Дробно-линейные преобразования и равномерность движения

Степанов С.С.

В своей известной монографии 'Теория пространства, времени и тяготения.' 1956г. Фок В.А. показал, что только дробнолинейные преобразования сохраняют равномерный характер движения в различных ситемах отсчёта. Мы приведем упрощенную версию доказательства этого факта.

Рассмотрим произвольные преобразования координаты x и времени t события в двух системах отсчета S и S':

$$x' = f(x,t), \quad t' = g(x,t). \tag{1}$$

Скорости движения некоторого тела в системе S: $u = dx/dt$ и S': $u' = dx'/dt'$ связаны соотношением:

$$u' = \frac{f_x u + f_t}{g_x u + g_t}, \tag{2}$$

где $f_x = \partial f(x,t)/\partial x$, и т.д.

Мы требуем, чтобы S и S' удовлетворяли определению инерциальных систем отсчета:

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{du'}{dt'} = 0, \tag{3}$$

т.е. если движение тела равномерно в одной системе, то оно будет равномерномерным и в другой.

Дифференцируя (2) по $dt' = (g_x u + g_t)dt$ и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях скорости u (в силу ее произвольности), получаем систему симметричных относительно f и g дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
f_{xx} g_x &= g_{xx} f_x & (4)\\
f_{tt}\, g_t &= g_{tt}\, f_t & (5)\\
f_{xx} g_t + 2 f_{xt} g_x &= g_{xx} f_t + 2 g_{xt} f_x & (6)\\
f_{tt} g_x + 2 f_{xt} g_t &= g_{tt} f_x + 2 g_{xt} f_t. & (7)
\end{aligned}
$$

Умножим уравнение (6) на f_t, а (7) на $-f_x$ и сложим. Тогда при помощи (4), (5) получим дифференциальное уравнение только для функции $f(x,t)$ и аналогичное, в силу симметрии, для $g(x,t)$:

$$
\begin{aligned}
2 f_{xt} &= f_{xx} \frac{f_t}{f_x} + f_{tt} \frac{f_x}{f_t} & (8)\\
2 g_{xt} &= g_{xx} \frac{g_t}{g_x} + g_{tt} \frac{g_x}{g_t} & (9)
\end{aligned}
$$

Введем отличный от нуля якобиан преобразований (1) $D = f_x g_t - f_t g_x$. Беря его производные по x и t и исключая смешанные производные, при помощи (8) и (9), получаем уравнения:

$$2\frac{D_x}{D} = 3\frac{f_{xx}}{f_x} = 3\frac{g_{xx}}{g_x}; \qquad 2\frac{D_t}{D} = 3\frac{f_{tt}}{f_t} = 3\frac{g_{tt}}{g_t}, \tag{10}$$

которые легко интегрируются:

$$
\begin{aligned}
D^{2/3} &= f_x A(t) = g_x \bar{A}(t) & (11)\\
D^{2/3} &= f_t B(x) = g_t \bar{B}(x) & (12)
\end{aligned}
$$

и приводят к соотношениям:

$$\frac{f_t}{f_x} = \frac{A(x)}{B(t)}; \qquad \frac{g_t}{g_x} = \frac{\bar{A}(x)}{\bar{B}(t)}; \qquad \frac{g_t}{f_t} = \frac{\bar{A}(x)}{A(x)}; \qquad \frac{g_x}{f_x} = \frac{\bar{B}(t)}{B(t)}, \tag{13}$$

где $A(x), B(t), \bar{A}(x), \bar{B}(t)$ - произвольные функции.

Находя f_{xx} и f_{tt} из первого уравнения (13) и подставляя их в (8), получим:

$$A'(x) = -\dot{B}(t) = \alpha. \tag{14}$$

Так как t и x независимые переменные, то α является произвольной константой. Уравнения (4)-(7) симметричны относительно замены f на g, поэтому аналогичные уравнения имеем также и для $\bar{A}(x)$ и $\bar{B}(t)$ и, следовательно:

$$\begin{aligned} A(x) &= \alpha x + \beta; \qquad B(t) = -(\alpha t + \gamma); \\ \bar{A}(x) &= \bar{\alpha} x + \bar{\beta}; \qquad \bar{B}(t) = -(\bar{\alpha} t + \bar{\gamma}), \end{aligned} \tag{15}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ - некоторые константы.

Интегрируя третье и четвертое уравнения (13), имеем:

$$g(x,t) = \frac{\bar{A}(x)}{A(x)} f(x,t) + M(x) = \frac{\bar{B}(t)}{B(t)} f(x,t) + N(t) \tag{16}$$

или

$$f(x,t) = (M(x) - N(t)) / \left(\frac{\bar{B}(t)}{B(t)} - \frac{\bar{A}(x)}{A(x)} \right), \tag{17}$$

где $M(x), N(t)$ - произвольные функции. Подставляя (17) в первое уравнение (13), имеем:

$$(\alpha x + \beta) M'(x) + \alpha M(x) = (\alpha t + \gamma) \dot{N}(t) + \alpha N(t) = \sigma, \tag{18}$$

где σ, в силу независимости x, t, - произвольная константа. Уравнения (18) элементарно интегрируются и дают для $M(x)$ и $N(t)$ выражения:

$$M(x) = \frac{\sigma x + \lambda}{\alpha x + \beta}; \qquad N(t) = \frac{\sigma t + \mu}{\alpha x + \gamma}, \tag{19}$$

которые и приводят к дробно-линейным пребразованиям с одинаковыми знаменателями:

$$t' = \frac{\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 t}{\alpha_0 + \beta_0 x + \gamma_0 t}, \qquad x' = \frac{\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 t}{\alpha_0 + \beta_0 x + \gamma_0 t} \tag{20}$$

Наше рассмотрение ограничивалось одной координатой x. Однако, не сложно видеть, что этот результат справедлив и для произвольного числа измерений. Действительно, считая, что движение было только вдоль оси x мы приходим к выводу, что коэффициенты дробно-линейного преобразования являются некотрыми функциями от y. Однако, при движении вдоль y весь вывод в точности повторится и мы снова прийдем к дробно-линейным преобразованиям относительно t, y с коэффициентами зависящими от x. Так как координаты x и y являются равноправными, мы заключаем, что дробнолинейное преобразование должно выполняться и относительно t, x, y. Единственным исключением может быть случай, когда и в числителе и в знаменателе, присутствуют члены вида xy которые линейны и по x и по y. Однако, прямой подстановкой линейной траектории $x_i = u_i t + x_{0i}$ в преобразования убеждаемся, что для сохранения линейности коэффициент при нелинейном члене xy должен быть равен нулю.

printed 24 января 2007 г.