

Прецессия Томаса

Как она выглядит на самом деле

С.С. Степанов

В работе получены дифференциальные уравнения, описывающие поворот стержня и прецессию собственного момента импульса гироскопа, движущихся по криволинейной траектории. Рассмотрены различные примеры такого движения.

Полученные уравнения отличаются от известной формулы Томаса, если интерпретировать её как поворот неинерциальной системы отсчёта относительно лабораторной системы. Связано это с тем, что координатные оси движущейся системы отсчёта в общем случае неортогональны для неподвижных наблюдателей. При изменении скорости их ориентация изменяется не только в результате вигнеровского вращения, но и в силу лоренцевского сокращения длины. В работе выполнен совместный учёт этих эффектов.

Показано, что векторы, связанные с различными физическими величинами, изменяются различным образом при движении неинерциальной системы отсчёта. Поэтому кинематические уравнения, описывающие изменение этих векторов, относительно лабораторной системы отсчёта оказываются различными.

Содержание

1 Прецессия Томаса	2
2 Почему уравнение Томаса не относится к лабораторной СО	4
3 Уравнение для стержня	8
4 Неинерциальные системы отсчёта	12
5 Момент импульса и спин	14
6 Прецессия спина	16
7 Ковариантная формулировка	18
8 Различные динамические уравнения	20
9 Движение спина во внешнем поле	22
10 Заключение	26
А Вигнеровское вращение	28
В Координатные оси движущейся СО	32
С Тензор спина	36
Д Движение стержня по окружности	38
Е Вигнеровское вращение для стержня	42
Ф Уравнение для компонент 4-тензора спина	44

1 Прецессия Томаса

Прецессия Люэлина Хиллета Томаса [1] была введена в 1926 г. с целью объяснения спинового расщепления линий в спектрах атомов. В настоящее время последовательное построение гамильтониана для электрона, находящегося в электромагнитном поле, осуществляется при помощи уравнения Дирака. Тем не менее, кинематический эффект специальной теории относительности, учтённый Томасом, имеет самостоятельное значение. Существует обширная литература, посвящённая томасовской прецессии, прекрасный обзор которой можно найти в недавней статье [2].

Рассмотрим вращающийся гироскоп (волчок), к которому приложена сила, изменяющая скорость его поступательного движения. Если момент силы отсутствует, то в классической механике гироскоп при движении в пространстве будет сохранять направление вектора собственного момента импульса. В теории относительности преобразования Лоренца в общем случае не коммутативны. Это приводит к повороту момента импульса (прецессии) при изменении гироскопом скорости относительно “неподвижной” (лабораторной) системы отсчёта.

Похожую задачу можно сформулировать для стержня, движущегося по криволинейной траектории. Если его ускорение (но не скорость) невелико, то стержень можно считать условно жёстким. В качестве такого стержня может выступать одна из осей системы отсчёта, начало которой движется с переменной скоростью. Предположим, что при изменении скорости все точки стержня переносятся параллельным образом с точки зрения наблюдателей в мгновенно сопутствующей стержню инерциальной системе отсчёта (ИСО). В этом случае для наблюдателей в лабораторной системе отсчёта поступательное движение стержня будет сопровождаться его поворотом.

Для вычисления величины поворота в поставленных задачах неинерциальная система отсчёта (НИСО), связанная с гироскопом или стержнем, аппроксимируется сопутствующими ИСО в моменты времени t и $t + dt$. Пусть K – это лабораторная система отсчёта, K' – сопутствующая ИСО, имеющая относительно K скорость $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$, а K'' – сопутствующая система в следующий момент времени $t + dt$, движущаяся относительно K со скоростью $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ (рис. 1). Предполагается, что относительно K' система K'' перемещается поступательно со скоростью $d\mathbf{v}'$.

Обозначим через $\mathbb{L}(\mathbf{v})$ матрицу буста (лоренцевского преобразования без вращения), а через $\mathbb{R}(\mathbf{n}, \phi)$ – матрицу 3-мерного вращения декартовых осей вокруг единичного вектора \mathbf{n} на угол ϕ .

Выполнение последовательных преобразований от K к K' со скоростью \mathbf{v} и от K' к K'' со скоростью $d\mathbf{v}'$ эквивалентно композиции буста и следующего за ним поворота (см. приложение А):

$$\mathbb{L}(d\mathbf{v}')\mathbb{L}(\mathbf{v}) = \mathbb{R}(\mathbf{n}, d\phi)\mathbb{L}(\mathbf{v} + d\mathbf{v}), \quad (1)$$

где параметры бесконечно малого поворота, называемого вигнеровским вращением, равны:

$$\mathbf{n} d\phi = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} [\mathbf{v} \times d\mathbf{v}], \quad (2)$$

а $d\mathbf{v}$ и $d\mathbf{v}'$ связаны стандартным законом сложения скоростей. Здесь и далее $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$ – лоренцевский фактор, и выбрана система единиц, в которой скорость света $c = 1$. Последовательность умножения матриц обратна последовательности выполняемых преобразований.

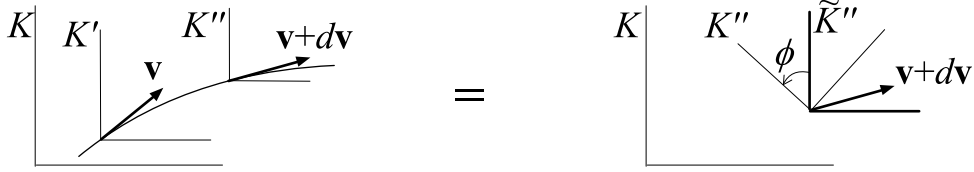


Рисунок 1. Движение НИСО в моменты времени t и $t + dt$ аппроксимируется сопутствующими ИСО K' и K'' . Два последовательных буста (от лабораторной системы K к K' и затем к K'') эквивалентны бусту от K к \tilde{K}'' и следующему за ним повороту.

Соотношение (2) лежит в основе общепринятого подхода к решению задач ускоренного движения гироскопа [2]-[4] или стержня (координатной оси НИСО) [2]. Для наблюдателей в K' и K'' мгновенные положения, например, стержня параллельны друг другу. В силу вигнеровского вращения это будет не так для наблюдателей в лабораторной системе отсчёта. Иногда [3] поворот (2) интерпретируется, как вращение НИСО относительно лабораторной системы отсчёта. Пусть \mathbf{s} – момент импульса гироскопа или вектор, направленный вдоль стержня. В результате поворота координатных осей меняются и любые векторы, неподвижные в НИСО: $d\mathbf{s} = d\phi \mathbf{n} \times \mathbf{s}$. Поэтому, вводя 3-мерное ускорение $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, можно записать:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} [\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{s}. \quad (3)$$

Эту формулу получил Томас, а общеизвестный её вывод приводится в учебнике Мёллера [3].

2 Почему уравнение Томаса не относится к лабораторной СО

Вигнеровское вращение в (1) выполняется *после* лоренцевского буста со скоростью $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, переводящего K в систему \tilde{K}'' . Поэтому сопутствующая система K'' повернута на угол (2) относительно \tilde{K}'' , и интерпретация этого поворота относительно лабораторной системы требует определённой аккуратности. В частности, в [5] предлагается учитывать замедление времени, что приводит к замене $\gamma^2 \mapsto \gamma$ в числителе формулы (3). В этом случае, с точки зрения авторов работ [2],[5], уравнение (3) выполняется относительно лабораторной системы отсчёта.

Однако, кроме замедления времени, необходимо учитывать и другие кинематические эффекты. Из преобразований Лоренца следует, что если *одновременно* зафиксировать положение всех точек движущегося объекта, то он будет выглядеть сжатым в направлении движения. Например, квадрат (в собственной системе отсчёта), движущийся со скоростью \mathbf{v} в плоскости (x, y) вдоль одной из граней, будет короче в γ раз (рисунок 2а). Если же квадрат движется под углом 45 градусов, то его диагональ вдоль направления движения будет сокращаться, а вторая диагональ – нет. Результат изображён на рисунке 2б.

Представим, что стороны квадрата – это координатные оси (x', y') движущейся системы отсчёта. Тогда при произвольном направлении её скорости эти оси будут не ортогональны друг другу и некоторым образом повернуты относительно неподвижной системы отсчёта.

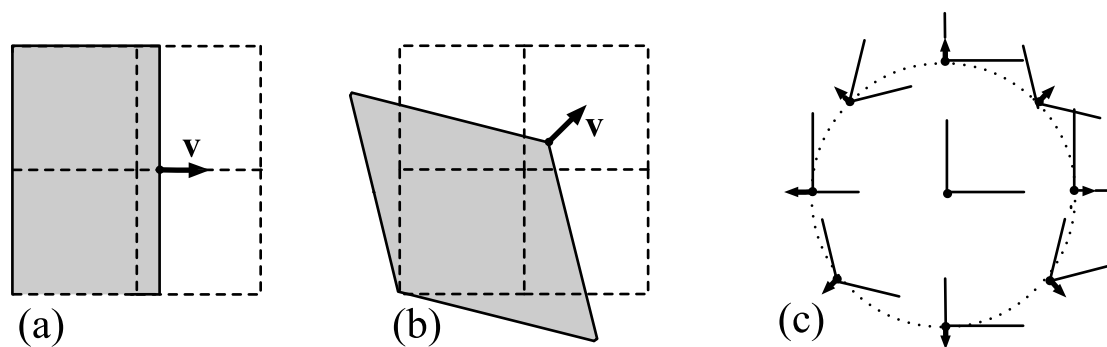


Рисунок 2. Движение квадрата со скоростью $v = 0.8$ в различных направлениях. Пунктир – координатная сетка неподвижной системы. Третий рисунок – координатные оси 8 ИСО, движущихся в различных направлениях.

На рисунке 2с изображены координатные оси восьми систем отсчёта и стрелками указаны направления их скорости (см. приложение В). В зависимости от направления скорости координатные оси наклоняются под различными углами. Понятно, что, помимо вигнеровского вращения, необходимо учесть подобный эффект “искажения” координатной сетки движущейся системы отсчёта.

Прецессия Томаса также тесно связана с относительностью одновременности. Рассмотрим стержень, расположенный “горизонтально” вдоль направления своего движения. Пусть наблюдатели в системе K' , связанной со стержнем, одновременно сообщают всем точкам стержня скорость в вертикальном направлении (рис.3а). Для “неподвижных” наблюдателей в K горизонтальная скорость стержня не изменится, а вертикальная окажется отличной от нуля. Поэтому стержень получает ускорение \mathbf{a} , перпендикулярное к его скорости \mathbf{v} . В соответствии с уравнением (3) в момент получения ускорения должен возникнуть поворот стержня ($\mathbf{v} \times \mathbf{a} \neq 0$). С физической точки зрения в основе этого эффекта лежит относительность одновременности двух событий. Если движущиеся наблюдатели одновременно начинают “поднимать вверх” левый и правый концы стержня, то эти два события будут неодновременны для неподвижных наблюдателей. Для них правый конец стержня начнёт подниматься позже левого, что в лабораторной системе будет выглядеть, как поворот (рис.3б).

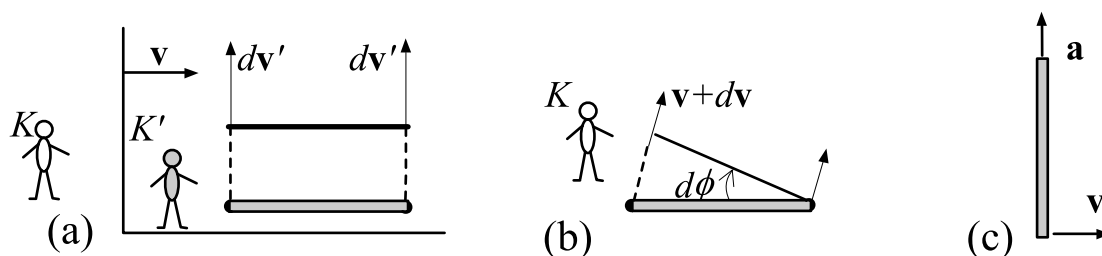


Рисунок 3. Стержень, движущийся в горизонтальном направлении приобретает вертикальную компоненту скорости. Первая картинка для горизонтального стержня выполнена “с точки зрения” наблюдателей, связанных со стержнем, вторая – для “неподвижных” наблюдателей в лабораторной системе отсчёта. На третьей картинке аналогичное ускорение получает вертикально ориентированный стержень.

Однако в общем случае уравнение (3) *неверно* описывает поведение ускоренно движущегося стержня. Из (3) следует, что такой же поворот должен произойти и для вертикально ориентированного стержня (рис.3с). В этом случае события начала смещения нижнего и верхнего конца стержня происходят на линии, перпендикулярной к скорости. Поэтому они одновременны для наблюдателей в обеих системах. Следовательно, отсутствует физическая причина для поворота в начальный момент времени (когда ускорение появилось, но скорость ещё не изменилась и перпендикулярна стержню). Тем не менее, формула Томаса (3) (если интерпретировать её, как уравнение в лабораторной системе отсчёта) предсказывает поворот стержня и в этом случае, что неверно.

Похожие аргументы можно привести относительно собственного момента импульса вращающегося гироскопа. Пусть неподвижный (но вращающийся) гироскоп начинают с ускорением перемещать вдоль прямой таким образом, что векторы \mathbf{a} и \mathbf{v} всё время остаются параллельными. Тогда правая часть уравнения (3) будет равна нулю. Отсюда следует, что компоненты момента импульса гироскопа *не изменяются* при увеличении им скорости. Однако при этом гироскоп оказывается в движущейся ИСО (после прекращения ускорения). В силу преобразований Лоренца для момента импульса его компоненты *должны* отличаться от исходных в лабораторной системе отсчёта.

Наконец, обратимся к эксперименту. Движение классического спина во внешнем электромагнитном поле описывается уравнением Баргмана-Мишеля-Телегди (ВМТ) [6]. С его помощью с высокой точностью определяются аномальные магнитные моменты частиц [7]. Для частицы с нулевым магнитным моментом (нет ларморовской прецессии), в *лабораторной* системе отсчёта уравнение ВМТ имеет вид (раздел 9):

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \gamma^2 (\mathbf{a}\mathbf{S}) \mathbf{v}. \quad (4)$$

Это уравнение является 3-мерной записью уравнения переноса Ферми [8] (раздел 7), которое также используется для описания движения гироскопа в гравитационном поле. Несложно видеть, что (4) существенно отличается от уравнения Томаса (3) и приводит не только к повороту спина, но и к изменению его длины.

Кроме этого, при обсуждении вигнеровского поворота обычно предполагается, что все 3-мерные векторы поворачиваются одинаковым образом при изменении скорости ИСО. Это было бы так для обычного поворота неподвижной декартовой системы координат. Однако нас интересует изменение векторов, *движущихся* относительно лабораторной системы. В этом случае необходимо учитывать свойства этих векторов по отношению к преобразованиям Лоренца. Например, проекции спина являются пространственными компонентами 4-вектора. Полный момент импульса – это три из шести компонент 4-тензора. Радиус-вектор, направленный вдоль стержня, – это тоже 3-вектор. Все эти векторы одинаково ведут себя по отношению к 3-мерным вращениям, но абсолютно по-разному по отношению к преобразованиям Лоренца. В результате различные физические величины, выражаемые через 3-мерные векторы, будут иметь различные уравнения для своего изменения.

Различие лоренц-трансформационных свойств векторов не учитывается также в подходе, в котором используется неевклидовы́й характер пространства скоростей. Такое пространство 3-мерно. Поэтому рассматриваемые в нём 3-мерные векторы физически отождествляются, хотя они могут иметь абсолютно различную природу.

