Являются ли жесткие неинерциальные системы отсчёта жесткими?

С. С. Степанов[1]

В работе анализируется понятие жесткости системы отсчёта в рамках специальной теории относительности. Сформулированы три определения жесткости. На примерах различных неинерциальных систем продемонстрирована их неэквивалентность. Показано, что так называемые жесткие неинерциальные системы отсчёта Мёллера обладают локальной жесткостью, но не являются жесткими в глобальном смысле. Обсуждается физическая причина этого явления и её связь со смыслом неевклидовости геометрии пространства в неинерциальной системе отсчёта.

[1]e-mail: phys@synset.com

1 Введение

В специальной теории относительности неинерциальная система отсчёта полностью определена, если заданы траектории движения каждой её точки относительно лабораторной (инерциальной) системы отсчёта. Из всего бесконечного многообразия неинерциальных систем выделяются так называемые жёсткие системы отсчёта. Свойство жёсткости является кинематическим, а не динамическим и подразумевает неизменность расстояния между точками системы отсчета в том или ином смысле. В частности, жёсткой является любая инерциальная система отсчёта. Жесткость, как и многие другие понятия, в релятивистской теории приобретают принципиально новое содержание по сравнению с классической теорией. Впервые критерий жёсткости в теории относительности сформулировал в 1909 г. М. Борн [1]. В последствии это понятие широко использовалось различными авторами [3]–[6].

В этой работе мы сформулируем три, на первый взгляд эквивалентных, определения жесткости. Однако, на примерах различных систем отсчёта, будет показано, что на самом деле они не тождественны друг другу.

Статья организована следующим образом. Сначала мы введём некоторые базовые понятия о неинерциальных системах отсчёта, которые потребуются в дальнейшем. Затем сформулируем различные определения жёсткости системы отсчёта. Чтобы продемонстрировать их неэквивалентность, мы рассмотрим четыре неинерциальные системы. Мы обсудим некоторые аспекты физики в этих системах и при помощи простых рассуждений приведём новый вывод преобразований Борна-Мёллера. При изучении системы отсчёта, двигающейся прямолинейно с произвольной переменной скоростью, выяснится, что локальная жёсткость системы отсчёта не влечет за собой жесткости глобальной. Мы обсудим физическую причину этого явления и её связь со смыслом неевклидовости геометрии 3-пространства в неинерциальных системах отсчёта. Будет доказано, что в случае поступательного движения, единственной системой в которой сформулированные типы жесткости совпадают, является жесткая равноускоренная система отсчёта Борна-Мёллера. В приложение A вынесены некоторые технические детали, а в приложении B в ковариантном виде приведены исходные рассуждения Борна, сформулировавшего свой критерий жесткости.

2 Неинерциальные системы отсчёта

Метрика пространства Минковского в лабораторной инерциальной системе отсчета $S_0 : \{T,\, X,\, Y,\, Z\}$ имеет вид:

$$ds^2 = dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 = dT^2 - dX^i\, dX^i, \tag{1}$$

где T – физическое время, измеряемое синхронизированными в этой системе часами, $X^i = \{X,\, Y,\, Z\}$ – декартовы координаты события. Мы используем систему единиц, в которой скорость света равна единице. Греческие индексы изменяются от 0 до 3, а латинские от 1 до 3. По повторяющимся индексам предполагается суммирование. Жирным шрифтом помечаются 3-векторы, а 4-векторы – прямым шрифтом (см. приложение A1).

Рассмотрим произвольную систему отсчёта $S : \{t,\, x,\, y,\, z\}$, где $x^i = \{x,\, y,\, z\}$ – координаты (не обязательно декартовы), однозначно определяющие данную точку этой системы. Такая точка движется относительно лабораторной системы S_0 по траектории:

$$X^i = F^i(T,\, x,\, y,\, z), \tag{2}$$

где F^i – некоторые функции времени T для каждой точки x^i. Время t неинерциальной системы можно определить любым удобным образом при помощи произвольной функции $T = X^0(t,\, x,\, y,\, z)$. Такое время является координатным и, вообще говоря, не совпадает с физическим временем часов, связанных с точкой x^i.

Заменяя в траектории (2) время T на функцию $X^0(t,\, x,\, y,\, z)$, мы получаем преобразования от системы S к лабораторной системе S_0:

$$T = X^0(t,\, x,\, y,\, z), \qquad X^i = X^i(t,\, x,\, y,\, z). \tag{3}$$

Такие преобразования связывают время и координаты некоторого события, регистрируемого выделенным наблюдателем неинерциальной системы (который обычно находится в начале координат) с аналогичными измерениями в лабораторной системе отсчёта [12].

Подстановка преобразований (3) в (1), даёт интервал между событиями в неинерциальной системе ($x^0 = t$), см. приложение A2:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta. \tag{4}$$

Метрика $g_{\alpha\beta}$ в общем случае зависит от координат и времени, но при этом автоматически обладает нулевой кривизной (в специальной теории относительности 4-пространство псевдоевклидово).

