Прецессия Томаса

Как это выглядит на самом деле

Сергей С. Степанов

synset.com

11 Мая 2010

Что это такое?

Прецессия Люэлина Томаса (1926 г.). Это кинематический эффект.

- измерение аномальных магнитных моментов
- орбитальные гравитационные эксперименты с гироскопом

Вектор, связанный с НИСО, при её движении переносится параллельным образом относительно сопутствующей ИСО. Как это выглядит относительно лабораторной СО?

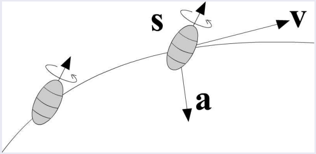
Что это такое?

Прецессия Люэлина Томаса (1926 г.). Это кинематический эффект.

- измерение аномальных магнитных моментов
- орбитальные гравитационные эксперименты с гироскопом

Вектор, связанный с НИСО, при её движении переносится параллельным образом относительно сопутствующей ИСО. Как это выглядит относительно лабораторной СО?

Гироскоп



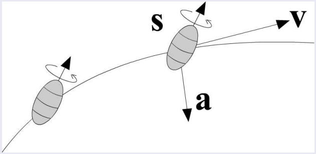
Что это такое?

Прецессия Люэлина Томаса (1926 г.). Это кинематический эффект.

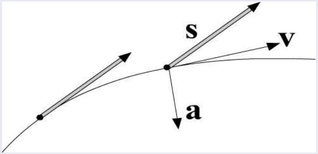
- измерение аномальных магнитных моментов
- орбитальные гравитационные эксперименты с гироскопом

Вектор, связанный с НИСО, при её движении переносится параллельным образом относительно сопутствующей ИСО. Как это выглядит относительно лабораторной СО?

Гироскоп



Стержень



О чем пойдет речь...

1. Введение
   - Как выводится обычно
   - Почему так плохо
2. Стержень
   - Уравнение для стержня
   - Неинерциальные системы отсчёта
3. Гироскоп
   - Классический спин
   - Уравнение для спина
   - Ковариантная формулировка
   - Движение спина во внешнем поле
   - Движение по окружности

О чем пойдет речь...

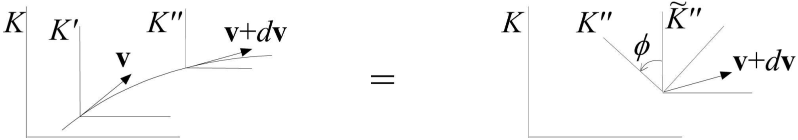
О чем пойдет речь...

1. Введение
   - Как выводится обычно
   - Почему так плохо
2. Стержень
   - Уравнение для стержня
   - Неинерциальные системы отсчёта
3. Гироскоп
   - Классический спин
   - Уравнение для спина
   - Ковариантная формулировка
   - Движение спина во внешнем поле
   - Движение по окружности

Как выводится обычно

Композиция преобразований:

$$\mathbb{L}(d\mathbf{v}')\,\mathbb{L}(\mathbf{v}) = \mathbb{R}(\mathbf{n}, d\phi)\,\mathbb{L}(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) \tag{1}$$



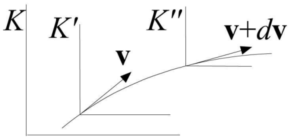
Вигнеровское вращение:

$$\mathbf{n}\,d\phi = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\,[\mathbf{v} \times d\mathbf{v}] \tag{2}$$

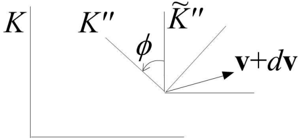
Как выводится обычно

Композиция преобразований:

$$\mathbb{L}(d\mathbf{v}')\,\mathbb{L}(\mathbf{v}) = \mathbb{R}(\mathbf{n}, d\phi)\,\mathbb{L}(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) \tag{1}$$



$=$



Вигнеровское вращение:

$$\mathbf{n}\,d\phi = -\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\,[\mathbf{v} \times d\mathbf{v}] \tag{2}$$