Таким образом, существует необходимость в прояснении ряда вопросов, связанных с кинематическими эффектами специальной теории относительности, которые приводят к прецессии Томаса.

Статья состоит из двух частей, которые посвящены повороту стержня и прецессии спина. При помощи подхода, основанного на сопутствующих ИСО, выводится уравнение, описывающее поворот ускоренно движущегося стержня, который при изменении скорости перемещается параллельно с точки зрения наблюдателей в сопутствующих ИСО. Обсуждаются условия применимости полученного уравнения. Уравнение, описывающее ускоренное движение спина (как уравнение переноса Ферми), может быть получено из достаточно простых ковариантных соображений. Однако сначала оно будет найдено при помощи двух сопутствующих ИСО, так же, как и в случае со стержнем. Мы покажем, что различные определения спина движущегося гироскопа приводят к различным уравнениям прецессии относительно лабораторной системы отсчёта. В качестве примера криволинейного движения спина будет рассмотрено движение в однородном электромагнитном поле и детально разобрана прецессия спина в этом случае.

В приложениях собран ряд важных вопросов, связанных с томасовской прецессией. В единых обозначениях сравнивается подход к проблеме в известных учебниках Джексона [4] и Мёллера [3] (приложение А). В приложении В выводятся выражения для поворота координатных осей движущейся ИСО с точки зрения неподвижных наблюдателей. Приложение С посвящено деталям ковариантного введения 4-вектора и 4-тензора спина для системы частиц. В качестве примера динамики, описывающей поворот стержня, в приложении D рассмотрено движение НИСО по окружности. В приложении E приведен ещё один вывод уравнения для стержня, основанный непосредственно на вигнеровском вращении совместно с лоренцевским “искажением” координатной сетки. Последнее приложение F содержит вывод динамического уравнения для компонент тензора спина на основе его трансформационных свойств.

3 Уравнение для стержня

Пусть в ИСО находится стержень, один из концов которого расположен в начале системы отсчёта. Это начало ИСО движется с переменной скоростью $\mathbf{v}(t)$ и ускорением $\mathbf{a}(t)$ относительно неподвижной (лабораторной) системы K . Стержень перемещается параллельно с точки зрения наблюдателей в мгновенно сопутствующей к стержню ИСО. Нас интересует: как такое движение выглядит для наблюдателей в системе K ? Для них положение второго конца стержня (точка B) относительно точки A будет изменяться. Чтобы описать это изменение, можно рассмотреть две ИСО K' и K'' , сопутствующих к ИСО, учесть вигнеровское вращение и лоренцевское сокращение длины (см. приложение Е). Однако в этом разделе мы будем использовать более простые рассуждения.

Рассмотрим неподвижный относительно ИСО K' стержень, один конец которого находится в начале системы (точка A на рисунке 4).

Пусть другой “точно такой же” стержень движется относительно первого с *небольшой* постоянной скоростью $d\mathbf{v}'$ (относительно K') так, что в момент времени $t' = 0$ все точки обеих стержней совпадают. Можно считать, что второй стержень эквивалентен первому стержню, который в момент времени $t' = 0$ (в системе K') приобрел небольшую поступательную скорость $d\mathbf{v}'$ в произвольном направлении. Разница ориентации этих двух стержней для наблюдателей в лабораторной системе K даст требуемый поворот ускоренно движущегося стержня.

Пусть система отсчёта K' движется относительно “неподвижной” системы отсчёта K со скоростью \mathbf{v} . В момент времени $t = 0$ концы стержней в точке A и начала систем отсчёта K и K' совпадают. Однако, в силу относительности одновременности, вторые концы стержней (точки B) совпадать не будут (хотя это так в системе K'). Для неподвижных наблюдателей в K стержни оказываются повернутыми вокруг точки A .

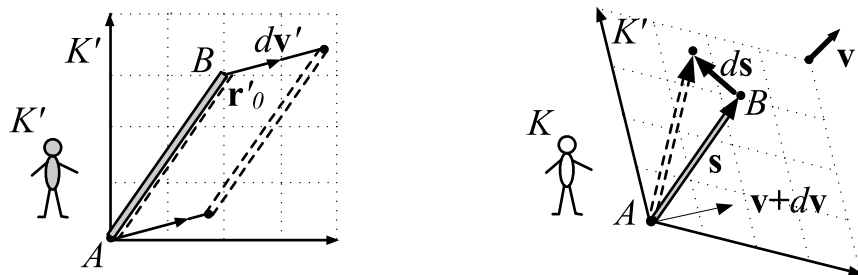


Рисунок 4. Левый рисунок выполнен с точки зрения наблюдателя в системе K' , в которой находятся два совпадающих при $t' = 0$ стержня, один из которых неподвижен, а второй движется со скоростью $d\mathbf{v}'$. На правом рисунке для наблюдателей в K при $t = 0$ стержни не совпадают.

Уравнения движения некоторой точки, имеющей постоянную скорость в системах K' и K , имеют вид:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{u}'t', \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}t. \quad (5)$$

Найдём связь скоростей \mathbf{u} , \mathbf{u}' и начальных положений \mathbf{r}_0 , \mathbf{r}'_0 точки в момент времени $t = 0$ и $t' = 0$ соответственно. Подставим уравнения движения в обратные преобразования Лоренца (118), приложение В:

$$t = \gamma(t' + \mathbf{v}\mathbf{r}'_0 + (\mathbf{v}\mathbf{u}')t') \quad (6)$$

$$\mathbf{r}_0 + \mathbf{u}t = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{u}'t' + \mathbf{v}\gamma t' + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0) + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{u}')t', \quad (7)$$

где $\Gamma = \gamma^2/(\gamma + 1) = (\gamma - 1)/v^2$. В левую часть уравнения (7) подставим время t из (6) и сгруппируем слагаемые при t' :

$$\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_0 + \gamma\mathbf{u}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0) - \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0) = [\mathbf{u}' + \gamma\mathbf{v} + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{u}') - \gamma\mathbf{u}(1 + \mathbf{v}\mathbf{u}')]t'. \quad (8)$$

Это соотношение выполняется при любом t' , если его левая и правая части равны нулю.

В результате приходим к известной формуле сложения скоростей:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}' + \mathbf{v}\gamma + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{u}')}{\gamma(1 + \mathbf{v}\mathbf{u}')} \quad (9)$$

и получаем связь начальных положений точки в двух системах отсчёта:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'_0 - \gamma\mathbf{u}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0) + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0). \quad (10)$$

В момент времени $t = t' = 0$ точки A первого и второго стержня совпадают и находятся в началах систем отсчёта ($\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'_0 = 0$). Точка B первого стержня имеет скорость $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ (или $\mathbf{u}' = 0$). Поэтому из (10) следует, что в момент времени $t = 0$ в системе K она имеет координаты:

$$\mathbf{r}_{0_1} = \mathbf{r}'_0 - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0). \quad (11)$$

Точка B второго стержня имеет скорости $\mathbf{u} = \mathbf{v} + d\mathbf{v}$ (или $\mathbf{u}' = d\mathbf{v}'$). Из (10) получаем её положение в момент $t = 0$ в системе K :

$$\mathbf{r}_{0_2} = \mathbf{r}'_0 - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0) - \gamma(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0)d\mathbf{v}. \quad (12)$$

Вычитая из (12) уравнение (11), мы получим изменение положения точки B относительно точки A (смещение конца B второго стержня относительно первого) для наблюдателей в системе K . Значения \mathbf{r}'_0 точек B для обеих стержней в системе K' одинаковы (стержни при $t' = 0$ совпадают).

Введём вектор \mathbf{s} , соединяющий концы стержня A и B . Так как радиус-вектор точки A нулевой, имеем $\mathbf{s} = \mathbf{r}_{0_1}$. После изменения стержнем скорости в (12) $\mathbf{r}_{0_2} = \mathbf{s} + d\mathbf{s}$. Поэтому:

$$d\mathbf{s} = -\gamma(\mathbf{v}\mathbf{s}')d\mathbf{v} = -\gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{s})d\mathbf{v}, \quad (13)$$

где $\mathbf{s}' = \mathbf{r}'_{0_1} = \mathbf{r}'_{0_2}$ – положение точки B стержней в системе K' . Во втором равенстве с учётом (11) подставлено $\mathbf{v}\mathbf{s}' = \gamma(\mathbf{v}\mathbf{s})$. Вводя вектор 3-мерного ускорения $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, окончательно приходим к уравнению:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{s})\mathbf{a}. \quad (14)$$

Так как точки A обеих стержней совпадали, в уравнении (14) производная по времени от \mathbf{s} имеет смысл скорости изменения ориентации и длины стержня (изменение положения точки B относительно A). Сама же точка A независимо движется с переменной скоростью $\mathbf{v}(t)$.

В результате изменения скорости происходит изменение как длины стержня, так и его ориентации. Можно разделить эти два эффекта. Вводя длину стержня $l = \sqrt{\mathbf{s}^2}$ и единичный вектор в его направлении $\mathbf{n} = \mathbf{s}/l$, из (14) несложно получить:

$$\frac{d \ln l}{dt} = -\gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{n})(\mathbf{a}\mathbf{n}). \quad (15)$$

Аналогично для единичного вектора \mathbf{n} :

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{n})[\mathbf{a} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}. \quad (16)$$

Из этого уравнения следует, что угловая скорость поворота зависит от ориентации стержня \mathbf{n} . Действительно, перепишем (16) в виде

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}, \quad (17)$$

где угловая скорость вращения вектора \mathbf{n} равна:

$$\boldsymbol{\Omega} = \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{n})[\mathbf{a} \times \mathbf{n}]. \quad (18)$$

В то же время в соответствии с уравнением (3) угловая скорость равна

$$\boldsymbol{\Omega}_T = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1}[\mathbf{v} \times \mathbf{a}]. \quad (19)$$

и не зависит от ориентации стержня.

При помощи уравнения (14) несложно проанализировать рассмотренное во введении изменение вертикальной скорости стержня, который движется в горизонтальном направлении (рисунок 5а).

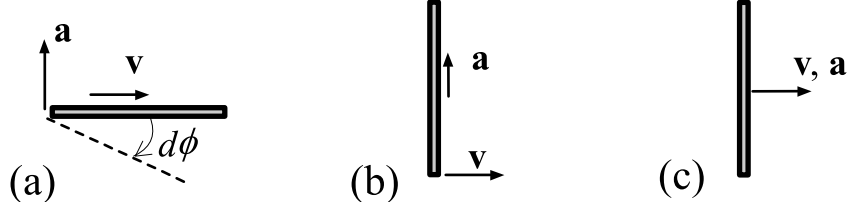


Рисунок 5. Различная ориентация стержня, скорости и ускорения

Если стержень перед началом ускорения был ориентирован горизонтально вдоль своей скорости, то $\mathbf{v}\mathbf{n} = v$, а угловая скорость поворота будет перпендикулярна плоскости, в которой лежат векторы скорости и ускорения. В этом случае угол поворота равен

$$d\phi = \gamma^2 v dv, \quad (20)$$

где dv – приращение вертикальной составляющей скорости. Угол же поворота в соответствии с формулой Томаса (3) составит

$$d\phi = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} v dv \quad (21)$$

и при малых скоростях оказывается в два раза меньше, чем следует из уравнения (14).

На рисунке 5b изображен стержень, ориентированный перпендикулярно к скорости. Так как $\mathbf{v}\mathbf{s} = 0$, то поворот стержня происходить не будет. Этот же результат следует из соображений, основанных на относительности одновременности. Как отмечалось в предыдущем разделе, формула Томаса в этом случае, тем не менее, предсказывает вращение стержня.

На рисунке 5c также изображен стержень, ориентированный перпендикулярно к скорости. Однако теперь его ускорение параллельно скорости стержня. Так как по-прежнему $\mathbf{v}\mathbf{s} = 0$, поворот стержня, естественно, происходить не будет. Заметим, что в этом случае $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = 0$ и формула Томаса (3) также предсказывает отсутствие вращения.

Ещё один случай, когда стержень движется по окружности, подробно разобран в приложении D.

4 Неинерциальные системы отсчёта

С целью установления пределов применимости уравнения (14) рассмотрим ускоренное движение горизонтально лежащего стержня (рисунок 6а). Если стержень, скорость и ускорение параллельны, то уравнение (15) принимает вид:

$$\frac{d \ln l}{dt} = -\frac{va}{1-v^2} = \frac{1}{2} \frac{d \ln(1-v^2)}{dt}. \quad (22)$$

Интегрируя его с начальным условием $l(0) = l_0$, $v(0) = 0$, получаем:

$$l(t) = l_0 \sqrt{1-v^2}. \quad (23)$$

Это выражение совпадает с мгновенным лоренцевским сокращением движущегося со скоростью $v = v(t)$ стержня. Такая зависимость длины от времени на самом деле справедлива только при небольшом ускорении. Дело в том, что использование двух сопутствующих ИСО для описания неинерциального движения является лишь некоторым приближением. Кратко рассмотрим физические эффекты, происходящие в неинерционной системе отсчёта, отсылая за подробностями к [12].



Рисунок 6. Ускоренное движение горизонтального стержня и его моделирование при помощи двух космических кораблей.

Пусть с началом и концом стержня связаны два наблюдателя, которые на рисунке 6b представлены в виде двух космических кораблей. Предположим, что они покоились относительно ИСО K и в момент времени $t = 0$ начали ускоренное движение. Первый корабль при $t = 0$ имел координату $x = 0$, а второй – $x = l_0$. Пусть при $t > 0$ первый корабль движется релятивистски равноускоренно вдоль оси x следующим образом:

$$x(t) = \frac{1}{w} (\sqrt{1 + (wt)^2} - 1) = \frac{\gamma - 1}{w}, \quad (24)$$

где $w = const$ – собственное ускорение первого корабля. Как при этом изменяется координата $f(t)$ второго корабля?

Ответ существенно зависит от того, является ли ИСО жёсткой для её наблюдателей или нет. Когда корабли синхронно (одновременно) ускоряются с точки зрения системы K , то их ускорение не будет синхронным в K' , и наоборот.

Если наблюдатели в K' “выдерживают” свою систему жёсткой, то наблюдатели в инерциальной системе K будут регистрировать её сокращение в направлении движения. События (ускорительные импульсы корабля) по ходу движения в системе K' происходят позже по сравнению с событиями, расположенными против хода, и второй корабль в системе K разгоняется медленнее.

Пусть для контроля относительной неподвижности неинерциальные наблюдатели используют радиолокационный метод, обмениваясь световыми сигналами. Тогда можно показать (например, [3],[12]), что собственное расстояние между ними будет неизменным, если второй корабль имеет следующее уравнение движения:

$$f(t) = \frac{1}{w} (\sqrt{(1 + w l_0)^2 + (wt)^2} - 1). \quad (25)$$

В результате расстояние между кораблями (длина стержня) с точки зрения неподвижных наблюдателей будет равна $l(t) = f(t) - x(t)$, или:

$$l(t) = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 2wl_0 + (wl_0)^2} - \gamma}{w} \approx \frac{l_0}{\gamma} \left(1 + \frac{v^2}{2} wl_0 + \dots\right). \quad (26)$$

Это соотношение стремится к мгновенному лоренцевскому сокращению (23), только при $v^2 wl_0 = v^2 \gamma^3 a l_0 \ll 1$, где $a = w/\gamma^3$ – ускорение левого корабля относительно лабораторной системы отсчёта.

