

Глава 2

Кинематика

В этой главе изучаются основные кинематические эффекты теории относительности. Мы начнём с обсуждения относительности одновременности и замедления времени. Отдавая дань традиции, будет рассмотрен мысленный эксперимент космического путешествия двух близнецов, в описании которого иногда усматривают парадокс. Это происходит из-за недостаточно глубокого понимания основ теории. Как было уже отмечено в первой главе, теория относительности не может быть противоречивой, если непротиворечива классическая механика.

Мы продолжаем стоять на точке зрения, что наблюдатели могут проводить измерения только в своей непосредственной окрестности. Информацию об удаленных событиях можно получать при помощи некоторых сигналов. Чаще всего для этого используется свет. Учет конечности скорости его распространения и специфика других эффектов теории относительности потребуют некоторой корректировки воспринимаемой нами информации. Окружающая Вселенная “на самом деле” выглядит не совсем так, как мы её видим. После рассмотрения эффекта Доплера, искажения формы движущихся объектов и абберации мы изучим равноускоренное движение.

Последние разделы главы посвящены ковариантному математическому формализму описания физических величин. Мы введём понятия 4-вектора и 4-тензора, при помощи которых многие соотношения теории относительности получают очень изящное и простое выражение.

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ МИР

Сергей С. Степанов

Последняя версия находится на сайте <http://synset.com>. Все обнаруженные ошибки и замечания просьба присылать по почте: phys@synset.com. (с) 2009-2012, Печать: 22 августа 2012 г.

2.1 Время

• Рассмотрим два события (например, вспышки света), одновременные в системе S' и происходящие в различных точках пространства. Запишем ещё раз преобразования Лоренца для приращений (см. стр. 37):

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - v\Delta x}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (2.1)$$

Одновременность означает, что $\Delta t' = 0$ ($t'_1 = t'_2$). Поэтому из первой формулы (2.1) имеем: $\Delta t = v\Delta x$. Если $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$, то тогда и $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$. Это означает, что, с точки зрения “неподвижного” наблюдателя в S , левое событие происходит *раньше* правого ($t_2 > t_1$):



Понятие одновременности событий относительно и то, что одновременно для одного наблюдателя, не будет одновременным для другого. В частности, сферическая волна, рассмотренная на стр. 40, у каждого наблюдателя будет своя, так как сфера – это множество равноудалённых от центра *одновременно* наблюдаемых точек.

В силу принципа относительности все инерциальные системы отсчёта равноправны. Поэтому события, одновременные в системе отсчёта S , будут также выглядеть неодновременными для наблюдателей в системе S' . Из преобразований Лоренца при $\Delta t = 0$ следует, что $\Delta t' = -v\Delta x'$.

Относительность одновременности приводит к невозможности синхронизации часов в различных инерциальных системах отсчёта во всём пространстве. Описанная в первой главе процедура синхронизации времени в рамках одной инерциальной системы подразумевает, что все часы в ней *одновременно* показывают одно и то же время. Однако с точки зрения другой инерциальной системы эти же часы показывают различное время (по сравнению с часами, синхронизированными в этой системе).

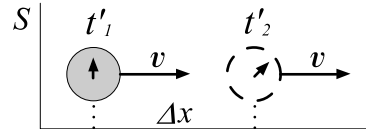
Неодновременность тем сильнее, чем больше скорость системы S' и расстояние между событиями. Для восстановления в формуле $\Delta t = v\Delta x$ константы “ c ” необходимо сделать предложенные ранее замены (стр. 34):

$$c\Delta t = \frac{v}{c} \Delta x, \quad \text{или} \quad \Delta t = \frac{v}{c^2} \Delta x.$$

В классической механике $\Delta t = \Delta t' = 0$, т.е. одновременность – понятие абсолютное, что сразу влечет за собой $c = \infty$.

• Другой любопытный эффект связан с замедлением темпа течения времени в движущейся системе отсчёта. Пусть $\Delta x' = 0$, т.е. в S' часы неподвижны и движутся относительно S , изменяя своё положение: $\Delta x = v\Delta t$. В этом случае из (2.1) имеем:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - v(v\Delta t)}{\sqrt{1 - v^2}} = \Delta t\sqrt{1 - v^2}.$$

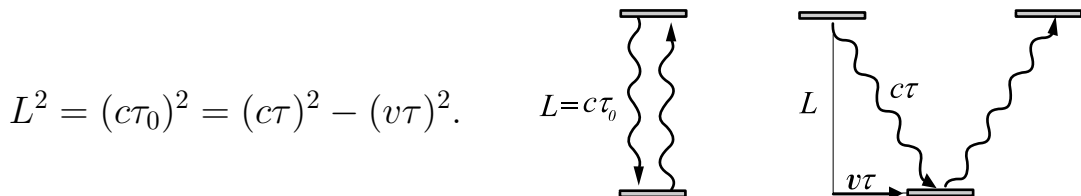


Принято при помощи нулевого индекса обозначать *интервал* времени, измеренный “движущимися” часами $\tau_0 = \Delta t'$, а тот же интервал с точки зрения “неподвижного” наблюдателя – без индекса ($\tau = \Delta t$):

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2}}. \tag{2.2}$$

Интервал времени τ_0 , измеренный движущимися часами, называется *собственным временем* этих часов. Так как $v < 1$, то $\tau > \tau_0$, и все выглядит так, что движущиеся часы идут медленнее неподвижных.

Рассмотрим, например, “световые часы”, в которых импульс света периодически отражается от двух зеркал. По собственному времени часов их высота и время “тика” связаны следующим образом: $L = c\tau_0$. Для неподвижного наблюдателя этот “тик” происходит по гипотенузе с той же скоростью света. По теореме Пифагора можно написать:



При $c = 1$ получаем (2.2). Один тик на движущихся часах τ_0 , с точки зрения неподвижного наблюдателя, будет длиться дольше, так как свет со скоростью c проходит более длинный путь $c\tau$. Любые процессы в S' идут с одним темпом, поэтому все они будут выглядеть из S медленнее.

Реально или нет подобное замедление времени? Оно реально ровно настолько, насколько реальны наши способы измерения времени и процедуры согласования единиц измерения. Летящий мимо объект будет “жить дольше” с точки зрения неподвижных наблюдателей. Этот эффект наблюдается для короткоживущих элементарных частиц. Естественно, замедление времени относительно. С точки зрения наблюдателей в системе S' все часы в S будут идти медленнее. Инерциальные системы отсчета равноправны, и любые процессы в них выглядят симметричным образом. В таком разнообразии мнений нет никакой странности, как неудивительно их разнообразие по поводу вкуса сыра рокфор.

• Разберемся подробнее, что видит наблюдатель, связанный с движущимися часами. Для наглядности представим, что в системе S на *большом* расстоянии друг от друга вдоль оси x расставлены “космические станции”. На здании каждого такого космопорта висят синхронно идущие часы. Рисунок ниже приведен для наблюдателей в системе S :



Космический корабль, пролетая мимо первых часов в точке $x = 0$, синхронизирует с ними своё время. В результате часы на корабле и на станции показывают одно значение, например, полночь (первый рисунок). Пока движущиеся друг относительно друга наблюдатели на корабле и станции находятся рядом, каждый из них регистрирует более медленное тиканье “чужих” часов по сравнению со своими.

Что произойдёт, когда корабль достигнет следующей станции? Для космонавта часы космопорта по-прежнему тикают *медленнее*. Однако, несмотря на это, они будут показывать более позднее время, чем часы на корабле. Сравнение показания часов в одной точке пространства, в отличие от темпа их хода, процедура абсолютная. Поэтому сотрудники космопорта тоже будут наблюдать отставание корабельных часов.

Рассмотрим математику этого эффекта. В преобразованиях Лоренца (1.10), стр.34, положим координату космонавта равной $x' = 0$. Его уравнение движения в системе S имеет вид $x = vt$. Время, прошедшее после совпадения начал отсчета $x = x' = 0$, в системе S' меньше, чем в S :

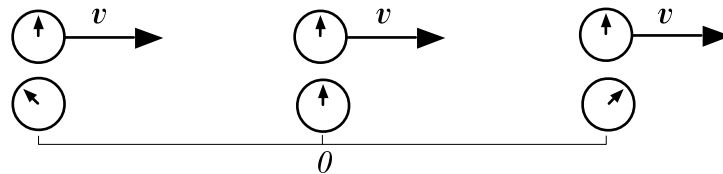
$$t' = \frac{t - v(vt)}{\sqrt{1 - v^2}} = t \sqrt{1 - v^2} < t. \quad (2.3)$$

С другой стороны, часы, неподвижные в S ($\Delta x = 0$), идут с точки зрения космонавта медленнее (см. (2.1)):

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2}} > \Delta t.$$

Таким образом, несмотря на то, что все конкретные часы в системе S идут медленнее с точки зрения наблюдателя в S' , разные часы *вдоль его траектории* показывают время, ушедшее вперед. Если космонавт надумает сойти на некоторой станции, резко затормозив, то после остановки он увидит, что часы на космопорте уже тикают синхронно с его собственными часами, однако по-прежнему показывают для него более позднее время. В результате космонавт попадёт в “будущее” неподвижной системы S .

• В чем физическая причина такого странного с точки зрения космонавта поведения часов в “неподвижной” системе отсчета? Для ответа нам потребуется целая эскадра космических кораблей, летящих вдоль оси x друг за другом. Пусть центральный корабль $x' = 0$ синхронизует свои часы с часами на космопорте $x = 0$ (рисунок с точки зрения S'):



Одновременно с этим событием (в системе S') космонавты на других кораблях эскадры наблюдают различную картину в зависимости от того, спереди или сзади они летят от центрального корабля. Так как время внутри эскадры единое, совпадение начал отсчета (центральный корабль) происходит для всех кораблей в одно время $t' = 0$. Из преобразований Лоренца имеем $t = vx$, поэтому космопорты, находящиеся сзади ($x < 0$), будут для наблюдателей в S' выглядеть в прошлом ($t < 0$), а космопорты, находящиеся спереди по движению, – в будущем. Когда центральный корабль достигает новых космопортов, время на них оказывается будущее, хотя их часы тикают медленнее. Их замедленный ход не успевает компенсировать начальный “сдвиг в будущее”, см. (2.3). На замедление времени всегда “накладывается” эффект относительности одновременности. Настоящее для наблюдателей в одной системе является объединением их будущего и прошлого с точки зрения другой системы.

Любопытно проанализировать, что произойдет, если эскадра решит *очень быстро* остановиться, например, при $t' = 0$. Понятно, что в неподвижной системе отсчета S такая “одновременная остановка” не будет выглядеть одновременной: $t = vx$. Сначала начнёт тормозить последний корабль эскадры, затем центральный, и позже всех включит двигатели флагманский корабль. Однако внутри эскадры расстояние между кораблями всё время выдерживается неизменным. Поэтому когда скорость центрального корабля относительно S будет нулевой, такая же скорость должна быть и для *неподвижных относительно него* других кораблей. После остановки корабли оказываются в системе S и должны воспринимать окружающую действительность так же, как и все наблюдатели в S , для которых часть кораблей уже стоит, а часть всё ещё движется. Для объяснения “парадокса остановки” необходимо рассмотреть ускоренные системы отсчета, что мы сделаем в шестой главе. Сейчас же мы проанализируем более простой и известный “парадокс”.

2.2 Парадокс близнецов

• *Парадокс близнецов* окутан романтикой межзвездных перелетов и туманом неверных толкований. Широкую известность он получил благодаря формулировке Поля Ланжевена (1911 г.), которая в популярном пересказе звучит следующим образом:

Один брат-близнец остаётся на Земле, а второй отправляется в космические странствия с околосветовой скоростью. С точки зрения домоседа, движущийся относительно него путешественник имеет замедленный ход времени. Поэтому *при возвращении* он окажется моложе. Однако, с точки зрения космонавта, двигалась Земля, поэтому моложе должен оказаться брат-домосед.

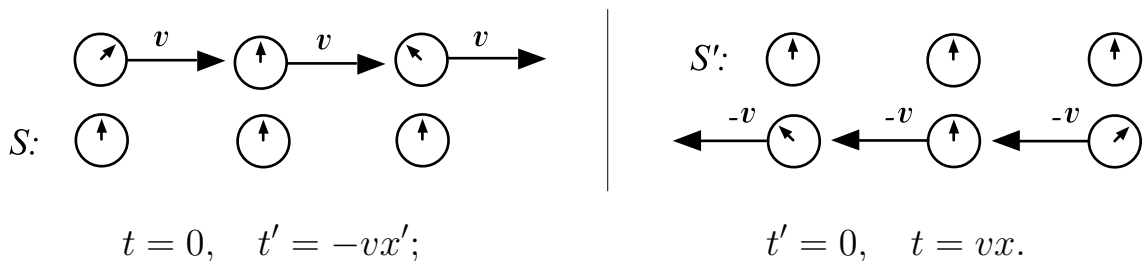
Слово “парадокс” имеет несколько значений. Например, парадоксальны многие выводы теории относительности, так как они противоречат привычным представлениям. В такой парадоксальности, конечно, нет ничего плохого. Любая новая теория “*непривычна*” и требует смены старых представлений. Однако при описании истории с близнецами “парадокс” является синонимом “*логического противоречия*”. Проведя рассуждение об одном и том же событии (встреча братьев) двумя различными способами, мы получаем разный результат. В непротиворечивой теории подобного происходить не должно.

Парадоксу близнецов посвящена обширнейшая литература. Общепринятое объяснение состоит в следующем. Чтобы братья могли *непосредственно* сравнить свой возраст, одному из них (путешественнику) необходимо вернуться, а для этого испытать этапы ускоренного движения, перейдя в неинерциальную систему отсчета. Поэтому полной симметрии между братьями нет. Естественно, подобное снятие парадокса не объясняет, почему именно космонавт должен стать моложе. Кроме этого, сразу возникает следующее возражение: “если всё дело в ускорении, то этапы разгона и торможения можно сделать сколь угодно короткими (для каждого наблюдателя!) по сравнению с *произвольно* длинными и *симметричными* этапами равномерного движения”.

На это отвечают, что расчет, в рамках общей теории относительности, дает одинаковый для каждого брата ответ. Конечно, гравитация к этому расчету не имеет никакого отношения, и дифференциальная геометрия служит лишь математическим аппаратом описания неинерциальных систем отсчёта. Подобные расчёты абсолютно верны (см. главу 10), однако физические причины произошедшего с братьями при этом часто оказываются скрытыми.

Наш анализ мы начнем с замечания о том, что возвращаться путешественнику необязательно. Ему достаточно затормозить, перейдя в систему отсчета, связанную с Землёй. Находясь далеко, но оставаясь относительно друг друга неподвижными, братья могут синхронизировать своё время и выяснить, как разошлись их часы (физические и биологические). При желании можно, конечно, рассмотреть новый старт космического корабля и его возвращение на Землю. Однако никаких дополнительных эффектов при этом не произойдет, и все времена необходимо будет просто умножить на два. По большому счету, нет даже необходимости и в ускоренном старте с Земли. Можно рассмотреть одновременное рождение братьев в двух различных инерциальных системах отсчета, когда они пролетали друг мимо друга. Оставляя в стороне физиологические детали подобного рождения, подчеркнем, что, когда братья находятся в различных системах, но в одной пространственной точке, они легко могут согласовать начальный момент времени (факт их рождения).

В результате относительности одновременности части движущейся системы отсчета, расположенные по ходу её движения, находятся для неподвижного наблюдателя “в прошлом”, а части, расположенные против движения, – в будущем. И чем дальше они от точки рождения братьев $x = x' = 0$, тем сильнее эффект (стр. 85):



Космонавт, летящий мимо любых “неподвижных” часов $\Delta x = 0$, видит, что они идут медленнее, чем его собственные $\Delta t' = \Delta t / \sqrt{1 - v^2}$. Однако на всех таких часах, *встречающихся ему на пути*, он наблюдает будущее время: $t' = t\sqrt{1 - v^2}$ в $x' = 0$. Аналогично сотрудники космопортов, мимо которых пролетает космонавт, видят его моложе. Пролетающие в это же время мимо брата-домоседа “племянники-одногодки” (на последних кораблях эскадры) выглядят старше землянина. Эти эффекты абсолютны для наблюдателей разных систем, находящихся в одной пространственной точке, поэтому *не изменятся при остановке*. Для понимания парадокса близнецов, на самом деле, нет необходимости даже рассматривать неинерциальные системы отсчета! Если остановится космонавт, то он “попадёт в будущее” земной системы отсчета и будет там моложе. Точно так же, если ускорится землянин, то он окажется в будущем системы космонавта и там будет моложе.

• Самое парадоксальное в парадоксе близнецов то, что иногда его проще объяснить, чем сформулировать. Часто этот парадокс воспринимают поверхностно, поэтому приведём следующее “глубокое” рассуждение:

Ладно, пусть близнецы не равноправны и космонавт менял систему отсчёта. Однако это всё равно не снимает парадокса в следующей формулировке. Космонавт, пролетая мимо *всех часов*, неподвижных в земной системе отсчёта, видит, что они идут медленнее его часов. Он “бывший землянин” и знает, что все эти часы одинаковые. Поэтому он должен сделать вывод, что и время его брата течёт медленнее. Интервалы времени, в отличие от длин линеек, накапливаются, и поэтому при остановке показания часов не могут сравняться. Более того, если остановка очень быстрая по сравнению с временем равномерного движения, она никак не может привести к тому, что отставшие часы земного брата скачком обгонят часы космического корабля. Поэтому время на Земле должно (с точки зрения космонавта) отстать и земной брат оказаться младше. Однако это противоречит аналогичному рассуждению с точки зрения землянина, относительно которого все процессы движущихся объектов замедляются. А раз так, то при возвращении путешественника (когда часы можно сравнить непосредственно) произойдёт непонятно что...

В этом *неверном* рассуждении забывают, что, кроме замедления времени, есть ещё один эффект – относительность одновременности. В классической механике для всех наблюдателей, независимо от их движения, существует единое настоящее. В теории относительности ситуация иная. Такое “единое настоящее” существует только для неподвижных относительно друг друга наблюдателей. Однако для наблюдателей, движущихся мимо такой системы, она представляет собой непрерывное объединение прошлого, настоящего и будущего. Находящиеся далеко впереди по движению наблюдатели видят отдалённое будущее неподвижной системы отсчёта, а движущиеся сзади – прошлое.

Все часы, мимо которых пролетают космонавты, идут медленнее, чем их собственные. Однако из этого не следует, что они должны показывать меньше “накопленного” времени! Имея более медленный ход, такие часы находятся в будущем земной системы отсчёта, и когда космонавт до них добирается, они “не успевают” отстать настолько, чтобы скомпенсировать это будущее.

В заключение истории о парадоксе близнецов расскажем сказку.

Сказка о стволовых клетках

В одной галактике жили-были стволовые клетки. Однажды эти клетки разлучили и развезли по различным звёздным системам. Звёзды в галактике двигались очень медленно, поэтому на всех планетах, где жили разумные существа, было единое галактическое время и культ политкорректности. Шел 13 700 002 010 год от сотворения Мира. В этот год стволовые клетки были инициированы к делению и через 9 месяцев возле каждой звезды галактики родилась девочка. Сёстры-близняшки никогда друг друга не видели и не особенно по этому поводу переживали. Кроме одной. Звали её Юниона.

Пришло время исканий, и Юниона решила отправиться в путешествие, чтобы увидеть своих сестёр. В то время в галактике космический корабль могла взять любая, даже не доучившаяся, второкурсница. Поэтому Юниона собрала свои платья, косметичку, конспекты по физике, села в большой красный корабль и разогнала его до околосветовой скорости.

Пролетая мимо первой звезды, Юниона радостно приветствовала свою сестру, которая в это время добросовестно готовилась к экзаменам. Сестра была как две хризантемы похожа на Юниону, однако её ответное приветствие выглядело очень вялым. Она медленно помахала ручкой, а упавший от неожиданности учебник по физике опускался на землю так, словно считал себя снежинкой.

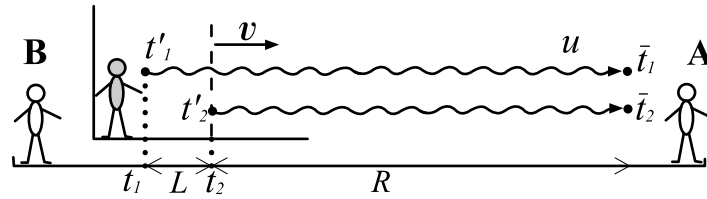
Та же история начала повторяться и с другими сёстрами, мимо которых пролетала Юниона. Все они жили в замедленном ритме. Секундные стрелки на их изящных часиках еле ползли по циферблату, а движения сестёр были медленными и грациозными.

Однако по мере удаления от родной планеты Юниона начала замечать, что хотя её сестры всё также медленно движутся, они становятся всё старше, заводят себе детей, собаку и мужа. Полная сил и юношеского задора путешественница начала встречать сначала зрелых, а затем и совсем зрелых сестёр. В конце концов, пролетая мимо одной из звёзд, она с грустью увидела, как её сестру с почестями, очень медленно отправляют в Мир иной. Больше Юниона сестёр не встречала.

Сообразив, что её миссия выполнена, Юниона затормозила возле одной симпатичной звёздной системы с розовым спектром и поступила в местный университет на отделение физики. Там по учебнику своей сестры, известного в далёком прошлом на этой планете учёного, она изучила теорию относительности и окончательно поняла, что парадокс близнецов возникает только в том случае, когда забывают об относительности одновременности.

2.3 Эффект Доплера

• Рассматривая эффект замедления времени, мы использовали часы, пролетающие со скоростью v непосредственно мимо наблюдателя в S . Аналогично можно измерять темп хода *удалённых* часов, получая от них периодические сигналы со скоростью $u > v$. Рассмотрим сначала одномерный случай, когда часы приближаются к “неподвижному” наблюдателю \mathbf{A} , находящемуся в системе S . Пусть движущиеся часы каждую “секунду” по своему *собственному времени* испускают некоторый сигнал со скоростью u (относительно системы S):



Следуя традиции, мы изобразили сигналы из движущейся системы в виде некоторой волны (например, световой), однако это может быть любой объект, например, периодически выстреливаемый из пейнтбольного ружья шарик с краской. Каждый выстрел, с точки зрения наблюдателя \mathbf{B} системы S , расположенного рядом с часами, происходит в момент времени t_i . Однако удаленный наблюдатель \mathbf{A} получает информацию о выстреле (в виде шарика с краской) в более поздние моменты времени \bar{t}_i . Рассмотрим два выстрела, первый из которых произошел на расстоянии R от неподвижного наблюдателя \mathbf{A} , а второй – после того, как “ружьё” пролетело расстояние L :

$$\bar{t}_1 = t_1 + \frac{R}{u}, \quad \bar{t}_2 = t_2 + \frac{R - L}{u}.$$

Учитывая, что в системе S путь $L = v\Delta t$, получаем:

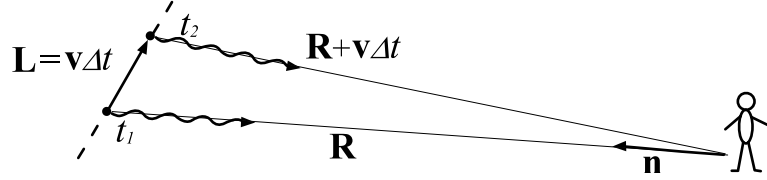
$$\Delta\bar{t} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = \Delta t - \frac{L}{u} = \Delta t \left(1 - \frac{v}{u}\right).$$

Для наблюдателя \mathbf{B} системы S , измеряющего Δt , время часов в S' идёт медленнее, и $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - v^2}$. Поэтому связь между временами выстрелов по часам системы S' и их *получением* удалённым от них наблюдателем в S имеет вид:

$$\Delta\bar{t} = \Delta t' \frac{1 - v/u}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (2.4)$$

Понятно, что числитель этой формулы будет возникать и в классической механике, тогда как знаменатель имеет релятивистское происхождение и связан с замедлением хода времени в движущейся системе отсчета.