Для любого вектора $d\mathbf{s} = d\phi\,\mathbf{n} \times \mathbf{s}$, поэтому ($\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$):

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\,[\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{s} \tag{3}$$

Почему это не уравнение в лабораторной СО

Томас, Мёллер: $n = 2$; Ритус, Малыкин: $n = 1$

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\frac{\gamma^n}{\gamma + 1} [\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{s} \tag{4}$$

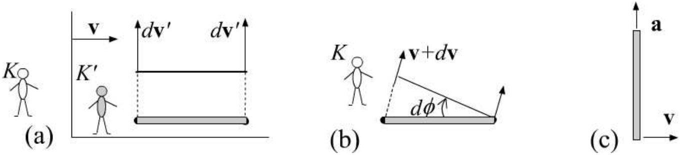
- Не согласуется с относительностью одновременности
- Не даёт верные преобразования для спина и момента
- Не различает векторы, имеющие различную природу

Почему это не уравнение в лабораторной СО

Томас, Мёллер: $n = 2$; Ритус, Малыкин: $n = 1$

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\frac{\gamma^n}{\gamma + 1}\,[\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{s} \tag{4}$$

- **Не согласуется с относительностью одновременности**



- Не даёт верные преобразования для спина и момента

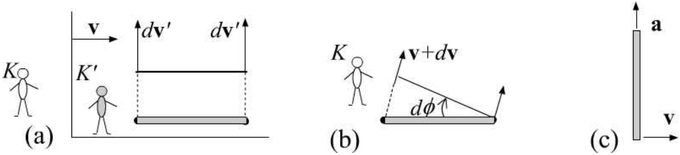
- Не различает векторы, имеющие различную природу

Почему это не уравнение в лабораторной СО

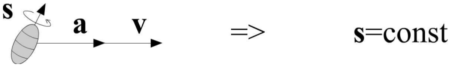
Томас, Мёллер: $n = 2$; Ритус, Малыкин: $n = 1$

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\frac{\gamma^n}{\gamma + 1}[\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{s} \tag{4}$$

- **Не согласуется с относительностью одновременности**



- **Не даёт верные преобразования для спина и момента**



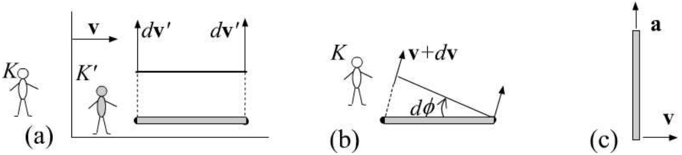
- Не различает векторы, имеющие различную природу

Почему это не уравнение в лабораторной СО

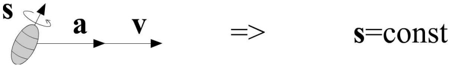
Томас, Мёллер: $n = 2$; Ритус, Малыкин: $n = 1$

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\frac{\gamma^n}{\gamma+1}[\mathbf{v}\times\mathbf{a}]\times\mathbf{s} \tag{4}$$

- Не согласуется с относительностью одновременности



- Не даёт верные преобразования для спина и момента



- Не различает векторы, имеющие различную природу

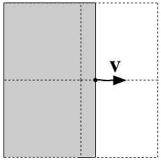
Лоренцевское сокращение

- **Вигнеровское вращение + лоренцевское сокращение**

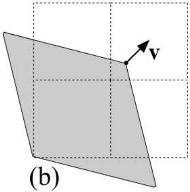
$$t = \gamma\,(t' + \mathbf{v}\mathbf{r}'), \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \gamma\mathbf{v}t' + \frac{\gamma-1}{v^2}\,\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\mathbf{r}') \tag{5}$$

Если исключить t' и зафиксировать $\mathbf{r}'$, то получим форму объекта

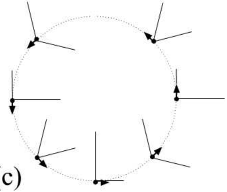
$$\mathbf{r} = \mathbf{v}t + \mathbf{r}' - \frac{\gamma}{\gamma+1}\,\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}') \tag{6}$$



(a)



(b)


(c)