Физика в неинерционной системе достаточно своеобразна. В частности, течение времени различно для удалённых, хотя и относительно неподвижных наблюдателей. Например, если второй (правый) корабль посылает периодические сигналы с частотой ν_0 , то первый корабль будет принимать их с частотой $\nu = \nu_0 (1 + wl_0)$, тем большей, чем больше расстояние между кораблями. Если ускорение прекращается, то “отключение двигателей” произойдёт одновременно и последним перестанет ускоряться правый корабль. Когда и он отключит свои двигатели, оба корабля окажутся в одной инерциальной системе отсчёта. Расстояние между ними будет в точности равно лоренцевскому сокращению длины, однако часы окажутся рассинхронизированными.

При получении уравнения (14) мы игнорировали все эти эффекты, следуя общепринятому методу двух сопутствующих ИСО. Это приближение будет справедливым только при относительно небольшом ускорении (точнее при $a \ll a_0 = c^4/(v^2 \gamma^3 l_0)$, где восстановлена скорость света c). Впрочем, для метрового стержня, двигающегося со скоростью $v = 0.8 c$, имеем достаточно большое значение $a_0 = 3 \cdot 10^{16} \text{ м/с}^2$.

5 Момент импульса и спин

До сих пор мы рассматривали поворот стержня, движущегося по криволинейной траектории. Иногда вектор спина (собственного момента импульса) гироскопа отождествляют с таким стержнем (или осью координат НИСО). Ниже мы покажем, что это в общем случае неверно.

Как известно [13], в теории относительности момент импульса \mathbf{L} точечной частицы не является векторной частью 4-вектора. Чтобы записать преобразования между двумя инерциальными системами отсчёта, необходимы два вектора:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad \mathbf{G} = E \mathbf{r} - \mathbf{p} t, \quad (27)$$

где \mathbf{p} – импульс частицы, а E – её энергия. Эти векторы являются компонентами антисимметричного тензора

$$L^{\alpha\beta} = x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha = (\mathbf{G}, \mathbf{L}), \quad (28)$$

где $x^\alpha = \{t, \mathbf{r}\}$ – 4-вектор положения частицы в данный момент времени, а $p^\alpha = \{E, \mathbf{p}\}$ – её 4-импульс и $\mathbf{G} = \{L^{10}, L^{20}, L^{30}\}$, $\mathbf{L} = \{L^{23}, L^{31}, L^{12}\}$.

Используя преобразования Лоренца для координат-времени (116) и аналогичные для энергии-импульса, можно получить преобразования:

$$\begin{cases} \mathbf{L}' = \gamma (\mathbf{L} + \mathbf{v} \times \mathbf{G}) - \Gamma (\mathbf{v} \mathbf{L}) \mathbf{v}, \\ \mathbf{G}' = \gamma (\mathbf{G} - \mathbf{v} \times \mathbf{L}) - \Gamma (\mathbf{v} \mathbf{G}) \mathbf{v}. \end{cases} \quad (29)$$

Продольные компоненты векторов \mathbf{L} и \mathbf{G} при преобразованиях Лоренца не изменяются: $\mathbf{v} \mathbf{L} = \mathbf{v} \mathbf{L}'$, $\mathbf{v} \mathbf{G} = \mathbf{v} \mathbf{G}'$. Кроме этого, для точечной частицы эти векторы ортогональны в любой системе отсчёта ($\mathbf{L} \mathbf{G} = 0$).

Суммарная энергия движения, импульс и момент импульса системы частиц определяют суммированием по всем частицам:

$$\mathcal{E} = \sum E, \quad \mathbf{P} = \sum \mathbf{p}, \quad \mathbf{L} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (30)$$

где опущены индексы, нумерующие частицы. В системе отсчёта, в которой суммарный импульс равен нулю ($\mathbf{P} = 0$), вектор \mathbf{G} , делённый на суммарную энергию \mathcal{E} , имеет смысл центра энергии системы [13] (в нерелятивистском случае центра масс):

$$\mathbf{R} = \frac{\sum E \mathbf{r}}{\sum E} \approx \frac{\sum m \mathbf{r}}{\sum m}, \quad (31)$$

где приближенное равенство записано в нерелятивистском пределе, в котором энергия частицы E приблизительно равна её массе m .

Для системы частиц кроме полного момента импульса можно ввести также 4-вектор классического (не квантового) спина [8]:

$$S_\nu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} L^{\alpha\beta} U^\gamma, \quad (32)$$

где $\varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma}$ – символ Леви-Чевиты, а U^α – суммарная 4-скорость системы частиц, определяемая при помощи суммарного 4-импульса $P^\alpha = \{\mathcal{E}, \mathbf{P}\}$:

$$U^\alpha = \frac{P^\alpha}{M} = \{U^0, \mathbf{U}\} = \gamma \{1, \mathbf{u}\}, \quad (33)$$

где \mathbf{u} – 3-вектор “суммарной скорости”, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$ а $M = \sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathbf{P}^2}$ – масса системы частиц (без учёта энергии их взаимодействия). Мы используем сигнатуру $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ и $\varepsilon_{0123} = 1$.

Физический смысл классического спина становится ясным, если его определение (32) записать в 3-мерных обозначениях $S^\alpha = \{S^0, \mathbf{S}\}$:

$$\mathbf{S} = \gamma (\mathbf{L} - \mathbf{R} \times \mathbf{P}), \quad S^0 = \mathbf{uS}. \quad (34)$$

Таким образом, спин имеет смысл *собственного момента импульса* и пропорционален разнице полного момента импульса (\mathbf{L}) и момента движения системы как целого ($\mathbf{R} \times \mathbf{P}$). Кроме этого, 4-спин (в отличие от полного момента) не изменяется при трансляционных преобразованиях.

В силу антисимметричности символа Леви-Чевиты произведение спина на 4-вектор скорости в любой системе отсчёта равно нулю:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{U} = S_\alpha U^\alpha = 0. \quad (35)$$

Поэтому в системе покоя $\mathbf{U} = \{1, \mathbf{0}\}$ спин обладает только векторными компонентами $\mathbf{S} = \{0, \mathbf{S}\}$. В произвольной системе отсчёта $S^0 = \mathbf{uS}$.

Для точечной частицы $\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}$, поэтому всегда $\mathbf{S} = \mathbf{0}$. В случае системы частиц суммарный момент импульса непропорционален суммарному импульсу (30) и спин, в общем случае, не равен нулю.

Трансляционно инвариантную величину, характеризующую собственный момент вращения, можно ввести не единственным образом. Например, при помощи 4-вектора спина можно определить 4-тензор спина (см. приложение С):

$$S^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} U_\mu S_\nu. \quad (36)$$

Два 3-мерных вектора, составляющих компоненты тензора спина, обозначим маленькими буквами $\mathbf{g} = \{S^{10}, S^{20}, S^{30}\}$, $\mathbf{s} = \{S^{23}, S^{31}, S^{12}\}$, где

$$\mathbf{g} = \mathbf{u} \times \mathbf{s}, \quad \mathbf{s} = \gamma \mathbf{S} - \gamma(\mathbf{uS})\mathbf{u}. \quad (37)$$

В системе покоя, в которой $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, оба 3-вектора спина совпадают $\mathbf{s} = \mathbf{S}$ и равны полному моменту импульса системы \mathbf{L} .

6 Прецессия спина

Рассмотрим прецессию (изменение величины и ориентации) спина гироскопа при его криволинейном движении. Последующие рассуждения будут справедливы для любого 4-вектора \mathbf{S} , ортогонального к 4-скорости $U = \{\gamma u, \mathbf{u}\gamma u\}$:

$$U \cdot \mathbf{S} = U^0 S^0 - \mathbf{U}\mathbf{S} = 0. \quad (38)$$

Из этого соотношения следует, что $S^0 = \mathbf{u}\mathbf{S}$. Запишем преобразования для 3-вектора спина (заменяя в преобразованиях Лоренца (116) $t \mapsto \mathbf{u}\mathbf{S}$ и $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{S}$):

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} - \gamma (\mathbf{u}\mathbf{S}) \mathbf{v} + \Gamma (\mathbf{v}\mathbf{S})\mathbf{v}. \quad (39)$$

Обратное преобразование получается заменой скорости $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}' + \gamma (\mathbf{u}'\mathbf{S}') \mathbf{v} + \Gamma (\mathbf{v}\mathbf{S}') \mathbf{v}, \quad (40)$$

так как в любой системе отсчёта $S^0 = \mathbf{u}\mathbf{S}$. Если гироскоп неподвижен ($\mathbf{u}' = 0$) относительно системы K' , то:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}' + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\mathbf{v}\mathbf{S}') \mathbf{v}. \quad (41)$$

Обратное преобразование получается из (39) после подстановки $\mathbf{u} = \mathbf{v}$:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} - \frac{\gamma}{\gamma + 1} (\mathbf{v}\mathbf{S}) \mathbf{v}. \quad (42)$$

То, что (41) и (42) взаимно обратны, несложно проверить их прямой подстановкой друг в друга.

Введём три системы отсчёта K , K' и K'' . Пусть скорость системы K' относительно K равна \mathbf{v} , а скорость системы K'' относительно K' равна $d\mathbf{v}'$. Соответственно, скорость K'' относительно K равна $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Применим преобразование (41) между ИСО K' и K'' . Пусть в системе K'' находится неподвижный (но вращающийся) гироскоп со спином \mathbf{S}'' .

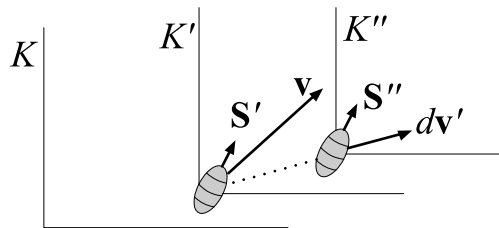


Рисунок 7. Два вращающихся гироскопа, неподвижных относительно систем K' и K''

В этом случае в преобразовании (41) необходимо добавить всем величинам штрих и заменить $\mathbf{v} \mapsto d\mathbf{v}'$. В результате в первом приближении по $d\mathbf{v}'$ спин остаётся в системе K' без изменений:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}'' . \quad (43)$$

Рассмотрим теперь “точно такой же” гироскоп, неподвижный в системе K' , со спином \mathbf{S}' (рис.7). Когда начала систем K' и K'' совпадают, аналогично стержням из раздела 3 “совпадают” и гироскопы. Поэтому будем считать, что гироскоп системы K'' получается при изменении на $d\mathbf{v}'$ скорости гироскопа системы K' .

Пусть первый гироскоп относительно лабораторной системы K имеет спин \mathbf{S} , а второй – $\mathbf{S} + d\mathbf{S}$. Скорость первого гироскопа равна \mathbf{v} и для него выполняется преобразование (42). Второй гироскоп имеет скорость $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, поэтому для него из (39) следует:

$$\mathbf{S}'' = \mathbf{S} + d\mathbf{S} - \gamma ((\mathbf{v} + d\mathbf{v})(\mathbf{S} + d\mathbf{S})) \mathbf{v} + \Gamma (\mathbf{v}(\mathbf{S} + d\mathbf{S})) \mathbf{v} . \quad (44)$$

Вычитая из этого преобразования (42), учитывая (43) и сохраняя первый порядок малости, имеем:

$$d\mathbf{S} = \frac{\gamma}{\gamma + 1} (\mathbf{v}d\mathbf{S}) \mathbf{v} + \gamma (\mathbf{S}d\mathbf{v}) \mathbf{v} . \quad (45)$$

Умножим правую и левую части на \mathbf{v} :

$$\mathbf{v}d\mathbf{S} = \gamma^2 v^2 (\mathbf{S}d\mathbf{v}) . \quad (46)$$

Поэтому (45) можно переписать следующим образом:

$$d\mathbf{S} = \gamma^2 (\mathbf{S}d\mathbf{v}) \mathbf{v} . \quad (47)$$

Вводя вектор 3-мерного ускорения $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, окончательно получаем:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \gamma^2 (\mathbf{a}\mathbf{S}) \mathbf{v} . \quad (48)$$

Если ускорение остаётся перпендикулярным вектору спина ($\mathbf{a}\mathbf{S} = 0$), то спин при таком движении не изменяется. В остальных случаях при ускоренном движении происходит изменение спина. При ускорении гироскопа из состояния покоя вдоль оси x интегрирование (48) приводит к следующей зависимости продольной к скорости компоненты спина от времени: $S_x(t) = S_x(0)/\sqrt{1 - v^2(t)}$. Это же соотношение следует также из преобразований Лоренца (41).

Обратим внимание, что уравнение (48) отличается от уравнения (14), описывающего поворот “жёсткого” стержня при криволинейном движении. Поэтому повороты стержня и спина в общем случае различны.

7 Ковариантная формулировка

Уравнению (48) можно придать ковариантную форму:

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\tau} = -(\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}) \mathbf{V}, \quad (49)$$

где $\mathbf{V} = \{\gamma, \mathbf{v}\gamma\}$ – 4-скорость, а \mathbf{A} – 4-ускорение:

$$\mathbf{A} = \frac{dV^\alpha}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} \{\gamma, \mathbf{v}\gamma\} = \{(\mathbf{v}\mathbf{a})\gamma^4, \mathbf{a}\gamma^2 + \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{a})\gamma^4\}, \quad (50)$$

$d\tau = \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} dt$ – собственное время гироскопа и использованы безындексные обозначения для 4-векторов (т.е. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{S} = A^\alpha S_\alpha$, и т.д.).

Дифференциальное уравнение (49) называется уравнением переноса Ферми. Оно может быть получено [8] в предположении, что изменение 4-вектора спина dS^α при изменении скорости системы отсчёта пропорционально 4-скорости V^α . Действительно, пусть в сопутствующей гироскопу ИСО K' (где $\mathbf{v} = 0$) нет прецессии:

$$\frac{d\mathbf{S}'}{dt'} = 0. \quad (51)$$

Предположим, что производная 4-спина по собственному времени τ выражается через 4-скорость \mathbf{V} , 4-ускорение \mathbf{A} и сам 4-спин. В сопутствующей гироскопу ИСО эти 4-векторы имеют компоненты:

$$\mathbf{S} = \{0, \mathbf{S}'\}, \quad \mathbf{V} = \{1, \mathbf{0}\}, \quad \mathbf{A} = \{0, \mathbf{a}'\}. \quad (52)$$

Так как только у 4-скорости в этой системе равны нулю пространственные компоненты, можно записать:

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\tau} = \alpha \mathbf{V}, \quad \text{или} \quad \frac{d\{S'_0, \mathbf{S}'\}}{dt'} = \alpha \{1, \mathbf{0}\}, \quad (53)$$

где α – некоторый скаляр. Первое соотношение записано для 4-векторов в безындексном виде, а второе – его покомпонентное выражение в сопутствующей ИСО K' . Заметим, что хотя нулевая компонента 4-спина $S_0 = \mathbf{v}\mathbf{S}$ в K' равна нулю, её производная по времени отлична от нуля:

$$\frac{dS'_0}{dt'} = \frac{d(\mathbf{v}'\mathbf{S}')}{dt'} = \mathbf{a}'\mathbf{S}', \quad (54)$$

где учтено соотношение (51). Поэтому для нулевой компоненты уравнения (53) в сопутствующей системе $\alpha = \mathbf{a}'\mathbf{S}'$.

Дифференцируя условие ортогональности 4-векторов скорости и спина $V \cdot S = 0$ и учитывая (53), получаем:

$$0 = \frac{d(V \cdot S)}{d\tau} = A \cdot S + \alpha V \cdot V. \quad (55)$$

Так как квадрат 4-скорости равен единице ($V^2 = 1$), находим $\alpha = -A \cdot S$ и приходим к уравнению (49).