• В рамках данной системы отсчёта всегда можно перейти к другому способу нумерации событий:

$$t' = t'(t,\, x,\, y,\, z), \qquad x'^i = x'^i(x,\, y,\, z). \tag{5}$$

Первое преобразование определяет новое координатное время t', а оставшиеся – другой способ нумерации пространственных точек системы (например, переход от декартовых к сферическим координатам). Важно, что последние преобразования не зависят от времени t, т.к., в противном случае мы получили бы другую систему отсчёта.

Естественно, метрические коэффициенты (4) после преобразования (5) изменяются. Поэтому, одной и той же неинерциальной системе отсчёта могут соответствовать различные метрики. Эти метрики тождественны друг другу, если могут быть связаны преобразованием (5).

Чтобы при выбранном способе нумерации событий $\{t,\, x,\, y,\, z\}$ делать некоторые физические заключения, необходимо выяснить как эти координаты связаны с физическим временем $\delta\tau$ и длиной δl. Другими словами перейти от координатного произвола к физически измеряемым величинам.

• Определим сначала *собственное время* часов $d\tau_0$, находящихся в фиксированной точке неинерциальной системы. Оно равно интервалу ds при $dx^i = 0$:

$$d\tau_0 = \sqrt{g_{00}}\, dt = \sqrt{1 - \mathbf{U}^2}\, dT, \tag{6}$$

где $U^i = dX^i/dT$ – компоненты скорости этой точки относительно лабораторной системы отсчёта (см. приложение А3) и $\mathbf{U}^2 = U^iU^i$. Таким образом, это определение приводит к стандартной релятивистской формуле замедления времени на часах, движущихся со скоростью $\mathbf{U} = \mathbf{U}(T)$. Такие часы, независимо от своего ускорения, имеют такой-же темп хода, как и часы в локально сопутствующей инерциальной системе, движущейся относительно лабораторной системы в момент времени T с той-же (но постоянной) скоростью $\mathbf{U}$.

То, что замедление времени зависит только от скорости, и не зависит от ускорения, вообще говоря, нетривиальный факт, требующий экспериментального обоснования. Последним может быть измерение замедления времени жизни мюонов в кольцевом ускорителе [9], в котором частицы испытывают очень существенное ускорение (правда, перпендикулярное к скорости движения частиц).

• Для введения физического времени и длины в неинерциальной системе отсчёта, распишем интервал (4), отделив нулевой индекс и придадим ему псевдоевклидовый вид:

$$ds^2 = g_{00}\,dt^2 + 2g_{0i}\,dtdx^i + g_{ij}\,dx^i dx^j = \delta\tau^2 - \delta l^2. \tag{7}$$

Выделяя полный квадрат по координатному времени dt, получаем *физическое время*:

$$\delta\tau = \sqrt{g_{00}}\,dt + \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}\,dx^i = \frac{g_{0\mu}\,dx^\mu}{\sqrt{g_{00}}} \tag{8}$$

и квадрат *физической длины*, которая определяется значениями коэффициентов 3-мерного тензора γ_{ij}:

$$\delta l^2 = \gamma_{ij}\,dx^i dx^j, \qquad\qquad \gamma_{ij} = -g_{ij} + \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}. \tag{9}$$

• Если $dx^i = 0$, то физическое время (8) совпадает с собственным временем часов (6), находящихся в точке x^i. В общем случае $\delta\tau$ равно времени прохождения светового сигнала в одну сторону между двумя соседними точками, часы в которых локально синхронизированы [12]. Если $\delta\tau$ оказывается полным дифференциалом, то в такой системе отсчета можно ввести единое для всех точек (наблюдателей) синхронизированное время $\tau = \tau(t,\, x,\, y,\, z)$. Значение интервала времени $\delta\tau$ не изменяется (приложение A4) при преобразованиях (5), что является ещё причиной считать его физической величиной (не зависящей от координатного произвола).

• Бесконечно малая физическая длины (9) имеет смысл радиолокационного расстояния, которое получает наблюдатель, расположенный в точке пространства с координатами x^i до бесконечно близкой к нему точки $x^i + dx^i$ [8]. Для его измерения он посылает сигнал со скоростью света, который, отражаясь от точки $x^i + dx^i$, возвращается обратно. Время движения сигнала в обе стороны равно удвоенному расстоянию δl между точками. Такая длина (9) совпадает с длиной "небольшой линейкой" наблюдателя в сопутствующей к точке x^i инерциальной системе отсчёта (приложение A5).

Физическая длина δl, как и время $\delta\tau$ является инвариантом преобразований (5). При этом коэффициенты γ_{ij} преобразуются при (5) как 3-мерный метрический тензор (приложение A6). Распространение импульса света соответствует нулевому интервалу $ds^2 = \delta\tau^2 - \delta l^2 = 0$ и его скорость всегда равна единице: $\delta l/\delta\tau = 1$ (в отличии от координатной скорости dx^i/dt, которая может быть больше скорости света).