• Объединим формулы для продольного и поперечного эффекта Доплера. Будем считать, что длительность испускаемых импульсов много меньше времени их путешествия к наблюдателю:



Пусть в момент испускания первого сигнала радиус-вектор в направлении источника был равен \mathbf{R} . Учитывая, что $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$ ($\ll C_5$), разложим расстояние от точки испускания второго сигнала до наблюдателя в ряд по малым значениям Δt :

$$\sqrt{(\mathbf{R} + \mathbf{v}\Delta t)^2} \approx \sqrt{\mathbf{R}^2 + 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{v} \Delta t} \approx R + \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{R} \Delta t = R + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \Delta t,$$

где $R = |\mathbf{R}|$ – расстояние до источника, а $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ – единичный вектор в его направлении. Пусть сигналы имеют скорость $u = c = 1$. Тогда время между их приходами для удаленного наблюдателя равно:

$$\Delta \bar{t} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = (t_2 + R + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \Delta t) - (t_1 + R) = \Delta t (1 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}). \quad (2.5)$$

Учитывая замедление времени $\Delta t = \Delta t' / \sqrt{1 - v^2}$, приходим к связи интервалов времени между сигналами $\Delta \bar{t}$, получаемыми в неподвижной системе и испускаемыми в движущейся $\Delta t'$, и аналогично для частот:

$$\Delta \bar{t} = \Delta t' \frac{1 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - v^2}}{1 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}. \quad (2.6)$$

Если источник движется в направлении к наблюдателю, то $\mathbf{n}\mathbf{v} = -v$, если удаляется, то $\mathbf{n}\mathbf{v} = v$. При поперечном движении $\mathbf{n}\mathbf{v} = 0$.

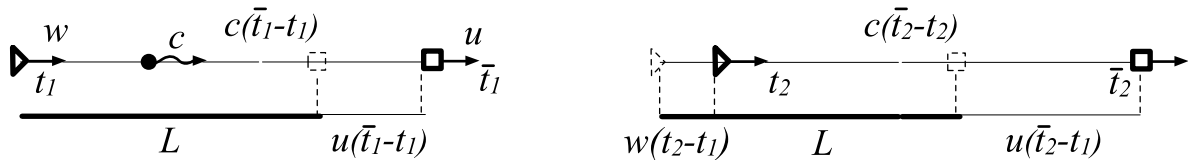
Рассмотрим одно любопытное проявление эффекта Доплера. Пусть наблюдатель знает расстояние L между двумя удалёнными от него на расстояние R неподвижными маркерами. Движущийся объект излучает свет в момент времени t_1 (по местным неподвижным часам) при прохождении первого маркера и в t_2 при прохождении второго. Удаленный наблюдатель получает эти сигналы в \bar{t}_1 и \bar{t}_2 . Если он использует их для определения скорости объекта, то, учитывая (2.5), имеет:

$$\bar{v} = \frac{\mathbf{L}}{\Delta \bar{t}} = \frac{\mathbf{L}}{\Delta t (1 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v})} = \frac{\mathbf{v}}{1 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}},$$

Таким образом, “видимая” \bar{v} скорость отличается от “реальной” скорости $\mathbf{v} = \mathbf{L}/\Delta t$. Слово “реальная” означает, что именно эту скорость регистрируют наблюдатели, находящиеся возле маркеров. Если объект движется к наблюдателю, то модуль его видимой скорости $\bar{v} = v/(1 - v)$ может быть сколь угодно больше единицы (скорости света).

• Выше мы рассматривали ситуацию, когда наблюдатель (приёмник) был неподвижен. В силу принципа относительности имеет значение только *относительная* скорость источника и приёмника. Поэтому в полученных выше соотношениях для световых сигналов ($u = 1$) скорость \mathbf{v} имеет смысл именно такой относительной скорости независимо от того, “кто считает” себя неподвижным – источник сигнала или приёмник.

Чтобы подчеркнуть отличие подобной ситуации от классической физики и распространения сигнала в среде, напомним вывод эффекта Доплера в акустике. Пусть *скорость звука* относительно воздуха равна c . Обозначим через w скорость источника (ниже треугольник) относительно воздуха, а через u – скорость приёмника (ниже квадрат). Пусть обе скорости направлены вдоль оси x (на рисунке движутся слева направо):



Будем рассматривать два последовательных “хлопка”. Первый создаётся источником в момент времени t_1 , а второй – в момент времени t_2 . К приёмнику эти сигналы приходят в моменты времени \bar{t}_1 и \bar{t}_2 . После первого хлопка источник успевает сместиться вправо на $w(t_2 - t_1)$, а к моменту получения второго хлопка приёмник перемещается от начального положения на $u(\bar{t}_2 - t_1)$. В результате (правый рисунок выше):

$$L - w(t_2 - t_1) + u(\bar{t}_2 - t_1) = c(\bar{t}_2 - t_2).$$

Вычитая аналогичное соотношение $L + u(\bar{t}_1 - t_1) = c(\bar{t}_1 - t_1)$ для первого сигнала (выше левый рисунок), получаем:

$$\frac{t_2 - t_1}{\bar{t}_2 - \bar{t}_1} = \frac{\Delta t}{\Delta \bar{t}} = \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{1 - u/c}{1 - w/c} \approx 1 - \frac{u - w}{c} + \dots,$$

где последнее приближённое равенство получено при разложении знаменателя в ряд $(1/(1+x) \approx 1-x)$, а ν_0 – собственная частота излучения (замедление времени не учитываем). Таким образом, если скорости источника и приёмника относительно воздуха малы, то с точностью до эффектов первого порядка малости играет роль только их относительная скорость $v = u - w$. Однако для скоростей, близких к скорости звука, это уже не так, и существенную роль играет, кто и как движется относительно среды (источник или приёмник).

В этом состоит существенное отличие релятивистского эффекта Доплера от классического эффекта распространения сигнала в среде (воздухе).

• Эффект Доплера имеет самые различные проявления. Кроме изменения спектра излучения движущегося объекта, он приводит к деформации восприятия длительности любых удаленных процессов. Например, первое в истории измерение скорости света при наблюдении Рёмером (1676 г.) за периодом обращения спутников Юпитера было проявлением эффекта Доплера. Когда Земля приближалась к Юпитеру, период обращения уменьшался, а когда удалялась – увеличивался. Естественно, при таких скоростях релятивистскую составляющую измерить проблематично. Однако классическая составляющая является эффектом первого порядка и сравнительно легко регистрируется.

Проанализируем при помощи эффекта Доплера ещё раз “парадокс” близнецов. Предположим, что два брата с момента расставания начинают транслировать друг другу свои видеоизображения. Путешественник видит брата, сидящего в кресле у камина, на котором стоят часы. Тот, в свою очередь, на мониторе видит кабину космолёта с электронными часами над штурвалом, за которым сидит его мужественный брат-путешественник. Космический корабль должен достичь ближайшей звезды и вернуться обратно. Приведём выписки из бортового журнала космического корабля.

Дневник путешествия. Совершив быстрый разгон, выхожу на околосветовую скорость. Время начала путешествия по моим часам совпадает со временем брата-домоседа, однако частота принимаемого сигнала со стремительно “улетающей” Земли заметно уменьшилась. По мере удаления от Земли ситуация не изменяется. Секундная стрелка на каминных часах брата еле ползёт и время, которое они показывают, существенно отстаёт от моего. Это результат суммирования эффекта Доплера и задержки видеотрансляции из-за конечности скорости света {...}.

Достигнув цели путешествия, резко торможу и делаю памятные фотографии на фоне звезды. После торможения стрелка на каминных часах брата сразу начала свой естественный бег, хотя общее время, прошедшее с начала полёта, не изменилось и сильно отстаёт от моего. Больше делать у одинокой звезды нечего, поэтому резко ускоряюсь в обратном направлении. Придя в себя после разгона, вижу, что часы брата заметно ускорились и их секундная стрелка крутится, как угорелая. {...}

До Земли осталось совсем немного. За время обратного путешествия часы брата успели наверстать отставание и, более того, обогнали мой хронометр. Завтра торможение и наша долгожданная встреча. Однако уже нет никаких сомнений в том, что теперь в семье младший брат – я.

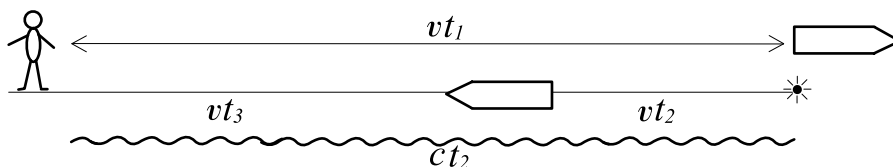
Пусть братья передают друг другу каждую секунду $\nu_0 = 1$ (по своим часам) сигналы точного времени. Будем считать, что ускоренные движения космолёта очень короткие (с точки зрения обоих братьев) по сравнению со временем всего путешествия. Пока космолёт удаляется от Земли, каждый брат (в силу эффекта Доплера) видит уменьшение частоты (увеличение периода) принимаемых сигналов. После торможения у звезды путешественник перестаёт “убегать” от земных сигналов, и их период *сразу* становится равным его секунде. Развернувшись и разогнавшись, путешественник начинает “наскакивать” на идущие ему навстречу сигналы, и их частота увеличивается (период уменьшается).

Время путешествия по его часам в одну сторону равно t'_1 , и такое же в обратную. *Количество* принятых “земных секунд” за время путешествия $t' = 2t'_1$ равно их частоте ν , умноженной на время:

$$t = t'_1 \sqrt{\frac{1-v}{1+v}} + t'_1 \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} = \frac{2t'_1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Поэтому при удалении от Земли космонавт получил существенно меньше секунд (первое слагаемое), а при приближении, соответственно, больше (второе слагаемое). Суммарное количество секунд, полученных с Земли, больше, чем переданных на неё, в точном соответствии с формулой замедления времени.

Несколько иная арифметика у землянина. Пока его брат удаляется, он также регистрирует увеличение периодов точного времени, передаваемых с космолёта. Однако, в отличие от брата, землянин наблюдает такое замедление *дольше*. Время полёта к звезде составляет по земным часам t_1 . Торможение путешественника у звезды землянин увидит спустя дополнительное время $t_2 = L/c = L$ (так как $c = 1$), требуемое свету для прохождения расстояния от звезды. Поэтому только через $t_1 + t_2$ от начала путешествия на мониторе он увидит ускоренную работу часов приближающегося брата:



Учитывая, что времена равны $t_2 = L = vt_1$ и $t_3 = t_1 - t_2$, имеем:

$$t' = (t_1 + t_2) \sqrt{\frac{1-v}{1+v}} + t_3 \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} = 2t_1 \sqrt{1-v^2}.$$

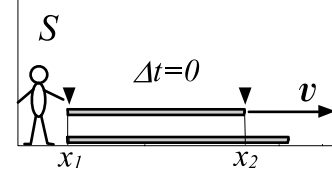
Таким образом, эффект замедления времени брата, менявшего свою систему отсчета, *абсолютен* (одинаков для обоих братьев).

2.4 Размер и форма объектов

• В первой главе мы определили, каким образом наблюдатели в различных системах отсчёта сравнивают свои единицы длины. Две линейки в S и S' , расположенные перпендикулярно относительному движению, считаются одинаковыми. Разберемся, как эти же линейки будут “выглядеть”, если их развернуть вдоль движения.

Рассмотрим покоящуюся в системе S' линейку. Мимо наблюдателя в S она движется со скоростью v . Чтобы измерить длину линейки, он может *одновременно* засечь координаты её начала и конца. В этом случае $\Delta t = 0$. Если обозначить $L_0 = \Delta x'$ и $L = \Delta x$, то из преобразований Лоренца для приращений (2.1), стр. 82, имеем:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2}} \quad \Rightarrow \quad L = L_0 \sqrt{1 - v^2}.$$



Пролетающая мимо линейка выглядит короче, чем её же экземпляр, повернутый перпендикулярно движению. Правда, наблюдатель в S' будет “недоволен” описанной выше измерительной процедурой. Разница координат начала и конца линейки действительно является её длиной $L_0 = x_2' - x_1'$ для наблюдателя в S' (*собственная длина линейки*). Аналогично, в силу одновременности замеров, наблюдатель в S может считать её длиной $L = x_2 - x_1$. Однако эти замеры не будут одновременны для движущегося наблюдателя! Он увидит, что левый конец линейки x_1' был совмещён с линейкой “неподвижного” наблюдателя позже, чем правый x_2' , так как $\Delta t' = t_2' - t_1' = -v\Delta x' < 0$.

Возможен ещё один способ измерения длины. Пусть наблюдатель в S замечает время t_1 прохождения мимо него правого конца линейки, а затем левого t_2 . Зная скорость линейки, он может определить её длину следующим образом: $L = v\Delta t$. Всё это происходит в одной точке его системы отсчёта $\Delta x = 0$, поэтому имеем:

$$L_0 = -\Delta x' = \frac{v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2}},$$

и снова приходим к сокращению длины. Правда, наблюдатель, связанный с движущейся линейкой, снова будет “недоволен”, так как для него часы наблюдателя в S идут медленнее, поэтому определение длины $L = v\Delta t$ с точки зрения S' некорректно.

Тем не менее, лоренцевское сокращение так же реально, как реально и замедление времени в движущейся системе. Конечно, слово “реально” можно понимать в различных смыслах. Например, для Лоренца это сокращение было реально, так как заряженные частицы, из которых состоит линейка, взаимодействовали с эфиром, через который она летела. В результате линейка сжималась в направлении движения. В релятивистской теории эфира нет и нет никакого “силового” воздействия на линейки, расположенные в различных инерциальных системах отсчета. Однако эффект сокращения является объективно регистрируемым каждым наблюдателем фактом.

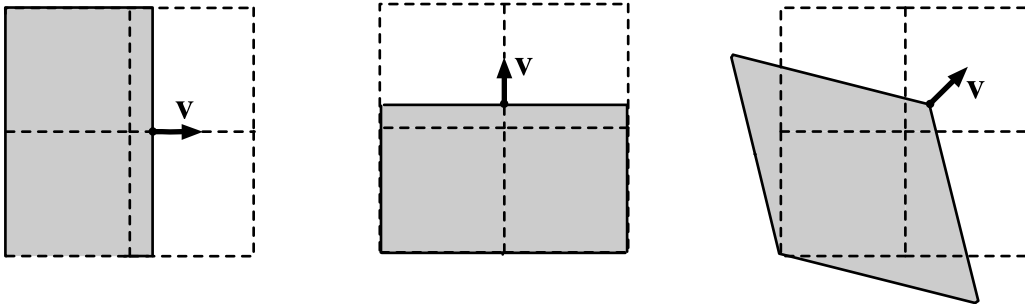
Сокращается ли линейка “на самом деле”? На это можно ответить при помощи следующей аналогии. Частота звука гудка приближающегося, а затем удаляющегося поезда различна (эффект Доплера). “На самом деле” паровоз гудит с той частотой, которую слышит машинист, сидящий в кабине и неподвижный относительно поезда. Стоящий на перроне наблюдатель слышит иную частоту. И, хотя его восприятие отличается от аналогичного восприятия машиниста, оно так же объективно и не является “кажущимся”. Это не “игры разума”, и все то же самое будет “наблюдать” соответствующая аппаратура. Подобная относительность сплошь и рядом встречается в классической физике. Пример тому – эффект Доплера, или относительность значения скорости объекта. Так же обстоит ситуация и с релятивистскими эффектами сокращения длины, замедления времени, фактом одновременности событий, и т.п.

Естественно, следующее из преобразований Лоренца сокращение является относительным. Все инерциальные системы отсчета эквивалентны. Наблюдатель, находящийся в “движущейся” системе S' , точно так же зарегистрирует сокращение всех ориентированных вдоль его движения линеек, которые неподвижны в системе S .

Сокращение длины, как и любые другие эффекты, которые мы анализируем в теории относительности, требуют четкого “сопроводительного описания” условий эксперимента, в которых этот эффект наблюдается. Отрыв результатов наблюдения от такого описания служит источником многочисленных “парадоксов”. В описанных выше двух способах измерения будет регистрироваться факт сокращения длины линейки. Однако можно применять и другие способы наблюдения за быстро движущимся объектом. Например, фотографировать его при помощи аппаратуры с очень короткой выдержкой. В этом случае результаты будут отличаться и существенно зависеть от принципов работы фотоаппарата и формы объекта. Мы рассмотрим эти вопросы в следующем разделе.

• Любой объект, подобно линейке, сплюснут в направлении движения, если в данный момент времени *одновременно* фиксируются координаты всех точек его поверхности. В частности, квадрат (в собственной системе отсчёта) будет “выглядеть” прямоугольником, если он движется вдоль одной из своих сторон. Если же вектор скорости направлен по диагонали квадрата, он окажется сплюснутым вдоль неё, “превратившись” в ромб. При этом длина его диагонали, перпендикулярная движению, не изменится.

Представим, что стороны квадрата – это координатные оси (x', y') движущейся системы отсчёта. Тогда при произвольном направлении её скорости эти оси будут не ортогональны друг другу и к тому же будут некоторым образом повернуты относительно неподвижной системы отсчёта. Ниже пунктирными линиями изображены координатные сетки “неподвижной” системы отсчёта, а сплошными – движущейся, для наблюдателей в S . Модуль скорости равен $v = 0.8$:



Задавая координаты \mathbf{r}' точек в системе отсчёта S' , связанной с телом, при помощи преобразований Лоренца можно получить координаты точек \mathbf{r} в неподвижной системе S . Нас интересует мгновенная форма движущегося тела в момент времени t в системе S . Поэтому необходимо так переписать преобразования Лоренца, чтобы радиус-вектор \mathbf{r} зависел от t и \mathbf{r}' . Для этого запишем обратные преобразования Лоренца ($\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$):

$$t = \gamma(t' + \mathbf{v}\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \gamma\mathbf{v}t' + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'), \quad \Gamma = \frac{\gamma - 1}{v^2} = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}$$

и исключим из них время t' :

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}t + \mathbf{r}' - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'). \quad (2.7)$$

Это соотношение позволяет вычислять положение точек движущегося тела в данный момент времени t в системе S .

Первое слагаемое $\mathbf{v}t$ в (2.7) указывает на то, что все точки движутся параллельно с постоянной скоростью \mathbf{v} . Когда $t = 0$, начала систем отсчёта совпадают и форма движущегося тела определяется вторым и третьим слагаемыми (2.7).

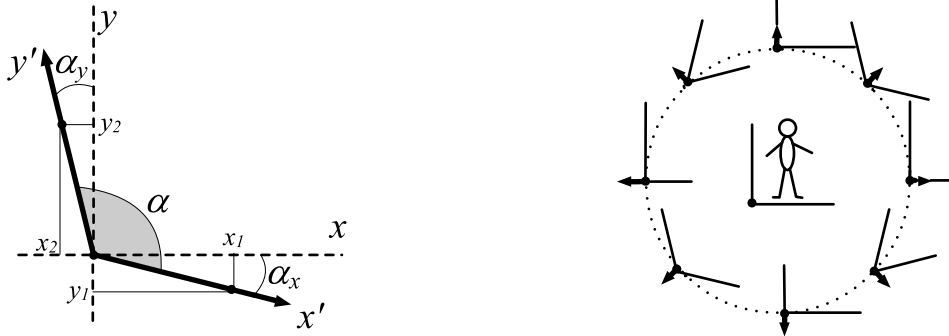
При $t = 0$ из (2.7) следует, что:

$$\mathbf{vr} = \mathbf{vr}'/\gamma, \quad \mathbf{r}^2 = \mathbf{r}'^2 - (\mathbf{vr}')^2, \quad (2.8)$$

т.е. продольные размеры испытывают лоренцевское сокращение, а поперечные (если $\mathbf{vr}' = 0$) остаются неизменными. Рассмотрим две фиксированные точки тела. Для радиус-векторов к каждой из них запишем соотношение (2.7). Их скалярные произведения в двух системах отсчёта связаны следующим образом:

$$\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_1\mathbf{r}'_2 - (\mathbf{vr}'_1)(\mathbf{vr}'_2). \quad (2.9)$$

Пусть движение происходит в плоскости (x, y) . Выберем одну точку на оси x' , а вторую – на оси y' :



В системе S' их координаты равны: $\mathbf{r}'_1 = \{1, 0\}$, $\mathbf{r}'_2 = \{0, 1\}$. Координаты $\mathbf{r}_i = \{x_i, y_i\}$ этих же точек в неподвижной системе отсчёта получаются из уравнения (2.7):

$$x_1 = 1 - \frac{\gamma v_x^2}{\gamma + 1}, \quad y_1 = -\frac{\gamma v_x v_y}{\gamma + 1}; \quad x_2 = -\frac{\gamma v_x v_y}{\gamma + 1}, \quad y_2 = 1 - \frac{\gamma v_y^2}{\gamma + 1}, \quad (2.10)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2} = 1/\sqrt{1 - v_x^2 - v_y^2}$. В результате синус угла α_x между осями x' и x и аналогично для α_y между осями y' и y равны:

$$\sin \alpha_x = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{v_x v_y}{\sqrt{1 - v_x^2}}, \quad \sin \alpha_y = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{v_x v_y}{\sqrt{1 - v_y^2}}, \quad (2.11)$$

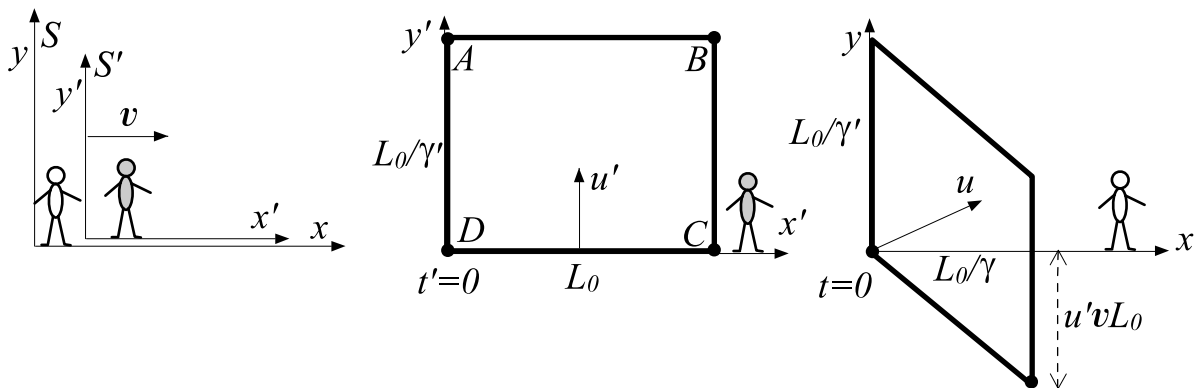
где модули \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 найдены при помощи второго соотношения (2.8).