Вводя матрицу $(V \otimes A)_{\alpha\beta} = V_\alpha A_\beta$, уравнение переноса Ферми можно записать в эквивалентном матричном виде:

$$\frac{dS}{d\tau} = -(V \otimes A) \cdot S, \quad (56)$$

где матрица $(V \otimes A)$ определяет повороты 4-вектора спина.

Благодаря уравнению переноса Ферми и условию $V \cdot S = 0$ квадрат 4-спина оказывается постоянным:

$$\frac{dS^2}{d\tau} = 0, \quad (57)$$

хотя квадрат 3-спина изменяется:

$$\frac{d\mathbf{S}^2}{dt} = 2\gamma^2(\mathbf{vS})(\mathbf{aS}) \quad (58)$$

(если спин не ортогонален скорости или ускорению). Поэтому чистой прецессии (поворота вектора спина \mathbf{S}) не происходит, и при движении изменяется не только направление спина, но и его длина.

При помощи ковариантного дифференциала уравнение переноса Ферми можно записать в криволинейных координатах

$$\frac{DS^\alpha}{d\tau} = \frac{dS^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha S^\mu V^\nu = -(A^\mu S_\mu) V^\alpha \quad (59)$$

В таком виде оно справедливо при наличии гравитационного поля и дополнительного внешнего силового поля, создающего 4-силу A :

$$\frac{DV^\alpha}{d\tau} = \frac{dV^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha V^\mu V^\nu = A^\alpha. \quad (60)$$

Если гироскоп свободно движется в гравитационном поле, то $A = 0$ и (60) становится уравнением геодезической. Прецессия спина в этом случае также происходит. Однако она определяется уравнением $DS/d\tau = 0$ и носит чисто динамический характер, возникая благодаря гравитационному полю (геометрии 4-пространства).

8 Различные динамические уравнения

Уравнение Томаса (3) можно получить из уравнения (48), описывающего изменение спина в лабораторной системе отсчёта [14]. Однако оно при этом будет иметь достаточно специфический смысл.

Возьмём производную по времени *лабораторной* системы от преобразования (42) для спина между сопутствующей (\mathbf{S}') и лабораторной (\mathbf{S}) системами отсчёта:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} - \frac{\gamma}{\gamma + 1} (\mathbf{vS}) \mathbf{v}. \quad (61)$$

Учитывая производную лоренцевского фактора $d\gamma/dt = \gamma^3 (\mathbf{va})$, уравнение (48) и следующее из него уравнение:

$$\frac{d(\mathbf{vS})}{dt} = \gamma^2 (\mathbf{aS}), \quad (62)$$

получаем:

$$\frac{d\mathbf{S}'}{dt} = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\mathbf{aS}) \mathbf{v} - \frac{\gamma}{\gamma + 1} (\mathbf{vS}) \mathbf{a} - \frac{\gamma^3}{(\gamma + 1)^2} (\mathbf{va})(\mathbf{vS}) \mathbf{v}. \quad (63)$$

Подставляя в правую часть вместо \mathbf{S} обратное преобразование (41), окончательно приходим к уравнению:

$$\frac{d\mathbf{S}'}{dt} = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} [\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{S}'. \quad (64)$$

Уравнение (64) формально совпадает с уравнением Томаса (3). Однако в (64) все величины (за исключением спина) относятся к лабораторной системе отсчёта. Спин же \mathbf{S}' измеряется наблюдателями в сопутствующей к частице системе отсчёта. Поэтому фактически (64) не является уравнением прецессии ни относительно лабораторной системы отсчёта, ни относительно сопутствующей. Хотя при этом оно математически абсолютно корректно, как и выражение для вигнеровского вращения (2).

Переход от (48) к (64) можно проделать в ковариантном виде [18], вводя матрицу лоренцевского преобразования $S' = \Lambda \cdot S$. Используя уравнение переноса в матричном виде (56), несложно получить:

$$\frac{dS'}{d\tau} = \left(\frac{d\Lambda}{d\tau} \cdot \Lambda^{-1} - \Lambda \cdot (\mathbf{V} \otimes \mathbf{A}) \cdot \Lambda^{-1} \right) \cdot S', \quad (65)$$

где Λ^{-1} – обратная к Λ матрица. Можно также переписать это уравнение в тетрадном формализме [19]. Выбор конкретной лабораторной системы отсчёта для 4-векторов S , V , A и матрицы Λ перехода к сопутствующей системе отсчёта снова нам даст уравнение (64) в смешанных обозначениях (величинах, относящихся к различным системам отсчёта).

Как отмечалось во введении, на вигнеровское вращение накладывае-
тся лоренцевский буст. Поэтому в лабораторной системе отсчёта не про-
исходит только лишь поворота неинерциальной системы отсчёта. В ре-
зультате векторы с различными трансформационными свойствами име-
ют различные динамические уравнения.

Например, соотношение (61) можно интерпретировать не как преоб-
разование Лоренца, а как определение нового вектора спина в лабора-
торной системе отсчёта. Тогда уравнение (64) будет уравнением, относя-
щимся к лабораторной системе для модифицированного спина \mathbf{S}' .

Найдём, например, уравнение для пространственных компонент тен-
зора спина (37). Дифференцируя \mathbf{s} (полагая $\mathbf{u} = \mathbf{v}$), с учётом уравнений
(48) и (62) получаем:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \gamma^3 (\mathbf{v}\mathbf{a}) \mathbf{S} - \gamma^3 (\mathbf{v}\mathbf{a})(\mathbf{v}\mathbf{S}) \mathbf{v} - \gamma(\mathbf{v}\mathbf{S}) \mathbf{a}. \quad (66)$$

Умножая (37) на скорость, несложно обратить связь \mathbf{S} и \mathbf{s} :

$$\mathbf{v}\mathbf{S} = \gamma (\mathbf{v}\mathbf{s}), \quad \mathbf{S} = \frac{\mathbf{s}}{\gamma} + \gamma (\mathbf{v}\mathbf{s})\mathbf{v}. \quad (67)$$

Подставляя эти соотношения в (66), окончательно получаем:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \gamma^2 [\mathbf{v} \times [\mathbf{s} \times \mathbf{a}]]. \quad (68)$$

Это же уравнение можно получить аналогично (48) методом двух ги-
роскопов. Однако при этом необходимо использовать преобразования не
для 4-вектора, а для 4-тензора (см. приложение F).

Запишем уравнение (68) в ковариантных обозначениях. Продиффе-
ренцируем определение 4-тензора (36) по собственному времени:

$$\frac{dS^{\alpha\beta}}{d\tau} = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} A_\mu S_\nu, \quad (69)$$

где учтено уравнение переноса Ферми и антисимметричность тензора
 $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$. В приложении C показано, что 4-вектор спина выражается через
тензор $S_{\alpha\beta}$ также, как и через $L_{\alpha\beta}$:

$$S_\nu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} S^{\alpha\beta} V^\gamma. \quad (70)$$

Подставляя его в (69) и учитывая $V \cdot A = 0$, окончательно получаем:

$$\frac{dS^{\alpha\beta}}{d\tau} = A_\gamma (S^{\gamma\alpha} V^\beta - S^{\gamma\beta} V^\alpha), \quad (71)$$

что является 4-мерной версией уравнения (68) для $\mathbf{s} = \{S^{23}, S^{31}, S^{12}\}$.

9 Движение спина во внешнем поле

До сих пор мы рассматривали прецессию Томаса, как кинематическую задачу. В реальности, чтобы НИСО двигалась с ускорением, необходимо силовое поле или другой способ изменения скорости изучаемого объекта.

Экспериментально наиболее доступны две физические ситуации: 1) микрочастица (электрон, протон, атомное ядро) движется во внешнем электромагнитном поле; 2) макроскопический гироскоп движется по орбите вокруг Земли. В обеих ситуациях спин объекта изменяется, как в результате кинематического эффекта Томаса, так и в силу динамических причин.

Проще всего кинематика и динамика разделяются при движении в электромагнитном поле. В этом случае поведение классического спина удовлетворяет уравнению Баргмана-Мишеля-Телегди (ВМТ) [6]. Пусть в системе покоя частицы изменение спина, находящегося в магнитном поле, испытывает ларморовскую прецессию:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{gQ}{2m} \mathbf{S} \times \mathbf{B}, \quad (72)$$

где Q , m – заряд и масса частицы, а g – гиромагнитный фактор (для электрона $Q = -e$, $g \approx 2$). Кроме этого, пусть производная 4-вектора спина по собственному времени частицы $d\tau = dt\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$ линейна по тензору электромагнитного поля $\mathbf{F} \equiv F^{\alpha\beta}$ и спину $\mathbf{S} \equiv S^\alpha$. Кроме этого производная спина может зависеть от 4-скорости \mathbf{V} :

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\tau} = \alpha_1 \mathbf{S} + \alpha_2 \mathbf{V} + \alpha_3 \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} + \alpha_4 \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \alpha_5 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V}, \quad (73)$$

где α_i – некоторые константы. Предполагается также, что на частицу действует сила Лоренца (однородное магнитное поле):

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{d\tau} = \frac{Q}{m} \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}. \quad (74)$$

Производная условия ортогональности 4-спина и 4-скорости $\mathbf{S} \cdot \mathbf{V} = 0$ с учётом уравнений (73), (74) даёт $\alpha_2 = 0$, $\alpha_5 = \alpha_3 - Q/m$. Уравнение Лармора (72) в системе покоя частицы ($\mathbf{V} = \{1, \mathbf{0}\}$) позволяет найти оставшиеся коэффициенты: $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_3 = gQ/2m$. В результате получается ВМТ уравнение:

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\tau} = \frac{gQ}{2m} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} - \left(1 - \frac{g}{2}\right) (\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}) \mathbf{V}, \quad (75)$$

где 4-ускорение \mathbf{A} определяется силой Лоренца (74).

Запишем ВМТ уравнение в 3-мерных обозначениях. Учитывая $\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} = \{\mathbf{E}\mathbf{S}, S^0\mathbf{E} + \mathbf{S} \times \mathbf{B}\}$, где \mathbf{E} и \mathbf{B} – электрическое и магнитное поле, имеем

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{gQ}{2m\gamma} \left((\mathbf{v}\mathbf{S}) \mathbf{E} + \mathbf{S} \times \mathbf{B} \right) + \left(1 - \frac{g}{2} \right) \gamma^2 (\mathbf{a}\mathbf{S}) \mathbf{v}. \quad (76)$$

Если магнитный момент у частицы со спином отсутствует ($g = 0$), то прецессия спина имеет чисто кинематическую природу, и из (76) следует уравнение (48). На самом деле частицы, имеющие заряд и спин, но не имеющие магнитного момента, неизвестны. Однако, например, ядро урана ${}^{235}_{92}\text{U}$ имеет достаточно малый g -фактор ($g = -0.26$), что в 11 раз меньше, чем у протона, и в 8 – чем у электрона. Для такого объекта кинематический эффект преобладает над динамическим.

При движении в однородном магнитном поле модуль скорости частицы постоянен и 3-вектор ускорения равен:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{Q}{m\gamma} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = \omega [\mathbf{n} \times \mathbf{v}], \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \omega [\mathbf{n} \times \mathbf{a}] = -\omega^2 \mathbf{v}, \quad (77)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор в направлении магнитного поля, а циклотронная частота $\omega = -QB/m\gamma$ в зависимости от знака заряда частицы может быть как положительной, так и отрицательной. Уравнение для спина принимает вид:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{g}{2} \omega [\mathbf{n} \times \mathbf{S}] + \left(1 - \frac{g}{2} \right) \gamma^2 (\mathbf{a}\mathbf{S}) \mathbf{v}, \quad (78)$$

откуда, используя (77), несложно получить:

$$\frac{d(\mathbf{v}\mathbf{S})}{dt} = \gamma^2 \left(1 - \frac{g}{2} \right) (\mathbf{a}\mathbf{S}), \quad \frac{d(\mathbf{a}\mathbf{S})}{dt} = -\omega^2 \left(1 - \frac{g}{2} \right) (\mathbf{v}\mathbf{S}). \quad (79)$$

Эти уравнения приводят к уравнениям осцилляторного типа:

$$\frac{d^2(\mathbf{v}\mathbf{S})}{dt^2} + \bar{\omega}^2 (\mathbf{v}\mathbf{S}) = 0, \quad \frac{d^2(\mathbf{a}\mathbf{S})}{dt^2} + \bar{\omega}^2 (\mathbf{a}\mathbf{S}) = 0, \quad (80)$$

где $\bar{\omega} = \gamma\omega(1 - g/2)$. Потому проекции спина на скорость и ускорение совершают гармонические колебания с частотой, не зависящей от величины скорости:

$$\omega_a = \frac{2 - g}{2} \gamma\omega = \frac{2 - g}{2} \frac{QB}{m}. \quad (81)$$

Для электрона $g \approx 2$ и динамическая ларморовская прецессия практически полностью компенсирует кинематическую прецессию. Небольшое изменение поляризации электрона связано с отклонением g -фактора от двойки. Это позволяет измерять аномальные магнитные моменты [7].

Запишем явное решение осцилляторных уравнений в случае нулевого магнитного момента ($g = 0$):

$$\begin{cases} \mathbf{vS} = (\mathbf{vS})_0 \cos(\omega\gamma t) + \frac{\gamma}{\omega} (\mathbf{aS})_0 \sin(\omega\gamma t), \\ \mathbf{aS} = (\mathbf{aS})_0 \cos(\omega\gamma t) - \frac{\omega}{\gamma} (\mathbf{vS})_0 \sin(\omega\gamma t), \end{cases} \quad (82)$$

где индекс 0 соответствует времени $t = 0$ и для получения начальных значений использованы уравнения (79). Пусть движение заряда по окружности с циклотронной частотой ω происходит в плоскости (x, y) по траектории $\{x, y\} = R\{\cos(\omega t), \sin(\omega t)\}$, где радиус окружности равен $R = v/\omega$. Относительно лабораторной системы компонента спина S_z не изменяется, а проекции на оси (x, y) равны:

$$\begin{cases} S_x \cos(\omega t) + S_y \sin(\omega t) = S_{x0} \cos(\omega\gamma t) + (S_{y0}/\gamma) \sin(\omega\gamma t) \\ -S_x \sin(\omega t) + S_y \cos(\omega t) = S_{y0} \cos(\omega\gamma t) - (\gamma S_{x0}) \sin(\omega\gamma t), \end{cases} \quad (83)$$

где S_{x0}, S_{y0} – начальные значения проекций спина на оси лабораторной системы координат в момент $t = 0$, когда скорость имела компоненты $\mathbf{v} = R\omega \{0, 1\}$, а ускорение $\mathbf{a} = -R\omega^2 \{1, 0\}$.

При совершении гироскопом полного оборота ($\omega t = 2\pi$) по окружности с малой скоростью ($\gamma \approx 1 + v^2/2$) компоненты спина поворачиваются на небольшой угол πv^2 :

$$\begin{cases} S_x \approx S_{x0} + S_{y0} \pi v^2 \\ S_y \approx S_{y0} - S_{x0} \pi v^2. \end{cases} \quad (84)$$

В пределе *малых скоростей* при движении *по окружности* прецессия спина выглядит так же, как и решение уравнения Томаса (3).