3 Определения жесткости системы отсчёта

Жесткость (как бы мы её не определяли) – это понятие относительное. "Парадокс Белла" [7] является хорошей иллюстрацией к этому утверждению. Пусть две точки движутся с ускорением синхронно так, что расстояние между ними остаётся неизменным относительно лабораторной системы отсчёта. Относительность одновременности приводит к тому, что для наблюдателей, связанных с каждой точкой, это движение не будет синхронным. В результате расстояние между точками для этих наблюдателей меняется со временем. Аналогично, если расстояние между наблюдателями в неинерциальной системе неизменно, то оно может оказаться зависящем от времени с точки зрения лабораторной системы отсчёта.

Поэтому, обсуждая далее жесткость системы отсчёта, мы будем подразумевать, что она выполняется для наблюдателей, связанных с точками этой системы. Аналогично собственному времени, будем называть её *собственной жесткостью* системы отсчёта. Возможны по крайней мере три определения собственной жесткости:

I. *Сопутствующая жесткость*: все точки системы отсчёта имеют нулевую скорость в сопутствующей к одной из точек инерциальной системе отсчёта.

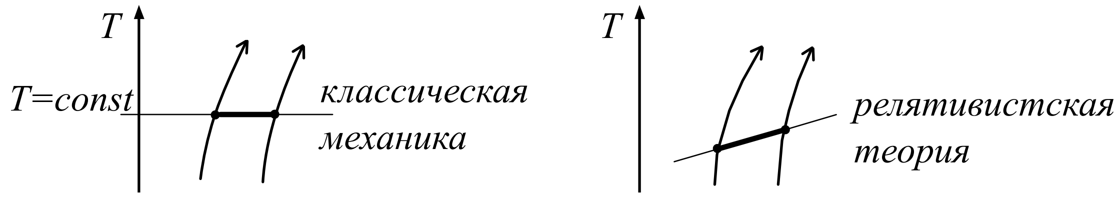
II. *Локальная жесткость*: тензор $\gamma_{ij} = -g_{ij} + g_{0i}g_{0j}/g_{00}$, определяющий элемент бесконечно малой физической длины, не зависит от времени.

III. *Глобальная жесткость*: радиолокационное расстояние между любыми двумя точками системы отсчёта, измеренное одним наблюдателем, не меняется со временем.

Мы продемонстрируем, что эти три определения не эквивалентны. Особенно неожиданным это может показаться по отношению к последним двум определениям. В основе процедуры, дающей γ_{ij} лежит радиолокационное измерение расстояния между двумя бесконечно близкими точками. Однако, оказывается (раздел 7), что из его постоянства, вообще говоря, не следует глобальной жесткости системы отсчёта. То есть, бесконечно малые радиолокационные расстояния могут быть постоянными, и при этом радиолокационное расстояние между удалёнными точками может изменяться со временем.

Критерий сопутствующей жесткости имеет ограниченную область приложения. Например, он не применим для вращающейся системы отсчёта даже в классической механике (раздел 6). Однако, для поступательно движущихся систем этот критерий имеет определённую эвристическую ценность и позволяет установить соответствующие преобразования координат (раздел 5).

Отметим, что исторически первым понятие жёсткости в теории относительности ввёл в 1909г. Макс Борн [1]. Он рассматривал некоторое тело, каждая точка которого однозначно характеризуется (нумеруется) тремя координатами $x^i = \{x, y, z\}$ и в лабораторной системе движется по траектории $X^\alpha = X^\alpha(\tau, x^i)$, где τ – собственное время часов, связанных с точкой. В классической механике тело считается жестким, если расстояние между двумя его точками, измеренное в данный момент времени, в дальнейшем не меняется (ниже первый рисунок). Такое определение не является релятивистски инвариантным и в любой другой системе отсчёта будет нарушено. Поэтому Борн потребовал для жесткого тела неизменности бесконечно малого расстояния в 4-пространстве в гиперплоскости, ортогональной траекториям двух соседних точек (ниже второй рисунок):



Ортогональность при этом понимается в псевдоевклидовом смысле. В пространстве Минковского A·B = 0, если $A^0B^0 = A^1B^2$. Медиана, проведенная между ортогональными векторами образует с осью T угол 45^o, т.е является траекторией светового сигнала.

Борн использовал достаточно громоздкие нековариантные обозначения, поэтому в приложении мы повторим его рассуждения в существенно более компактном виде. Мы покажем, что критерий жёсткости Борна совпадает со вторым типом жесткости (локальная жёсткость: $\gamma_{ij} = const$) для частного случая преобразований (3), в которых координатное время t является собственным временем τ точки с координатами $\{x, y, z\}$. В этой же работе Борн впервые фактически записал преобразования, определяющие жесткую равноускоренную систему отсчёта (раздел 5), которую в дальнейшем активно использовал Мёллер [6].