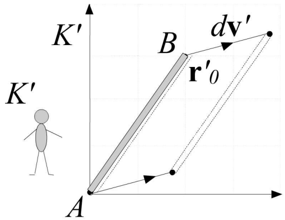
$$\mathbb{L}(d\mathbf{v}')\,\mathbb{L}(\mathbf{v}) = \mathbb{R}(\mathbf{n}, d\phi)\,\mathbb{L}(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) \tag{7}$$

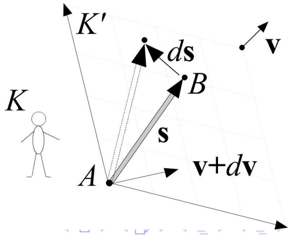
Нас интересует: Стержень при изменении скорости параллельно сдвигается относительно сопутствующей ИСО.
Как он движется относительно лабораторной системы?

Ответ:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\gamma^2 (\mathbf{v}\mathbf{s})\,\mathbf{a}$$

Метод: В ИСО K' 2 одинаковых стержня.
1-й – неподвижен, а второй – движется с *небольшой* скоростью $d\mathbf{v}'$.
При $t' = 0$ стержни в K' совпадают.





Детали вывода

Движение точки с постоянной скоростью в системах K' и K:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{u}'t', \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}t \tag{8}$$

Из преобразований Лоренца получаем закон сложения скоростей и:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'_0 - \gamma\mathbf{u}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0) + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0) \tag{9}$$

Точка B 1-го стержня $(\mathbf{u} = \mathbf{v})$: $\mathbf{r}_{0_1} = \mathbf{r}'_0 - \frac{\gamma}{\gamma+1}\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0)$

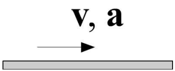
Точка B 2-го стержня $(\mathbf{u} = \mathbf{v} + d\mathbf{v})$: $\mathbf{r}_{0_2} = \mathbf{r}'_0 - \frac{\gamma}{\gamma+1}\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0) - \gamma(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0)d\mathbf{v}$

Вектор вдоль стержня $\mathbf{r}_{0_1} = \mathbf{s}$, $\mathbf{r}_{0_2} = \mathbf{s} + d\mathbf{s}$:

$$d\mathbf{s} = -\gamma(\mathbf{v}\mathbf{s}')d\mathbf{v} = -\gamma^2\,(\mathbf{v}\mathbf{s})\,d\mathbf{v} \tag{10}$$

Длина стержня

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\gamma^2\,(\mathbf{v}\mathbf{s})\,\mathbf{a}$$

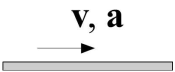


Стержень ($l = \mathbf{s}$), скорость ($\mathbf{v}$) и ускорение ($\mathbf{a}$) параллельны:

$$\frac{dl}{dt} = -\gamma^2 va\,l \qquad => \qquad l(t) = l_0\sqrt{1-v^2} \tag{11}$$

Длина стержня

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\gamma^2 \left(\mathbf{vs}\right) \mathbf{a}$$



Стержень ($l = \mathbf{s}$), скорость ($\mathbf{v}$) и ускорение ($\mathbf{a}$) параллельны:

$$\frac{dl}{dt} = -\gamma^2 va\, l \qquad => \qquad l(t) = l_0\sqrt{1 - v^2} \tag{11}$$

Жёсткая НИСО Мёллера:

$$l(t) \approx l_0\,\sqrt{1 - v^2}\left(1 + \frac{v^2}{2}\, a\gamma^3\, l_0 + ...\right) \tag{12}$$

Мгновенное лоренцевское сокращению получится, если

$$v^2\gamma^3 a l_0 \ll 1 \tag{13}$$

Для $l = 1$ м, $v = 0.8\,c$, имеем $a_0 = 3 \cdot 10^{16}$ м/с^2.