При произвольной скорости движения по окружности угловая скорость вращения спина является переменной. Действительно, из уравнений (83) следует, что для тангенса $\text{tg } \phi = S_y/S_x$ угла спина с осью x лабораторной системы отсчёта справедливо соотношение:

$$\text{tg}(\phi - \omega t) = \frac{\text{tg } \phi_0 - \gamma \text{tg}(\omega\gamma t)}{1 + \text{tg } \phi_0 \text{tg}(\omega\gamma t)/\gamma}. \quad (85)$$

Поэтому, например, для $\phi_0 = 0$ угловая скорость поворота вектора спина $\Omega = d\phi/dt$ равна:

$$-\frac{\Omega(t)}{\omega} = \frac{v^2 \cos^2(\omega\gamma t)}{1 - v^2 \cos^2(\omega\gamma t)}. \quad (86)$$

Отношение $-\Omega(t)/\omega$ по модулю изменяется от 0 до $v^2\gamma^2$ с частотой $\omega\gamma$. На рисунке 8 приведено изменение угловой частоты на протяжении одного оборота гироскопа по окружности при различных его скоростях движения v .

Найдём среднее значение угловой скорости по периоду её изменения:

$$-\frac{\langle \Omega(t) \rangle}{\omega} = \frac{1}{\pi/\omega\gamma} \int_0^{\pi/\omega\gamma} \frac{v^2 \cos^2(\omega\gamma t)}{1 - v^2 \cos^2(\omega\gamma t)} dt = \gamma - 1. \quad (87)$$

Таким образом, *средняя частота прецессии* совпадает с томасовской частотой. Действительно, из уравнения (3) при $a = \omega v$ имеем $\Omega_T = (1 - \gamma)\omega$. Этот результат справедлив при любой начальной ориентации спина.

Если вместо спина гироскопа рассматривать жёсткий стержень (см. приложение D), то в соотношении для угловой скорости его поворота (86) вместо косинусов будут находиться синусы. Усреднение этой функции также приводит к значению $\gamma - 1$, т.е. в среднем стержень вращается с угловой скоростью, равной угловой скорости томасовской прецессии.

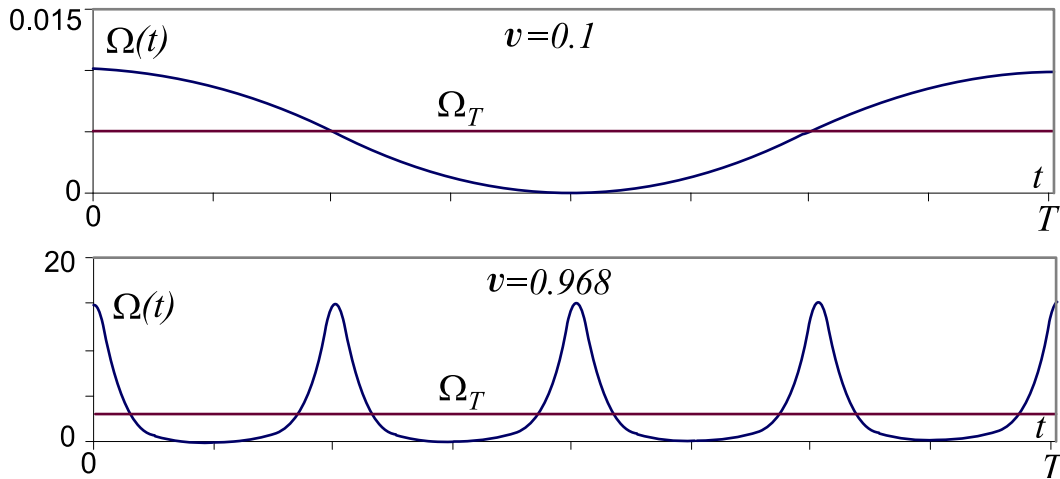


Рисунок 8. Отношение угловой скорости вращения вектора спина к угловой скорости движения гироскопа по окружности $-\Omega/\omega$ в течение одного оборота $t = [0 \dots T]$ при скоростях $v = 0.1$ и $v = 0.968$. Горизонтальная линия соответствует томасовской частоте прецессии.

Таким образом, прецессия спина выглядит сложнее, чем динамика, описываемая классическим уравнением (3). При равномерном движении по окружности с угловой скоростью ω изменяются как ориентация, так и модуль вектора спина. Если под прецессией понимать мгновенную угловую скорость вращения спина, то она периодически изменяется со временем. Частота этого изменения тем больше, чем быстрее гироскоп движется по окружности. Амплитуда колебаний угловой скорости прецессии также увеличивается с ростом скорости. Тем не менее, среднее значение угловой скорости прецессии совпадает с классическим результатом Томаса.

10 Заключение

Векторы, характеризующие физические величины с различными трансформационными свойствами относительно преобразований Лоренца, по-разному изменяются при движении неинерциальной системы отсчёта. В работе получены дифференциальные уравнения, описывающие изменение вектора \mathbf{s} , связанного с ускоренно движущимся стержнем:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\gamma^2 \mathbf{a}(\mathbf{v}\mathbf{s}), \quad (88)$$

классического спина \mathbf{S} и пространственных компонент тензора спина $\tilde{\mathbf{S}}$ вращающегося гироскопа:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \gamma^2 \mathbf{v}(\mathbf{a}\mathbf{S}), \quad \frac{d\tilde{\mathbf{S}}}{dt} = \gamma^2 \mathbf{v} \times [\tilde{\mathbf{S}} \times \mathbf{a}], \quad (89)$$

где \mathbf{v} , \mathbf{a} – мгновенные скорость и ускорение системы и $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$. Уравнения записаны в лабораторной системе отсчёта.

Полученные уравнения отличаются от известной формулы Томаса

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} [\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{s}, \quad (90)$$

если интерпретировать её, как поворот некоторого вектора \mathbf{s} , жёстко связанного с ИСО относительно лабораторной системы.

Различие уравнений (90) и (88), (89) приводит к *качественно* отличным результатам при описании ускоренного движения стержня или вращающейся системы частиц. Одинаковая динамика прецессии спина или поворота стержня возникает только в некоторых частных случаях.

Основная причина расхождения с классической формулой Томаса (90) связана с эффектами лоренцевского сокращения длины и трансформационными свойствами спина, которые были учтены в настоящей работе. В общем случае при изменении скорости системы отсчёта возникает её поворот (вигнеровское вращение). Этот кинематический эффект теории относительности приводит к вращению всех векторов, “жёстко” связанных с этой системой отсчёта. Относительно мгновенно сопутствующей ИСО \tilde{K} , движущейся со скоростью $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, подобный поворот можно описать при помощи уравнения Томаса (90). Однако относительно лабораторной системы отсчёта необходимо учитывать лоренцевское сокращение длины. Оно приводит к дополнительному вращению и изменению длин векторов. В результате уравнение (88) для стержня отличается от уравнения Томаса.

Аналогична ситуация со спином вращающейся системы. Для корректного рассмотрения прецессии спина необходимо учитывать его трансформационные свойства.

Физические явления, происходящие в неинерциальных системах отсчёта, существенно сложнее по сравнению с физикой инерциальных систем. Представление неинерционной системы, как совокупности мгновенно сопутствующих инерциальных систем, служит лишь первым приближением. Поэтому уравнения для вращающегося гироскопа (89), как и уравнение для стержня (88), являются приближенными. Они справедливы при относительно небольших ускорениях системы. Впрочем, на примере частного случая “жесткой” ИИСО в работе была проделана оценка характерного ускорения метрового стержня, равного $a_0 = 3 \cdot 10^{16} \text{ м/с}^2$. При $a \ll a_0$ модель сопутствующих ИСО достаточно хорошо выполняется. Понятно, что это происходит в большинстве реально осуществимых физических ситуаций.

Кроме этого, уравнения (89) перестают выполняться при большой угловой скорости вращения гироскопа. В последнем случае начинают сказываться эффекты относительности одновременности, существенные для составных систем (не точечный гироскоп). Например, хотя энергия и импульс точечной частицы являются компонентами 4-вектора $p^\alpha = \{E, \mathbf{p}\}$, суммарная энергия и импульс гироскопа (без учёта энергии связи) такого 4-вектора не образуют [15]. Это же относится к суммарному моменту импульса и спину. Первый не является 4-тензором, а второй – 4-вектором. Более того, можно показать, что если спин гироскопа постоянен в ИСО, где его центр энергии неподвижен, то это не означает, что в общем случае он будет постоянным и в других ИСО. Тем не менее, все эти эффекты имеют более высокий порядок малости по $\omega_0 r_0$, где ω_0 – собственная угловая скорость вращения гироскопа, а r_0 – его характерные размеры. Эти вопросы более подробно будут рассмотрены в отдельной публикации.

Таким образом, в пределе небольших поступательных ускорений и угловых скоростей уравнения (89) выполняются. Скорость же движения гироскопа при этом может быть достаточно большой.

Автор благодарит Орлянского О. Ю., Силенко А. Ю., Скалозуба В. В. и Теряева О. В. за многочисленные стимулирующие дискуссии, доброжелательные замечания и полезные советы.

А Вигнеровское вращение

Обозначим через $X = \{t, \mathbf{r}\}$ 4-вектор события в пространстве-времени. Лоренцевский буст (чистое преобразование Лоренца без вращения) будем обозначать в матричном виде, как $X' = \mathbb{L}(\mathbf{v}) X$ или в явной компонентной записи (см. приложение В):

$$t' = \gamma(t - \mathbf{v}\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \gamma\mathbf{v}t + \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}). \quad (91)$$

Поворот декартовой системы координат вокруг единичного вектора \mathbf{n} на угол ϕ в матричном виде обозначим, как $X' = \mathbb{R}(\mathbf{n}, \phi) X$ или

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \phi + \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{r})(1 - \cos \phi) - [\mathbf{n} \times \mathbf{r}] \sin \phi \quad (92)$$

при неизменности времени ($t' = t$).

Необходимо различать пассивное и активное вращения. При *пассивном вращении* точка пространства считается фиксированной, а поворачивается по часовой стрелке вокруг вектора \mathbf{n} одна система координат относительно другой. Расписав преобразования (92) в компонентах $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ и $\mathbf{r}' = \{x', y', z'\}$, мы получим связь проекций *одного и того же* радиус-вектора на оси каждой системы координат. При этом компоненты вектора $\mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$ берутся относительно первой системы. При *активном вращении* координатная система одна, а поворачивается вектор \mathbf{r} . В этом случае после замены $\phi \mapsto -\phi$ формула (92) устанавливает векторную связь двух *различных* векторов \mathbf{r}' и \mathbf{r} .

Далее вращение всегда понимается в пассивном смысле. Преобразования Лоренца также являются пассивными преобразованиями, так как связывают результаты наблюдения одного и того же события из двух систем отсчёта.

Инфинитезимальные преобразования Лоренца $\mathbb{L}(d\mathbf{v})$:

$$t' = t - \mathbf{r}d\mathbf{v}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - t d\mathbf{v} \quad (93)$$

и вращения $\mathbb{R}(\mathbf{n}, d\phi)$:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - [\mathbf{n} \times \mathbf{r}]d\phi \quad (94)$$

записываются с точностью до первого порядка малости по параметрам.

Рассмотрим композицию бустов. Пусть ИСО K_1 движется относительно K со скоростью \mathbf{v}_1 , а K_2 относительно K_1 со скоростью \mathbf{v}_2 . Тогда

$$X_1 = \mathbb{L}(\mathbf{v}_1) X, \quad X_2 = \mathbb{L}(\mathbf{v}_2) X_1 \quad (95)$$

или

$$X_2 = \mathbb{L}(\mathbf{v}_2)\mathbb{L}(\mathbf{v}_1) X. \quad (96)$$

Обратим внимание, что произведение матриц осуществляется в обратном порядке к выполнению преобразований.

Результат произведения матриц (96) может быть найден при помощи прямых, достаточно громоздких алгебраических вычислений. Для этого в (91) исключаются промежуточные координаты и время. Существенно более простые в математическом отношении вычисления получаются при использовании кватернионной техники [12]. Результирующая матрица произведения бустов не является бустом, но может быть представлена в виде композиции буста, а затем 3-мерного вращения:

$$\mathbb{L}(\mathbf{v}_2) \mathbb{L}(\mathbf{v}_1) = \mathbb{R}(\mathbf{n}, \phi) \mathbb{L}(\mathbf{w}). \quad (97)$$

Угол поворота ϕ и единичный вектор \mathbf{n} находятся из уравнения:

$$\mathbf{n} \sin \phi = -[\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2] \frac{\gamma_1 \gamma_2 (1 + \gamma_w + \gamma_1 + \gamma_2)}{(1 + \gamma_w)(1 + \gamma_1)(1 + \gamma_2)}, \quad (98)$$

а итоговая скорость \mathbf{w} имеет смысл скорости начала системы K_2 относительно K :

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \gamma_1 + \Gamma_1 \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2)}{\gamma_1 (1 + \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2)}. \quad (99)$$

Факторы γ_1 и Γ_1 относятся к скорости \mathbf{v}_1 , а γ_2 – к скорости \mathbf{v}_2 . Фактор Лоренца γ_w для скорости \mathbf{w} равен:

$$\gamma_w = \gamma_1 \gamma_2 (1 + \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2). \quad (100)$$

Формула (98) была получена Стаппом в 1956 г. [17], а поворот, возникающий в результирующем преобразовании, называется вигнеровским вращением [16].

Аналогичное разложение произведения двух бустов на буст и вращение можно выполнить в обратном порядке:

$$\mathbb{L}(\mathbf{v}_2) \mathbb{L}(\mathbf{v}_1) = \mathbb{L}(\tilde{\mathbf{w}}) \mathbb{R}(\mathbf{n}, \phi), \quad (101)$$

когда сначала выполняется поворот, а затем буст. В этом случае угол ϕ и единичный вектор \mathbf{n} (98) остаются без изменений, а итоговая скорость $\tilde{\mathbf{w}}$ получается из (99) перестановкой индексов 1 и 2:

$$\tilde{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \gamma_2 + \Gamma_2 \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1)}{\gamma_2 (1 + \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2)}. \quad (102)$$

Эта скорость с обратным знаком имеет смысл скорости движения начала системы K относительно K_2 . Заметим, что $|\tilde{\mathbf{w}}| = |\mathbf{w}|$, поэтому факторы Лоренца для этих двух скоростей совпадают. Отметим также соотношение

$$\frac{\tilde{\mathbf{w}} \times \mathbf{w}}{w^2} = \mathbf{n} \sin \phi, \quad (103)$$

из которого следует, что угол между векторами скоростей \mathbf{w} и $\tilde{\mathbf{w}}$ соответствует вигнеровскому повороту (98).

Рассмотрим в единых обозначениях описание прецессии Томаса, приведенное в книгах Джексона [4] и Мёллера [3]. Пусть есть три системы отсчёта: K , K' и K'' , описанные в первом разделе, где K' и K'' – сопутствующие ИСО к движущейся по криволинейной траектории НИСО, а K – лабораторная ИСО.

В [4] предполагается, что K' и K'' связаны с K бустами:

$$X' = \mathbb{L}(\mathbf{v}) X, \quad X'' = \mathbb{L}(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) X, \quad (104)$$

откуда, учитывая, что $\mathbb{L}^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbb{L}(-\mathbf{v})$, получаем:

$$X'' = \mathbb{L}(\mathbf{v} + d\mathbf{v})\mathbb{L}(-\mathbf{v}) X'. \quad (105)$$

Используя общие соотношения (98), (99) с $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} + d\mathbf{v}$, в первом приближении по $d\mathbf{v}$, находим бесконечно малый угол поворота:

$$\mathbf{n} d\phi = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} [\mathbf{v} \times d\mathbf{v}], \quad (106)$$

где учтено, что в векторном произведении (98) стоит малая величина $d\mathbf{v}$, поэтому в множителе после него все величины можно взять в нулевом порядке по $d\mathbf{v}$: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$, $\gamma_w = \gamma^2(1 - \mathbf{v}^2) = 1$. В явном виде преобразование между K' и K'' записывается следующим образом:

$$t'' = t' - \mathbf{r}' \Delta \mathbf{v}, \quad \mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - d\phi [\mathbf{n} \times \mathbf{r}'] - t' \Delta \mathbf{v}, \quad (107)$$

где

$$\Delta \mathbf{v} = \gamma(d\mathbf{v} + \Gamma(\mathbf{v}d\mathbf{v})\mathbf{v}).$$

В первом приближении по $d\mathbf{v}$ скорости \mathbf{w} и $\tilde{\mathbf{w}}$ совпадают и равны $\Delta \mathbf{v}$.