Косинус угла между осями движущейся системы отсчёта находится из соотношения (2.9):

$$\cos \alpha = -\frac{v_x v_y}{\sqrt{(1 - v_x^2)(1 - v_y^2)}}. \quad (2.12)$$

Таким образом, координатные оси системы S' будут ортогональными для наблюдателей в S , только если одна из компонент скорости равна нулю. Это происходит при движении вдоль координатной оси.

• Рассмотрим ещё один любопытный эффект. Пусть относительно “неподвижной” системы S вдоль оси x со скоростью v движется система S' . Если наблюдатели в системе S' изучают движение квадрата *вдоль оси y'* , то он для них будет выглядеть сплюснутым в направлении движения (второй рисунок ниже). С этим квадратом может быть связана третья система отсчёта S'' . Как выглядит этот квадрат для наблюдателей в неподвижной системе S ? Он движется под углом к оси x , и, естественно, превратится в ромб. Однако этот ромб будет иметь наклонными только “горизонтальные” стороны, тогда как вертикальные будут оставаться параллельными осям y и y' :



При движении в системе S' параллельно оси y' происходит *одновременное* перемещение всех точек квадрата вверх. В частности, его нижние вершины (точки DC) одновременно поднимаются вверх (второй рисунок). Если в момент времени $t' = 0$ точка D находилась в начале системы отсчёта ($x' = y' = 0$), то и точка C также будет находится на оси x' ($y' = 0$). Однако эта одновременность существует только в системе S' !

В системе S между событиями, одновременными в S' ($\Delta t' = 0$), проходит время $\Delta t = v\Delta x$ (стр. 82). Поэтому, хотя в S' обе вершины одновременно пересекают ось x' , в системе S правая вершина C сделает это *позже*, чем левая вершина D . Так как квадрат вместе с системой S' перемещается вдоль оси x со скоростью v , он оказывается сжатым по x в γ раз. Можно представить две вертикальные направляющие в системе S' по которым скользят стороны квадрата. В системе S расстояние между этими направляющими будет L_0/γ . Вертикальные линейки в системах S и S' имеют одинаковые длины. Поэтому, так как сторона, например, AD в системе S' при движении со скоростью u' сокращается в $\gamma' = 1/\sqrt{1 - u'^2}$ раз, то и в системе S она будет иметь такую же длину. Однако сторона BC будет отставать от AD , в результате чего получится ромб, не сжатый по диагонали, а “скошенный” вертикально вниз ($\leq H_9$). В частности, если наблюдатель в системе S' поднимет вверх горизонтальный стержень, то для наблюдателей в S этот стержень *повернётся*.

В системе S' проекции скорости системы S'' равны $u'_x = 0$ и $u'_y = u'$. В силу сложения скоростей (1.15), стр.37, скорость S'' относительно S равна:

$$u_x = v, \quad u_y = \frac{u'}{\gamma}, \quad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} = \gamma\gamma',$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$, $\gamma' = 1/\sqrt{1 - u'^2}$. Казалось бы, между системами S'' и S должны выполняться обычные преобразования Лоренца:

$$t'' = \gamma_u(t - \mathbf{ur}), \quad \mathbf{r}'' = \mathbf{r} - \gamma_u \mathbf{u} t + \Gamma_u \mathbf{u} (\mathbf{ur}).$$

или в компонентном виде:

$$\begin{cases} t'' = \gamma_u(t - u_x x - u_y y) \\ x'' = x - \gamma_u u_x t + \Gamma_u u_x (u_x x + u_y y) \\ y'' = y - \gamma_u u_y t + \Gamma_u u_y (u_x x + u_y y). \end{cases} \quad (2.13)$$

Однако это не так! Действительно, запишем последовательность преобразований от S к S' и от S' к S'' :

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - vx), & x' &= \gamma(x - vt), & y' &= y, \\ t'' &= \gamma'(t' - u'y'), & x'' &= x', & y'' &= \gamma'(y' - u't'). \end{aligned}$$

В преобразованиях от S' к S'' (вторая строчка) переставлены местами x' и y' , так как движение происходит не вдоль оси x' , а вдоль оси y' . Если подставить t', x', y' из первой строки во вторую, то для t'' получится преобразование такое же, как и в (2.13). А вот x'' и y'' имеют другую зависимость от t, x, y :

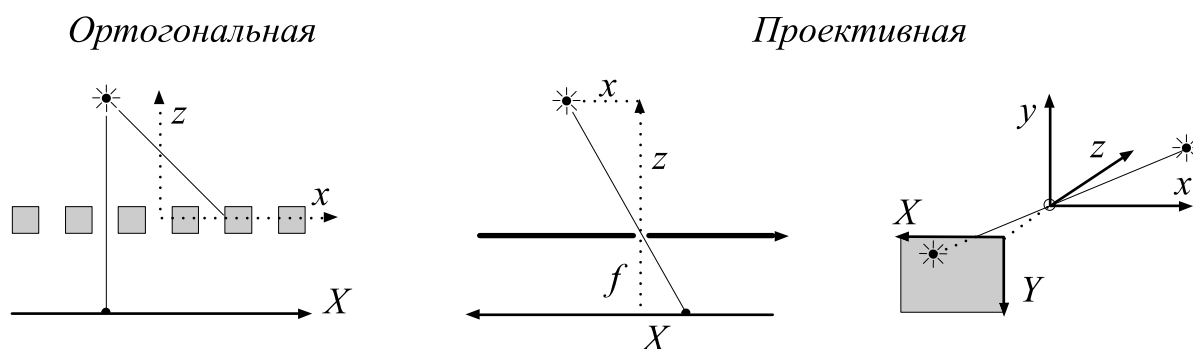
$$\begin{cases} x'' = \gamma(x - ut) \\ y'' = \gamma'y - \gamma\gamma_u(u_y t - u_x u_y x). \end{cases}$$

Это может показаться странным, тем более, что преобразования Лоренца в одномерном случае были получены (стр.30) как раз при помощи композиции преобразований. Почему в одномерном случае последовательные преобразования Лоренца снова приводят к преобразованиям Лоренца, а при движении в плоскости – уже нет?

Ответ связан с достаточно тонкими вопросами математической природы теории относительности. Как мы увидим чуть позже, пространство и время образуют единое 4-мерное псевдоевклидово пространство. В таком пространстве возможны различные преобразования координат и времени, оставляющие интервал Δs^2 неизменным. В частности, кроме чистых лоренцевских преобразований (т.н. *бустов*) возможны также обычные 3-мерные повороты декартовых осей. Оказывается, что в общем случае композиция двух бустов эквивалентна бусту и выполнению после этого 3-мерного поворота осей x'', y'' на некоторый угол ϕ . Подробно эти вопросы мы будем рассматривать в 8-й главе.

2.5 Фотографирование объектов

• Как будет выглядеть релятивистский объект при фотографировании или "визуальном" наблюдении? В силу конечности скорости распространения света мы видим его точки в *различном* прошлом, если они удалены от нас на различное расстояние. "Видим", т.е. получаем фотографии на аппаратуре, имеющей пренебрежимо малую выдержку (чтобы избежать "размазывания" картинка). При фотографировании происходит отображение некоторой точки *3-мерного* пространства (x, y, z) на *2-мерную* поверхность фотографии (X, Y) . Рассмотрим два основных способа подобного отображения. В обоих случаях будем считать, что фотопленка расположена в плоскости x, y :



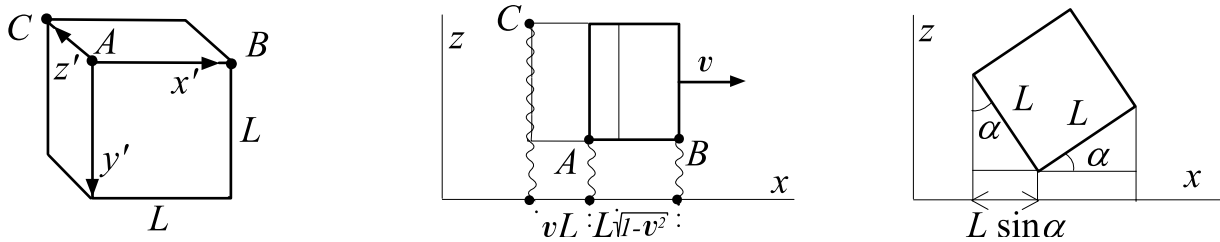
Слева изображено сечение фотоаппарата, осуществляющего *ортогональное отображение*. Он регистрирует только лучи, падающие перпендикулярно к фотографии. Устройство такого "фотоаппарата" может быть реализовано, например, при помощи находящейся перед фотопленкой толстой пластины с множеством цилиндрических отверстий. Их стенки поглощают наклонно падающие лучи и пропускают вертикальные. Подобным образом, например, устроены глаза насекомых. При ортогональном отображении информация о координате z теряется и преобразование имеет простейший вид: $X = x$ и $Y = y$.

На втором и третьем рисунках приведен более типичный для человеческого восприятия вариант, реализующий *проективное отображение*. В этом случае в тонком экране находится единственное маленькое отверстие (диафрагма). Падающие через неё на фотографию лучи создают изображение объекта. В силу пропорций подобных треугольников связь 2-мерных и 3-мерных координат имеет вид:

$$X = f \frac{x}{z}, \quad Y = f \frac{y}{z}.$$

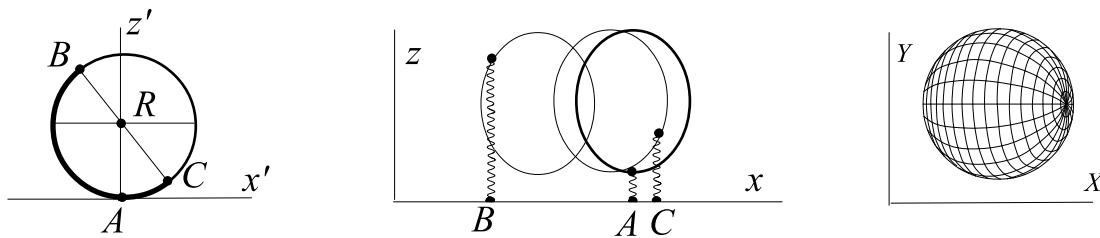
Изображение в подобной "камере Обскура" оказывается перевернутым, поэтому мы повернули и плоскость фотографии [координаты (X, Y)].

• Рассмотрим летящий куб с длиной рёбер L (в связанной с ним системе отсчета). Сфотографируем куб при помощи “ортогонального” фотоаппарата. Фотоплёнка расположена в плоскости (x, y) в неподвижной системе. Она фиксирует кванты света, пришедшие на неё в *данный момент* времени. Однако испущены они были в разное время в прошлом:



Сигналы от точек A и B пройдут одинаковое расстояние (выше средний рисунок). Грань куба, обращённая к плёнке, имеет длину $L\sqrt{1-v^2}$ и будет выглядеть сжатой. Однако от точки C фотон путешествует дополнительное расстояние вдоль ребра (перпендикулярно фотоплёнке), поэтому испускается на время $t = L/c$ раньше (далее, как обычно, $c = 1$). В это время куб был левее на $vt = vL$. В нерелятивистском случае ($c = \infty$) при ортогональной проекции куба на фотографии получается квадрат – образ одной грани. Для релятивистского объекта мы получаем эту грань сжатой, но видим также и левую боковую грань, сжатую в v раз. Результат получается такой же, как и при фотографировании неподвижного куба, повернутого на угол $\alpha = \arcsin v$ (см. выше последний рисунок).

Аналогична ситуация при фотографировании летящего шара:

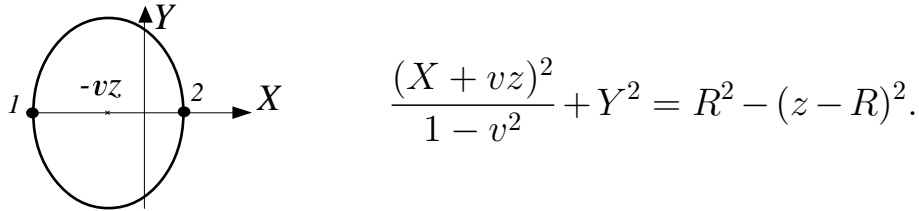


В ортогональной проекции неподвижной сферы будут видны только точки полусферы, обращённой к фотоаппарату. Так, фотон, испущенный из точки B против оси z , моментально поглощается сферой. В отличие от этого, для быстролетящей сферы возможна ситуация, когда сфера выскальзывает вправо “из-под фотона”, испущенного точкой B , и не закрывает ему путь к плёнке. В результате мы будем видеть часть задней поверхности сферы. Точки же, расположенные на передней по движению поверхности далее некоторой C , видны не будут, так как сфера при движении поглотит испущенные ими фотоны. В результате сфера окажется повернутой, но не сжатой! На рисунке выше “на самом деле” сфера повернута полюсом к фотоаппарату.

Проведём соответствующие расчеты. Уравнения поверхности с центром, удалённым от фотоплёнки на величину радиуса R , в системе, связанной со сферой (x', y', z') , и в системе фотоаппарата (x, y, z) имеют вид:

$$x'^2 + y'^2 + (z' - R)^2 = R^2, \quad \frac{(x - vt)^2}{1 - v^2} + y^2 + (z - R)^2 = R^2,$$

где во втором случае мы воспользовались преобразованиями Лоренца. Пусть точка, которая испустила фотон, находится на расстоянии z от фотоплёнки. Тогда в момент времени \bar{t} мы увидим её изображение в прошлом $t = \bar{t} - z$. При ортогональной проекции каждая точка (x, y, z) отображается в $X = x$, $Y = y$, поэтому на фотоплёнке все точки сферы, имеющие координату z , образуют эллипс ($\bar{t} = 0$):



$$\frac{(X + vz)^2}{1 - v^2} + Y^2 = R^2 - (z - R)^2.$$

Крайние точки X_1 и X_2 этого эллипса ($Y = 0$) при данном z имеют следующие координаты на фотоплёнке:

$$X_{1,2} = -vz \mp \sqrt{R^2 - (z - R)^2} \sqrt{1 - v^2}.$$

Крайняя левая точка эллипса принимает при $z = R(1 + v)$ минимальное значение $X_1^{min} = -R(1 + v)$. Крайняя правая точка принимает максимальное значение $X_2^{max} = R(1 - v)$ при $z = R(1 - v)$. Поэтому размер ортогональной проекции вдоль оси x равен удвоенному радиусу, т.е. диаметру в системе покоя сферы:

$$X_2^{max} - X_1^{min} = R(1 - v) + R(1 + v) = 2R.$$

Естественно, аналогичный размер получается и вдоль оси Y .

Таким образом, в ортогональной проекции и куб, и сфера будут выглядеть повёрнутыми без какого-либо лоренцевского сжатия. Этот эффект называется *вращением Терелла-Пенроуза* и является достаточно общим при использовании “ортогонального” фотоаппарата.

Для получения реалистичной модели фотографии необходимо, кроме проективных моментов, учитывать свойства освещения, подправленные на эффект Доплера (стр.90). Кроме этого, внешний вид объекта изменится, если мы воспользуемся не ортогональным, а проективным (“обычным”) фотоаппаратом с диафрагмой. Рассмотрим расчёт результирующей фотографии в этом случае.

• Пусть уравнение поверхности тела в его собственной системе отсчета имеет вид $F(x', y', z') = 0$. Момент времени, в который были испущены фотоны от точки (x, y, z) , отстоит в прошлое от текущего \bar{t} на величину *расстояния от диафрагмы*: $t = \bar{t} - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Подставляя в уравнение поверхности преобразования Лоренца, а затем проективные преобразования $x = zX/f$, $y = zY/f$, и $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$, получаем:

$$F\left(z\gamma\left[\frac{X}{f} + v\sqrt{1 + \frac{X^2 + Y^2}{f^2}}\right] - v\gamma\bar{t}, z\frac{Y}{f}, z\right) = 0.$$

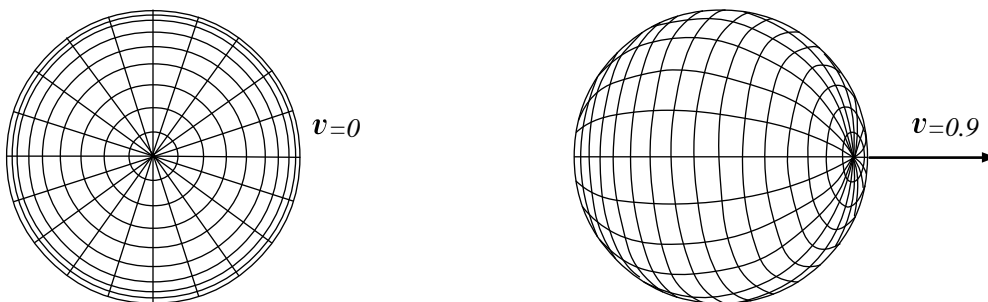
Проекция на фотографию будет получаться в результате быстрого открытия и закрытия диафрагмы. Для каждой точки фотографии (X, Y) мы должны решить это уравнение относительно z . В ситуации, когда решений несколько, выбирается то, которое соответствует минимальному расстоянию до диафрагмы (остальные точки будут им перекрыты). Зная время $t = \bar{t} - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \bar{t} - z\sqrt{1 + \frac{X^2 + Y^2}{f^2}}$, можно при помощи преобразований Лоренца получить точку (x', y', z') поверхности, которая отображается на фотографию (X, Y) .

Ниже приведена подобная “фотография” куба (первый рисунок – неподвижный куб $v = 0$, второй – летящий со скоростью $v = 0.9$):



Заметим, что любой вертикальный стержень, летящий мимо нас в горизонтальном направлении, будет выглядеть изогнутым, так как изображения его центра и краёв испускаются в разное время в прошлом, и концы стержня будут загибаться “назад”.

Аналогичные результаты для сферы:

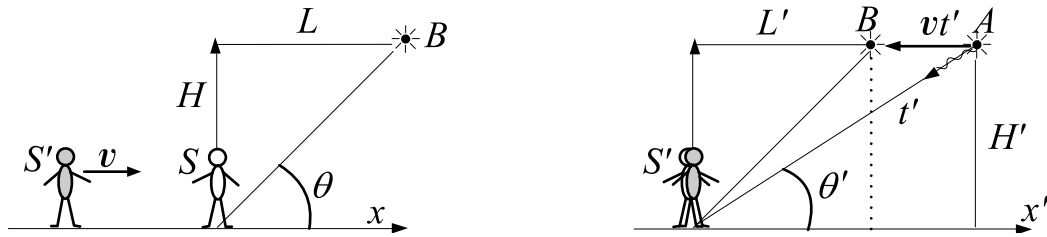


Таким образом, внешний вид окружающего нас релятивистского мира существенно зависит от того, как мы его наблюдаем.

2.6 Аберрация

• Аберрация аналогична эффекту Доплера, однако при этом “искажается” не частота излучения источника, а его видимое положение. Как и эффект Доплера, аберрация имеет классическую составляющую и поправки, связанные с релятивистскими эффектами. Впервые аберрация была обнаружена, как изменение положения звёзд при движении Земли по орбите вокруг Солнца. Поэтому начнём мы именно с этого примера.

Пусть неподвижный относительно Солнца наблюдатель S видит в направлении θ от плоскости орбиты Земли также неподвижную звезду (этот угол называется *склонением*). Другой наблюдатель S' вместе с Землёй движется относительно первого со скоростью v (рисунок слева):



Когда наблюдатели окажутся в одной точке, землянин S' увидит звезду под углом θ' (второй рисунок). Для землянина звезда движется ему навстречу со скоростью v , поэтому она видна из положения A , которое занимала некоторое время t' назад. Это время необходимо свету, чтобы пройти гипотенузу треугольника ($c = 1$). “Истинное” положение звезды соответствует точке B . Неподвижный относительно звезды наблюдатель S также видит её в прошлом, но всё время в одном направлении (под углом θ). Разложение гипотенузы t' по катетам позволяет связать между собой углы:

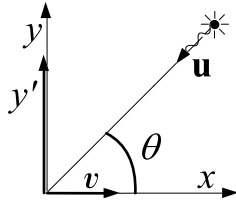
$$\begin{cases} t' \sin \theta' = H' \\ t' \cos \theta' = vt' + L' \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin \theta'}{\cos \theta' - v} = \frac{H'}{L'} = \frac{H}{L\sqrt{1-v^2}} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1-v^2}},$$

где учтено, что для неподвижного относительно звезды наблюдателя $\operatorname{tg} \theta = H/L$ и в силу лоренцевского сокращения расстояние по горизонтали до звезды с точки зрения землянина сокращается $L' = L\sqrt{1-v^2}$, а $H' = H$. Учитывая, что $\cos \theta = 1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta}$, несложно найти:

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' - v}{1 - v \cos \theta'}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{1-v^2} \sin \theta'}{1 - v \cos \theta'}. \quad (2.14)$$

Рассмотренные в предыдущем разделе искажения фотографической формы движущихся объектов, по сути, также являлись проявлением аберрации. В качестве упражнения ($\ll \text{Н}_{11}$) предлагается восстановить в (2.14) фундаментальную константу “ c ”.

• Формулы для аберрации можно получить при помощи закона сложения скоростей (стр.36). В данном случае объектом, движущемся со скоростью \mathbf{u} относительно системы S и с \mathbf{u}' относительно S' , является световой сигнал, распространяющийся от источника к наблюдателям:



$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2}}{1 - u_x v}.$$

Из рисунка следует, что проекции скорости света равны $u_x = -\cos \theta$ и $u_y = -\sin \theta$. Аналогично со штрихами для движущегося наблюдателя S' , так как модуль скорости света $c = 1$ в обеих системах одинаков. Подставляя эти компоненты в закон сложения скоростей, получим:

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta + v}{1 + v \cos \theta}, \quad \sin \theta' = \frac{\sqrt{1 - v^2} \sin \theta}{1 + v \cos \theta}. \quad (2.15)$$

Эти формулы являются обратными к найденным выше. Как обычно, обратные преобразования получаются при замене $v \mapsto -v$ или прямым обращением формул.

Разница в углах наблюдения источника для неподвижного и движущегося наблюдателей может быть выражена через синус разности углов $\alpha = \theta - \theta'$:

$$\sin \alpha = \sin \theta \cos \theta' - \cos \theta \sin \theta' = \frac{v + (1 - \sqrt{1 - v^2}) \cos \theta}{1 + v \cos \theta} \sin \theta.$$

При малых скоростях можно написать приближенное соотношение:

$$\sin \alpha \approx v \sin \theta.$$

Так как $v \ll 1$, следовательно, угол α мал, и в силу $\sin \alpha \approx \alpha$ имеем $\alpha \approx v \sin \theta$. Разность в наблюдениях максимальна, когда угол $\theta = \pi/2$, т.е. источник находится над головой неподвижного наблюдателя.

В классической механике формулы для аберрации будут несколько иными (нет лоренцевского сокращения длины и отличен закон сложения скоростей). Кроме этого, в релятивистской теории нет разницы, движется приёмник или источник сигнала. Все движения относительны. Не так обстоит дело, например, с распространением звука. В этом случае есть выделенная система отсчета, связанная с воздухом. Относительно этой системы звук всегда распространяется с постоянной скоростью независимо от скорости движения источника. Однако скорость звука зависит от того, с какой скоростью движется относительно воздуха приёмник. Поэтому получаются различные эффекты аберрации в зависимости от того, кто движется относительно среды – приёмник или источник.

