперь можно проинтегрировать по  $\theta$ :

$$I = \pi W^2 \int_{-1}^1 \frac{(s_\alpha^2 - (1 - 3c_\alpha^2)z^2) dz}{(1 - Vz)^6} = \pi W^2 s_\alpha^2 I_5 - \pi \frac{W^2}{V^2} (1 - 3c_\alpha^2) \int_{-1}^1 \frac{V^2 z^2 dz}{(1 - Vz)^6}.$$

Интеграл в последнем слагаемом вычисляется следующим образом:

$$\int_{-1}^1 \frac{-V^2 z^2 dz}{(1 - Vz)^6} = \int_{-1}^1 \frac{(1 - V^2 z^2 - 1) dz}{(1 - Vz)^6} = \int_{-1}^1 \frac{(1 + Vz) dz}{(1 - Vz)^5} - I_5 = 2I_4 - I_3 - I_5.$$

Поэтому:

$$I = \pi W^2 \int_{-1}^1 \frac{(s_\alpha^2 - (1 - 3c_\alpha^2)z^2) dz}{(1 - Vz)^6} = \pi W^2 s_\alpha^2 I_5 + \pi \frac{W^2}{V^2} (1 - 3c_\alpha^2) (2I_4 - I_3 - I_5).$$

Подставляя вместо синуса и косинуса от  $\alpha$  квадраты векторного и скалярного произведений:

$$[\mathbf{V} \times \mathbf{W}]^2 = V^2 W^2 s_\alpha^2, \quad (\mathbf{VW})^2 = V^2 W^2 c_\alpha^2,$$

окончательно получаем:

$$\int \frac{(\mathbf{NW})^2 d\Omega}{(1 - \mathbf{NV})^6} = \frac{[\mathbf{V} \times \mathbf{W}]^2}{V^2} \pi I_5 + \left( \frac{\mathbf{W}^2}{V^2} - \frac{3(\mathbf{WV})^2}{V^4} \right) \pi (2I_4 - I_3 - I_5).$$

• **H<sub>50</sub>** *Формула Фейнмана* (стр. 339)

Вычислим первую и вторую производную от вектора  $\mathbf{N} = \mathbf{R}/R$  по времени  $T$ :

$$\frac{d\mathbf{N}}{dT} = \frac{d}{dT} \left( \frac{\mathbf{R}}{R} \right) = -\frac{\mathbf{V}}{R} + \frac{\mathbf{R}(\mathbf{R}\mathbf{V})}{R^3} = \frac{\mathbf{R} \times [\mathbf{R} \times \mathbf{V}]}{R^3}.$$

$$\frac{d^2\mathbf{N}}{dT^2} = \frac{\mathbf{V} \times [\mathbf{V} \times \mathbf{R}] + \mathbf{R} \times [\mathbf{R} \times \mathbf{W}]}{R^3} + \frac{3(\mathbf{R}\mathbf{V})}{R^5} [\mathbf{R} \times [\mathbf{R} \times \mathbf{V}]].$$

Выразим производные по  $T$  через производные по  $t = T + R(T)$ . Первая производная равна:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dT} = \frac{d\mathbf{N}}{dt} \frac{dt}{dT} = \frac{d\mathbf{N}}{dt} (1 + \dot{R}).$$

Учитывая, что  $\dot{R} = dR/dT = -(\mathbf{R}\mathbf{V})/R$ , имеем:

$$R \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{N}}{R^2} \right) = \frac{d}{dT} \left( \frac{\mathbf{N}}{R^2} \right) \frac{R^2}{R - \mathbf{R}\mathbf{V}} = \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{R}\mathbf{V}) - \mathbf{V}R^2}{R^3(R - \mathbf{R}\mathbf{V})}.$$

Складывая с  $\mathbf{N}/R^2$  получаем:

$$\frac{\mathbf{N}}{R^2} + R \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{N}}{R^2} \right) = \frac{\mathbf{R}R + 2\mathbf{R}(\mathbf{R}\mathbf{V}) - \mathbf{V}R^2}{R^3(R - \mathbf{R}\mathbf{V})}.$$

Теперь точно также вычисляем вторую производную

$$\frac{d^2\mathbf{N}}{dT^2} = \frac{d^2\mathbf{N}}{dt^2} (1 + \dot{R})^2 + \frac{d\mathbf{N}}{dt} \ddot{R}$$

или

$$\frac{d^2\mathbf{N}}{dT^2} = \frac{R^2}{(R - \mathbf{R}\mathbf{V})^2} \frac{d^2\mathbf{N}}{dt^2} - \frac{d\mathbf{N}}{dt} \frac{1}{(R - \mathbf{R}\mathbf{V})^3} (R^2\mathbf{V}^2 - R^2(\mathbf{R}\mathbf{W}) - (\mathbf{R}\mathbf{V})^2).$$

Подставляя производные  $d\mathbf{N}/dT$  и  $d^2\mathbf{N}/dT^2$ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{N}}{dT^2} &= \frac{[\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - \mathbf{V}R) \times \mathbf{W}]]}{(R - \mathbf{R}\mathbf{V})^3} + \\ &+ \frac{V^2\mathbf{R}\mathbf{V} - V^2\mathbf{R} - 2(\mathbf{R}\mathbf{V})\mathbf{V} + (\mathbf{R}\mathbf{V})^2\mathbf{V}/R + 3(\mathbf{R}\mathbf{V})^2\mathbf{R}/R^2 - 2(\mathbf{R}\mathbf{V})^3\mathbf{R}/R^3}{(R - \mathbf{R}\mathbf{V})^3}. \end{aligned}$$

Складывая все выражения, окончательно имеем:

$$\frac{\mathbf{N}}{R^2} + R \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{N}}{R^2} \right) + \frac{d^2\mathbf{N}}{dT^2} = \frac{(1 - V^2)(\mathbf{R} - \mathbf{R}\mathbf{V})}{(R - \mathbf{R}\mathbf{V})^3} + \frac{[\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - \mathbf{V}R) \times \mathbf{W}]]}{(R - \mathbf{R}\mathbf{V})^3}.$$