Полученное 3-мерное вращение возникает между сопутствующими системами K' и K'' . При этом предполагается, что эти системы получаются из лабораторной системы при помощи бустов (104). Таким образом, их оси “параллельны” K , а не друг другу. Слово “параллельно” взято в кавычки, так как мгновенное положение осей движущейся с произвольной скоростью ИСО не параллельно лабораторной ИСО (см. приложение В). Поэтому под “параллельностью” мы подразумеваем выполнение чистого лоренцевского буста.

В исходной постановке задачи предполагалось, что при изменении скорости НИСО сопутствующие к ней ИСО связаны лоренцевским преобразованием (т.е. их оси переносятся параллельно, со сделанной выше оговоркой). Поэтому в подходе Джексона, очевидно, рассматривается иная задача.

Идеологии параллельного переноса осей сопутствующих систем больше соответствует вывод Мёллера [3], который рассматривает последовательность преобразований:

$$X' = \mathbb{L}(\mathbf{v})X, \quad X'' = \mathbb{L}(d\mathbf{v}')X', \quad (108)$$

откуда

$$X'' = \mathbb{L}(d\mathbf{v}')\mathbb{L}(\mathbf{v})X. \quad (109)$$

Подставляя $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_2 = d\mathbf{v}'$ в соотношения (98), (99), в первом приближении по $d\mathbf{v}'$ имеем:

$$\mathbf{n} d\phi = -\frac{\gamma}{\gamma + 1} [\mathbf{v} \times d\mathbf{v}'], \quad (110)$$

где учтено, что $\gamma_2 \approx 1$ и $\gamma_w \approx \gamma_1 = \gamma$. Итоговая скорость (99) равна:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}' + \mathbf{v}\gamma + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}d\mathbf{v}')}{\gamma(1 + \mathbf{v}d\mathbf{v}')} \approx \mathbf{v} + \frac{d\mathbf{v}'}{\gamma} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}d\mathbf{v}')}{\gamma + 1}, \quad (111)$$

где приближенное равенство записано в первом порядке малости по $d\mathbf{v}'$. Величина $d\mathbf{v}'$ является скоростью K'' относительно K' и имеет смысл изменения скорости ИСО относительно своего предыдущего мгновенного положения K' .

Скорость \mathbf{w} имеет смысл скорости системы K'' относительно K , поэтому Мёллер вводит изменение скорости ИСО относительно лабораторной системы:

$$d\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{v}. \quad (112)$$

Умножая её векторно на \mathbf{v} , несложно переписать (110) в виде:

$$\mathbf{n} d\phi = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} [\mathbf{v} \times d\mathbf{v}], \quad (113)$$

что с точностью до знака совпадает с выражением (106) Джексона, однако имеет другой смысл, так как определяет поворот системы, полученной из лабораторной системы K в результате лоренцевского буста. Фактически, в соотношении $\mathbb{L}(d\mathbf{v}')\mathbb{L}(\mathbf{v}) = \mathbb{R}(\mathbf{n}, d\phi)\mathbb{L}(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$ участвует четыре ИСО. В левой части записан последовательный переход от K к K' , а затем к K'' . В правой части лоренцевское преобразование $\mathbb{L}(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$ осуществляет переход от K к системе \tilde{K}'' , из которой (в результате поворота) получается система K'' . Поэтому 3-мерное вращение осуществляется не относительно лабораторной системы K , а относительно \tilde{K}'' .

В Координатные оси движущейся СО

Пусть начало инерциальной системы отсчёта K' движется относительно “неподвижной” системы K со скоростью \mathbf{v} . Время и координаты некоторого события, наблюдаемого из системы K , обозначим как (t, \mathbf{r}) . Это же событие в системе K' имеет время и координаты со штрихами (t', \mathbf{r}') . Рассмотрим сначала одномерное движение вдоль оси x со скоростью v . Будем считать, что в момент времени $t = t' = 0$ начала систем отсчёта совпадают: $x = x' = 0$. Чтобы связь между наблюдениями события имела смысл, необходимо согласовать единицы измерения длины и времени в обеих системах отсчёта. *Единицы длины* можно согласовать при помощи “сравнения линеек” в перпендикулярном к относительной скорости направлении. Такими “линейками” может быть, например, расстояние между траекториями двух частиц, движущихся параллельно оси x .

Постулируется, что координаты y и y' будут одинаковыми в обеих системах отсчёта: $y' = y$. *Единицы времени* выбираются в результате соглашения о значении относительной скорости систем отсчёта. В частности, если начало системы K' ($x' = 0$) имеет уравнение движения $x = vt$, то начало K ($x = 0$) относительно системы K' движется следующим образом: $x' = -vt'$. После такого согласования единиц измерения, используя аксиоматику Эйнштейна или групповой подход [9]-[11], можно получить преобразования Лоренца в следующем виде:

$$t' = \gamma(t - vx), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad (114)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ – фактор Лоренца.

При движении вдоль оси x координатные оси обеих систем отсчёта предполагаются параллельными друг другу. Обратные преобразования получаются перестановкой “штрихованных” и “нештрихованных” величин местами и заменой $v \mapsto -v$.

Пусть теперь относительная скорость \mathbf{v} двух систем отсчёта направлена произвольным образом. Фиксирование значений компонент вектора $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ (и с обратным знаком для K') означает также выбор определённой *ориентации* координатных осей в каждой системе отсчёта. Пусть наблюдатели в системе K при данном выборе координатных осей получают, например, следующие компоненты относительной скорости: $\mathbf{v} = \{0.1, 0.3, 0.5\}$. Тогда наблюдатели в системе K' должны выбрать направление координатных осей таким образом, чтобы относительная скорость для них имела компоненты: $\mathbf{v}' = \{-0.1, -0.3, -0.5\}$. Такая процедура позволяет ориентировать координатные оси систем отсчёта так, чтобы они были в некотором смысле “параллельны” друг другу.

В 3-мерном пространстве компоненты скорости не изменятся, если координатный базис повернуть вокруг вектора \mathbf{v} . Поэтому для однозначной фиксации осей, вообще говоря, требуется ещё одно направление. Например, наблюдатели могут согласовать координаты двух параллельных “линеек”, расположенных ортогонально к относительной скорости (аналогично параллельны оси y, y' и z, z' при движении вдоль оси x).

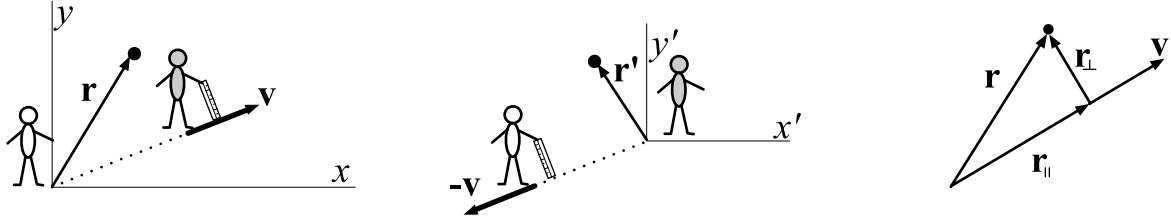


Рисунок 9. Согласование единиц измерения двумя системами отсчёта.

Для вывода преобразований Лоренца в векторном виде радиус-вектор \mathbf{r} раскладывается по двум векторам $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$: параллельному к скорости $\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{r}\mathbf{v})\mathbf{v}/v^2$ и перпендикулярному \mathbf{r}_{\perp} . Для них выполняются обычные преобразования Лоренца (114):

$$t' = \gamma(t - \mathbf{v}\mathbf{r}_{\parallel}), \quad \mathbf{r}'_{\parallel} = \gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t), \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}. \quad (115)$$

Подставляя их в $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp}$ и заменяя \mathbf{r}_{\perp} на $\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel}$, несложно записать преобразования Лоренца в векторном виде:

$$t' = \gamma(t - \mathbf{v}\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \gamma\mathbf{v}t + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}), \quad (116)$$

где, кроме фактора $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$, $v = |\mathbf{v}|$, введено обозначение для величины Γ , которая обладает следующими свойствами:

$$\Gamma = \frac{\gamma - 1}{v^2} = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}, \quad \gamma - \Gamma = \frac{\gamma}{\gamma + 1}. \quad (117)$$

Обратные преобразования Лоренца получаются заменой $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$.

Преобразования Лоренца являются пассивными (см. приложение А), т.к. связывают результаты наблюдения одного и того же события относительно различных систем отсчёта. Учитывая процедуру согласования “параллельности” координатных осей двух систем отсчёта, соотношения (116) можно расписать по компонентам для $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$, $\mathbf{r}' = \{x', y', z'\}$ и скорости $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ (компоненты которой заданы относительно K). В результате получится связь времени и координат одного и того же события, регистрируемого различными наблюдателями.

Пусть наблюдатели в системе K одновременно (по своим часам) фиксируют положение осей системы K' . Эти оси (в общем случае) оказываются не только не параллельными к осям системы K , но даже и не являются ортогональным базисом (с точки зрения неподвижных наблюдателей). Поэтому “параллельность” координатных осей в преобразованиях Лоренца (116) необходимо понимать только в том смысле, что наблюдатели выполнили описанную выше процедуру согласования единиц измерения и после этого независимо (по компонентам скорости \mathbf{v}) задали ориентацию координатных осей.

Задавая координаты \mathbf{r}' точек в системе отсчёта K' , связанной с телом, при помощи преобразований Лоренца можно получить координаты точек \mathbf{r} в неподвижной системе K . Нас интересует мгновенная форма движущегося тела в момент времени t в системе K . Поэтому необходимо так переписать преобразования Лоренца, чтобы радиус-вектор \mathbf{r} зависел от t и \mathbf{r}' . Для этого запишем обратные преобразования Лоренца ($\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$):

$$t = \gamma(t' + \mathbf{v}\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \gamma\mathbf{v}t' + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}') \quad (118)$$

и исключим из них время t' :

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}t + \mathbf{r}' - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'). \quad (119)$$

Это соотношение позволяет вычислять положение точек движущегося тела в данный момент времени t в системе K .

Первое слагаемое $\mathbf{v}t$ в (119) указывает на то, что все точки движутся параллельно с постоянной скоростью \mathbf{v} . Когда $t = 0$, начала систем отсчёта совпадают и форма движущегося тела определяется вторым и третьим слагаемыми (119). При $t = 0$ из (119) следует, что:

$$\mathbf{v}\mathbf{r} = \mathbf{v}\mathbf{r}'/\gamma, \quad \mathbf{r}^2 = \mathbf{r}'^2 - (\mathbf{v}\mathbf{r}')^2, \quad (120)$$

т.е. продольные размеры испытывают лоренцевское сокращение, а поперечные (если $\mathbf{v}\mathbf{r}' = 0$) остаются неизменными. Рассмотрим две фиксированные точки тела. Для радиус-векторов к каждой из них запишем соотношение (119). Их скалярные произведения в двух системах отсчёта связаны следующим образом:

$$\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_1\mathbf{r}'_2 - (\mathbf{v}\mathbf{r}'_1)(\mathbf{v}\mathbf{r}'_2). \quad (121)$$

Если в системе K' векторы перпендикулярны ($\mathbf{r}'_1\mathbf{r}'_2 = 0$), то они будут перпендикулярными и в K , если они перпендикулярны к относительной скорости \mathbf{v} .

Пусть движение происходит в плоскости (x, y) . Выберем одну точку на оси x' , а вторую – на оси y' (см. рис.10).

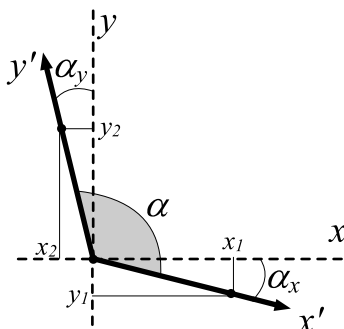


Рисунок 10. Определение трёх углов осей движущейся системы отсчёта относительно неподвижной: $\alpha = \alpha_x + \alpha_y + \pi/2$.

В системе K' их координаты равны: $\mathbf{r}'_1 = \{1, 0\}$, $\mathbf{r}'_2 = \{0, 1\}$. Координаты $\mathbf{r}_i = \{x_i, y_i\}$ этих же точек в неподвижной системе отсчёта получаются из уравнения (119):

$$x_1 = 1 - \frac{\gamma v_x^2}{\gamma + 1}, \quad y_1 = -\frac{\gamma v_x v_y}{\gamma + 1}; \quad x_2 = -\frac{\gamma v_x v_y}{\gamma + 1}, \quad y_2 = 1 - \frac{\gamma v_y^2}{\gamma + 1}, \quad (122)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2} = 1/\sqrt{1 - v_x^2 - v_y^2}$. В результате синус угла α_x между осями x' и x , и аналогично для α_y между осями y' и y (см. рис.10), равны:

$$\sin \alpha_x = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{v_x v_y}{\sqrt{1 - v_x^2}}, \quad \sin \alpha_y = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{v_x v_y}{\sqrt{1 - v_y^2}}, \quad (123)$$

где модули \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 найдены при помощи второго соотношения (120).

Косинус угла между осями движущейся системы отсчёта находится из соотношения (121):

$$\cos \alpha = -\frac{v_x v_y}{\sqrt{(1 - v_x^2)(1 - v_y^2)}}. \quad (124)$$

Таким образом, координатные оси системы K' будут ортогональными для наблюдателей в K , только если одна из компонент скорости равна нулю. Это происходит при движении вдоль одной из координатных осей.

С Тензор спина

Тензор суммарного момента импульса системы частиц (гироскопа)

$$L^{\mu\nu} = \sum (x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu) \quad (125)$$

неинвариантен при трансляционных преобразованиях $x^\nu \mapsto x^\nu + a^\nu$:

$$L^{\mu\nu} \mapsto L^{\mu\nu} + a^\mu P^\nu - a^\nu P^\mu, \quad (126)$$

где $P^\nu = \sum p^\mu$ – суммарный 4-импульс гироскопа. Собственный момент импульса (классический спин) не должен меняться при таком преобразовании. Этому требованию удовлетворяет 4-вектор спина

$$S_\nu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} L^{\alpha\beta} U^\gamma, \quad (127)$$

где $U^\gamma = P^\gamma/M$ – 4-скорость, а M – масса гироскопа. Заметим, что 4-спин и 4-скорость ортогональны: $S \cdot U \equiv S^\nu U_\nu = 0$.

При помощи 4-вектора спина определим 4-тензор спина:

$$S^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} U_\mu S_\nu. \quad (128)$$

Очевидно, что он также как и S^ν не изменяется при трансляционных преобразованиях. Дуальный к нему тензор имеет вид:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} S^{\mu\nu} = S_\alpha U_\beta - S_\beta U_\alpha. \quad (129)$$

Учитывая, что $U^2 = 1$, а $S \cdot U = 0$, имеем

$$S_\nu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} S^{\alpha\beta} U^\gamma. \quad (130)$$

Таким образом, 4-вектор спина выражается через 4-тензор спина так же как и через полный момент импульса (127).