• Запишем теперь векторные соотношения для эффекта абберации. В первой главе мы получили связь скоростей некоторого объекта, измеренных наблюдателями в системах S и S' , см. (1.17), стр. 38:

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} - \gamma \mathbf{v} + \Gamma \mathbf{v} (\mathbf{v} \mathbf{u})}{\gamma (1 - \mathbf{u} \mathbf{v})}.$$

Предположим, что *единичные векторы* \mathbf{n} и \mathbf{n}' являются направлениями на источник света с точки зрения каждого наблюдателя. Соответственно, световой сигнал распространяется к наблюдателю, т.е. против этих векторов: $\mathbf{u} = -\mathbf{n}$ и $\mathbf{u}' = -\mathbf{n}'$, поэтому:

$$\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{n} + \gamma \mathbf{v} + \Gamma \mathbf{v} (\mathbf{v} \mathbf{n})}{\gamma (1 + \mathbf{v} \mathbf{n})}. \quad (2.16)$$

Например, когда нас интересует угол θ между направлением на объект и вектором скорости, можно написать $\mathbf{n} \mathbf{v} = v \cos \theta$, и аналогично для штрихованного угла. Умножая правую и левую часть на \mathbf{v} , несложно получить соотношение для косинусов (2.15). Соотношение для синусов даёт векторное произведение $\mathbf{n}' \times \mathbf{v}$, модуль которого равен $v \sin \theta'$.

Для малых скоростей в формуле для абберации (2.16) можно отбросить слагаемое $\mathbf{v} (\mathbf{v} \mathbf{n})$ (порядок v^2 , так как $\Gamma \approx 1/2$, $\gamma \approx 1$, см. стр.34). Раскладывая в ряд знаменатель ($1/(1+x) \approx 1-x$), в линейном по v приближении получаем:

$$\mathbf{n}' \approx \frac{\mathbf{n} + \mathbf{v}}{1 + \mathbf{v} \mathbf{n}} \approx \mathbf{n} + \mathbf{v} - \mathbf{n}(\mathbf{v} \mathbf{n}) = \mathbf{n} - [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{v}]], \quad (2.17)$$

где в последнем равенстве использована формула двойного векторного произведения (стр. 600). В качестве упражнения имеет смысл проверить, что эта *приближенная формула* с точностью до первого порядка по v приводит к единичной длине штрихованного вектора $\mathbf{n}'^2 \approx 1$.

Вычислив векторное произведение между направлениями в обеих системах:

$$\mathbf{n}' \times \mathbf{n} = [\mathbf{v} \times \mathbf{n}] \frac{1 + (\mathbf{v} \mathbf{n}) \Gamma / \gamma}{1 + \mathbf{v} \mathbf{n}},$$

можно найти синус угла между ними, равный (для единичных векторов) модулю $|\mathbf{n}' \times \mathbf{n}|$. Если скорость мала, то мал и угол абберации:

$$\alpha \approx |\mathbf{v} \times \mathbf{n}| = v \sin \theta.$$

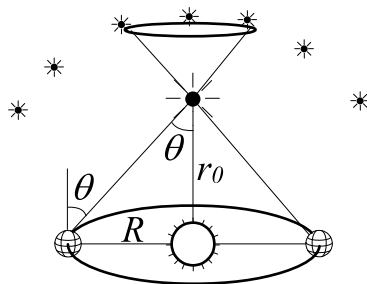
Абберация отсутствует, если источник находится на прямой движения системы отсчёта, и максимальна, если \mathbf{n} и \mathbf{v} перпендикулярны. В этом случае угол $\alpha = v$ и направлен от вертикали в сторону движения.

• Земля движется не по прямой, а вращается вокруг Солнца по эллипсу. На самом деле эксцентриситет (сплюснутость) земной орбиты не велик. Минимальное и максимальное расстояния от Солнца отличаются друг от друга всего на 3%, поэтому для упрощения вычислений будем считать орбиту Земли круговой с радиусом

$$R = 149597870700 \text{ м} \approx 1.496 \cdot 10^8 \text{ км} = 1 \text{ а.е.}$$

Это расстояние также называется одной *астрономической единицей* (а.е.).

Пока забудем об аберрации. Даже в её отсутствие из-за обращения Земли вокруг Солнца близкие к нам звёзды испытывают видимое перемещение на небесной сфере, т.н. *годовой параллакс*. В простейшем случае, если звезда находится “над Солнцем”, то с точки зрения наблюдателя на Земле она описывает окружность:



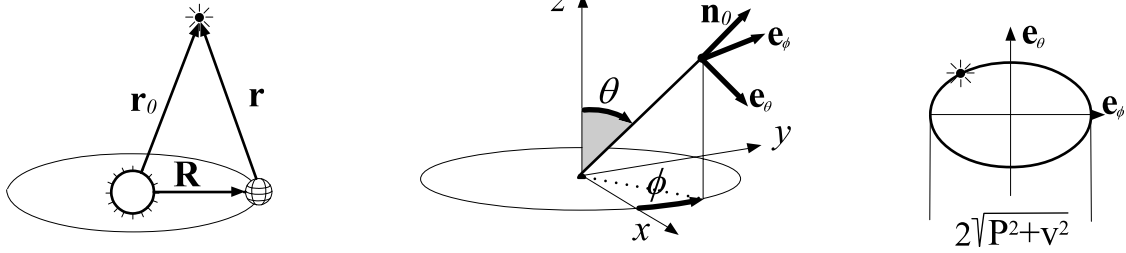
Эта окружность видна на фоне “неподвижных” звёзд, которые удалены от Солнца существенно дальше, чем звезда, для которой измеряется параллакс. Фактически все звёзды описывают на небесной сфере окружности (если находятся над Солнцем) или эллипсы в общем случае. Эти эллипсы тем меньше, чем дальше звезда находится от Солнца. Размеры эллипсов позволяют из геометрических соображений найти расстояния к ближайшим звёздам.

Парсек – это расстояние, с которого средний радиус орбиты Земли виден под углом, равным одной секунде. На рисунке пропорции сильно искажены. На самом деле $r_0 \gg R$, и, следовательно, $R/r_0 = \text{tg } \theta \approx \theta$. Одна угловая секунда составляет $1/3600$ часть градуса, поэтому:

$$1 \text{ пк} = \frac{1 \text{ а.е.}}{1''} = \frac{1 \text{ а.е.}}{2\pi/(360 \cdot 3600)} = 206\,265 \text{ а.е.} = 3.0857 \cdot 10^{13} \text{ км.}$$

Слово “парсек” происходит от объединения слов “параллакс” и “секунда”. Расстояние в один парсек свет преодолевает в течение 3.26 года. Для сравнения 1 а.е. соответствует 500 световым секундам (8 мин. 20 сек.). Расстояние до ближайшей звёздной системы Альфа-Центавра составляет 1.3 пк. Измерение параллаксов при помощи орбитальных телескопов позволяет охватить расстояния до 500 пк. Это наиболее прямой способ измерения расстояния до относительно близких к нам звёзд.

• Для описания параллакса звезды введём единичный вектор $\mathbf{n}_0 = \mathbf{r}_0/r_0$ в её направлении с точки зрения “наблюдателя на Солнце”, где \mathbf{r}_0 – радиус-вектор от Солнца к звезде. Для земного наблюдателя направление на звезду равно $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Радиус-векторы наблюдателей связаны следующим образом $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{R}$, где \mathbf{R} – радиус-вектор, направленный от Солнца к Земле:



Считая, что $r_0 \gg R$, аналогично эффекту Доплера (стр. 92) для расстояния звезды от Земли можно записать:

$$r = \sqrt{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{R})^2} \approx \sqrt{r_0^2 - 2\mathbf{r}_0\mathbf{R}} \approx r_0 - \mathbf{n}_0\mathbf{R} = r_0(1 - \mathbf{n}_0\mathbf{P}),$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{R}/r_0$ – называется *вектором параллакса*. Поэтому:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} \approx \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}}{r_0(1 - \mathbf{n}_0\mathbf{P})} = \frac{\mathbf{n}_0 - \mathbf{P}}{1 - \mathbf{n}_0\mathbf{P}}.$$

Раскладывая знаменатель по малым P , получаем:

$$\mathbf{n} \approx (\mathbf{n}_0 - \mathbf{P})(1 + \mathbf{n}_0\mathbf{P}) \approx \mathbf{n}_0 + \mathbf{n}_0(\mathbf{n}_0\mathbf{P}) - \mathbf{P}.$$

При помощи тождества “бац минус цаб” (стр. 600) связь единичных векторов в направлении звезды с Солнца (\mathbf{n}_0) и с Земли (\mathbf{n}) можно записать при помощи двойного векторного произведения:

$$\mathbf{n} \approx \mathbf{n}_0 + \mathbf{n}_0(\mathbf{n}_0\mathbf{P}) - \mathbf{P} = \mathbf{n}_0 + [\mathbf{n}_0 \times [\mathbf{n}_0 \times \mathbf{P}]]. \quad (2.18)$$

Выразим компоненты единичного вектора \mathbf{n}_0 через углы (θ, ϕ) сферической системы координат (см. выше второй рисунок):

$$\mathbf{n}_0 = (s_\theta c_\phi, s_\theta s_\phi, c_\theta),$$

где $s_\theta = \sin \theta$, $c_\theta = \cos \theta$. На поверхности сферы можно ввести два ортогональных единичных вектора $\mathbf{e}_\phi \sim \partial \mathbf{n}_0 / \partial \phi$, $\mathbf{e}_\theta = \partial \mathbf{n}_0 / \partial \theta$, перпендикулярных к \mathbf{n}_0 ($\ll C_6$):

$$\mathbf{e}_\phi = (-s_\phi, c_\phi, 0), \quad \mathbf{e}_\theta = (c_\theta c_\phi, c_\theta s_\phi, -s_\theta). \quad (2.19)$$

Несложно проверить, что $\mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\theta = 0$ и $\mathbf{e}_\theta^2 = \mathbf{e}_\phi^2 = 1$. Кроме этого, векторы направлены в сторону малого изменения угловых координат. Стоит проверить ортогональность векторов к \mathbf{n}_0 : $\mathbf{n}_0 \mathbf{e}_\phi = \mathbf{n}_0 \mathbf{e}_\theta = 0$.

Земля вращается вокруг Солнца по окружности, и компоненты радиус-вектора \mathbf{R} равны:

$$\mathbf{R} = \{R \cos(2\pi t), R \sin(2\pi t), 0\},$$

где время t измеряется в годах. Когда t изменяется от 0 до 1, радиус-вектор возвращается в исходное положение. В результате вращения \mathbf{R} периодически изменяются и компоненты вектора параллакса:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{R}}{r_0} = \{P \cos(2\pi t), P \sin(2\pi t), 0\}. \quad (2.20)$$

Вектор \mathbf{n}_0 перпендикулярен базисным векторам \mathbf{e}_ϕ и \mathbf{e}_θ . Поэтому умножая (2.18) на \mathbf{e}_ϕ и \mathbf{e}_θ , найдём проекции вектора \mathbf{n} на угловые базисные векторы:

$$\mathbf{n}\mathbf{e}_\phi = -\mathbf{P}\mathbf{e}_\phi = P \sin(\phi - 2\pi t), \quad \mathbf{n}\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{P}\mathbf{e}_\theta = -P \cos \theta \cos(\phi - 2\pi t),$$

где учтены (2.19), (2.20) и формулы разности углов для синуса и косинуса. Так как эллипс вращения мал, в его окрестности векторы \mathbf{e}_ϕ , \mathbf{e}_θ на сфере играют роль перпендикулярных декартовых осей (сфера в малых масштабах – плоскость). Величины $\mathbf{n}\mathbf{e}_\phi$ и $\mathbf{n}\mathbf{e}_\theta$ являются проекциями на эти оси ($\ll C_7$). В результате на поверхности небесной сферы звезда описывает эллипс с полуосями P и $P \cos \theta$:

$$\frac{(\mathbf{n}\mathbf{e}_\phi)^2}{P^2} + \frac{(\mathbf{n}\mathbf{e}_\theta)^2}{P^2 \cos^2 \theta} = 1.$$

При $\theta = 0$ (звезда над Солнцем) получается окружность с радиусом, равным параллаксу P .

До сих пор земная система отсчёта была неподвижна. Подставляя в приближенное соотношение для абберации (2.17) связь (2.18) и пренебрегая членами порядка Pv , можно записать:

$$\mathbf{n}' \approx \mathbf{n}_0 + \underbrace{[\mathbf{n}_0 \times [\mathbf{n}_0 \times \mathbf{P}]]}_{parallax} - \underbrace{[\mathbf{n}_0 \times [\mathbf{n}_0 \times \mathbf{v}]]}_{aberration}. \quad (2.21)$$

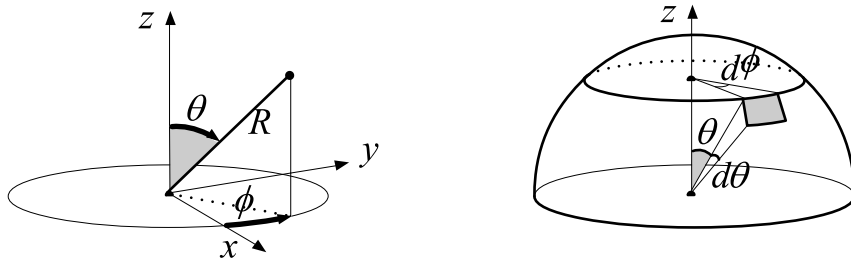
Скорость движения Земли \mathbf{v} по круговой орбите перпендикулярна \mathbf{R} и составляет 30 км/с, или $v \sim 10^{-4}$ в долях скорости света. Если взять производную радиус-вектора \mathbf{R} по времени, то для компонент скорости получим $\mathbf{v} = \{-v \sin(2\pi t), v \cos(2\pi t), 0\}$. Стоит проверить, что при этом большая полуось эллипса равна $\sqrt{P^2 + v^2}$.

Параллакс даже для ближайшей звезды равен $P = R/r_0 \sim 4 \cdot 10^{-6}$, т.е. в 27 раз меньше безразмерной скорости. Поэтому движение звёзд в течение года по эллипсу в результате абберации – эффект более заметный, чем параллакс.

2.7 Звёздное небо

• Предположим, что в некоторой системе отсчета звёзды в пространстве имеют равномерное распределение. Как интерпретировать выделенность такой системы, мы выясним во второй части книги, посвящённой космологии. Сейчас же рассмотрим, как будут выглядеть эти звёзды из быстро летящего космического корабля.

Наблюдая звёздное небо из фиксированной точки, мы воспринимаем звёзды спроектированными на “небесную сферу” ($\ll C_8$). При равномерном распределении плотность числа звёзд в любом направлении постоянна. Введём сферические углы (θ, ϕ) и рассмотрим небольшой участок сферы, ограниченный малыми приращениями $(d\theta, d\phi)$:



Если $\phi = const$, изменение угла $d\theta$ описывает на сфере радиуса R дугу длиной $Rd\theta$. При постоянном θ изменение угла $d\phi$ описывает дугу $R \sin \theta d\phi$, где $R \sin \theta$ – расстояние от этой дуги до оси z . В результате площадь, вырезаемая приращениями $(d\theta, d\phi)$, равна $R^2 \sin \theta d\theta d\phi$. Её отношение к квадрату радиуса сферы называется *телесным углом* $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$. Площадь сферы равна $4\pi R^2$, поэтому интегрирование по (θ, ϕ) телесного угла даёт 4π :

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) = 4\pi.$$

Телесный угол $d\Omega$ является малой площадью на поверхности сферы единичного радиуса. Однако при фиксированных $d\theta$ и $d\phi$ эта площадь различна при различных значениях θ . Поэтому удобно использовать относительные величины. Отношение количества звёзд dN , видимых в телесном углу $d\Omega$, к величине этого угла называется плотностью *углового распределения* $n(\theta, \phi)$. В общем случае эта плотность является функцией обоих углов:

$$dN = n(\theta, \phi) d\Omega = n(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = -n(\theta, \phi) d(\cos \theta) d\phi.$$

Для равномерного распределения плотность постоянна, и если общее число видимых звёзд N , то она равна $n(\theta, \phi) = N/4\pi$.

Перейдём теперь в систему отсчёта (штрихованную), связанную с космическим кораблём. Пусть его скорость v направлена вдоль оси z . Аберрация угла θ' между скоростью и направлением на звезду [см. (2.14)] равна:

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' - v}{1 - v \cos \theta'}. \quad (2.22)$$

Запишем $s_{\theta} d\theta = -dc_{\theta} = (\partial c_{\theta} / \partial c_{\theta'}) dc_{\theta'}$ и возьмём производную формулы (2.22) по $\cos \theta'$. Учитывая, что $\phi' = \phi$, для $n(\theta, \phi) = N/4\pi$ получаем:

$$dN = -\frac{N}{4\pi} \frac{\partial(\cos \theta)}{\partial(\cos \theta')} d(\cos \theta') d\phi = -\frac{N}{4\pi} \frac{1 - v^2}{(1 - v \cos \theta')^2} d(\cos \theta') d\phi.$$

В результате плотность распределения звёзд на “небесной сфере” с точки зрения космического корабля имеет вид:

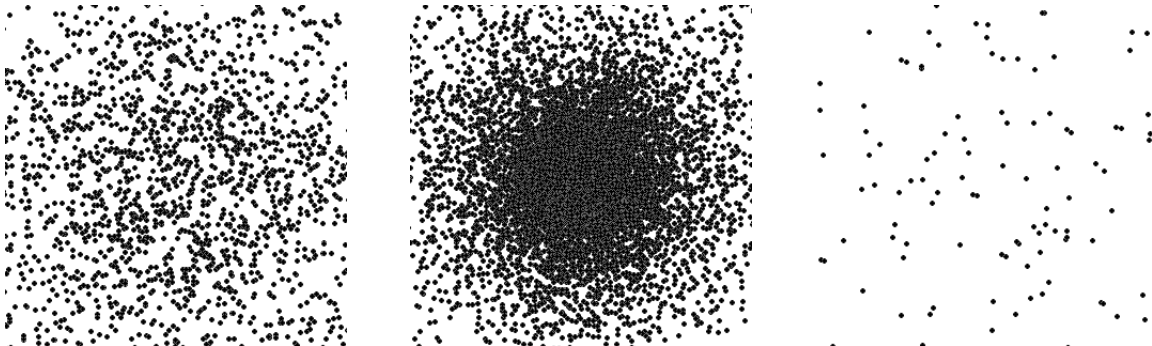
$$n'(\theta', \phi') = \frac{N}{4\pi} \frac{1 - v^2}{(1 - v \cos \theta')^2}.$$

Это выражение достигает максимума при $\theta' = 0$ и минимума при $\theta' = \pi$:

$$n'(0, \phi') = \frac{N}{4\pi} \frac{1 + v}{1 - v}, \quad n'(\pi, \phi') = \frac{N}{4\pi} \frac{1 - v}{1 + v}.$$

В качестве упражнения ($\ll N_{12}$) стоит проверить, что интегрирование $n(\theta', \phi')$ по всей поверхности сферы $0 \leq \theta' \leq \pi$ и $0 \leq \phi' < 2\pi$, как и следовало ожидать, даёт в точности N видимых звёзд.

Ниже на “фотографиях” приведено звёздное небо. Первая фотография соответствует неподвижной системе отсчёта. Вторая и третья сделаны из космического корабля, летящего со скоростью $v = 0.9$. Вторая фотография – по ходу движения, а третья – в противоположном направлении:



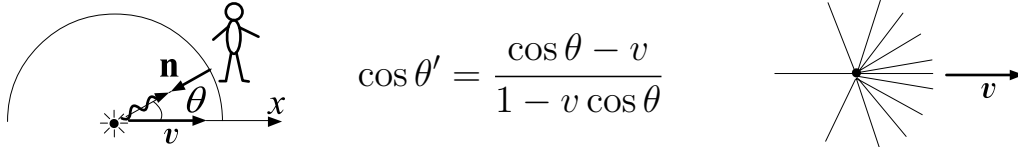
Напомним также, что в силу эффекта Доплера спектр звёзд по курсу корабля сдвинется в сторону синего спектра (частоты увеличиваются), а в обратном направлении – в красный (частоты уменьшаются). Однако на этом эффекты искажения звёздного неба, связанные с аберрацией, не заканчиваются.

• Рассмотрим некоторый источник света (звезду), излучающий световую энергию равномерно во все стороны (в собственной системе отсчёта). *Интенсивностью потока* фотонов J в данном направлении называется *количество* фотонов dN , испускаемых в единицу времени dt в телесный угол $d\Omega$. Аналогично определяется *светимость звезды* I при помощи потока энергии E , приносимой этими фотонами:

$$J = \frac{dN}{d\Omega dt}, \quad I = \frac{dE}{d\Omega dt} = h\nu J,$$

где для простоты мы считаем, что спектр звезды сконцентрирован в окрестности одной частоты ν и энергия равна $dE = h\nu dN$, где h – *постоянная Планка*.

Пусть теперь звезда движется относительно наблюдателя со скоростью v вдоль оси x . В координатах, приведенных на рисунке ниже, фотоны имеют компоненту скорости $u_x = \cos\theta$, и из правила сложения скоростей $u'_x = (u_x - v)/(1 - u_x v)$ получается формула абберации:



$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - v}{1 - v\cos\theta}$$

Поток в системе, связанной со звездой, равен $J_0 = \text{const}$ и, в силу изотропности излучения, не зависит от θ' . Телесный угол $d\Omega' = -d(\cos\theta') d\phi'$ при помощи формулы для абберации выражается через $d\Omega$ неподвижного наблюдателя. Кроме этого, учтём, что период испускания фотонов dt' связан с периодом их получения dt в соответствии с формулой (2.6), стр. 92. Повторив вычисления, аналогичные распределению звёзд на небе, для потока числа фотонов получаем:

$$dN = J_0 d\Omega' dt' = J_0 \frac{1 - v^2}{(1 - v\cos\theta)^2} d\Omega \cdot \frac{\sqrt{1 - v^2}}{1 - v\cos\theta} dt.$$

Заметим, что иногда пишут $dt' = \sqrt{1 - v^2} dt$. Это неверно, так как число фотонов измеряется не наблюдателями, “расставленными вдоль движения звезды”, а одним наблюдателем, к которому эти фотоны летят. Поэтому необходимо пользоваться доплеровской формулой.

В результате для неподвижного наблюдателя интенсивность потока фотонов зависит от угла наблюдения к скорости звезды:

$$J = J_0 \frac{(1 - v^2)^{3/2}}{(1 - v\cos\theta)^3}.$$

Это выражение достигает максимума при $\theta = 0$ и минимума при $\theta = \pi$, в результате чего “лучи” летящей звезды “сбиваются” вперёд и наибольшее число фотонов излучается по движению звезды.

• Чтобы определить световой поток, необходимо ещё учесть эффект Доплера (2.6), стр.92. Проекция единичного вектора \mathbf{n} на скорость \mathbf{v} определяется при помощи угла θ : $\mathbf{n}\mathbf{v} = -v \cos \theta$ и

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-v^2}}{1-v \cos \theta},$$

где ν_0 – собственная частота излучения фотонов в системе отсчёта звёзды. Учитывая, что $I = h\nu J$, получаем:

$$I = I_0 \frac{(1-v^2)^2}{(1-v \cos \theta)^4}. \quad (2.23)$$

Перекося в энергетическом распределении излучения, кроме аберрации, дополнительно усиливается эффектом Доплера, так как летящие к наблюдателю фотоны имеют большую частоту (энергию). В качестве упражнения ($\ll \text{Н}_{13}$) стоит восстановить в (2.23) константу “ c ”.