Итоги для стержня

Считается, что для любого вектора относительно лабораторной СО (Томас, Мёллер: $n = 2$, Ритус, Малыкин: $n = 1$):

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\frac{\gamma^n}{\gamma + 1}\left[\mathbf{v} \times \mathbf{a}\right] \times \mathbf{s} \tag{14}$$

- Изменяет свою длину
- Соответствует относительности одновременности

Итоги для стержня

Считается, что для любого вектора относительно лабораторной СО (Томас, Мёллер: $n = 2$, Ритус, Малыкин: $n = 1$):

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\frac{\gamma^n}{\gamma + 1}\left[\mathbf{v} \times \mathbf{a}\right] \times \mathbf{s} \tag{14}$$

На самом деле для стержня уравнение выглядит так:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\gamma^2 \left(\mathbf{vs}\right) \mathbf{a} \tag{15}$$

- Изменяет свою длину
- Соответствует относительности одновременности

Итоги для стержня

Считается, что для любого вектора относительно лабораторной СО (Томас, Мёллер: $n = 2$, Ритус, Малыкин: $n = 1$):

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\frac{\gamma^n}{\gamma + 1} [\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{s} \qquad (14)$$

На самом деле для стержня уравнение выглядит так:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\gamma^2 (\mathbf{vs})\, \mathbf{a} \qquad (15)$$

- **Изменяет свою длину**
- Соответствует относительности одновременности

Итоги для стержня

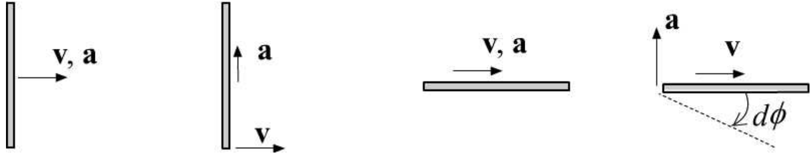
Считается, что для любого вектора относительно лабораторной СО (Томас, Мёллер: $n = 2$, Ритус, Малыкин: $n = 1$):

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\frac{\gamma^n}{\gamma + 1} [\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{s} \tag{14}$$

На самом деле для стержня уравнение выглядит так:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\gamma^2 (\mathbf{vs})\, \mathbf{a} \tag{15}$$

- **Изменяет свою длину**
- **Соответствует относительности одновременности**



Гироскоп

Гироскоп – это система частиц:

$$\mathcal{E} = \sum E, \quad \mathbf{P} = \sum \mathbf{p}, \quad \mathbf{L} = \sum \mathbf{r}\times\mathbf{p}, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{\mathcal{E}}\sum E\mathbf{r} \tag{16}$$

Определим 4-скорость гироскопа через суммарный импульс:

$$P^\alpha = \{\mathcal{E},\ \mathbf{P}\}, \qquad U^\alpha = \frac{P^\alpha}{M} = \gamma\{1,\ \mathbf{u}\} \tag{17}$$

Тензор полного момента импульса:

$$L^{\mu\nu} = \sum(x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu) \tag{18}$$

неинвариантен относительно трансляций $x^\nu \mapsto x^\nu + a^\nu$, $a^\nu = const$:

$$L^{\mu\nu} \mapsto L^{\mu\nu} + a^\mu P^\nu - a^\nu P^\mu \tag{19}$$

Собственный момент должен быть инвариантен

$$S_\nu = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma}\,L^{\alpha\beta}\,U^\gamma \tag{20}$$

Инвариантен при трансляциях (т.к. $U^\nu = P^\nu/M$):

$$x^\nu \mapsto x^\nu + a^\nu, \qquad\qquad S_\nu \mapsto S_\nu \tag{21}$$

Компоненты спина $S^\nu = \{S^0,\ \mathbf{S}\}$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\mathbf{u}^2} = \mathcal{E}/M$:

$$\mathbf{S} = \gamma\,(\mathbf{L} - \mathbf{R}\times\mathbf{P}), \qquad\qquad S^0 = \mathbf{uS}. \tag{22}$$

- Спин $\sim$ полный момент импульса - момент импульса центра энергии.
- В системе покоя спин равен собственному моменту.