4 Нежесткая равноускоренная система отсчёта

• Пусть до момента времени $T = 0$ частица покоилась в лабораторной системе отсчёта, имея координату $X = x$. Если при $T \geqslant 0$ на неё начинает действовать постоянная сила, то координата частицы будет изменяться со временем следующим образом [8]:

$$X = x + \frac{1}{a}\left[\sqrt{1+(aT)^2} - 1\right], \tag{10}$$

где a – константа, имеющая смысл собственного ускорения частицы (ускорение в сопутствующей к ней инерциальной системе). В лабораторной системе скорость частицы $U = dX/dT$ растёт, стремясь к скорости света, а ускорение $W = dU/dT$ уменьшается:

$$U(T) = \frac{aT}{\sqrt{1+(aT)^2}}, \qquad W(T) = \frac{a}{(1+(aT)^2)^{3/2}}. \tag{11}$$

Собственное время часов, движущихся вместе с частицей со скоростью $U(T)$ равно (arsh – гиперболический арксинус):

$$\tau = \int\limits_0^T \sqrt{1-U^2(T)}\,dT = \frac{1}{a}\,\mathrm{arsh}(aT). \tag{12}$$

• Рассмотрим неинерциальную систему отсчёта, точки которой движутся равноускоренно согласно (10). Координаты точек равны x, что соответствует их положению в лабораторной системе отсчёта в момент начала действия ускорения. В качестве координатного времени выберем собственное время (12) часов в данной точке ($t = \tau$). В результате, связь координат и времён события наблюдаемого из лабораторной и неинерциальной систем отсчёта имеет вид:

$$T = \frac{1}{a}\,\mathrm{sh}(at), \qquad X = x + \frac{1}{a}\left[\mathrm{ch}(at) - 1\right], \qquad Y = y. \tag{13}$$

(мы опускаем координату z, так как она входит в выражения аналогично координате y). Подставляя (13) в (1), получаем:

$$ds^2 = dt^2 - 2\,\mathrm{sh}(at)\,dtdx - dx^2 - dy^2. \tag{14}$$

Эту неинерциальную систему отсчёта рассматривал Логунов [11]. Она же фигурирует при формулировки парадокса Белла [7]. Как мы сейчас покажем, эта система не является жёсткой ни по одному из сформулированных выше критериев.

• Прежде всего, очевидно, что относительность одновременности приводит к нарушению *сопутствующей жесткости.* Действительно, все точки неинерциальной системы S движутся синхронно относительно лабораторной системы отсчёта $S_0 : (T,\, X)$, имея в данный момент времени одинаковые скорости. Однако относительно инерциальной системы $S_0' : (T',\, X')$, в которой одна из точек в момент времени T' неподвижна, в силу относительности одновременности, остальные точки будут иметь отличные от нуля скорости. Соответствующие вычисления мы проведём в следующем разделе.

• Перейдём к критерию *локальной жесткости.* Выделяя в (14) полный квадрат по dt или используя формулу (9), имеем следующее выражение для элемента физической длины:

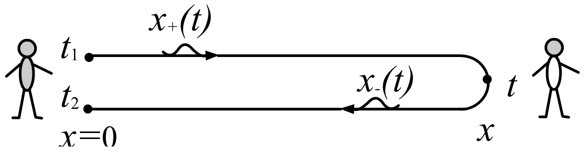
$$\delta l^2 = \mathrm{ch}^2(at)\, dx^2 + dy^2. \tag{15}$$

Так как δl^2 зависит от времени (растягивается вдоль оси x), то критерий локальной жесткости также не выполняется.

• Очевидно, что система (14) не будет жесткой и в *глобальном* смысле. Продемонстрируем это прямым расчётом. Пусть световой сигнал движется параллельно оси x. Положив в (14) $ds^2 = 0$ и, выделяя полный квадрат, получаем:

$$\frac{dx}{dt} = \pm e^{\mp at} \qquad => \qquad x(t) = const - \frac{e^{\mp at}}{a}, \tag{16}$$

где $const$ – константа интегрирования, и знак минус соответствует увеличению координаты x, а плюс – уменьшению. Пусть наблюдатель, находящийся в начале координат $x = 0$, измеряет радиолокационное расстояние до точки с координатой $x > 0$. В момент времени t_1 он отправляет световой сигнал, который достигает в момент времени t точку x, где отражается и возвращается обратно в момент времени t_2.



$$x_+(t) = \frac{1}{a}\left(e^{-at_1} - e^{-at}\right),$$
$$x_-(t) = \frac{1}{a}\left(e^{at_2} - e^{at}\right).$$

Для определения константы в (16) при движении сигнала от наблюдателя выбрано начальное условие $x(t_1) = 0$, и конечное условие $x(t_2) = 0$ при движении в обратную сторону.