Возвращаясь к звёздному небу, наблюдаемому из космического корабля, мы должны сделать вывод, что не только звёзд по курсу будет больше, но их яркость станет существенно выше. Это обусловлено эффектом Доплера и *дважды* эффектом аберрации (смещение положения звёзд и перераспределения интенсивности их излучения).

Полученные формулы позволяют продемонстрировать ещё один любопытный эффект. Найдём *общую энергию*, излучаемую звездой до её полного “выгорания”. Если полная световая энергия в собственной системе звезды равна E_0 , то число излучённых фотонов равно $N = E_0/h\nu_0$ и будет изотропным. В единицу телесного угла излучится $dN = (N/4\pi) d\Omega'$. Для неподвижного наблюдателя

$$dE = h\nu dN = \frac{h\nu N}{4\pi} d\Omega' = \frac{E_0}{4\pi} \frac{\nu}{\nu_0} d\Omega' = \frac{E_0}{4\pi} \frac{\sqrt{1-v^2}}{1-v \cos \theta} \frac{1-v^2}{(1-v \cos \theta)^2} d\Omega.$$

Интегрируя по всему телесному углу, получаем:

$$E = \int dE = \frac{E_0}{4\pi} \int \frac{(1-v^2)^{3/2}}{(1-v \cos \theta)^3} d\Omega = \frac{E_0}{2} \int_{-1}^1 \frac{(1-v^2)^{3/2}}{(1-vz)^3} dz = \frac{E_0}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Движущаяся звезда в неподвижной системе имеет большую энергию E , чем её собственная энергия E_0 . Подобная связь энергии и скорости

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-v^2}},$$

как мы видели в первой главе, носит достаточно общий характер.

2.8 Ускоренное движение

• В релятивистской теории равноускоренное движение, аналогичное классической механике, невозможно. Если скорость тела всё время увеличивается $u(t) = at$, то она рано или поздно превысит фундаментальную скорость c . Это невозможно в силу энергетических ограничений, которые обсуждались в первой главе (стр. 59). Сейчас мы рассмотрим один из вариантов ускоренного движения, при котором скорость постоянно увеличивается, оставаясь, тем не менее, все время меньше единицы ($c = 1$).

Пусть для наглядности мимо неподвижного наблюдателя пролетает космический корабль, имеющий в данный момент времени скорость $u = u(t)$. Этот корабль плавно увеличивает свою скорость. Перейдём в систему отсчёта, связанную с кораблём (правый рисунок):



Так как за малое время dt' скорость корабля увеличивается незначительно, мы можем считать, что *относительно своего предыдущего состояния* она увеличилась на $a dt'$, где a – некоторая константа. По закону сложения скоростей [(1.15), стр. 37] новая скорость, с точки зрения неподвижного наблюдателя, равна ($v = u(t)$, $u'_x = a dt'$):

$$u(t + dt) = \frac{a dt' + u(t)}{1 + u(t) a dt'}.$$

Так как dt' мал, разложим знаменатель в ряд $[1/(1 + x) \approx 1 - x]$ и, сохраняя порядок малости по $a dt'$, перемножим его с числителем:

$$u(t + dt) \approx (u + a dt')(1 - u a dt') \approx u + (1 - u^2) a dt',$$

где $u = u(t)$. Учитывая, что время по часам корабля $dt' = dt\sqrt{1 - u^2}$ идёт медленнее, и вводя производную скорости $du/dt = [u(t + dt) - u(t)]/dt$, получим:

$$\frac{du}{dt} = a(1 - u^2)^{3/2}, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} \right) = a. \quad (2.24)$$

Это дифференциальное уравнение описывает, как изменяется скорость некоторого объекта для неподвижного наблюдателя, если с “точки зрения” объекта он “пытается двигаться” равноускоренно.

Выбрав начальное условие в виде $u_0 = u(0)$ и проинтегрировав это уравнение, получим:

$$\frac{u(t)}{\sqrt{1-u^2(t)}} = \pi(t) = \pi_0 + at, \quad \text{где } \pi_0 = \frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2}}. \quad (2.25)$$

Динамика величины $\pi(t) = \pi_0 + at$ совпадает с классической зависимостью скорости от времени, и $\pi(t)$ может быть сколь угодно большой. Однако релятивистская скорость $u(t)$ всегда остаётся меньше единицы:

$$u(t) = \frac{\pi_0 + at}{\sqrt{1 + (\pi_0 + at)^2}}. \quad (2.26)$$

Учитывая, что $u(t) = dx/dt$, после ещё одного интегрирования ($\ll N_{14}$) с начальным условием $x(0) = x_0$ получается закон движения:

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{a} \left(\sqrt{1 + (\pi_0 + at)^2} - \sqrt{1 + \pi_0^2} \right). \quad (2.27)$$

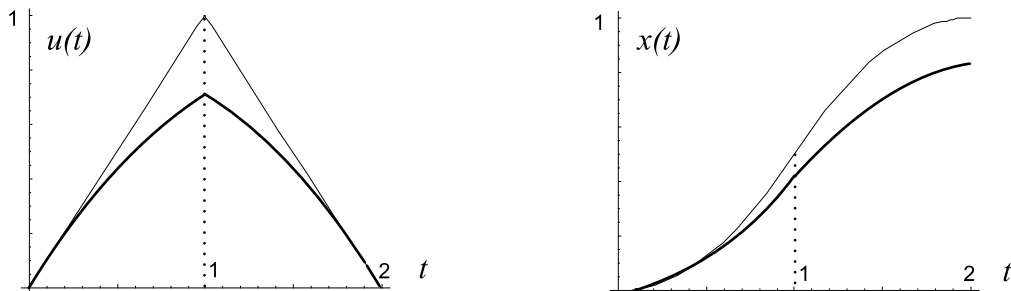
Его можно выразить через скорость:

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2(t)}} - \frac{1}{\sqrt{1-u_0^2}} \right) \approx x_0 + \frac{u^2(t) - u_0^2}{2a},$$

где приближённое равенство записано для малых скоростей. Напомним, что мы работаем в системе единиц, в которой $c = 1$. Чтобы восстановить в формулах c , необходимо сделать замены $t \mapsto ct$, $u \mapsto u/c$ и $a \mapsto a/c^2$ ($\ll N_{15}$) (см. стр. 34). В этом случае и at , и π_0 будут делиться на c . В пределе $c \rightarrow \infty$, раскладывая (2.27) в ряд по малым π_0 и at , мы получим классические выражения для движения равноускоренного объекта:

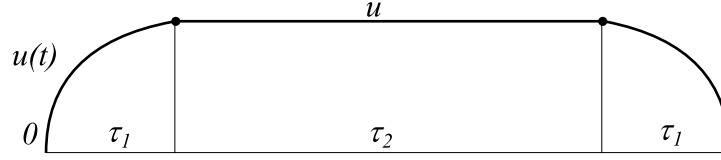
$$u(t) \approx u_0 + at + \dots, \quad x(t) \approx x_0 + u_0 t + \frac{at^2}{2} + \dots$$

Ниже приведены графики изменения скорости и координаты объекта, который ускоряется в течение единичного времени с единичным ускорением, после чего начинает тормозить:



Верхние тонкие линии на каждом графике соответствуют классической равноускоренной динамике.

• Как в равномерно движущемся, так и в ускоряющемся корабле время замедляется. Рассмотрим этот эффект с позиции земного наблюдателя. Пусть корабль разгоняется в течение времени τ_1 , затем равномерно летит время τ_2 , после чего начинает тормозить в течение времени τ_1 :



Вычислим собственное время путешествия, прошедшее на корабле. За малый интервал времени dt скорость корабля изменяется незначительно, и её можно рассматривать, как локально инерциальную систему отсчета. Поэтому время, прошедшее на движущихся часах, связано со временем неподвижного наблюдателя следующим образом [см (2.2), стр.83]:

$$dt' = \sqrt{1 - u^2(t)} dt \quad \Rightarrow \quad t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - u^2(t)} dt.$$

В результате интегрирования суммируются малые интервалы времени на Земле и на корабле. При этом мы предполагаем, что ускорение не влияет на ход времени. В 10-й главе мы подробнее проанализируем это допущение.

Будем, как и раньше, помечать интервал времени у космонавта нулевым индексом. На первом этапе разгона корабля имеем:

$$\tau_{01} = \int_0^{\tau_1} \sqrt{1 - u^2(t)} dt = \int_0^{\tau_1} \frac{dt}{\sqrt{1 + (at)^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{ash}(a \tau_1), \quad (2.28)$$

где $\operatorname{ash}(x)$ – гиперболический арксинус, являющийся обратным к гиперболическому синусу (см. стр. 632):

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ash}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \approx x - \frac{x^3}{6} + \dots$$

За время разгона τ_1 корабль достигает скорости [см. (2.26)]:

$$u = \frac{a\tau_1}{\sqrt{1 + (a\tau_1)^2}},$$

и дальше движется равномерно. Поэтому на втором этапе:

$$\tau_{02} = \tau_2 \sqrt{1 - u^2} = \frac{\tau_2}{\sqrt{1 + (a\tau_1)^2}},$$

и время замедляется наиболее сильно, так как скорость максимальна.

Финальный интервал времени при торможении равен

$$\tau_{03} = \int_{\tau_1+\tau_2}^{2\tau_1+\tau_2} \sqrt{1-u^2(t)} dt = \int_{\tau_1+\tau_2}^{2\tau_1+\tau_2} \frac{dt}{\sqrt{1+(\pi_0+at)^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{ash}(a\tau_1).$$

Впрочем, из соображений симметрии можно сразу взять результат разгона корабля (2.28). Складывая интервалы времени каждого этапа, окончательно получаем:

$$\tau_0 = \frac{2}{a} \operatorname{ash}(a\tau_1) + \frac{\tau_2}{\sqrt{1+(a\tau_1)^2}}.$$

Первое слагаемое меньше, чем τ_1 , а второе меньше, чем τ_2 . Их можно ($\ll N_{16}$) разложить в ряд Тейлора:

$$\tau_0 \approx 2\tau_1 + \tau_2 - \left(\frac{\tau_1}{3} + \frac{\tau_2}{2}\right) (a\tau_1)^2.$$

Время, прошедшее в неподвижной системе отсчета, равно $2\tau_1 + \tau_2$. Время путешествия по часам корабля τ_0 меньше. На ускоренных этапах оно замедлялось медленнее, чем на этапе равномерного движения.

Сделаем оценки времени полёта к звёздной системе Альфа-Центавра, удалённой от Земли на расстояние 4.3 световых лет. *Световой год* – это расстояние, которое свет проходит в течение года:

$$1 \text{ св.год} = (299792458 \text{ м/с}) \cdot (365.25 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ с}) \approx 0.9461 \cdot 10^{16} \text{ м} = 0.307 \text{ пк}.$$

Измеряя расстояние в световых годах, а время – в обычных годах, мы по-прежнему работаем в системе $c = 1$. В этой системе единичное ускорение $1 \text{ св.год/год}^2 = 9.5 \text{ м/с}^2$ близко к ускорению свободного падения на поверхности Земли. Пусть из соображений комфорта (искусственная гравитация) космический корабль движется с ускорением $a = 1$ половину пути, а затем сразу начинает тормозить ($\tau_2 = 0$). С точки зрения Земли [см.(2.27)] половина пути к звезде $x = 4.3/2$ св. лет занимает время:

$$x = \frac{1}{a} \left[\sqrt{1+(a\tau_1)^2} - 1 \right] \quad \Rightarrow \quad \tau_1 = \frac{1}{a} \sqrt{(1+ax)^2 - 1} \approx 3 \text{ года}.$$

Соответственно, общее время полёта туда и обратно составит 12 лет. Собственное же время космонавта в момент возвращения будет равно $4 \operatorname{ash}(a\tau_1)/a = 7.3$ года, т.е. на 40% меньше. За 64 года собственного времени космонавт может “слетать” (вернувшись) к галактике Андромеды, удалённой на 2.5 млн. св. лет. На Земле пройдёт около 5 млн. лет. К сожалению, всё не так просто, и технологическая реалистичность подобных перелётов будет проанализирована в следующей главе.

2.9 Прецессия ускоренного стержня *

В 1926 г. Люэлин Хиллет Томас [42] для объяснения расщепления линий в спектрах атомов рассмотрел движение по криволинейной траектории вращающегося шарика. Такой шарик представлял собой классическую модель электрона. Томас учёл релятивистский кинематический эффект поворота системы координат, возникающий при композиции лоренцевских преобразований, и получил правильные коэффициенты в гамильтониане взаимодействия электрона с электромагнитным полем. Математику такого поворота мы рассмотрим в 8-й главе.

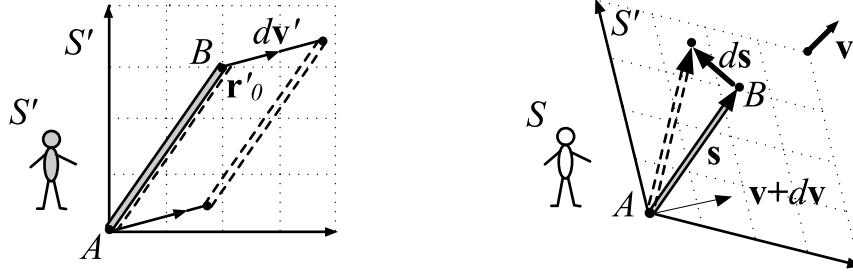
В настоящее время классическая модель электрона имеет только историческое значение, а правильный гамильтониан получается в квантовой теории из уравнения Дирака. Тем не менее, релятивистский эффект поворота ускоренного движущегося стержня или собственного момента вращения гироскопа представляет определённый интерес. В этом разделе мы рассмотрим движение по произвольной траектории стержня, а вопросы, связанные с гироскопом, отложим до следующей главы. Стоит отметить, что уравнения, которые мы выведем, отличаются от томасовских, так как в последних было учтено вращение системы отсчёта, но проигнорировано лоренцевское сокращение длины [47].

Пусть стержень движется с небольшим ускорением (но, возможно, с большой скоростью) так, что его условно можно считать жёстким. Если на такой стержень действует сила (но не момент силы), то с точки зрения классической механики он должен перемещаться в пространстве, не меняя своей ориентации. В теории относительности это не так.

Рассмотрим неподвижный относительно системы отсчёта S' стержень, один конец которого находится в начале системы (точка A далее на рисунке). Пусть другой, “точно такой же” стержень движется относительно него с *небольшой* постоянной скоростью \mathbf{u}' так, что в момент времени $t' = 0$ оба стержня совпадают. Можно считать, что существует один стержень, все точки которого в момент времени $t' = 0$ *одновременно* приобретают одинаковую скорость \mathbf{u}' . Такой стержень ускоряется, перемещаясь параллельно относительно своего предыдущего положения.

Относительно системы S в момент времени $t = 0$ концы стержней в точке A и начала систем отсчёта совпадают. Однако, в силу относительности одновременности (см. стр.100), вторые концы стержней совпадать не будут. Для неподвижных наблюдателей они оказываются повёрнутыми вокруг точки A . Точно так же будет выглядеть изменение стержня, который приобретает дополнительную скорость \mathbf{u}' , сдвигаясь параллельно себе (с собственной точки зрения).

Найдём величину изменения радиус-вектора, связанного со стержнем.



Траектории точки, движущейся с постоянной скоростью в системах S' и S , имеют вид:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{u}'t', \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}t.$$

Подставим их в обратные преобразования Лоренца (1.12), стр.35:

$$t = \gamma(t' + \mathbf{v}\mathbf{r}'_0 + (\mathbf{v}\mathbf{u}')t') \quad (2.29)$$

$$\mathbf{r}_0 + \mathbf{u}t = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{u}'t' + \mathbf{v}\gamma t' + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0) + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{u}')t'. \quad (2.30)$$

В левую часть уравнения (2.30) подставим время t из (2.29) и сгруппируем слагаемые при t' :

$$\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_0 + \gamma\mathbf{u}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0) - \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0) = [\mathbf{u}' + \gamma\mathbf{v} + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{u}') - \gamma\mathbf{u}(1 + \mathbf{v}\mathbf{u}')]t'.$$

Это соотношение выполняется при любом t' , если его левая и правая части равны нулю. В результате получается связь скоростей (1.17), стр.38, и начальных положений:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'_0 - \gamma\mathbf{u}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0) + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0). \quad (2.31)$$

В момент времени $t = t' = 0$ точки A первого и второго стержня совпадают и находятся в началах систем отсчёта ($\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'_0 = 0$). Точка B первого стержня имеет скорость $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ и $\mathbf{u}' = 0$. Поэтому из (2.31) следует, что в момент времени $t = 0$ в системе S она имеет координаты:

$$\mathbf{r}_{0_1} = \mathbf{r}'_0 - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0), \quad (2.32)$$

Это соотношение совпадает с (2.7), стр.98, при $t = 0$.

Точка B второго стержня имеет скорости $\mathbf{u} = \mathbf{v} + d\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}' = d\mathbf{v}'$. Из (2.31) получаем её положение в момент $t = 0$ в системе S :

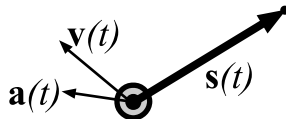
$$\mathbf{r}_{0_2} = \mathbf{r}'_0 - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0) - \gamma(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0)d\mathbf{v}. \quad (2.33)$$

Вычитая из (2.33) уравнение (2.32), мы получим изменение положения точки B относительно точки A (смещение конца B второго стержня относительно первого) для наблюдателей в системе S .

Введём вектор \mathbf{s} , соединяющий концы стержня A и B . Так как радиус-вектор точки A нулевой, имеем $\mathbf{s} = \mathbf{r}_{0_1}$. После изменения стержнем скорости в (2.33) $\mathbf{r}_{0_2} = \mathbf{s} + d\mathbf{s}$. Поэтому:

$$d\mathbf{s} = -\gamma(\mathbf{v}\mathbf{s}')d\mathbf{v} = -\gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{s})d\mathbf{v}, \quad (2.34)$$

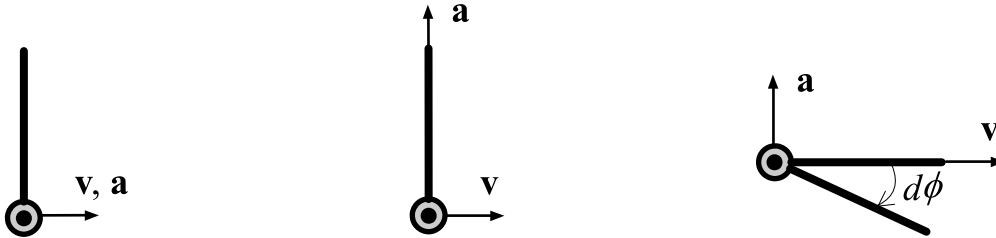
где $\mathbf{s}' = \mathbf{r}'_{0_1} = \mathbf{r}'_{0_2}$ – положение точки B стержней в системе S' . Во втором равенстве, с учётом (2.8), стр. 99, подставлено $\mathbf{v}\mathbf{s}' = \gamma(\mathbf{v}\mathbf{s})$. Вводя вектор 3-мерного ускорения $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, окончательно приходим к уравнению:



$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{s})\mathbf{a}. \quad (2.35)$$

Так как точки A обеих стержней совпадали, в уравнении (2.35) производная по времени от \mathbf{s} имеет смысл скорости изменения ориентации и длины стержня (изменение положения точки B относительно A). Сама же точка A независимо движется с переменной скоростью $\mathbf{v}(t)$. Несложно (\llcorner Н₁₇) восстановить в (2.35) и фундаментальную константу “ c ”.

Рассмотрим несколько частных случаев ускоренного движения. Ниже на рисунке представлены различные ориентации стержня, скорости и ускорения. В первых двух случаях поворота стержня не происходит.



Например, если стержень перпендикулярен скорости ($\mathbf{v}\mathbf{s} = 0$), то при изменении её величины (но не направления) стержень не изменит ни ориентации, ни длины. В этом случае все точки стержня одновременно изменяют свою скорость как в системе S , так и в системе S' , а поперечные к скорости расстояния неизменны. Поэтому, если в S' начинают сдвигать (ускорять) вертикальный стержень в горизонтальном направлении, то он поворачиваться не будет. Если в движущейся в горизонтальном направлении системе отсчёта *вверх* поднимают вертикальный стержень (второй рисунок), то он также не должен повернуться (оба его конца имеют совпадающие координаты x). Однако, если в системе S' оба конца горизонтального стержня поднимают вверх (третий рисунок), то в системе S концы поднимутся неодновременно и возникнет поворот (2.35). Его угол можно (\llcorner Н₁₉) также получить из соображений относительно одновременности. Стоит так же рассмотреть движение стержня по окружности (\llcorner Н₂₀).

Полученное уравнение (2.35) справедливо только при небольшом ускорении стержня, когда его можно считать жёстким. В этом случае в каждый момент времени со стержнем связывается “мгновенно инерциальная” (*сопутствующая*) система отсчёта. Именно в рамках такого предположения и получено уравнение (2.35).

Рассмотрим равноускоренное движение стержня, когда скорость и ускорение направлены вдоль стержня. Пусть один из концов стержня движется со следующими скоростью и ускорением (см. (2.26), стр.117):

$$v = \frac{wt}{\sqrt{1 + (wt)^2}}, \quad \gamma = \sqrt{1 + (wt)^2}, \quad a = \frac{w}{\gamma^3},$$

где w – некоторая константа (собственное ускорение). Длина стержня $l = \sqrt{s^2}$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\mathbf{s}(ds/dt)}{l} = -\gamma^2 \frac{(\mathbf{sv})(\mathbf{sa})}{l} = -\gamma^2 v(t)a(t)l(t) = -\frac{w^2 t}{1 + (wt)^2}.$$

Интегрируя его с начальным условием $l(0) = l_0$, получаем:

$$l(t) = \frac{l_0}{\sqrt{1 + (wt)^2}} = l_0 \sqrt{1 - v^2(t)}. \quad (2.36)$$

Это выражение совпадает с мгновенным лоренцевским сокращением движущегося со скоростью $v(t)$ стержня.

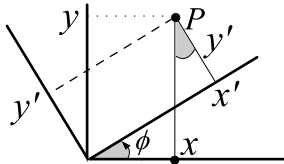
Как мы увидим в 10-й главе, посвящённой неинерциальным системам отсчёта, физика в ускоренной системе выглядит “хитрее”, чем физика в последовательности сопутствующих к ней инерциальных систем. В частности, если ускоренно движущиеся наблюдатели “выдерживают” одинаковое расстояние друг между другом, время у них будет идти по-разному. Стержень, связанный с такой системой, относительно неподвижных наблюдателей изменяет свою длину следующим образом:

$$l(t) = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 2wl_0 + (wl_0)^2} - \gamma}{w} \approx \frac{l_0}{\gamma} \left(1 + \frac{v^2}{2} wl_0 + \dots \right),$$

где приближенное равенство записано для малых w . Видно, что это соотношение стремится к мгновенному лоренцевскому сжатию (2.36) только при $v^2 wl_0 = v^2 \gamma^3 a l_0 \ll 1$. Это приближение будет справедливым при относительно небольшом ускорении (точнее, при $a \ll a_0 = c^4 / (v^2 \gamma^3 l_0)$, где восстановлена скорость света c). Эта комбинация длины стержня, скорости и ускорения должна быть мала, чтобы можно было не учитывать “эффекты неинерциальности” и пользоваться уравнением (2.35). Впрочем, для метрового стержня, движущегося со скоростью $v = 0.8c$, имеем достаточно большое значение $a_0 = 3 \cdot 10^{16}$ м/с².