Мы будем использовать свойство ортогональности:

$$\mathrm{U}\cdot\mathrm{S} = \gamma\,(S^0 - \mathbf{uS}) = 0. \tag{23}$$

4-тензор спина

Трансляционно инвариантен тензор спина:

$$S^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} U_\mu S_\nu = L^{\alpha\beta} - (L^{\alpha\gamma} U^\beta - L^{\beta\gamma} U^\alpha) U_\gamma \quad (24)$$

Равен отклонению момента от эффективной траектории $X^\alpha = \{t, \mathbf{X}\}$:

$$S^{\alpha\beta} = \sum [(x^\alpha - X^\alpha) p^\beta - (x^\beta - X^\beta) p^\alpha] = L^{\alpha\beta} - (X^\alpha P^\beta - X^\beta P^\alpha), \quad (25)$$

где траектория сдвинута относительно центра инерции:

$$\mathrm{X} = (\mathrm{R} \cdot \mathrm{U})\, \mathrm{U} + \frac{\mathrm{L} \cdot \mathrm{U}}{M}, \qquad \mathbf{X} = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{u} \times (\mathbf{L} - \mathbf{R} \times \mathbf{P})}{M} \quad (26)$$

Тензор $S^{\alpha\beta}$ зависит от $\mathbf{g} = \{S^{10}, S^{20}\, S^{20}\}$, $\mathbf{s} = \{S^{23}, S^{31}\, S^{12}\}$:

$$\mathbf{g} = \mathbf{u} \times \mathbf{s}, \qquad \mathbf{s} = \gamma \mathbf{S} - \gamma\, (\mathbf{u}\mathbf{S})\, \mathbf{u} \quad (27)$$

В сопутствующей системе отсчёта $\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{L}$

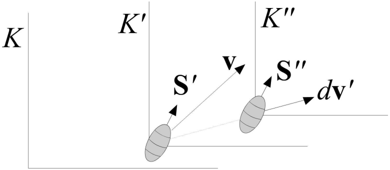
Уравнение для спина

Нас интересует: Вектор спина гироскопа при изменении его скорости параллельно сдвигается относительно сопутствующей ИСО.
Как он изменяется в лабораторной системе?

Ответ:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \gamma^2 \left(\mathbf{aS}\right) \mathbf{v}$$

Метод: Рассматриваем 2 одинаковых гироскопа в K'.
1-й – неподвижен, 2-й – движется с *небольшой* скоростью $d\mathbf{v}'$.
При $t' = 0$ оба гироскопа в K' совпадают.



Детали вывода

Для любого 4-вектора $\mathrm{U} \cdot \mathrm{S} = 0 \quad => \quad S^0 = \mathbf{uS}$:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} - \gamma\,(\mathbf{uS})\,\mathbf{v} + \frac{\gamma - 1}{v^2}\,(\mathbf{vS})\,\mathbf{v} \tag{28}$$

1-й гироскоп:	$\mathbf{u} = \mathbf{v}$,	$\mathbf{S}'_1 = \mathbf{S}'$,	$\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}$
2-й гироскоп:	$\mathbf{u} = \mathbf{v} + d\mathbf{v}$,	$\mathbf{S}'_2 = \mathbf{S}'$,	$\mathbf{S}_2 = \mathbf{S} + d\mathbf{S}$

Вычитая преобразования, имеем:

$$d\mathbf{S} = \frac{\gamma}{\gamma + 1}\,(\mathbf{v}d\mathbf{S})\,\mathbf{v} + \gamma\,(\mathbf{S}d\mathbf{v})\,\mathbf{v} \tag{29}$$

Умножая на $\mathbf{v}$ и выражая $\mathbf{v}d\mathbf{S}$, окончательно:

$$d\mathbf{S} = \gamma^2\,(\mathbf{S}d\mathbf{v})\,\mathbf{v} \tag{30}$$

Уравнение переноса Ферми

Уравнению

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \gamma^2 \left(\mathbf{aS}\right) \mathbf{v} \tag{31}$$

можно придать ковариантную форму $\mathrm{S} = \{S^0,\ \mathbf{S}\} = \{\mathbf{vS},\ \mathbf{S}\}$:

$$\frac{d\mathrm{S}}{d\tau} = -\left(\mathrm{A} \cdot \mathrm{S}\right) \mathrm{V} \tag{32}$$