В точке отражения сигнала $x_+(t) = x_-(t) = x$, поэтому:

$$e^{-at_1} - e^{-at} = ax, \qquad e^{at_2} - e^{at} = ax. \tag{17}$$

Исключая из этих соотношений t, несложно выразить разницу времён через время посылки сигнала t_1. Так как $g_{00} = 1$, собственное время совпадает с координатным t (что было заложено в преобразования (13)), поэтому радиолокационное расстояние равно:

$$l = \frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{1}{2a} \ln\left[1 + ax\,\frac{2\,\mathrm{ch}(at_1) - ax}{1 - ax\,e^{at_1}}\right] \approx x\ \mathrm{ch}(at_1), \tag{18}$$

Приближенное равенство записано для малых $ax \ll 1$ (при фиксированном t_1) и соответствует бесконечно малой физической длине (15). Аналогично вычисляется значение радиолокационного расстояния к точке с координатами $x < 0$. Из (18) следует, что расстояние к фиксированной точке такой равноускоренной системы увеличивается со временем (зависит от t_1). Во втором приближении по ax расстояние до точек расположенных слева и справа по оси x и имеющих одинаковое значение $|x|$ не равны друг другу (в данный момент времени). Такая асимметрия в значении l может показаться неожиданной, так как бесконечно малая радиолокационная длина (15) зависит только от времени и не зависит от координат (симметрична по x). Причину подобного расхождения между бесконечно малым и конечным радиолокационными расстояниями мы обсудим в разделе 8.

• Собственное время часов, расположенных в различных точках неинерциальной системы, совпадает с координатным временем ($\delta\tau_0 = dt$) и также как и длина не зависит от координат. Однако, это не означает, что в такой системе отчёта можно ввести синхронизированное время, так как (8) для метрики (14):

$$\delta\tau = dt - \mathrm{sh}(at)\,dx \tag{19}$$

не является полным дифференциалом вдоль оси x. Часы различных наблюдателей неинерциальной системы показывают одинаковое время для наблюдателей в лабораторной системе (так как двигаются относительно последней с одинаковой скоростью). Однако, отсюда не следует, согласованности их хода с точки зрения наблюдателей в самой неинерциальной системе. Связано это с тем, что время в различных точках неинерциальной равноускоренной системы отсчёта течёт различным образом.

• Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим эксперимент в котором наблюдатель, имеющий координату $x > 0$, посылает периодические сигналы в направлении начала системы отсчёта $x = 0$. Закон распространения таких сигналов найден выше (17). Дифференцируя соотношение $e^{at_2} - e^{at} = ax$ и исключая с его же помощью e^{at}, получаем:

$$\Delta t_2 = (1 - ax\, e^{-at_2})\, \Delta t. \tag{20}$$

Если наблюдатель из точки x отправляет сигналы с периодом Δt (по своим локальным часам), то наблюдатель в начале системы отчёта регистрирует уменьшение их периода Δt_2 (увеличение частоты). Таким образом, темп хода часов двух наблюдателей в неинерциальной системе различен, если у них различны координаты x.

Увеличение частоты излучения будет тем сильнее, чем дальше источник отстоит от приёмника в направлении собственного ускорения (вдоль оси x). Это общее свойство ускоренных систем отсчёта, аналогичное изменению частоты в однородном гравитационном поле [10]. Смещение частоты в синий спектр со временем уменьшается благодаря множителю e^{-at_2}, что связано с нежёсткостью неинерциальной системы. Расстояние к удалённому источнику с фиксированной координатой увеличивается со временем и для наблюдателя в начале системы отсчёта этот источник будет удаляться. Поэтому, на увеличение частоты, связанное с ускорением, накладывается уменьшение частоты обусловленное эффектом Доплера.

Множитель в соотношении (20) всегда положителен, так как инерциальная система "существует" с момента $t > 0$, когда началось ускорение. Поэтому из $e^{at_2} - e^{at} = ax$ следует, что время прихода сигналов t_2, излучённых после начала ускорения из точки с координатой x удовлетворяет неравенству $e^{at_2} > 1 + ax$.

Если источник расположен "сзади" ($x < 0$) и излучает свет в момент времени t, то время его прихода t_2 в начало отсчёта находится из соотношения $e^{-at_2} - e^{-at} = ax$. Для периодического сигнала связь излученного Δt и полученного Δt_2 периодов имеет вид:

$$\Delta t_2 = (1 - ax\, e^{at_2})\, \Delta t. \tag{21}$$

Эффект уменьшения частоты тем больше, чем больше координата $|x|$. Кроме этого он усиливается множителем e^{at_2}, снова связанным с эффектом Доплера, удаляющегося источника.

5 Жесткая равноускоренная система отсчёта

Рассмотрим теперь неинерциальную систему S, точки которой движутся относительно лабораторной системы S_0 с различными собственными ускорениями по траекториям:

$$X = x + \frac{1}{a_x}\left[\sqrt{1 + (a_x T)^2} - 1\right], \tag{22}$$

где a_x – константы, различные для разных точек x системы S и попрежнему $X(0) = x$. Потребуем выполнения критерия *сопутствующей жесткости*. Для этого избавимся в (22) от корня, переписав в следующем виде:

$$(1 - a_x x)^2 + 2a_x\,(1 - a_x x)\,X = 1 + a_x^2\,(T^2 - X^2). \tag{23}$$

Подставим в это уравнение преобразования Лоренца между лабораторной системой S_0 и инерциальной системой S_0' : $\{T',\, X'\}$, движущейся относительно S_0 с постоянной скоростью U_0:

$$T = \gamma_0\,(T' + U_0 X'), \qquad X = \gamma_0\,(X' + U_0 T'), \tag{24}$$

где $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - U_0^2}$. В правой части (23) стоит инвариант, поэтому:

$$(1 - a_x x)^2 + 2a_x\,(1 - a_x x)\,\gamma_0\,(X' + U_0 T') = 1 + a_x^2\,(T'^2 - X'^2). \tag{25}$$