2.10 Четырёхмерное пространство-время *

• Перейдём теперь к геометрическим аспектам теории относительности. Рассмотрим поворот координатных осей (x, y) на угол ϕ . Координаты *одной и той же* точки в исходной и повернутой декартовых системах связаны следующим образом:



$$\begin{cases} x' = x \cos \phi + y \sin \phi \\ y' = y \cos \phi - x \sin \phi. \end{cases} \quad (2.37)$$

Эти преобразования получаются из элементарных геометрических соображений. Заштрихованные на рисунке углы двух подобных прямоугольных треугольников равны ϕ . Поэтому вертикальная линия, опущенная из точки P и имеющая длину y , состоит из двух отрезков: гипотенузы $y'/\cos \phi$ верхнего треугольника и катета $x \operatorname{tg} \phi$ нижнего. Их сумма даёт второе уравнение преобразования (2.37). Аналогично x' (проекция точки P на ось x') состоит из катета $y' \operatorname{tg} \phi$ и гипотенузы $x/\cos \phi$, откуда получается первое уравнение. Поворот осей оставляет неизменным расстояние, например, от начала координат $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$.

Преобразования Лоренца имеют похожий линейный вид:

$$\begin{cases} x' = x \gamma - t v \gamma = x \operatorname{ch} \alpha - t \operatorname{sh} \alpha \\ t' = t \gamma - x v \gamma = t \operatorname{ch} \alpha - x \operatorname{sh} \alpha, \end{cases}$$

где введены гиперболические косинус $\operatorname{ch} \alpha = \gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ и синус $\operatorname{sh} \alpha = v\gamma$ так, что $v = \operatorname{th} \alpha$. В силу их свойств (стр. 632):

$$\gamma^2 - (v\gamma)^2 = \operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha = 1.$$

Учитывая, что $i \operatorname{sh}(\alpha) = \sin(i\alpha)$, $\operatorname{ch}(\alpha) = \cos(i\alpha)$, при помощи мнимой единицы i преобразования Лоренца можно придать вид, формально совпадающий с поворотом в обычном пространстве:

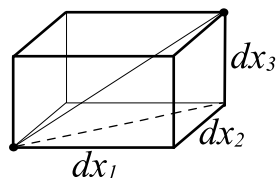
$$\begin{cases} x' = x \cos(i\alpha) + it \sin(i\alpha) \\ it' = it \cos(i\alpha) - x \sin(i\alpha). \end{cases}$$

Если считать декартовыми координатами (x, it) , то эти преобразования являются поворотами координатных осей на *мнимый* угол $\phi = i\alpha$. При этом неизменным остаётся квадрат расстояния от начала координат:

$$(x)^2 + (it)^2 = x^2 - t^2,$$

который с точностью до знака совпадает с интервалом между двумя событиями в точке $(0, 0)$ и (x, t) (стр. 40). Пространство с подобными необычными свойствами называют *псевдоевклидовым пространством*.

• Общий подход к понятию “пространство” состоит в рассмотрении абстрактного множества точек. Для их “нумерации” можно использовать наборы n чисел x_1, \dots, x_n , называемых *координатами*. Число n называется *размерностью пространства*. Пока рассматривается абстрактная совокупность точек, не существует понятия близости двух точек. Наличие координат само по себе такой меры близости не даёт, так как нумерация точек может быть достаточно произвольной. Поэтому первый шаг по превращению множества точек в пространство совершается, когда задают *расстояние* между двумя бесконечно близкими точками. В 3-мерном евклидовом пространстве такое расстояние имеет вид:



$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

Оно имеет привычную геометрическую интерпретацию в виде теоремы Пифагора, связывающей диагональ параллелепипеда, построенного на смещениях по каждой координате dx_1, dx_2, dx_3 . Если расстояние равно нулю $dl^2 = 0$, то это означает, что точки совпадают. Использование бесконечно близких точек для определения расстояния удобно при переходе к пространствам, обладающим кривизной. Перед квадратами дифференциалов координат в евклидовом расстоянии стоят знаки плюс. Говорят, что оно имеет *сигнатуру* $(+, +, +)$.

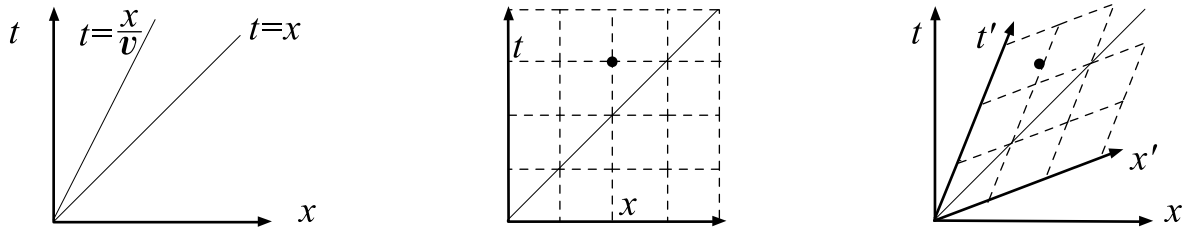
Если расстояние задано другим способом, то может получиться иное пространство со свойствами, отличающимися от евклидового. Рассмотрим 4-мерное пространство, точки которого будем называть *событиями* и нумеровать координатами t, x, y, z . Обозначим бесконечно малое расстояние как ds , и *определим* его следующим образом:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2.$$

Оно имеет сигнатуру $(+, -, -, -)$. За исключением этого оно похоже на евклидово расстояние в декартовых координатах, поэтому его называют *псевдоевклидовым*. Близость двух точек в таком пространстве оказывается достаточно своеобразной. Например, нулевое расстояние $ds = 0$ не означает, что точки совпадают (см. стр. 40). Кроме этого, несмотря на формальное наличие квадрата, ds^2 может быть и отрицательным.

В старых книгах по теории относительности активно использовалась мнимая единица для придания псевдоевклидовому расстоянию вида евклидового: $-ds^2 = (it)^2 + (d\mathbf{r})^2$. Такое “заметание под ковёр” псевдоевклидовости не является разумным и сейчас редко используется.

• Координатные оси и другие геометрические объекты 2-мерного евклидового пространства легко изображать на плоскости, так как она является физическим воплощением такого пространства. С псевдоевклидовым пространством даже в двух измерениях (t, x) не всё так просто. Тем не менее, нарисуем две перпендикулярные оси. По вертикальной будем откладывать время события t , а по горизонтальной – его координату x . Равномерное и прямолинейное движение $x = vt$ со скоростью v будем изображать в виде прямой (первый рисунок):



Медиана (средняя линия) между координатными осями соответствует распространению светового сигнала. Все остальные траектории, выходящие из $x = 0, t = 0$, оказываются сильнее прижатыми к координатной оси t по сравнению с медианой, так как физические скорости $v < 1$.

Координата и время некоторого события (точка на втором рисунке) определяются аналогично евклидовым декартовым координатам при помощи координатной сетки. Она проводится в виде линий (пунктиры), параллельных каждой координатной оси. Это означает, что ось x имеет уравнение $t = 0$, а ось t , соответственно, $-x = 0$. Сетка формируется при помощи горизонтальных $t = const$ и вертикальных $x = const$ прямых.

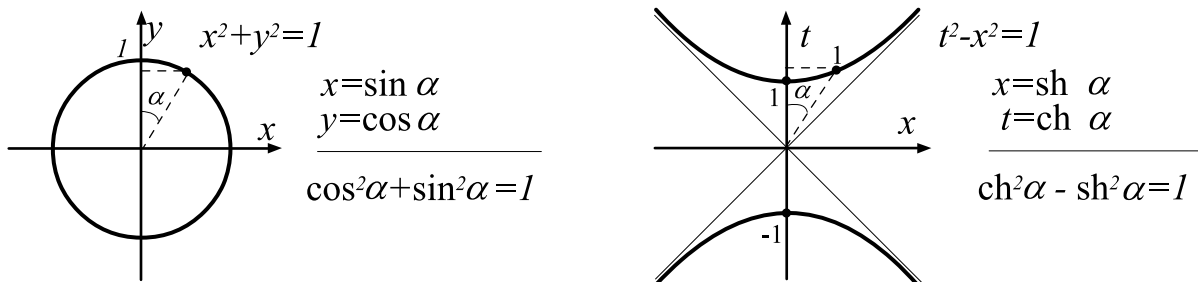
Изобразим на этой же плоскости оси (t', x') системы отсчёта S' , движущейся относительно S со скоростью v . Если в момент $t' = t = 0$ начала систем отсчёта совпадали $x' = x = 0$, то траектория часов, расположенных в начале координат ($x' = 0$) системы S' , имеет вид прямой $x = vt$. Она является координатной осью t' . Аналогично линия $t' = \gamma(t - vx) = 0$ соответствует координатной оси x' и имеет уравнение $t = vx$. Она наклонена к оси x на такой же угол, как ось t' к t (третий рисунок).

Таким образом, пространственная x' и временная t' оси системы S' , изображённые на плоскости (t, x) системы S , будут выглядеть сплюснутыми вокруг медианы $t = x$ (траектория светового сигнала). Эта же траектория будет медианой и в системе S' . Координатная сетка системы S' также сплюснута. Временные линии координатной сетки, параллельные оси x' , имеют уравнения $t' = const$ или $t = vx + t'/\gamma$. Аналогично для пространственных линий сетки $x' = const$.

Важно помнить, что событие (*точка* в пространстве-времени) существует само по себе и не зависит от выбора системы координат (точнее, системы отсчёта). Его же *описание* (координаты) будут разными в разных системах. Точно так же при повороте евклидовой плоскости координаты (x, y) меняются, но точка пространства остаётся неизменной.

Наличие координатной сетки различных систем отсчёта позволяет легко получать координаты события. Например, два события, одновременные в системе S , должны находиться на горизонтальной прямой $t = \text{const}$. События, одновременные в S' , находятся на прямых $t' = \text{const}$, которые наклонены к прямым $t = \text{const}$. Это является геометрической иллюстрацией относительности одновременности.

Чтобы ввести на плоскости (t, x) геометрию, зададим расстояние между двумя точками $s^2 = (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2$, равное интервалу между событиями. Для “евклидовой интуиции” это очень необычное расстояние. Нарисуем, например, евклидову и псевдоевклидову единичные окружности, как множество точек, равноудалённых от центра (ниже – начало координат):

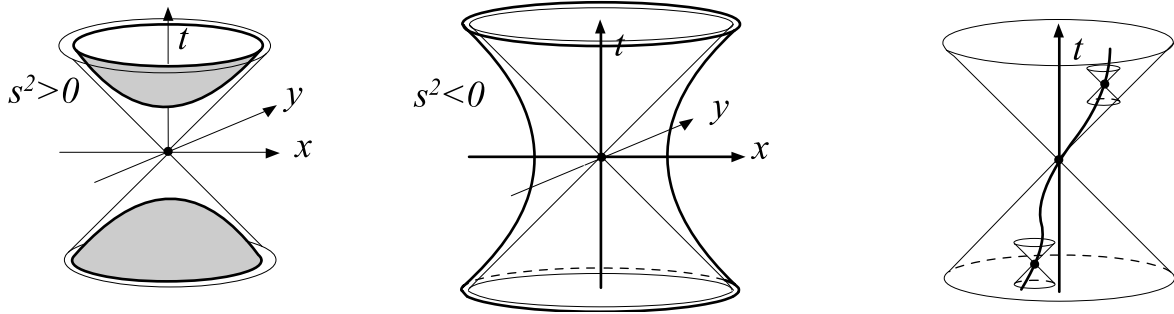


В псевдоевклидовом пространстве единичная окружность $s = 1$ – это гипербола $t^2 - x^2 = 1$. На большом расстоянии от начала координат гипербола стремится к траекториям светового сигнала $t = \pm x$, испущенного из точки $t = x = 0$.

Так же, как обычная окружность на евклидовой плоскости определяет тригонометрические функции синуса и косинуса, так и окружность в псевдоевклидовом пространстве (“псевдоокружность”) определяет гиперболические синус $\text{sh } \alpha$ и косинус $\text{ch } \alpha$, как проекции точки псевдоокружности на ось x и t . При этом проектируемая на оси гипотенуза прямоугольного треугольника имеет *меньшую* длину $\sqrt{t^2 - x^2}$, чем катет t ! Вместо евклидовой теоремы Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$ мы имеем псевдоевклидову теорему $a^2 - b^2 = c^2$.

Вообще, изображение на *евклидовой* плоскости псевдоевклидового пространства выглядит несколько неуклюже, и наилучшей физической моделью псевдоевклидового пространства является не лист бумаги, а само пространство-время.

• До сих пор мы рассматривали 2-мерное псевдоевклидово пространство. В реальности оно 4-мерно, однако на листе бумаги можно изобразить не более трёх измерений (t, x, y) . В этом случае световые сигналы $t^2 = x^2 + y^2$ являются *световым конусом*, а псевдоокружность становится *псевдосферой*, или, в терминах евклидова пространства, – гиперboloидом (первый рисунок):



Если в евклидовом пространстве квадрат расстояния всегда положителен, то в псевдоевклидовом он может быть и отрицательным. Поэтому существуют две единичные сферы $t^2 - x^2 - y^2 = 1$ и $t^2 - x^2 - y^2 = -1$. Псевдосфера мнимого радиуса $s^2 = -1$ является односвязной и также асимптотически стремится к световому конусу (второй рисунок).

Так как любая частица имеет скорость меньше скорости света, события, *причинно связанные* с событием в точке $t = x = y = 0$, находятся внутри светового конуса. Причинность означает, что существует возможное влияние одного события на второе при помощи движения между ними некоторого агента со скоростью, меньшей или равной фундаментальной.

Траектория $x(t)$ частицы, пролетевшей в момент времени $t = 0$ точку $x = y = 0$, всё время находится внутри светового конуса. При этом касательная к этой траектории всегда находится внутри локальных конусов, построенных к произвольной точке траектории (третий рисунок).

В силу свойств псевдоевклидова расстояния длина элемента траектории $d\tau = \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2} = dt\sqrt{1 - \mathbf{u}^2} < dt$ будет меньше, чем длина траектории частицы, остававшейся неподвижной в точке $x = y = 0$ (ось t). Хотя на евклидовой плоскости это расстояние и выглядит длиннее. Поэтому переносить евклидову интуицию на псевдоевклидовые пространственно-временные диаграммы необходимо очень осторожно.

Верхнюю внутреннюю часть конуса называют множеством *абсолютно будущих* событий относительно $t = x = y = 0$, а нижнюю – множеством *абсолютно прошлых* событий. Пространство вне конуса называется множеством *абсолютно удалённых* событий.

• Рассмотрим геометрические интерпретации некоторых кинематических эффектов. Несмотря на некоторые сложности в восприятии псевдоевклидовой плоскости, подобный геометрический анализ теории относительности обладает определённой наглядностью.



Пусть наблюдается два “тика” часов, неподвижных в системе S' в точке $x' = 0$. Первое событие A происходит в начале координат $t' = x' = 0$, а второе B расположено на оси t' (выше первый рисунок). Если второй “тик” происходит в момент времени $t' = 1$, то это же событие имеет координату $t = t' \operatorname{ch} \alpha$ (гиперболическая проекция). Так как $\operatorname{ch} \alpha = 1/\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \alpha} = 1/\sqrt{1 - v^2}$, мы приходим к релятивистскому замедлению времени. То, что $t' < t$, можно увидеть, проведя псевдосферу, отсекающую на осях t' и t одинаковые единицы времени (отрезки единичной длины). На рисунке видно, что 1 на оси t лежит на рисунке ниже, чем проекция события $t' = 1$, $x' = 0$ (точка B на рисунке).

Аналогично анализируется сокращение длины (выше второй рисунок). Предположим, что стержень единичной длины неподвижен в системе S' (отрезок OB). Его левый конец находится в начале координат и имеет траекторию, совпадающую с осью t' . Траектория правого конца стержня ей параллельна. Измерение длины стержня производится в системе S путём одновременной фиксации его начала и конца. Одновременные события A и B имеют одинаковое время в системе S , но различное в S' . Проекция точек A и B на ось x будет равна длине стержня в системе S . Видно, что эта проекция короче, чем единица длины, отсекаемая псевдоокружностью (в данном случае имеющей длину -1).

На третьем рисунке иллюстрируется эффект Доплера. Источник света, находящийся в начале координат, испускает световые сигналы. Первый в момент времени $t' = t = 0$, а второй – спустя время $t' = 1$. В начало отсчёта $x = 0$ системы S он попадёт, когда траектория света (тонкая линия BB_2) пересечёт ось t . Это время оказывается больше как единицы длины на оси $t = 1$, отсекаемой единичной псевдосферой, так и проекции события B испускания сигнала (пунктир).

2.11 Ковариантная формулировка *

Многие соотношения теории относительности могут быть записаны в элегантном ковариантном виде. Пусть $A^\alpha = \{A^0, A^1, A^2, A^3\}$ – четвёрка чисел, которые мы будем называть компонентами *4-вектора* (четырёхмерного вектора). Для нумерации этих компонент используются верхние индексы, и их не стоит путать с показателем степени. Будем считать, что для наблюдателей в двух инерциальных системах отсчёта S и S' компоненты вектора A^α и A'^α связаны следующим преобразованием:

$$A'^0 = \frac{A^0 - vA^1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad A'^1 = \frac{A^1 - vA^0}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad A'^2 = A^2, \quad A'^3 = A^3. \quad (2.38)$$

Нулевая компонента 4-вектора называется *временной*, а остальные компоненты – *пространственными*. Их будем обозначать, как обычные 3-мерные векторы (3-векторы): $\mathbf{A} = \{A^1, A^2, A^3\}$. Иногда их обозначают, как декартовы проекции $\{A_x, A_y, A_z\}$, но подразумевается, что это тоже компоненты с верхними индексами.

Несложно видеть, что время и координаты образуют 4-вектор, который обозначается по пространственным компонентам:

$$x^\alpha = \{t, \mathbf{r}\} = \{t, x, y, z\},$$

а (2.38) являются преобразованиями Лоренца 1.10, стр.34. Как мы увидим чуть позже, 4-векторы можно определить для самых разнообразных физических величин.

По аналогии с векторными преобразованиями Лоренца (1.12), стр. 35, можно записать более общее преобразование для 4-вектора:

$$A'^0 = \gamma(A^0 - \mathbf{v}\mathbf{A}), \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \gamma\mathbf{v}A^0 + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{A}). \quad (2.39)$$

Обратное преобразование получается заменой $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$.

Кроме 4-векторов, определим также четвёрки величин с нижними индексами $A_\alpha = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, которые будем называть компонентами *ковектора*. Будем считать, что компоненты ковектора связаны с компонентами вектора следующим образом:

$$A_\alpha = \{A_0, A_1, A_2, A_3\} = \{A^0, -A^1, -A^2, -A^3\} = \{A^0, -\mathbf{A}\}.$$

Другими словами, временные компоненты 4-векторов и 4-ковекторов совпадают, а пространственные имеют обратный знак. Компоненты 4-вектора с верхними индексами называются *контравариантными*, а с нижними – *ковариантными*.

Ковектор вводится, чтобы определить число, которое будет *инвариантным* (одинаковым) в различных инерциальных системах отсчёта:

$$A^2 = A_\alpha A^\alpha = A_0 A^0 + A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3 = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2 = \text{inv.}$$

Этот инвариант мы обозначили, как A^2 , где двойка является степенью (квадратом), а не индексом. Чтобы не путаться с индексами компонент вектора, сам 4-вектор мы будем записывать в прямом, а не наклонном шрифте (подобным образом для 3-векторов используется жирный шрифт). По повторяющемуся верхнему и нижнему индексу α *подразумевается* суммирование от 0 до 3, и знак Σ не ставится.

Проверим инвариантность величины A^2 . Для этого запишем её в системе S' для штрихованных величин и, подставив преобразование (2.38), найдём значение в системе S . Опуская компоненты A^2, A^3 , которые остаются неизменными, получаем:

$$A'^2 = (A'^0)^2 - (A'^1)^2 = \frac{(A^0 - vA^1)^2}{1 - v^2} - \frac{(A^1 - vA^0)^2}{1 - v^2} = (A^0)^2 - (A^1)^2 = A^2.$$

Для 4-вектора $x^\alpha = (t, \mathbf{r})$ инвариантом является выражение: $x^2 = t^2 - \mathbf{r}^2$. Уравнение $x^2 = 0$ описывает распространение сферической волны в результате вспышки света в начале систем координат. Этот световой фронт имеет сферическую форму с точки зрения каждого из наблюдателей.

Определим *скалярное произведение* двух 4-векторов A и B :

$$A \cdot B = A_\alpha B^\alpha = A^\alpha B_\alpha = A^0 B^0 - \mathbf{A} \mathbf{B} = \text{inv.} \quad (2.40)$$

Точка произведения может не ставиться, т.е. $A \cdot B = AB$. Аналогично соотношению $A'^2 = A^2$ несложно проверить, что скалярное преобразование также является инвариантом: $A' \cdot B' = A \cdot B$. Инвариант A^2 будем называть *квадратом 4-вектора*. Квадрат 4-вектора можно также записать следующим образом: $A^2 = A \cdot A$.

Квадрат 3-вектора и скалярное произведение двух 3-векторов не зависят от ориентации системы координат. Поэтому они являются *инвариантами* поворотов декартовой системы в 3-мерном пространстве. Как мы видели в предыдущем разделе, преобразования Лоренца (2.38) можно интерпретировать, как повороты в псевдоевклидовом 4-мерном пространстве-времени, расстоянием в котором служит интервал:

$$ds^2 = (dt)^2 - (d\mathbf{r})^2.$$

Квадрат 4-вектора, скалярное произведение двух 4-векторов и расстояние ds^2 являются геометрическими объектами 4-мерного пространства, которые не зависят от ориентации осей координат (системы отсчёта).

• Определим матрицу *метрического тензора*, которую будем записывать при помощи как двух нижних, так и двух верхних индексов:

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (2.41)$$

Так как отличные от нуля элементы стоят только на диагонали, возможно второе обозначение, которое стоит сравнить с понятием “*сигнатура*”.

Будем считать, что метрический тензор выглядит одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчёта, в которых используются декартовы координаты (x, y, z) . Несложно проверить, что:

$$A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta, \quad A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta.$$

Для этого необходимо расписать в явном виде суммационное правило для повторяющихся индексов (один внизу, другой вверху). Например:

$$A_1 = g_{1\beta} A^\beta = g_{10} A^0 + g_{11} A^1 + g_{12} A^2 + g_{13} A^3 = g_{11} A^1 = -A^1,$$

где учтено, что недиагональные элементы метрического тензора равны нулю, а $g_{11} = -1$.

Название “метрический тензор” происходит от того, что при помощи $g_{\alpha\beta}$ можно записать квадрат расстояния (*метрику*) в 4-мерном псевдоевклидовом пространстве:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2.$$

Аналогично он определяет скалярное произведение двух 4-векторов:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta = g^{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Свёртка тензоров $g^{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ даёт *символ Кронекера*:

$$g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha, \quad (2.42)$$

который равен нулю, если индексы α и β различны, и единице, если они совпадают. Это же выражение можно записать, как умножение двух матриц (2.41), в результате которого получается единичная матрица.