где $d\tau$ – собственное время и A – 4-ускорение:

$$\mathrm{A} = \frac{d\mathrm{V}}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}\{\gamma,\ \mathbf{v}\gamma\} = \{(\mathbf{va})\gamma^4,\ \mathbf{a}\gamma^2 + \mathbf{v}\left(\mathbf{va}\right)\gamma^4\} \tag{33}$$

В силу $\mathrm{V} \cdot \mathrm{S} = 0$ длина 4-спина постоянна $\mathrm{S}^2 = (S^0)^2 - \mathbf{S}^2 = const$.

$$\frac{dS^0}{dt} = \frac{d(\mathbf{vS})}{dt} = \gamma^2 \left(\mathbf{aS}\right) \tag{34}$$

В сопутствующей ИСО K' 3-спин не изменяется (|| перенос):

$$\mathrm{S} = \{0, \mathbf{S}'\}, \qquad \frac{d\mathbf{S}'}{dt'} = 0, \qquad \frac{dS_0'}{dt'} = \mathbf{a}'\mathbf{S}' \tag{35}$$

В уравнение для S входят 4-скорость V и 4-ускорение A

$$K' : \mathbf{v} = 0 : \qquad \mathrm{V} = \{1, \mathbf{0}\}, \qquad \mathrm{A} = \{0,\ \mathbf{a}'\} \tag{36}$$

Поэтому

$$\frac{d\mathrm{S}}{d\tau} = \alpha \mathrm{V}, \qquad \frac{d\{S_0,\ \mathbf{S}'\}}{dt'} = \alpha\,\{1,\ \mathbf{0}\} \tag{37}$$

Дифференцируя условие ортогональности $\mathrm{V} \cdot \mathrm{S} = 0$:

$$0 = \frac{d(\mathrm{V} \cdot \mathrm{S})}{d\tau} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{S} + \alpha \mathrm{V}^2 \qquad => \qquad \alpha = -(\mathrm{A} \cdot \mathrm{S}) \tag{38}$$

или

$$\frac{D\mathrm{S}}{d\tau} = -(\mathrm{A} \cdot \mathrm{S})\,\mathrm{V}, \qquad \frac{D\mathrm{V}}{d\tau} = \mathrm{A} \tag{39}$$

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \gamma^2 \left(\mathbf{aS}\right) \mathbf{v} \tag{40}$$

Уравнение переноса Ферми можно записать в "смешанных величинах"

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} - \frac{\gamma}{\gamma + 1}\, \mathbf{v}(\mathbf{vS}) \tag{41}$$

Беря производную по лабораторному времени:

$$\frac{d\mathbf{S}'}{dt} = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \left[\mathbf{v} \times \mathbf{a}\right] \times \mathbf{S}' \tag{42}$$

Ковариантная "томософикация" $\mathrm{S}' = \Lambda \cdot \mathrm{S}$:

$$\frac{d\mathrm{S}'}{d\tau} = \left(\frac{d\Lambda}{d\tau} \cdot \Lambda^{-1} - \Lambda \cdot (\mathrm{V} \otimes \mathrm{A}) \cdot \Lambda^{-1}\right) \cdot \mathrm{S}' \tag{43}$$

Время, скорость и ускорение относится к лабораторной системе, а спин – к мгновенно сопутствующей системе.

Уравнение для компонент 4-тензора спина

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \gamma^2 \left(\mathbf{aS}\right) \mathbf{v} \tag{44}$$

Можно перейти к компонентам 4-тензора $S^{\alpha\beta} = (\mathbf{g},\ \mathbf{s})$:

$$\mathbf{s} = \gamma\mathbf{S} - \gamma(\mathbf{uS})\mathbf{u} \tag{45}$$

Дифференцируя, получаем:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \gamma^2[\mathbf{v} \times [\mathbf{s} \times \mathbf{a}]] \tag{46}$$

В ковариантном виде:

$$\frac{dS^{\alpha\beta}}{d\tau} = A_\gamma \left(S^{\gamma\alpha}U^\beta - S^{\gamma\beta}U^\alpha\right) \tag{47}$$