Для данной точки ($x = const$) возьмём производную левой и правой части по T', положив $U' = dX'/dT' = 0$ (относительно сопутствующей системы S_0' скорость точек системы S равна нулю). В результате, получаем:

$$T' = \frac{1 - a_x x}{a_x}\,\gamma_0 U_0. \tag{26}$$

Время T' должно быть одинаковым для любых координат x (все точки системы S в сопутствующей системе S_0' неподвижны). Это возможно, если в (26) множитель при $\gamma_0 U_0$ не зависит от x:

$$a_x = \frac{a}{1 + ax}, \tag{27}$$

где $a = const$ – собственное ускорение точки $x = 0$. Подставляя a_x в (22), имеем следующие траектории точек неинерциальной системы в лабораторной системе отсчёта S_0:

$$X = \frac{1}{a}\left[\sqrt{(1 + ax)^2 + (aT)^2} - 1\right]. \tag{28}$$

Такая система точек обладает сопутствующей жесткостью и образует жесткую равноускоренную систему Борна-Мёллера.

• Запишем преобразования между лабораторной системой S_0 : $\{T,\, X,\, Y\}$ и жесткой равноускоренной системой S : $\{t,\, x,\, y\}$:

$$aT = (1+ax)\ \mathrm{sh}(at), \qquad aX = (1+ax)\ \mathrm{ch}(at) - 1, \qquad Y = y. \tag{29}$$

Первое преобразование (определяющее координатное время t) выбрано таким образом, чтобы получилось простое выражение для преобразования $X = X(t,\, x)$, после подстановки aT в (28). Подставляя (29) в интервал между событиями (1), получаем [6]:

$$ds^2 = (1+ax)^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2. \tag{30}$$

Физическое расстояние имеет евклидовый вид $dl^2 = dx^2 + dy^2$, поэтому очевидно, что критерий *локальной жесткости* выполняется.

• Проверим выполнимость глобальной жесткости. Рассмотрим измерение радиолокационного расстояния, проводимое наблюдателем в точке $x = 0$ до точки $x > 0$ вдоль оси x. Равенство нулю интервала (30) даёт следующую траекторию светового сигнала:

$$\frac{dx}{dt} = \pm(1+ax) \qquad => \qquad t - t_0 = \pm\frac{1}{a}\,\ln(1+ax), \tag{31}$$

где t_0 – константа интегрирования и плюс соответствует увеличению координаты, а минус – уменьшению. Выбирая начальное и конечное условия аналогично предыдущему разделу, имеем:

$$t - t_1 = \frac{1}{a}\,\ln(1+ax), \qquad\qquad t_2 - t = \frac{1}{a}\,\ln(1+ax). \tag{32}$$

Для наблюдателя в начале отсчёта ($x = 0$) координатное и собственное времена совпадают, поэтому радиолокационное расстояние до точки x равно:

$$l = \frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{1}{a}\,\ln\left(1+ax\right) \approx x. \tag{33}$$

Заметим, что длина равна x только в первом приближении по x, хотя для бесконечно малой физической длины $\delta l^2 = dx^2 + dy^2$ можно было бы ожидать $l = x$ при любых значениях x. Мы обсудим причины такого несоответствия в разделе 8.

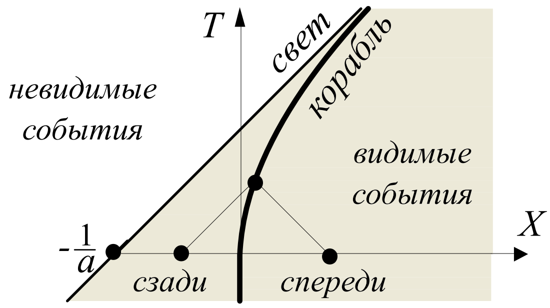
В любом случае, радиолокационное расстояние l постоянно, поэтому критерий глобальной жесткости выполняется. Следовательно, для жесткой равноускоренной системы отсчёта выполняются все три критерия жесткости. В этом отношении она выделяется из всего многообразия неинерциальных систем отсчёта.

• Как и в нежесткой системе, физическое время $\delta\tau = (1+ax)\,dt$ не является полным дифференциалом, поэтому синхронизация часов, расположенных вдоль оси x невозможна. Связано это с различным темпом течения времени в неинерциальной системе. Действительно, повторя расчёт эксперимента по посылке периодических сигналов (см. раздел 4), из (32) имеем $\Delta t_2 = \Delta t$, или переходя от координатного Δt к собственному периоду излучённого сигнала $\Delta\tau = \sqrt{g_{00}}\,\Delta t$:

$$\Delta t_2 = \Delta\tau/(1+ax). \tag{34}$$

В данном случае система отсчёта жёсткая, поэтому изменении частоты является стационарным эффектом.