Подставляя (127) в (128) и проводя свёртку символов Леви-Чевиты, можно выразить тензор спина через тензор полного момента импульса:

$$S^{\alpha\beta} = L^{\alpha\beta} - (L^{\alpha\gamma} U^\beta - L^{\beta\gamma} U^\alpha) U_\gamma. \quad (131)$$

Сворачивая определение 4-вектора спина (127) с символом Леви-Чевиты можно получить ещё одно соотношение между введенными величинами:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} S^\nu = L_{\alpha\beta} U_\gamma + L_{\gamma\alpha} U_\beta + L_{\beta\gamma} U_\alpha = S_{\alpha\beta} U_\gamma + S_{\gamma\alpha} U_\beta + S_{\beta\gamma} U_\alpha, \quad (132)$$

где второе равенство проверяется подстановкой вместо тензора спина $S_{\alpha\beta}$ его выражения (131) через тензор полного момента $L_{\alpha\beta}$. Заметим, что в (132) по индексам α, β, γ проводится циклическая перестановка.

Представим тензор спина ещё в одном виде. Соотношение (131) можно переписать следующим образом:

$$S^{\alpha\beta} = L^{\alpha\beta} - (X^\alpha P^\beta - X^\beta P^\alpha). \quad (133)$$

где

$$X^\alpha = \lambda U^\alpha + \frac{1}{M} L^{\alpha\beta} U_\beta, \quad (134)$$

а λ – некоторый скаляр. Этот 4-вектор имеет смысл эффективной траектории гироскопа, относительно которой определяется тензор спина, характеризующий собственный момент вращения:

$$S^{\alpha\beta} = \sum [(x^\alpha - X^\alpha) p^\beta - (x^\beta - X^\beta) p^\alpha],$$

откуда следует (133).

Введём 4-вектор $\mathbf{R} = \{t, \mathbf{R}\}$, где \mathbf{R} – центр энергии системы частиц (31). Тензор полного момента импульса $L^{\alpha\beta}$ определяется двумя 3-векторами $\mathbf{G} = \{L^{10}, L^{20}, L^{30}\}$ и $\mathbf{L} = \{L^{23}, L^{31}, L^{12}\}$, где $\mathbf{G} = \mathcal{E}\mathbf{R} - \mathbf{P}t$, а $P^\alpha = \{\mathcal{E}, \mathbf{P}\}$ – полный 4-импульс гироскопа. Для фиксирования значения λ в (134) потребуем, чтобы нулевая компонента 4-вектора X^α была временем:

$$X^0 = \lambda\gamma + \frac{\gamma}{M} \mathbf{G}\mathbf{u} = \lambda\gamma + \gamma^2 (\mathbf{R}\mathbf{u}) - \gamma^2 \mathbf{u}^2 t = t, \quad (135)$$

где учтено, что 4-скорость имеет компоненты $U^\alpha = \{\gamma, \gamma\mathbf{u}\}$. В результате $\lambda = \gamma t - \gamma \mathbf{R}\mathbf{u} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ и 4-вектор эффективной траектории имеет вид:

$$X^\alpha = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) U^\alpha + \frac{1}{M} L^{\alpha\beta} U_\beta. \quad (136)$$

Заметим, что в силу антисимметричности тензора полного момента $L^{\alpha\beta}$ и единичности 4-скорости $U^2 = 1$ имеет место равенство проекций 4-векторов \mathbf{R} и \mathbf{X} на 4-скорость: $\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{U}$. Пространственные компоненты вектора \mathbf{X} образуют модифицированный центр инерции:

$$\mathbf{X} = \mathbf{R} - \frac{\gamma}{M} \mathbf{u} \times (\mathbf{L} - \mathbf{R} \times \mathbf{P}) = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{S}}{M} = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{s}}{\mathcal{E}}, \quad (137)$$

где $\mathbf{S} = \gamma(\mathbf{L} - \mathbf{R} \times \mathbf{P})$ – пространственные компоненты 4-вектора спина (127), вектор $\mathbf{s} = \{S^{23}, S^{31}, S^{12}\}$ является пространственными компонентами тензора спина (128):

$$\mathbf{s} = \gamma\mathbf{S} - \gamma(\mathbf{u}\mathbf{S})\mathbf{u}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{u} \times \mathbf{s}, \quad (138)$$

где $\mathbf{g} = \{S^{10}, S^{20}, S^{30}\}$ и учтено определение (128). В системе покоя гироскопа временные компоненты 4-вектора и 4-тензора спина равны нулю, а пространственные совпадают с полным моментом \mathbf{L} .

Необходимость введения координаты гироскопа, отличной от его центра инерции, обсуждалась в работах [20], [21].

Д Движение стержня по окружности

Рассмотрим движение начала системы отсчёта K' по окружности радиуса R с постоянной по модулю скоростью v . При периоде обращения T скорость равна $v = 2\pi R/T = \omega R$, где ω – круговая частота. Модуль ускорения равен $a = v^2/R = \omega v$.

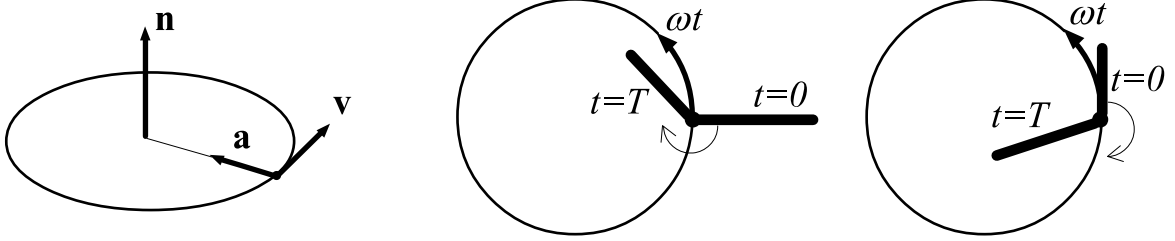


Рисунок 11. Вращение стержня по окружности. На центральном рисунке горизонтальный при $t = 0$ стержень после оборота по окружности ($t = T$) повернётся и станет короче. На последнем рисунке этот же стержень при $t = 0$ расположен вертикально и после оборота удлинится.

При равномерном движении по окружности ускорение всегда перпендикулярно скорости ($\mathbf{a}\mathbf{v} = 0$) и справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{a} = \omega [\mathbf{n} \times \mathbf{v}], \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \omega [\mathbf{n} \times \mathbf{a}] = -\omega^2 \mathbf{v}, \quad (139)$$

где \mathbf{n} – постоянный единичный вектор, нормальный к плоскости орбиты.

При помощи этих соотношений и уравнения (14):

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\gamma^2 (\mathbf{v}\mathbf{s}) \mathbf{a} \quad (140)$$

несложно получить следующие уравнения:

$$\frac{d(\mathbf{v}\mathbf{s})}{dt} = \mathbf{a}\mathbf{s} \quad \frac{d(\mathbf{a}\mathbf{s})}{dt} = -\omega^2 \gamma^2 (\mathbf{v}\mathbf{s}). \quad (141)$$

По отдельности величины $\mathbf{v}\mathbf{s}$ и $\mathbf{a}\mathbf{s}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{d^2(\mathbf{v}\mathbf{s})}{dt^2} + \omega^2 \gamma^2 (\mathbf{v}\mathbf{s}) = 0, \quad \frac{d^2(\mathbf{a}\mathbf{s})}{dt^2} + \omega^2 \gamma^2 (\mathbf{a}\mathbf{s}) = 0. \quad (142)$$

Поэтому решения (140) при движении по окружности имеют вид:

$$\begin{cases} \mathbf{v}\mathbf{s} = (\mathbf{v}\mathbf{s})_0 \cos(\omega\gamma t) + \frac{(\mathbf{a}\mathbf{s})_0}{\omega\gamma} \sin(\omega\gamma t), \\ \mathbf{a}\mathbf{s} = (\mathbf{a}\mathbf{s})_0 \cos(\omega\gamma t) - (\mathbf{v}\mathbf{s})_0 \omega\gamma \sin(\omega\gamma t), \end{cases} \quad (143)$$

где нулевой индекс помечает начальное значение скалярных произведений в момент времени $t = 0$, а значение производных при $t = 0$ записано при помощи уравнений (141).

Таким образом, относительно *подвижного* базиса, построенного на векторах \mathbf{v} , \mathbf{a} , конец стержня вращается с угловой скоростью $\omega\gamma$.

Найдём зависимость координат конца стержня $\mathbf{s} = \{s_x, s_y\}$ относительно его начала в неподвижной системе отсчёта. Пусть движение по окружности происходит против часовой стрелки. Координаты начала стержня при этом равны: $\{x, y\} = R\{\cos(\omega t), \sin(\omega t)\}$. Поэтому компоненты скорости и ускорения имеют вид:

$$\mathbf{v} = R\omega \{-\sin(\omega t), \cos(\omega t)\}, \quad \mathbf{a} = -R\omega^2 \{\cos(\omega t), \sin(\omega t)\}. \quad (144)$$

В момент времени $t = 0$ имеем $\mathbf{v}_0 = R\omega \{0, 1\}$, $\mathbf{a}_0 = -R\omega^2 \{1, 0\}$, поэтому $(\mathbf{v}\mathbf{s})_0 = R\omega s_{y0}$, $(\mathbf{a}\mathbf{s})_0 = -R\omega^2 s_{x0}$ и решения (143) приводят к системе:

$$\begin{cases} s_x \cos(\omega t) + s_y \sin(\omega t) = s_{x0} \cos(\omega\gamma t) + s_{y0} \gamma \sin(\omega\gamma t) \\ -s_x \sin(\omega t) + s_y \cos(\omega t) = s_{y0} \cos(\omega\gamma t) - (s_{x0}/\gamma) \sin(\omega\gamma t). \end{cases} \quad (145)$$

Сумма квадратов уравнений даёт квадрат длины стержня $l^2 = s_x^2 + s_y^2$.

Если угол с осью x при $t = 0$ равен ϕ_0 и $s_{x0} = \bar{l}_0 c_0$, $s_{y0} = \bar{l}_0 s_0$, то:

$$\frac{l^2}{\bar{l}_0^2} = 1 + \gamma v^2 s_0 c_0 \sin(2\omega\gamma t) + \frac{v^2}{2} (\gamma^2 s_0^2 - c_0^2) (1 - \cos(2\omega\gamma t)), \quad (146)$$

где $s_0 = \sin \phi_0$, $c_0 = \cos \phi_0$.

При помощи соотношения (120) можно найти связь начальной длины стержня \bar{l}_0 в неподвижной системе с собственной длиной стержня l_0 :

$$\bar{l}_0 = \frac{l_0}{\sqrt{1 + (\gamma^2 - 1) \sin^2 \phi_0}}. \quad (147)$$

Длина восстанавливается ($l = \bar{l}_0$) в моменты времени $\omega t = \pi k / \gamma$, где $k = 1, 2, \dots$. Если $\text{tg } \phi_0 = s_{y0} / s_{x0}$ — начальная ориентация стержня, то через время $\omega t = \pi / \gamma$ его угол ϕ будет таким, что $\text{tg}(\phi - \pi / \gamma) = \text{tg } \phi_0$, или $\phi - \phi_0 = -\pi k + \pi / \gamma$. Начало стержня движется против часовой стрелки. При этом стержень поворачивается по часовой стрелке, поэтому $\phi - \phi_0$ отрицательно и необходимо выбрать $k = 1$. Таким образом, минимальный угол поворота, при котором длина стержня восстанавливается, по модулю равен:

$$|\Delta\phi| = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \pi. \quad (148)$$

Если γ — рациональное число, то конец стержня будет описывать правильный n -угольник. При этом $(\gamma - 1) / \gamma$ равно несократимой дроби $2k / n$.

После m оборотов по окружности ($\omega t = 2\pi m$) координаты конца стержня будут равны:

$$\begin{cases} s_x = s_{x0} \cos(2\pi m\gamma) + s_{y0} \gamma \sin(2\pi m\gamma) \\ s_y = s_{y0} \cos(2\pi m\gamma) - (s_{x0}/\gamma) \sin(2\pi m\gamma). \end{cases} \quad (149)$$

При малых скоростях $\gamma \approx 1 + v^2/2$, поэтому:

$$\begin{cases} s_x \approx s_{x0} + s_{y0} \pi m v^2 \\ s_y \approx s_{y0} - s_{x0} \pi m v^2. \end{cases} \quad (150)$$

Таким образом, после каждого оборота по окружности ($m = 1$) стержень поворачивается на малый угол πv^2 .

К такому же результату при малых скоростях приводит и формула Томаса (3), для которой $d\phi \approx vadt/2 = \pi v^2 dt/T$. Подобное совпадение решений уравнений (3) и (14) происходит только при малых скоростях и в случае равномерного движения по окружности.

Если же скорости большие, то угол поворота зависит от начальной ориентации стержня (начинает сказываться лоренцевское сокращение длины). При одном обороте по окружности ($m = 1$) стержень повернётся на угол ϕ_1 , где $\text{tg } \phi_1 = s_y/s_x$:

$$\text{tg}(\phi_1 - \phi_0) = -\text{tg}(2\pi\gamma) \frac{1 - v^2 + \text{tg}^2 \phi_0}{v^2 \text{tg} \phi_0 \text{tg}(2\pi\gamma) + 1/(\gamma \cos^2 \phi_0)}. \quad (151)$$

В ультрарелятивистском случае $v \sim 1$, множество раз повернувшись, стержень отклонится от первоначального положения на угол $k\pi$ для целых и полуцелых $\gamma = k/2$ и на $k\pi - \phi_0$ в остальных случаях.

На рисунках 12-15 изображены траектории конца стержня относительно его начала (расположенного в центре графика). В собственной системе отсчёта стержень имеет единичную длину. Левая картинка соответствует одному обороту по окружности и 24 точки идут с равным шагом по времени. Правая картинка – это результат 10 оборотов по окружности. Движение начала стержня начинается из положения часовой стрелки на 3 часа.

Вращение стержня всегда происходит в противоположную сторону от направления вращения по окружности. Если начало стержня движется против часовой стрелки, то его конец – по часовой. Горизонтальный стержень ($\phi_0 = 0$) при изменении скорости сначала укорачивается, а вертикальный ($\phi_0 = \pi/2$), наоборот, начинает с удлинения, так как длина минимальна, когда стержень направлен по скорости. На рисунке 13 приведен пример иррационального значения γ . Конец стержня при движении постепенно заполняет на плоскости кольцо с радиусами l_0/γ и l_0 , где l_0 – собственная длина стержня.

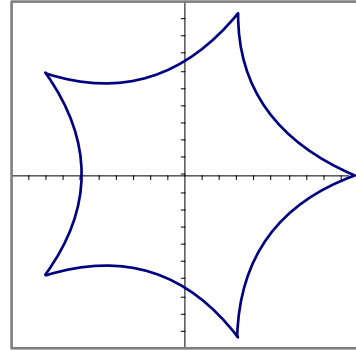
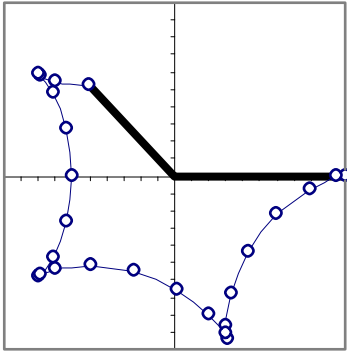


Рисунок 12. $v = 4/5 = 0.8$, $\gamma = 5/3 = 1.667$; $\phi_0 = 0$.