Движение в однородном электромагнитном поле

Дополнительно существует ларморовская прецессия при $\mathbf{v} = 0$:

$$\mathrm{S} \cdot \mathrm{V} = 0, \qquad \mathrm{A} = \frac{d\mathrm{V}}{d\tau} = \frac{Q}{m}\,\mathrm{F} \cdot \mathrm{V}, \qquad \frac{d\mathbf{S}'}{dt'} = \frac{gQ}{2m}\,\mathbf{S}' \times \mathbf{B}' \tag{48}$$

Пусть изменение 4-вектора спина линейно по $\mathrm{F} \equiv F^{\alpha\beta}$ и $\mathrm{S} \equiv S^{\alpha}$:

$$\frac{d\mathrm{S}}{d\tau} = \alpha_1\,\mathrm{S} + \alpha_2\,\mathrm{V} + \alpha_3\,\mathrm{F} \cdot \mathrm{S} + \alpha_4\,\mathrm{F} \cdot \mathrm{V} + \alpha_5\,(\mathrm{S} \cdot \mathrm{F} \cdot \mathrm{V})\,\mathrm{V} \tag{49}$$

Получается уравнение Баргмана-Мишеля-Телегди (1959 г.):

$$\frac{d\mathrm{S}}{d\tau} = \frac{gQ}{2m}\,\mathrm{F} \cdot \mathrm{S} - \left(1 - \frac{g}{2}\right)(\mathrm{A} \cdot \mathrm{S})\,\mathrm{V} \tag{50}$$

или в 3-мерной записи:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{gQ}{2m\gamma}\Big((\mathbf{vS})\,\mathbf{E} + \mathbf{S} \times \mathbf{B}\Big) + \left(1 - \frac{g}{2}\right)\gamma^2\,(\mathbf{aS})\,\mathbf{v} \tag{51}$$

Движение по окружности

При движении в однородном магнитном поле:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{gQ}{2m\gamma}\left[\mathbf{S}\times\mathbf{B}\right] + \left(1-\frac{g}{2}\right)\gamma^2\left(\mathbf{aS}\right)\mathbf{v} \tag{52}$$

ускорение перпендикулярно скорости

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \omega[\mathbf{v}\times\mathbf{n}], \qquad \omega = \frac{QB}{m\gamma} \tag{53}$$

Проекции спина на скорость и ускорение:

$$\frac{d(\mathbf{vS})}{dt} = -\gamma^2\,\frac{g-2}{2}\,(\mathbf{aS}), \qquad \frac{d(\mathbf{aS})}{dt} = \omega^2\,\frac{g-2}{2}\,(\mathbf{vS}) \tag{54}$$

Потому они совершают осцилляторные колебания с частотой:

$$\omega_a = \frac{g-2}{2}\,\gamma\,\omega = \frac{g-2}{2}\,\frac{QB}{m} \tag{55}$$

Это позволяет измерять аномальный магнитный момент.
Для электрона $g \approx 2$ динамика компенсирует кинематику.