Введение метрического тензора может показаться избыточным, однако в пространствах, обладающих кривизной, или в произвольных криволинейных (недекартовых) координатах коэффициенты $g_{\alpha\beta}$ зависят от координат и могут быть недиагональными. В этом случае метрический тензор оказывается ключевым объектом при описании геометрии пространства.

• По аналогии с обычным векторным анализом в 4-мерном пространстве можно ввести *базис* при помощи четырёх 4-векторов e_0, e_1, e_2, e_3 . Индексы – это номера векторов, а не их компоненты (обращаем внимание на прямой шрифт). Кроме этого, введём ещё четыре вектора e^0, e^1, e^2, e^3 , которые будем называть *взаимным базисом*. Скалярные произведения базисных 4-векторов по определению равны:

$$e^\alpha \cdot e_\beta = \delta_\beta^\alpha, \quad e_\alpha \cdot e_\beta = g_{\alpha\beta}, \quad e^\alpha \cdot e^\beta = g^{\alpha\beta}. \quad (2.43)$$

4-вектор можно разложить по исходному или взаимному к нему базису:

$$A = A^\alpha e_\alpha = A_\alpha e^\alpha.$$

В первом случае коэффициенты разложения являются компонентами 4-вектора (*контравариантными* компонентами), а во втором - компонентами ковектора (*ковариантными* компонентами). Точнее говорить, что один и тот же 4-вектор может быть разложен по двум различным базисам (“исходному” e_α и взаимному к нему e^α), в результате чего и возникают компоненты с верхними и нижними индексами.

Напомним, что и в 3-мерном пространстве вектор может быть разложен по базисным векторам $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$. При этом важно понимать, что вектор \mathbf{a} – это геометрический объект (“направленная стрелка”). Он не зависит от выбора координатных осей, хотя его компоненты $\{a_x, a_y, a_z\}$ (проекции) на декартовы оси, естественно, меняются при повороте системы координат.

Такая же ситуация и в 4-мерном пространстве-времени. Любой 4-вектор является физическим объектом. Например, “х” – это одно и то же событие, наблюдаемое из *любой* инерциальной системы отсчёта. Этот 4-вектор можно раскладывать по различным базисам. Базисы могут соответствовать различным инерциальным системам отсчёта. Коэффициенты этих разложений будут обычными числами с верхними или нижними индексами, со штрихами или без.

Скалярное произведение 4-векторов с учётом (2.43) может быть написано следующим образом:

$$A \cdot B = (A^\alpha e_\alpha) \cdot (B^\beta e_\beta) = (e_\alpha \cdot e_\beta) A^\alpha B^\beta = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta.$$

Аналогично расписываются произведения других разложений векторов по базису, например:

$$A \cdot B = (A_\alpha e^\alpha) \cdot (B^\beta e_\beta) = (e^\alpha \cdot e_\beta) A_\alpha B^\beta = \delta_\beta^\alpha A_\alpha B^\beta = A_\alpha B^\alpha.$$

Обратим внимание, что для сумм разложения векторов A и B используются различные индексы, так как это различные суммы.

• Рассмотрим несколько примеров 4-векторов. Пусть частица имеет скорость $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$. Интервал между двумя последовательными положениями частицы через бесконечно близкий промежуток времени dt равен:

$$ds^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2 = dt^2 (1 - \mathbf{u}^2).$$

Квадратный корень из этого выражения называется *собственным временем* частицы:

$$ds = dt \sqrt{1 - \mathbf{u}^2}.$$

Собственное время является инвариантом преобразований Лоренца. Для каждого наблюдателя промежуток времени dt и скорость частицы \mathbf{u} будут разными, но их комбинация в виде собственного времени окажется одинаковой.

Так как 4-координаты $x^\alpha = (t, \mathbf{r})$ преобразуются, как 4-вектор, а собственное время ds (интервал *вдоль траектории*) – инвариант, то можно определить следующий *4-вектор скорости*:

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}}, \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} \right\}. \quad (2.44)$$

Компоненты 4-вектора скорости преобразуются, как и компоненты любого 4-вектора (2.38). Так, для пространственных компонент имеем:

$$\frac{u'_x}{\sqrt{1 - \mathbf{u}'^2}} = \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - v^2}\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}}, \quad \frac{u'_y}{\sqrt{1 - \mathbf{u}'^2}} = \frac{u_y}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}}.$$

и для u'_z аналогично u'_y . Преобразования нулевых компонент имеют вид:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{u}'^2}} = \frac{1 - vu_x}{\sqrt{1 - v^2}\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}}.$$

Исключая при помощи этого соотношения $\sqrt{1 - \mathbf{u}'^2}$ в преобразованиях для пространственных компонент скорости, мы приходим к закону преобразования скорости (1.14), стр. 37 относительно двух инерциальных систем отсчёта:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2}}{1 - vu_x}.$$

Отметим, что квадрат 4-вектора скорости равен единице:

$$U^2 = U_\alpha U^\alpha = \frac{1}{1 - \mathbf{u}^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{1 - \mathbf{u}^2} = 1.$$

Это также непосредственно следует из определения 4-вектора скорости и интервала: $U^2 = dx_\alpha dx^\alpha / ds^2 = 1$.

• Аналогичным образом можно определить 4-вектор ускорения, как производную от 4-скорости:

$$A^\alpha = \frac{dU^\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{u}^2}} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{u}^2}}, \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-\mathbf{u}^2}} \right\}.$$

Вводя обычное 3-мерное ускорение $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/dt$ и беря покомпонентно производную, получаем:

$$A^\alpha = \frac{dU^\alpha}{ds} = \left\{ \frac{\mathbf{u}\mathbf{a}}{(1-\mathbf{u}^2)^2}, \frac{\mathbf{a} + [\mathbf{u} \times [\mathbf{u} \times \mathbf{a}]]}{(1-\mathbf{u}^2)^2} \right\}, \quad (2.45)$$

При помощи (2.39) можно записать закон преобразования ускорения, хотя это проще сделать прямым дифференцированием векторного преобразования для скорости. Несложно проверить, что скалярное произведение 4-скорости и 4-ускорения равно нулю: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0$. Это соотношение можно также получить дифференцированием $\mathbf{u}^2 = 1$ по s :

$$\frac{d(U^\alpha U_\alpha)}{ds} = \frac{dU^\alpha}{ds} U_\alpha + U^\alpha \frac{dU_\alpha}{ds} = A^\alpha U_\alpha + U^\alpha A_\alpha = 2A^\alpha U_\alpha = 0,$$

где взята производная произведения и учтено (2.40), что $A^\alpha U_\alpha = A_\alpha U^\alpha$.

• При помощи ковариантных обозначений можно единым образом записать соотношения для эффектов Доплера и аберрации. Для этого определим *волновой 4-вектор*:

$$k^\alpha = (\omega, \mathbf{k}) = (\omega, \omega \mathbf{n}),$$

где $\omega = 2\pi\nu$ – *круговая частота* (ν – обычная частота), \mathbf{k} – волновой вектор в направлении распространения волны и равный $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$, где λ – длина волны. Так как $\nu\lambda = c = 1$, во втором равенстве введен единичный вектор $\mathbf{n}^2 = 1$ и λ выражена через ν . Заметим, что:

$$k^2 = k_\alpha k^\alpha = \omega^2(1 - \mathbf{n}^2) = 0.$$

Преобразование (2.39) для нулевых компонент даёт эффект Доплера:

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}{1-\mathbf{v}\mathbf{n}}.$$

Это выражение отличается от (2.6), стр. 92, знаком минус в знаменателе. Связано это с различным смыслом единичного вектора \mathbf{n} . В (2.6) это было направление на источник (*от* наблюдателя), тогда как в записанном выше преобразовании \mathbf{n} – это направление распространения светового сигнала *к* наблюдателю. Отсюда и противоположные знаки. Преобразования для пространственных компонент k^α приводят к эффекту аберрации (2.16), стр.108.

2.12 Матричные преобразования **

• Рассмотрим три инерциальные системы отсчёта S , S' и S'' , наблюдатели в которых измеряют координаты и время некоторого события (t, x, y) , (t', x', y') и (t'', x'', y'') соответственно. Пусть, как обычно, S' движется относительно S со скоростью v вправо вдоль оси x и координатные оси этих двух систем параллельны. А вот система S'' пусть движется относительно S' со скоростью v' вверх вдоль оси y' . Между парами систем отсчёта можно записать преобразования Лоренца:

$$\begin{cases} t' = \gamma t - v\gamma x \\ x' = \gamma x - v\gamma t \\ y' = y, \end{cases} \quad \begin{cases} t'' = \gamma' t' - v'\gamma' y' \\ x'' = x' \\ y'' = \gamma' y' - v'\gamma' t'. \end{cases}$$

Подставляя первое преобразование во второе, можно найти связь координат и времени для наблюдателей в S и S'' . Такую подстановку можно выполнить в матричном виде, записав преобразования таким образом:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t'' \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 & -v'\gamma' \\ 0 & 1 & 0 \\ -v'\gamma' & 0 & \gamma' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Напомним, что при перемножении матрицы на матрицу или матрицы на столбик (как выше) действует правило “лома” (или строка на столбец). Так, чтобы получить верхний элемент t' столбика в левой части равенства, необходимо взять первую строку матрицы $(\gamma \ -v\gamma \ 0)$, перемножить её элементы с элементами столбика, стоящего справа от матрицы, и все такие произведения сложить. Подстановка одного преобразования во второе в матричном виде сводится к перемножению матриц:

$$\begin{pmatrix} t'' \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 & -v'\gamma' \\ 0 & 1 & 0 \\ -v'\gamma' & 0 & \gamma' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц ассоциативно, поэтому можно сначала перемножить квадратные матрицы каждого преобразования, а затем результирующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} t'' \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\gamma' & -v\gamma\gamma' & -v'\gamma' \\ -v\gamma & \gamma & 0 \\ -v'\gamma'\gamma & v v'\gamma\gamma' & \gamma' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

умножить на столбик координат и времени. Результирующая матрица, приведенная выше, получается по правилу “лома”, где сумма произведений элементов строки (лом) первой матрицы на элементы столбика второй записывается на месте “пробитой” ломом дырки (см. также стр.101).

Обратим внимание, что хотя обе исходные матрицы были симметричными (относительно диагонали), матрица результирующего преобразования оказывается несимметричной.

В предыдущем разделе мы определили вектор в 4-мерном пространстве, как четвёрку величин $A^\alpha = (A^0, A^1, A^2, A^3)$, изменяющихся при смене системы отсчёта в соответствии с преобразованиями Лоренца. В общем случае эти преобразования можно записать следующим образом:

$$A'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta A^\beta = \Lambda^\alpha_0 A^0 + \Lambda^\alpha_1 A^1 + \Lambda^\alpha_2 A^2 + \Lambda^\alpha_3 A^3.$$

Если относительная скорость систем отсчёта имеет произвольное направление, то из векторных преобразований (2.39), стр. 130, следует такая матрица:

$$\Lambda^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \gamma & -v_x\gamma & -v_y\gamma & -v_z\gamma \\ -v_x\gamma & 1 + \Gamma v_x^2 & \Gamma v_x v_y & \Gamma v_x v_z \\ -v_y\gamma & \Gamma v_y v_x & 1 + \Gamma v_y^2 & \Gamma v_y v_z \\ -v_z\gamma & \Gamma v_z v_x & \Gamma v_z v_y & 1 + \Gamma v_z^2 \end{pmatrix},$$

где $\Gamma = (\gamma - 1)/v^2$. Если координатные оси систем отсчёта дополнительно повернуты друг относительно друга, матрица будет выглядеть ещё сложнее. Заметим, что индексы α и β в матрице Λ^α_β находятся не только на разной высоте, но и сдвинуты друг относительно друга по горизонтали. Первый индекс α нумерует строки матрицы, а второй β – столбцы. Аналогичная ситуация с индексами и для обычных матриц, однако там они находятся на одном уровне (обычно оба внизу). Для скалярного произведения векторов $A^\alpha B_\alpha$ мы используем ковариантное правило суммирования по повторяющимся индексам, которые находятся на различном уровне. Это же правило будем использовать и для матриц. Поэтому в Λ^α_β порядок расположения индексов важен в обоих направлениях.

Последовательность двух преобразований Лоренца с различными матрицами:

$$A''^\alpha = \Lambda'^\alpha_\mu A'^\mu, \quad A'^\mu = \Lambda^\mu_\beta A^\beta, \quad A''^\alpha = \Lambda''^\alpha_\beta A^\beta$$

можно подставить друг в друга так, что:

$$\Lambda''^\alpha_\beta = \Lambda'^\alpha_\mu \Lambda^\mu_\beta, \quad \Lambda'' = \Lambda' \Lambda.$$

Слева перемножение матриц записано в явном индексном виде. Суммирование по μ реализует правило “лома”, так как у первой матрицы нижний правый индекс μ пробегает элементы строки под номером α , а у второй матрицы верхний левый индекс μ пробегает все элементы столбца под номером β . Справа это же выражение записано в безындексном (“матричном”) виде.

• Определим ещё одну матрицу лоренцевского преобразования, изменив “высоту индексов” при помощи свёртки с метрическими тензорами:

$$\tilde{\Lambda}_\alpha{}^\beta = g_{\alpha\mu} \Lambda^\mu{}_\nu g^{\nu\beta}. \quad (2.46)$$

Так как в матрице $\tilde{\Lambda}_\alpha{}^\beta$ нижний индекс α стоит левее, то он нумерует строки матрицы, а индекс β , соответственно, столбцы. Для получения явного вида матрицы $\tilde{\Lambda}$ необходимо Λ слева и справа умножить на матрицы метрического тензора \mathbf{g} , т.е. $\tilde{\Lambda} = \mathbf{g}\Lambda\mathbf{g}$. Так, для движения вдоль оси x в двух измерениях имеем:

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & v\gamma & 0 \\ v\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В инерциальных системах отсчёта с декартовыми координатами метрические тензоры с нижними и верхними индексам диагональны и одинаковы. Как и для любых матриц, их первый индекс нумерует строки, а второй – столбцы. В отличие от матриц $\tilde{\Lambda}$ и Λ у матрицы метрического тензора \mathbf{g} оба индекса находятся на одной высоте (вверху или внизу).

Метрический тензор во всех инерциальных системах одинаков. Поэтому при помощи матрицы $\tilde{\Lambda}$ можно записать преобразование Лоренца для ковектора:

$$A'_\alpha = g_{\alpha\mu} A'^\mu = g_{\alpha\mu} \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu = g_{\alpha\mu} \Lambda^\mu{}_\nu g^{\nu\beta} A_\beta = \tilde{\Lambda}_\alpha{}^\beta A_\beta.$$

Обратим внимание, что суммационный индекс β “прижимается” к 4-вектору A_β , являясь номером колонки матрицы $\tilde{\Lambda}$.

При вращении 3-мерной системы координат поворачиваются (изменяются) и базисные векторы, направленные вдоль осей. Точно так же изменяются базисные векторы 4-мерного пространства при смене системы отсчёта (повороте в 4-пространстве). Для такого преобразования справедливо “обратное” матричное умножение (строка на матрицу):

$$e_\alpha = e'_\beta \Lambda^\beta{}_\alpha, \quad e^\alpha = e'^\beta \tilde{\Lambda}_\beta{}^\alpha. \quad (2.47)$$

Напомним, что индекс у базисного вектора – это его номер, а не компонента, поэтому в левой части преобразования и в правой (слева от матрицы) стоят строки 4-векторов типа $(e_0 \ e_1 \ e_2 \ e_3)$. Чтобы получить преобразования (2.47), необходимо разложить вектор по двум базисам, соответствующим двум инерциальным системам отсчёта $\Lambda = A^\alpha e_\alpha = A'^\alpha e'_\alpha$, и воспользоваться преобразованием для компонент вектора $A'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta A^\beta$. Прделать это предлагается в качестве упражнения. Напомним, что 4-вектор – это физический объект, имеющий различные проекции на различные базисы. Отметим также соотношения $e'^\beta \cdot e_\alpha = \Lambda^\beta{}_\alpha$ и $e'_\beta \cdot e^\alpha = \tilde{\Lambda}_\beta{}^\alpha$.

• Установим одно важное свойство матриц лоренцевского преобразования. По определению скалярное произведение двух 4-векторов не меняется при таких преобразованиях:

$$A' \cdot B' = g_{\alpha\beta} A'^{\alpha} B'^{\beta} = \underline{g_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu}} A^{\mu} B^{\nu} = A \cdot B = \underline{g_{\mu\nu}} A^{\mu} B^{\nu} = inv.$$

Записанные соотношения будут выполняться, если лоренцевская матрица удовлетворяет (в силу произвольности векторов) следующему уравнению:

$$g_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} = g_{\mu\nu},$$

которое называется *условием ортогональности*. Свернув по индексу μ это соотношение с тензором $g^{\gamma\mu}$, с учётом (2.42) имеем:

$$g_{\alpha\beta} g^{\gamma\mu} \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} = \tilde{\Lambda}^{\gamma}_{\beta} \Lambda^{\beta}_{\nu} = (\tilde{\Lambda}^T)^{\gamma}_{\beta} \Lambda^{\beta}_{\nu} = \delta^{\gamma}_{\nu}. \quad (2.48)$$

Слово “свёртка” означает умножение одного индексного выражения на второе и суммирование этого произведения по некоторым индексам. В первом равенстве (2.48) свёртка с метрическими тензорами даёт матрицу $\tilde{\Lambda}$, а во втором равенстве введена транспонированная матрица, помеченная буквой T : $(\tilde{\Lambda}^T)^{\gamma}_{\beta} = \tilde{\Lambda}^{\gamma}_{\beta}$. Она получается из исходной матрицы $\tilde{\Lambda}^{\gamma}_{\beta}$ перестановкой строк и столбцов. Сделано это, чтобы получилось матричное произведение, реализуемое суммой по индексу β . Обозначим символ Кронекера δ^{γ}_{ν} при помощи единичной матрицы $\mathbf{1}$. Тогда условие ортогональности (2.48) можно записать без индексов:

$$\tilde{\Lambda}^T \Lambda = \mathbf{1}.$$

Определитель произведения матриц равен произведению определителей. Кроме этого, транспонирование определителя не меняет. Поэтому:

$$\det(\tilde{\Lambda}^T \Lambda) = \det(\mathbf{g}^T \Lambda^T \mathbf{g}^T \Lambda) = (\det \mathbf{g})^2 (\det \Lambda)^2 = 1$$

Из (2.41) следует, что $\det \mathbf{g} = -1$, поэтому $(\det \Lambda)^2 = 1$. Прямым вычислением определителя матриц Λ из начала раздела получаем, что при извлечении корня надо выбрать знак плюс:

$$\det \Lambda = \det \tilde{\Lambda} = 1.$$

Определитель для $\tilde{\Lambda}$ получается из определения $\tilde{\Lambda} = \mathbf{g} \Lambda \mathbf{g}$. Таким образом, лоренцевские матрицы преобразования как векторов (Λ), так и ковекторов ($\tilde{\Lambda}$) имеют единичные определители и ортогональны.

• Пусть есть два 4-вектора A и B . Из их компонент можно составить 4 различных произведения с двумя индексами: $A^\alpha B^\beta$, $A_\alpha B_\beta$, $A^\alpha B_\beta$, $A_\alpha B^\beta$. Эти произведения будут преобразовываться при помощи двух лоренцевских матриц:

$$A'^\alpha B'^\beta = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu A^\mu B^\nu, \quad A'_\alpha B'_\beta = \tilde{\Lambda}_\alpha^\mu \tilde{\Lambda}_\beta^\nu A_\mu B_\nu,$$

и т.д. Назовём *тензором* типа (n, m) величину, имеющую $n+m$ индексов, n из которых находятся сверху, а m – внизу, если она преобразуется, как произведение n векторов и m ковекторов. Число $n+m$ называется *рангом* тензора. Например, для тензора $T^\gamma_{\alpha\beta}$ типа $(1, 2)$ по определению имеем:

$$T'^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Lambda^\gamma_\sigma \tilde{\Lambda}_\alpha^\mu \tilde{\Lambda}_\beta^\nu T^\sigma_{\mu\nu}.$$

Так как для лоренцевских матриц выполняется условие ортогональности, то метрические коэффициенты $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ являются тензорами:

$$g'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu g^{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}.$$

Заметим, что компоненты $g^{\alpha\beta}$ или $g_{\alpha\beta}$ не изменяются только в декартовых координатах плоского пространства (см. главу 10). Аналогично, в силу ортогональности, тензором является символ Кронекера δ^α_β :

$$\delta'^\alpha_\beta = \Lambda^\alpha_\mu \tilde{\Lambda}_\beta^\nu \delta^\mu_\nu = \Lambda^\alpha_\mu \tilde{\Lambda}_\beta^\mu = \delta^\alpha_\beta.$$

Для любого тензора при помощи $g^{\alpha\beta}$ или $g_{\alpha\beta}$ можно определить *новый* тензор, поднимая или опуская индексы. Хотя получившийся при этом тензор будет другим, его принято обозначать той же буквой. В этом случае необходимо следить за порядком индексов по горизонтали:

$$T_{\alpha\beta\gamma} = g_{\gamma\mu} T_{\alpha\beta}{}^\mu, \quad T_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} = g^{\beta\mu} T_{\alpha\mu\gamma}.$$

Все инерциальные системы равноправны. Поэтому уравнения, описывающие тот или иной физический закон, должны иметь одинаковую форму во всех системах. Это будет происходить, если эти уравнения записываются в тензорных обозначениях. Например, как мы увидим в 6-й главе, движение частицы в электромагнитном поле описывается уравнением:

$$m \frac{dU^\alpha}{ds} = q F^{\alpha\beta} U_\beta,$$

где m , q – инвариантные масса и заряд частицы, ds – также инвариантный интервал. Кроме этих инвариантов, в уравнение входят тензорные величины – 4-вектор скорости частицы U^α и тензор электромагнитного поля $F^{\alpha\beta}$. Так как и вектор, и тензор преобразуются при помощи одних и тех же матриц, это уравнение будет выглядеть точно так же в любой другой инерциальной системе отсчёта.

У вектора 4 компоненты, у тензора второго ранга (с двумя индексами) их 16. С ростом числа индексов у тензора число его компонент стремительно растёт. Если индексов у тензора n , то он имеет 4^n компонент. Поэтому особую роль играют тензоры, обладающие тем или иным свойством симметрии относительно перестановки индексов. Так, тензоры типа $(0, 2)$ могут быть *симметричными* или *антисимметричными*:

$$S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}, \quad A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}.$$

Метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ является симметричным. В качестве упражнения (\llcorner Н₂₁) предлагается найти преобразования Лоренца для произвольного тензора $T^{\alpha\beta}$ и в том случае, когда он обладает антисимметрией.

Свёртка симметричного и антисимметричного тензора равна нулю:

$$S_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta} = -S_{\beta\alpha}A^{\beta\alpha} = -S_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta} = 0.$$

В первом равенстве индексы переставлены с учётом свойств симметрии, а во втором переименованы ($\alpha \mapsto \beta$, $\beta \mapsto \alpha$), так как они суммационные. Выражение, равное себе с обратным знаком, может быть только нулём.

Важную роль в релятивистской теории играют абсолютно антисимметричные тензоры. Слово “абсолютные” означает, что они изменяют свой знак при перестановке *любых* двух индексов. Подробнее их свойства мы рассмотрим в следующей главе.