• В равноускоренной (как жесткой, так и в нежесткой) системе отсчёта существует горизонт видимости, ограничивающий пространство видимых данным наблюдателем событий. Действительно, предположим, что в момент времени t сзади ($x < 0$) от наблюдателя, расположенного в $x = 0$ происходит событие. Пусть информация об этом событии распространяется в направлении наблюдателя со скоростью света и приходит в момент времени t_2. Соответствующая траектория этого сигнала имеет вид $t - t_2 = \ln(1+ax)/a$. События, расположенные далее $x < -1/a$ в системе S видны не будут:



При равноускоренном движении наблюдатели могут "убегать" от происходящих событий, так как постоянно увеличивают свою скорость (с точки зрения лабораторной системы отсчёта).

Пусть неинерциальная система представлена эскадрой космических кораблей. В силу разного на них темпа течения времени, после старта корабля, являющегося началом системы отсчёта ($x = 0$), его наблюдатель видит, что сзади него распространяется "волна" постепенного покраснения частоты излучения источников света. Это покраснение тем сильнее, чем дальше от него находятся источники. При этом о горизонте наблюдатель никогда не узнает, т.к. волна покраснения достигнет горизонта только при $t_2 = \infty$.

6 Вращающаяся система отсчёта

Рассмотрим вращающийся вокруг оси Z диск, лежащий в плоскости $Z = 0$. Запишем интервал лабораторной системы (1) в цилиндрических координатах $X = R\cos\Phi$, $Y = R\sin\Phi$:

$$ds^2 = dT^2 - dR^2 - R^2\,d\Phi^2 \tag{35}$$

и выполним преобразования:

$$T = t, \qquad R = r, \qquad \Phi = \phi + \omega t, \tag{36}$$

где координаты $(r,\, \phi)$ нумеруют точки вращающейся системы, связанной с диском. Так как $T = t$, имеем $\Phi = \phi + \omega T$, что является траекторией некоторой точки, вращающейся по окружности с постоянной угловой скоростью ω. Подставляя (36) в (35), имеем [8]:

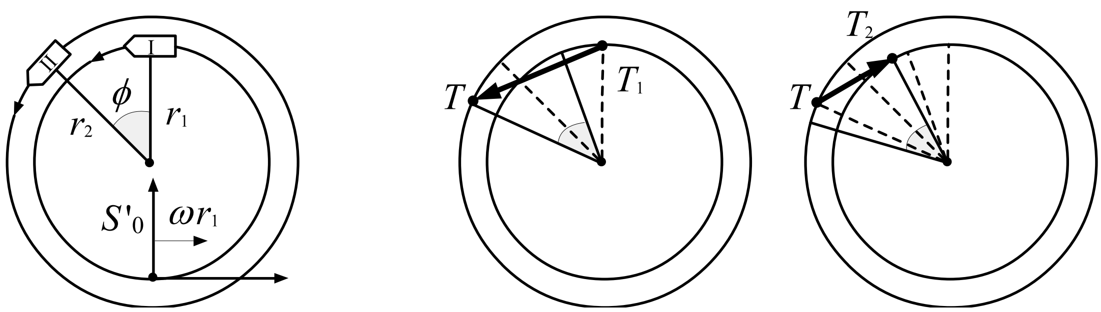
$$ds^2 = (1 - \omega^2 r^2)\,dt^2 - 2\omega\,r^2\,dt\,d\phi - dr^2 - r^2\,d\phi^2. \tag{37}$$

Предполагается, что $\omega r < 1$, т.е. размеры диска ограничены и все его точки движутся медленнее скорости света. Элемент физической длины, соответствующий метрике (37):

$$\delta l^2 = dr^2 + \frac{r^2\,d\phi^2}{1 - \omega^2 r^2} \tag{38}$$

не зависит от времени, а, следовательно, равномерно вращающаяся система отсчёта является *локальной жесткой.*

• *Сопутствующая жесткость* во вращающейся системе не выполняется. Действительно, пусть сопутствующая система движется со скоростью ωr_1 и её начало находится внизу окружности, как это изображено на первом рисунке:



Соответствующая точка вращающейся системы, совпадающая с началом сопутствующей, имеет в последней нулевую скорость. Однако другие точки (например, изображенные в виде космических кораблей) имеют в сопутствующей системе отличные от нуля скорости.

• Проверим теперь критерий *глобальной жесткости.* Пусть два космических корабля в лабораторной системе вращаются с одинаковой угловой скоростью ω и находятся на различных расстояниях r_1 и r_2 от центра. Угол между прямыми, проведенными к кораблям из центра вращения равен ϕ. Скорость первого корабля ωr_1 определяет связь его корабельных часов с часами лабораторной системы:

$$\tau = T\sqrt{1-(\omega r_1)^2}. \tag{39}$$

Это соотношение можно получить как из общего выражения для собственного времени $\delta\tau = \sqrt{g_{00}}\,dt$ и $t = T$, так и при помощи стандартной релятивистской формулы замедления времени.