Движение по окружности: годограф

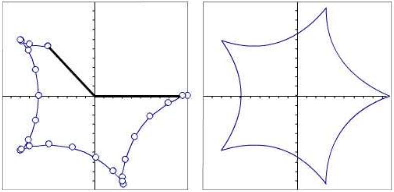


Рис 1.: $v = 4/5, \quad \gamma = 5/3;$

Движение по окружности: годограф

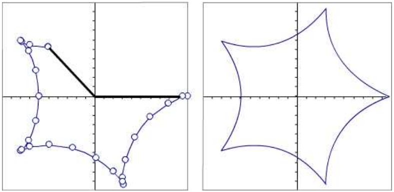


Рис 1.: $v = 4/5, \quad \gamma = 5/3;$

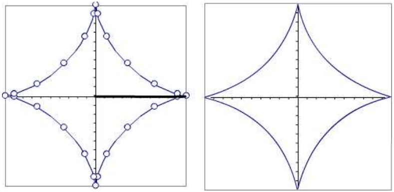


Рис 2.: $v = 0.866, \quad \gamma = 2;$

Движение по окружности: годограф

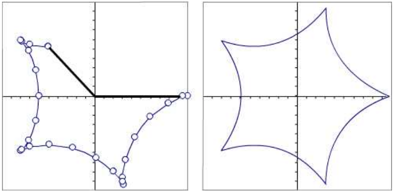


Рис 1.: $v = 4/5, \quad \gamma = 5/3;$

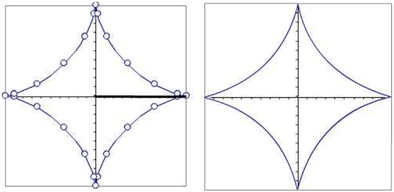


Рис 2.: $v = 0.866, \quad \gamma = 2;$

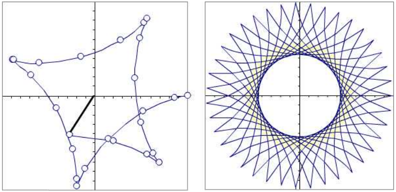


Рис 3.: $v = 0.901, \; \gamma = 23/10;$

Движение по окружности: годограф

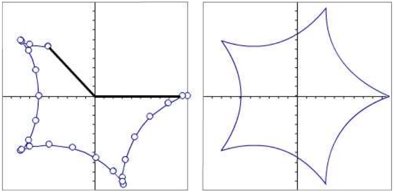


Рис 1.: $v = 4/5, \quad \gamma = 5/3;$

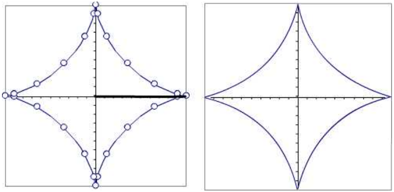


Рис 2.: $v = 0.866, \quad \gamma = 2;$

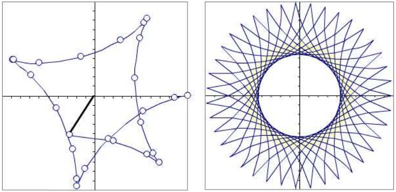


Рис 3.: $v = 0.901, \quad \gamma = 23/10;$

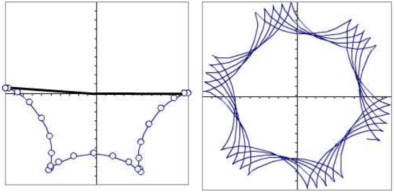


Рис 4.: $v = 0.75, \quad \gamma = 1.512...$

Заключение

Считается, что для любого вектора относительно лабораторной СО (Томас, Мёллер: $n = 2$, Ритус, Малыкин: $n = 1$):

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\frac{\gamma^n}{\gamma + 1} [\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{s}$$

Заключение

Считается, что для любого вектора относительно лабораторной СО (Томас, Мёллер: $n = 2$, Ритус, Малыкин: $n = 1$):

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\frac{\gamma^n}{\gamma + 1}\left[\mathbf{v} \times \mathbf{a}\right] \times \mathbf{s}$$

На самом деле:

для различных 3-векторов уравнения поворота различны

Заключение

Считается, что для любого вектора относительно лабораторной СО (Томас, Мёллер: $n = 2$, Ритус, Малыкин: $n = 1$):

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\frac{\gamma^n}{\gamma + 1}\left[\mathbf{v} \times \mathbf{a}\right] \times \mathbf{s}$$

На самом деле:

для различных 3-векторов уравнения поворота различны

Радиус-вектор $\mathbf{s}$ стержня, спин $\mathbf{S}$ и компоненты 4-тензора $\tilde{\mathbf{S}}$:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\gamma^2\left(\mathbf{v}\mathbf{s}\right)\mathbf{a}, \qquad \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \gamma^2\left(\mathbf{a}\mathbf{S}\right)\mathbf{v} \qquad \frac{d\tilde{\mathbf{S}}}{dt} = \gamma^2\,\mathbf{v} \times [\tilde{\mathbf{S}} \times \mathbf{a}]$$

Спасибо за внимание!

Статья и другие материалы:

synset.com

- 100 лет без 2-го постулата Эйнштейна
- Оказывает ли свет давление на пробный заряд?