В силу определения тензора компоненты 4-вектора с верхними индексами A^α являются тензором типа $(1, 0)$, а ковектор (компоненты вектора с нижними индексами A_α) – тензором типа $(0, 1)$.

Величина, имеющая одинаковое значение во всех системах отсчёта, называется *скаляром* и является тензором нулевого ранга. Заметим, что одинаковость значения не означает одинаковости функциональной формы. Так, пусть определена *скалярная функция* $\varphi(t, \mathbf{r})$. Это означает, что каждой точке пространства и времени присвоено некоторое число ϕ . Это число “привязано” к точке и *по определению* не зависит от выбора системы отсчёта, т.е. является одинаковым для всех наблюдателей. Тем не менее, вид функции для них различный. Например, если $\varphi = t + x$ в одной системе отсчёта, то в другой её вид $\varphi' = \gamma(1 + v)(t' + x')$. Но значения функций для данного события (точки в пространстве-времени) будут одинаковыми $\varphi' = \varphi$. Поэтому штрих у скалярной функции обычно не ставится. Векторная функция $A^\alpha(t, \mathbf{r})$ или тензорная функция $T^{\alpha\beta}(t, \mathbf{r})$ также “привязываются” к конкретной точке пространства-времени. Однако при переходе к другой системе отсчёта их значения изменяются, так как они умножаются на соответствующие матрицы Λ .

II Кинематика

- **Н₉** Движение куба из двух систем отсчёта (стр.100)

Пусть некоторая фиксированная точка в системе S' движется по траектории $x' = x'_0$, $y' = y'_0 + u't'$, где x'_0 , y'_0 и u' являются константами. Подставим эту траекторию в обратные преобразования Лоренца:

$$t = \gamma(t' + vx'_0), \quad x = \gamma(x'_0 + vt'), \quad y = y'_0 + u't'.$$

Исключая время t' , получаем траекторию точки в системе S :

$$x = \frac{x'_0}{\gamma} + vt, \quad y = (y'_0 - u'v x'_0) + ut,$$

где $u = u'/\gamma$ – скорость точки вдоль оси y в системе S и $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$. Пусть в момент времени $t = t' = 0$ левый нижний угол квадрата (точка D , рисунок на стр. 100) находился в начале систем отсчёта $x'_0 = y'_0 = 0$, тогда правый нижний угол (точка C) имел координаты $y'_0 = 0$, $x'_0 = L_0$. Если в собственной системе квадрат имеет длину ребра L_0 , то в системе S' при движении вдоль оси y' он выглядит сжатым и координаты точек A и B равны $\{0, L_0/\gamma'\}$ и $\{L_0, L_0/\gamma'\}$ соответственно, где $\gamma' = 1/\sqrt{1 - u'^2}$. В результате координаты $\{x, y\}$ углов в системе S равны ($t = 0$):

$$\left\{0, 0\right\}_D \quad \left\{\frac{L_0}{\gamma}, -u'vL_0\right\}_C \quad \left\{0, \frac{L_0}{\gamma'}\right\}_A \quad \left\{\frac{L_0}{\gamma}, \frac{L_0}{\gamma'} - u'vL_0\right\}_B.$$

Пропорции на рисунках стр.100 соответствуют скоростям $v = 4/5 = 0.8$ ($\gamma = 5/3$) и $u' = 3/5 = 0.6$ ($\gamma' = 5/4$).

- **Н₁₀** Восстановление “с” в формулах эффекта Доплера (стр. 91)

$$\nu = \nu_0 \cdot \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}, \quad \nu = \nu_0 \cdot \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}, \quad \nu = \nu_0 \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

- **Н₁₁** Восстановление “с” в формулах аберации (стр. 106)

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' - v/c}{1 - (v/c) \cos \theta'}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot \sin \theta'}{1 - (v/c) \cos \theta'}.$$

- **Н₁₂** *Общее число звёзд на небе* (стр. 113)

Проинтегрируем плотность распределения звёзд по телесному углу:

$$\frac{N}{4\pi} \int \frac{1-v^2}{(1-v \cos \theta')^2} \sin \theta' d\theta' d\phi' = \frac{N}{2} \int_{-1}^1 \frac{1-v^2}{(1-vz)^2} dz,$$

где интеграл по $d\phi'$ дал 2π , и сделана замена $z = \cos \theta'$. Так как $\theta' = [0 \dots \pi]$, то $z = [1 \dots -1]$. Перестановка пределов интегрирования устраняет минус $\sin \theta' d\theta' = -d(\cos \theta')$, и упорядочивает интегрирование по z .

$$\frac{N}{2} \int_{-1}^1 \frac{1-v^2}{(1-vz)^2} dz = \frac{N}{2} \frac{1}{v} \frac{1-v^2}{1-vz} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{N}{2v} [(1+v) - (1-v)] = N.$$

Таким образом, в обеих системах отсчёта полное число звёзд на небе, как и должно быть, является инвариантом, и равно N

- **Н₁₃** *Восстановление “с” в формуле светового потока* (стр. 115)

$$I = I_0 \frac{(1-v^2/c^2)^2}{(1-(v/c) \cos \theta)^4}.$$

- **Н₁₄** *Траектория ускоренного движения* (стр. 117)

$$x(t) = x(0) + \int_0^t u(t) dt = x_0 + \int_0^t \frac{\pi_0 + at}{\sqrt{1 + (\pi_0 + at)^2}} dt.$$

Делая замену $\tau = \pi_0 + at$, $d\tau = a dt$, получаем:

$$x(t) - x_0 = \frac{1}{a} \int_{\pi_0}^{\pi_0+at} \frac{\tau}{\sqrt{1 + \tau^2}} d\tau = \frac{1}{2a} \int_{\pi_0}^{\pi_0+at} \frac{d(\tau^2)}{\sqrt{1 + \tau^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \tau^2} \Big|_{\pi_0}^{\pi_0+at}.$$

- **Н₁₅** *Восстановление “с” в равноускоренном движении* (стр. 117)

$$x(t) = x_0 + \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + (\pi_0 + at)^2/c^2} - \sqrt{1 + \pi_0^2/c^2} \right).$$

- **H₁₆** *Разложение в ряд времени путешествия* (стр. 119)

Для разложения гиперболического арксинуса используем формулу:

$$\operatorname{ash} y \approx y - \frac{y^3}{6} + \dots$$

Она может быть получена при помощи общей формулы Тейлора или из разложения экспоненты:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \approx x + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Так как $y = \operatorname{sh} x$, то $y^3 = \operatorname{sh}^3 x \approx x^3$ (удерживаем порядок малости не более x^3). Поэтому $\operatorname{ash} y = x = \operatorname{sh} x - x^3/6 = y - y^3/6$.

Для разложения второго слагаемого используем разложения ($\ll C_5$):

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}, \quad \frac{1}{1+x} \approx 1 - x.$$

- **H₁₇** *Восстановление “с” в уравнении для стержня* (стр. 122)

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\gamma^2}{c^2} (\mathbf{vs}) \mathbf{a}.$$

- **H₁₈** *Длина вращающегося по окружности стержня* (стр. 691)

Сумма квадратов уравнений даёт квадрат длины стержня $L^2 = x^2 + y^2$. Если угол с осью x при $t = 0$ равен ϕ_0 и $x_0 = \bar{L}_0 c_0$, $y_0 = \bar{L}_0 s_0$, где $s_0 = \sin \phi_0$, $c_0 = \cos \phi_0$, то:

$$\frac{L^2}{\bar{L}_0^2} = 1 + \gamma v^2 s_0 c_0 \sin(2\omega\gamma t) + \frac{v^2}{2} (\gamma^2 s_0^2 - c_0^2) (1 - \cos(2\omega\gamma t)). \quad (29)$$

При помощи соотношения (2.8), 99 можно найти связь начальной длины стержня \bar{L}_0 в неподвижной системе с собственной длиной стержня L_0 :

$$\bar{L}_0 = L_0 / \sqrt{1 + (\gamma^2 - 1) \sin^2 \phi_0}.$$

Длина восстанавливается ($L = \bar{L}_0$) в моменты времени $\omega t = \pi k / \gamma$, где $k = 1, 2, \dots$. Если $\operatorname{tg} \phi_0 = y_0 / x_0$ — начальная ориентация стержня, то через время $\omega t = \pi / \gamma$ его угол ϕ будет таким, что $\operatorname{tg}(\phi - \pi / \gamma) = \operatorname{tg} \phi_0$, или $\phi - \phi_0 = -\pi k + \pi / \gamma$. Так как стержень вращается по часовой стрелке, изменение угла отрицательно, и необходимо выбрать $k = 1$.

• **Н₁₉** *Поворот и относительность одновременности* (стр. 122)

Пусть наблюдатели в S' начинают сдвигать стержень вверх со скоростью \mathbf{u}' . Так как $\mathbf{u}'\mathbf{v} = 0$, то, в силу закона сложения скоростей (1.17), стр.38, эта скорость в неподвижной системе отсчёта S равна:

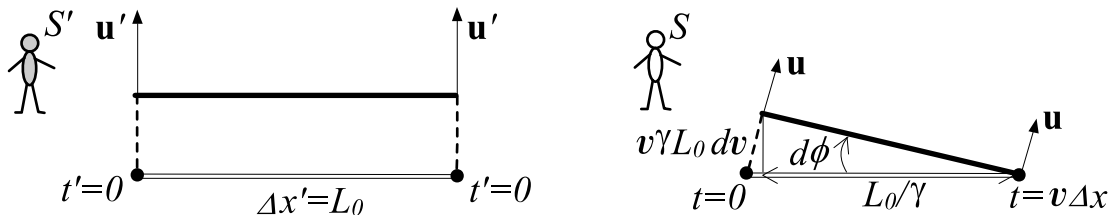
$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{u}'/\gamma.$$

Обозначим вертикальную составляющую скорости как $d\mathbf{v} = \mathbf{u}'/\gamma$.

В системе S' левый и правый концы горизонтального стержня начинают поднимать вверх одновременно ($\Delta t' = 0$). В системе S эти события будут неодновременными. Так как $\Delta t' = 0$ для наблюдателей в S событие начала движения правого конца произойдёт позже на время

$$\Delta t = v\Delta x$$

и левый конец начнёт двигаться раньше правого ($\Delta x = x_2 - x_1 > 0$, следовательно $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$).



Пусть левый конец стержня в момент $t' = t = 0$ совпадает с началами систем отсчёта $x = x' = 0$. В этот же момент времени по синхронизированным часам системы S' правый конец также находится на оси x' (стержень горизонтален). В силу преобразования Лоренца $x = \gamma(x' + vt')$, для одновременных в S' событий ($\Delta t' = 0$) имеем $\Delta x = \gamma\Delta x'$. В данном случае $\Delta x' = L_0$ – собственная длина стержня в системе S' . Поэтому координата правого события в S равна γL_0 . За время $\Delta t = v\Delta x = v\gamma L_0$ левый конец стержня сместится вверх на $(v\gamma L_0) \cdot dv$ и вправо на $(v\gamma L_0) \cdot v$. Поэтому проекция стержня на ось x равна:

$$\gamma L_0 - v^2 \gamma L_0 = L_0/\gamma.$$

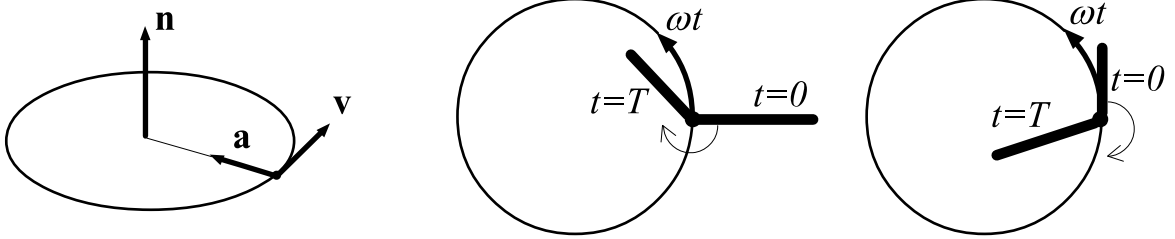
Тангенс угла поворота равен отношению катетов и для малой скорости dv примерно равен углу:

$$\text{tg}(d\phi) \approx d\phi = \frac{v\gamma L_0 dv}{L_0/\gamma} = \gamma^2 v dv.$$

Таким образом, для наблюдателей в S относительность одновременности приводит к повороту стержня на угол $\gamma^2 v dv$. К этому же результату приводит и уравнение (2.35), стр.122.

• **H₂₀** Движение стержня по окружности (стр. 122)

Рассмотрим движение начала системы отсчёта S' по окружности радиуса R с постоянной по модулю скоростью v . При периоде обращения T скорость равна $v = 2\pi R/T = \omega R$, где ω – круговая частота. Модуль ускорения равен $a = v^2/R = \omega v$.



Вектор ускорения всегда перпендикулярен вектору скорости $\mathbf{a}\mathbf{v} = 0$. Если \mathbf{n} – постоянный единичный вектор, нормальный к плоскости орбиты, то справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{a} = \omega [\mathbf{n} \times \mathbf{v}], \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \omega [\mathbf{n} \times \mathbf{a}] = -\omega^2 \mathbf{v}. \quad (30)$$

Запишем уравнение (2.35) и умножим его на \mathbf{v} :

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\gamma^2 (\mathbf{v}\mathbf{s}) \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\mathbf{v}\mathbf{s})}{dt} = \mathbf{a}\mathbf{s}. \quad (31)$$

Дифференцируя это уравнение по времени:

$$\frac{d^2(\mathbf{v}\mathbf{s})}{dt^2} = \mathbf{a} \frac{d\mathbf{s}}{dt} + \mathbf{s} \frac{d\mathbf{a}}{dt} = -(\gamma^2 a^2 + \omega^2) (\mathbf{v}\mathbf{s})$$

и подставляя $a = \omega v$, получаем осцилляторное уравнение:

$$\frac{d^2(\mathbf{v}\mathbf{s})}{dt^2} + \omega^2 \gamma^2 (\mathbf{v}\mathbf{s}) = 0$$

со следующим решением:

$$\mathbf{v}\mathbf{s} = (\mathbf{v}\mathbf{s})_0 \cos(\omega\gamma t) + \frac{(\mathbf{a}\mathbf{s})_0}{\omega\gamma} \sin(\omega\gamma t), \quad (32)$$

где нулевой индекс помечает начальное значение скалярного произведения в момент времени $t = 0$, а значение $d(\mathbf{v}\mathbf{s})/dt$ при $t = 0$ записано при помощи уравнения (31).

Умножая теперь (31) на ускорение \mathbf{a} и учитывая (30), получаем:

$$\frac{d(\mathbf{a}\mathbf{s})}{dt} = \mathbf{s} \frac{d\mathbf{a}}{dt} - \gamma^2 a^2 (\mathbf{v}\mathbf{s}) = -\omega^2 \gamma^2 (\mathbf{v}\mathbf{s}).$$

Правая часть известна (32), поэтому уравнение легко интегрируется:

$$\mathbf{a}\mathbf{s} = (\mathbf{a}\mathbf{s})_0 \cos(\omega\gamma t) - (\mathbf{v}\mathbf{s})_0 \omega\gamma \sin(\omega\gamma t). \quad (33)$$

Таким образом, относительно подвижного базиса, построенного на векторах \mathbf{v} , \mathbf{a} , конец стержня вращается с угловой скоростью $\omega\gamma$.

Найдём зависимость координат конца стержня $\mathbf{s} = \{s_x, s_y\}$ относительно его начала в неподвижной системе отсчёта. Пусть стержень движется по окружности против часовой стрелки $\mathbf{r}(t) = R\{\cos(\omega t), \sin(\omega t)\}$. Тогда компоненты скорости и ускорения равны:

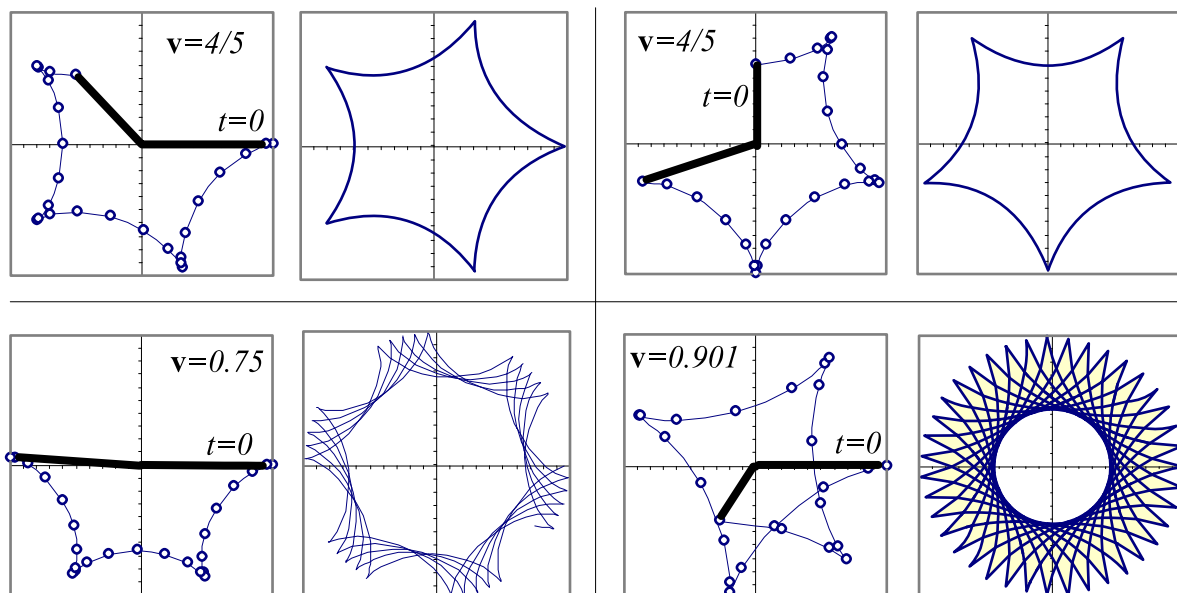
$$\mathbf{v} = R\omega \{-\sin(\omega t), \cos(\omega t)\}, \quad \mathbf{a} = -R\omega^2 \{\cos(\omega t), \sin(\omega t)\}.$$

В момент времени $t = 0$ имеем $\mathbf{v} = R\omega \{0, 1\}$, $\mathbf{a} = -R\omega^2 \{1, 0\}$, поэтому $(\mathbf{v}\mathbf{s})_0 = R\omega s_{y0}$, $(\mathbf{a}\mathbf{s})_0 = -R\omega^2 s_{x0}$ и решения (32), (33) приводят к системе:

$$\begin{cases} s_x \cos(\omega t) + s_y \sin(\omega t) = s_{x0} \cos(\omega \gamma t) + s_{y0} \gamma \sin(\omega \gamma t) \\ -s_x \sin(\omega t) + s_y \cos(\omega t) = s_{y0} \cos(\omega \gamma t) - (s_{x0}/\gamma) \sin(\omega \gamma t). \end{cases}$$

Из этого решения следует, что длина стержня восстанавливается в моменты времени $\omega t = \pi k/\gamma$, где $k = 1, 2, \dots$ ($\leq N_{18}$). Если γ – рациональное число, то конец стержня будет описывать правильный n -угольник. При этом $(\gamma - 1)/\gamma$ равно несократимой дроби $2k/n$. При малых скоростях после каждого оборота по окружности стержень поворачивается на малый угол πv^2 [47].

Ниже изображены траектории конца стержня относительно его начала при различной скорости движения по окружности и начальной ориентации. В собственной системе отсчёта стержень имеет единичную длину. Левая картинка соответствует одному обороту по окружности, и 24 точки идут с равным шагом по времени. Правая картинка – это результат 10 оборотов по окружности. Движение начала стержня начинается из положения часовой стрелки на 3 часа. Вращение стержня всегда происходит в противоположную сторону от направления вращения по окружности.



• **Н₂₁** Преобразования Лоренца для тензора 2-го ранга (стр. 141)

Найдём в явном векторном виде законы преобразования для тензора второго ранга $T^{\alpha\beta}$. Так как он преобразуется как произведение компонент двух 4-векторов, можно рассмотреть частный случай $T^{\alpha\beta} = A^\alpha B^\beta$. Запишем для 4-векторов A^α и B^β преобразования Лоренца (2.39), стр.130 в компонентном виде

$$\begin{aligned} A'^0 &= \gamma \cdot (A^0 - v_k A^k), & A'^i &= A^i - \gamma v_i A^0 + \Gamma v_i v_j A^j, \\ B'^0 &= \gamma \cdot (B^0 - v_k B^k), & B'^j &= B^j - \gamma v_j B^0 + \Gamma v_j v_k B^k, \end{aligned}$$

где латинские индексы пробегает значения от 1 до 3, и для 3-мерной скорости \mathbf{v} мы не различаем верхние и нижние индексы, считая, что $v_i = v^i$. Перемножая эти преобразования, получаем:

$$\begin{aligned} T'^{00} &= \gamma^2 T^{00} - \gamma^2 v_k (T^{0k} + T^{k0}) + \gamma^2 v_n v_m T^{nm}, \\ T'^{0i} &= \gamma (T^{0i} - v_k T^{ki}) - \gamma^2 v_i (T^{00} - v_k T^{k0}) + \gamma \Gamma v_i (v_k T^{0k} - v_n v_m T^{nm}), \\ T'^{i0} &= \gamma (T^{i0} - v_k T^{ik}) - \gamma^2 v_i (T^{00} - v_k T^{0k}) + \gamma \Gamma v_i (v_k T^{k0} - v_n v_m T^{nm}), \\ T'^{ij} &= T^{ij} + \gamma^2 v_i v_j T^{00} - \gamma (v_i T^{0j} + v_j T^{i0}) + \Gamma (v_j v_k T^{ik} + v_i v_k T^{kj}) \\ &\quad - \gamma \Gamma v_i v_j (v_k T^{0k} + v_k T^{k0}) + \Gamma^2 v_i v_j v_n v_m T^{nm}. \end{aligned}$$

Для антисимметричного тензора $T^{\alpha\beta} = -T^{\beta\alpha}$ эти соотношения упрощаются. Воспользуемся тем, что в этом случае $v_n v_m T^{nm} = 0$. Действительно, переименовывая индексы суммирования, можно записать

$$v_n v_m T^{nm} = v_m v_n T^{mn} = -v_n v_m T^{nm}.$$

Во втором равенстве мы воспользовались свойством антисимметрии. Выражение равное самому себе с обратным знаком может быть только нулём. В результате для нулевых компонент $T'^{00} = \gamma^2 T^{00} = 0$, т.е. компонента T^{00} антисимметричного тензора равная нулю в одной системе координат, будет нулевой и в любой другой. Для остальных компонент имеем:

$$\begin{aligned} T'^{0i} &= \gamma (T^{0i} - v_k T^{ki}) - \Gamma v_i v_k T^{0k}, \\ T'^{ij} &= T^{ij} - \gamma (v^i T^{0j} - v^j T^{0i}) + \Gamma (v^j T^{ik} - v^i T^{jk}) v_k. \end{aligned}$$

Антисимметричный 4-тензор второго ранга имеет 6 ненулевых компонент. Их можно выразить через компоненты двух векторов 3-мерного пространства. В третьей главе, при помощи таких двух векторов мы придадим этим преобразованиям ещё более компактный вид.