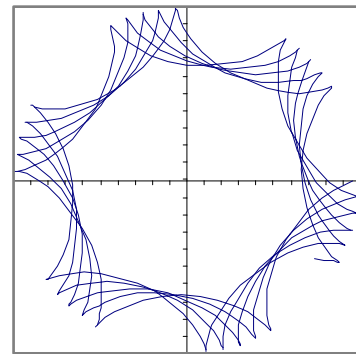
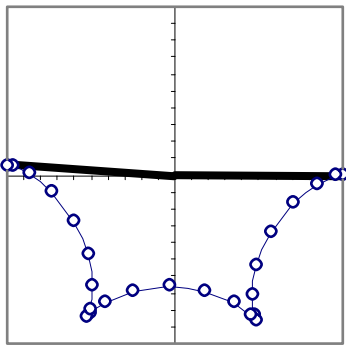


Рисунок 13. $v = 0.75$, $\gamma = 1.512$; $\phi_0 = 0$.

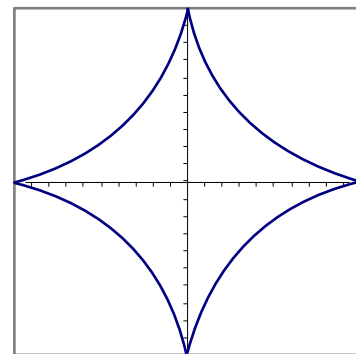
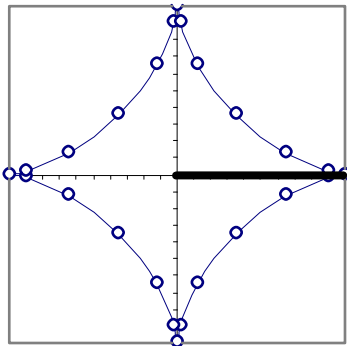


Рисунок 14. $v = 0.866$, $\gamma = 2$; $\phi_0 = 0$.

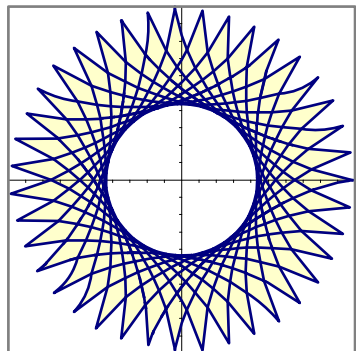
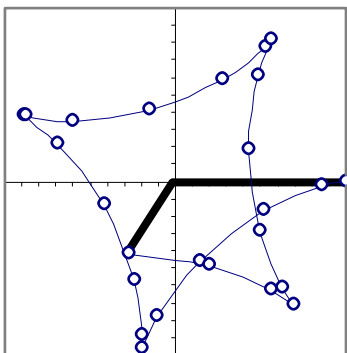


Рисунок 15. $v = 0.901$, $\gamma = 23/10 = 2.3$; $\phi_0 = 0$.

Е Вигнеровское вращение для стержня

Приведём ещё один вывод уравнения (14), описывающего изменение вектора \mathbf{s} , связанного со стержнем при его криволинейном движении. При этом в явном виде будет использоваться вигнеровское вращение.

Запишем выражение для угла вигнеровского поворота (113), полученное в приложении А:

$$\mathbf{n} d\phi = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} [\mathbf{v} \times d\mathbf{v}]. \quad (152)$$

Этот угол является поворотом, выполняемым *после* лоренцевского буста со скоростью (111), равной $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Фактор Лоренца для такой скорости равен:

$$\gamma_{\mathbf{v}+d\mathbf{v}} = (1 - (\mathbf{v} + d\mathbf{v})^2)^{-1/2} \approx (1 - \mathbf{v}^2 - 2\mathbf{v}d\mathbf{v})^{-1/2} \approx \gamma + \gamma^3 \mathbf{v}d\mathbf{v}, \quad (153)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$. Соответственно:

$$\frac{\gamma_{\mathbf{v}+d\mathbf{v}}}{\gamma_{\mathbf{v}+d\mathbf{v}} + 1} \approx \frac{\gamma}{\gamma + 1} + \frac{\gamma^3 \mathbf{v}d\mathbf{v}}{(\gamma + 1)^2}. \quad (154)$$

Обозначим со штрихами координаты преобразования с $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Делая в (119) замену $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + d\mathbf{v}$ и сохраняя первый порядок малости по $d\mathbf{v}$, получаем ориентацию осей системы координат с изменённой скоростью:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \{ \mathbf{v}(\mathbf{v} \mathbf{r}') + \mathbf{v}(d\mathbf{v} \mathbf{r}') + d\mathbf{v}(\mathbf{v} \mathbf{r}') \} - \frac{\gamma^3}{(\gamma + 1)^2} \mathbf{v}(\mathbf{v} \mathbf{r}') (\mathbf{v}d\mathbf{v}). \quad (155)$$

Поворот на угол $d\phi$ осуществляет преобразование $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - [\mathbf{n} \times \mathbf{r}'] d\phi$. Обратное преобразование получается заменой $d\phi \mapsto -d\phi$:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'' + [\mathbf{n} \times \mathbf{r}''] d\phi, \quad (156)$$

или, используя выражение для угла (152):

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'' + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \{ \mathbf{v}(\mathbf{r}'' d\mathbf{v}) - (\mathbf{r}'' \mathbf{v}) d\mathbf{v} \}. \quad (157)$$

Подставляя \mathbf{r}' в (155), получаем:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'' - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \mathbf{v}(\mathbf{v} \mathbf{r}'') - \gamma(\mathbf{v} \mathbf{r}'') d\mathbf{v}, \quad (158)$$

где сохранён первый порядок малости по $d\mathbf{v}$.

До изменения скорости координаты были равны:

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}' - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \mathbf{v}(\mathbf{v} \bar{\mathbf{r}}'). \quad (159)$$

Если координаты стержня в движущейся системе отсчёта до изменения скорости $\bar{\mathbf{r}}'$ и после изменения \mathbf{r}'' остались неизменными, то для неподвижных наблюдателей их изменение описывается разностью уравнений (158) и (159). Учитывая $\mathbf{v}\mathbf{r} = \mathbf{v}\bar{\mathbf{r}}'/\gamma$ и вводя вектор, соединяющий концы стержня $\mathbf{s} = \mathbf{r}$, мы снова приходим к уравнению (14):

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\gamma^2 (\mathbf{v}\mathbf{s}) \mathbf{a}. \quad (160)$$

Наглядно вращение движущейся с переменной скоростью ИСО изображено на рисунке 16. Если ИСО K' движется относительно K с произвольной скоростью \mathbf{v} , то линии координатной сетки будут определённым образом “сплюснуты” и повернуты относительно лабораторной системы отсчёта (первая картинка). Если скорость системы изменяется, то координатная сетка получает новый поворот и деформацию (вторая картинка). Если некоторый вектор имеет фиксированные координаты в движущейся системе отсчёта, то в результате изменения скорости они изменятся относительно лабораторной системы.

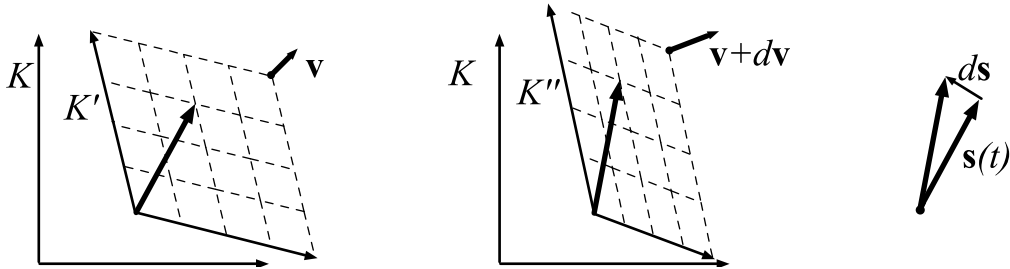


Рисунок 16. При изменении скорости системы отсчёта происходит вигнеровский поворот и лоренцевская деформация координатной сетки.

Это изменение, вообще говоря, зависит от того, как получается система K'' . Если с системой K она составляет чистый буст (подход Джексона, см. приложение А), то относительно лабораторной системы вигнеровского вращения нет и поворот будет возникать только в результате эффекта лоренцевского сокращения длины. В случае же, если K'' получается чистым бустом из системы K' , то относительно K будет наблюдаться как вигнеровское вращение, так и деформация координатной сетки, обусловленная лоренцевским сокращением длины. Именно второй случай был рассмотрен выше.

Г Уравнение для компонент 4-тензора спина

Получим динамическое уравнение прецессии для пространственных компонент 4-тензора спина (68). Чтобы не писать значок тильды, проведём вывод для полного момента импульса. Так как трансформационные свойства тензора $L^{\alpha\beta}$ и тензора спина $S^{\alpha\beta}$ одинаковые, полученное уравнение для \mathbf{L} будет эквивалентно уравнению для \mathbf{s} .

Пусть в системе K'' находится неподвижный, вращающийся гироскоп с моментом импульса \mathbf{L}'' и с центром энергии в начале координат: $\mathbf{G}'' = 0$. Записав преобразования (29) между системами K' и K'' с $\mathbf{v} = d\mathbf{v}'$, в первом порядке малости по $d\mathbf{v}'$ имеем:

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L}'', \quad \mathbf{G}' = d\mathbf{v}' \times \mathbf{L}''.$$
 (161)

Рассмотрим теперь точно такой же гироскоп с моментом \mathbf{L}' , центр энергии которого расположен в начале системы K' ($\mathbf{G}' = 0$). Когда начала систем K' и K'' совпадают, “совпадают” и гироскопы. Будем считать, что гироскоп системы K'' получается при изменении на $d\mathbf{v}'$ скорости гироскопа системы K' . При этом момент импульса не изменяется, однако сдвигается центр энергии гироскопа.

Найдём, как изменение поступательной скорости гироскопа выглядит с точки зрения неподвижных наблюдателей в K . Гироскоп K'' имеет момент импульса:

$$\mathbf{L} = \gamma\mathbf{L}' - \gamma[\mathbf{v} \times [d\mathbf{v}' \times \mathbf{L}']] - \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{L}'),$$
 (162)

где учтено (29) и (161), а гироскоп K' :

$$\mathbf{L} = \gamma\mathbf{L}' - \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{L}').$$
 (163)

Разница этих двух выражений даёт изменение момента импульса при изменении скорости гироскопа K' на $d\mathbf{v}'$.

Считая, что первый гироскоп (163) соответствует моменту времени t , а второй (162) – бесконечно близкому моменту $t + dt$, имеем:

$$d\mathbf{L} = -\gamma[\mathbf{v} \times [d\mathbf{v}' \times \mathbf{L}']] = -\gamma(\mathbf{v}\mathbf{L}')d\mathbf{v}' + \gamma\mathbf{L}'(\mathbf{v}d\mathbf{v}').$$
 (164)

Учтём инвариантность $\mathbf{v}\mathbf{L}' = \mathbf{v}\mathbf{L}$, и подставим $\gamma\mathbf{L}'$ из (163). Выражая при помощи закона сложения скоростей $d\mathbf{v}'$ через $d\mathbf{v}$

$$d\mathbf{v}' = \frac{(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - \gamma\mathbf{v} + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}(\mathbf{v} + d\mathbf{v}))}{\gamma(1 - \mathbf{v}(\mathbf{v} + d\mathbf{v}))} \approx \gamma d\mathbf{v} + \frac{\gamma^3\mathbf{v}(\mathbf{v}d\mathbf{v})}{\gamma + 1},$$
 (165)

и вводя ускорение $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, получаем:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{a})\mathbf{L} - \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{L})\mathbf{a} = \gamma^2\mathbf{v} \times [\mathbf{L} \times \mathbf{a}].$$
 (166)

Это уравнение было получено в разделе 8.

Список литературы

- [1] Thomas L. H. — ”*Motion of the spinning electron*”, Nature, **117**, 514 (1926)
- [2] Малыкин Г. Б. — ”*Прецессия Томаса: корректные и некорректные решения*”, УФН **176**, 8, с.865-882, (2006).
- [3] Мёллер К. — ”*Теория относительности*”, М.: Атомиздат. с.400, (1975)
- [4] Джексон Д. — ”*Классическая электродинамика*”, М.: Мир. с.702, (1965)
- [5] Ритус В. И. — “*О различии подходов Вигнера и Мёллера к описанию прецессии Томаса*”, УФН **177**, 8, с.105-112 (2007).
- [6] Bargmann V., Michel L. Telegdi V. L. — “*Precession of the Polarization of Particles Moving in a Homogeneous Electromagnetic Field*”, Phys.Rev.Lett. **2**, 435-436 (1959)
- [7] Филд Дж., Пикассо Э., Комбли Ф. — “*Проверка фундаментальных физических теорий в опытах со свободными заряженными лептонами*”, УФН **127**, 4, с.553-598 (1979).
- [8] Вейнберг С. — “*Гравитация и космология*”, М.: Мир (1975)
- [9] von Ignatowsky W. A. — ”*Einige allgemeine Bemerkungen zum Relativitätsprinzip*”, Archiv der Mathematik und Physik, 17. p. 1 ff. (1910). Перевод: <http://synset.com>
- [10] Frank P. and Rothe H. — ”*Über die Transformation der Raumzeitkoordinaten von ruhenden auf bewegte Systeme*”, Ann. Phys. 34, pp.825-853 (1911). Перевод: <http://synset.com>
- [11] Степанов С. С. — ”*100 лет без второго постулата Эйнштейна*”, (2010), <http://synset.com>
- [12] Степанов С. С. ”*Релятивистский мир*”, (2010), <http://synset.com>
- [13] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — “*Теоретическая физика. Теория поля*”, Т.2, М.: Наука (1988)
- [14] Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. — “*Квантовая электродинамика*”, М.: Наука, 179-186, (1989)
- [15] Фок В.А. — “*Теория Пространства, Времени и Тяготения*”, §29, М.: Гос.изд.тех.-теор.лит., (1961)

- [16] Wigner E. P. — “*On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*”, Ann. Math. 40, pp.149-204 (1939).
- [17] Stapp H. P. — “*Relativistic Theory of Polarization Phenomena*”, Phys.Rev. **103**, 2, pp.425-434, (1956)
- [18] Obukhov Y. N., Silenko A. J., Teryaev O. V. — “*Spin dynamics in gravitational fields of rotating bodies and equivalence principle*”, Phys.Rev. D **80**, 064044 (2009)
- [19] Воронов Н. А. Вагнер С. А. “*Релятивистский формализм углового момента и прецессия Томаса*”, М.: МФТИ (2003)
- [20] Померанский А. А., Сеньков Р. А., Хриплович И. Б. “*Релятивистские частицы с внутренним моментом во внешних полях*” УФН, **170**, N10, с.1129-1141 (2000)
- [21] Rivas M. “*Kinematical theory of spinning particles: The interaction Lagrangian for two spin 1/2 Dirac particles*” <http://arxiv.org/abs/physics/0608089v1> (2006)

Thomas precession: How it really works

In this paper we obtain the differential equations describing the rotating rod and precession of the spin of gyroscope that are moving along a curved trajectory. Several examples of such motion are considered.

The obtained equations differ from the traditional Thomas' expression interpreted as a rotation of the non-inertial frame relative to the fixed one. The cause of this disagreement is the fact that in general the axes of the moving frame are not orthogonal for the fixed observers. When the velocity changes, the axes direction changes due to both Wigner rotation and Lorentz contraction. In the present paper we take into account both these factors.

It is shown that the vectors representing various physical quantities transform in a different way in the moving reference frame. Thus the kinematic equations describing the motion of these quantities in the fixed frame are different as well.

Версии статьи:

- 2011, 20 января – основной текст;

Последнюю версию документа можно найти по адресу <http://synset.com>.
Замечания просьба присылать на phys@synset.com или оставлять на страницах обсуждения статьи. Печать: 2011, 15 мая