Пусть наблюдатель на первом корабле с радиусом орбиты r_1 проводит измерение радиолокационного расстояния ко второму кораблю. Вычисления проще провести в лабораторной системе отсчета. В этой системе за время $T - T_1$ распространения сигнала в одну сторону (выше средний рисунок), второй корабль смещается на угловое расстояние $\omega(T-T_1)$. Поэтому длина пути сигнала находится по теореме косинусов с углом $\phi + \omega\,(T - T_1)$. После отражения сигнала, он движется навстречу первому кораблю и для вычисления длины траектории возвращения сигнала за время $T_2 - T$ в теореме косинусов необходимо взять угол $\phi - \omega\,(T_2 - T)$. В результате:

$$\left\{\begin{array}{l} r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\left[\phi + \omega\,(T-T_1)\right] = (T-T_1)^2, \\[2mm] r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\left[\phi - \omega\,(T_2-T)\right] = (T_2-T)^2. \end{array}\right. \tag{40}$$

В левой части уравнений находится квадрат длины пути светового сигнала в лабораторной системе, а в правой – квадрат времени его движения (скорость света равна единице). Запишем решения этих трансцендентных уравнений относительно времён:

$$T - T_1 = f(\omega), \qquad T_2 - T = f(-\omega), \tag{41}$$

где $f(\omega)$ – функция угловой скорости ω, а также радиусов r_1, r_2 и угла ϕ, зависимость от которых опущена. Исключая T и переходя к собственному времени первого корабля (39), имеем:

$$l = \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1-(\omega r_1)^2}\;\left[f(\omega) + f(-\omega)\right]. \tag{42}$$

Правая часть этого соотношения не зависит от времени. Поэтому радиолокационный эксперимент приведет наблюдателя к выводу, что расстояние между кораблями неизменно.

7 Поступательно ускоренные системы Мёллера

До сих пор критерии локальной и глобальной жесткости совпадали. Рассмотрим класс неинерциальных систем, в которых это не так. Для этого запишем следующие преобразования от неинерциальной системы $S:\ (t,x)$ к лабораторной системе $S_0:\ (T,X)$ [6]:

$$T = \gamma\, v\, x + \int\limits_0^t \gamma\, dt, \qquad X = \gamma\, x + \int\limits_0^t \gamma\, v\, dt, \qquad Y = y, \tag{43}$$

где $v = v(t)$ произвольная функция времени и $\gamma = \gamma(t) = 1/\sqrt{1-v^2}$. Если скорость v постоянна, то (43) приводят к преобразованиям Лоренца. В общем же случае имеем:

$$dT = \gamma\,(dt + v\, dx) + \gamma^3\, \dot{v}\, x\, dt, \qquad dX = \gamma\,(dx + v\, dt) + \gamma^3\ v\dot{v}\, x\, dt, \tag{44}$$

где учтено, что $d\gamma/dt = \gamma^3 v\dot{v}$, $d(\gamma v)/dt = \gamma^3\, \dot{v}$ и точка – производная по времени t. Из (44) следует, что фиксированная точка $x = const$ ($dx = 0$) движется относительно лабораторной системы отсчета со скоростью $U(T) = dX/dT = v(t)$. Хотя эта скорость не зависит от координаты x, это не означает, что в лабораторной системе скорость всех точек неинерциальной системы одинакова. Дело в том, что $v(t)$ – это скорость, вычисляемая в момент времени t по часам неинерциальной системы отсчёта. Чтобы получить скорость $U(T)$ данной точки x относительно лабораторной системы, в функции $v(t)$ необходимо перейти от координатного времени t ко времени T, которое находится из первого преобразования (43). При этом получится некоторая функция $t = t(T,\, x)$ и в данный момент времени T по лабораторным часам скорости точек с различными координатами x будут различны.

Подставляя дифференциалы в интервал (1), имеем:

$$ds^2 = [1 + w(t)\, x]^2\ dt^2 - dx^2 - dy^2, \tag{45}$$

где $w(t) = \gamma^2\dot{v}$. Если $w(t) = a = const$, мы возвращаемся к жесткой равноускоренной системе отсчета, для которой $v(t) = \mathrm{th}(at)$. В этом случае произвольная точка системы движется релятивистски равноускоренно с собственным ускорением (27).

Очевидно, что для метрики (45) физическая длина является евклидовой $\delta l^2 = dx^2 + dy^2$. На этом основании Мёллер назвал класс неинерциальных систем отсчёта (43) жесткими. Разберёмся, однако, выполняется ли для них критерий глобальной жесткости.

• Равенство нулю интервала (45) приводит к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{dx}{dt} = \pm(1 + w\,x). \tag{46}$$

Пусть световой сигнал отправляется в момент времени t_1 из начала системы отсчёта $x = 0$. В момент времени t_2 он туда возвращается, отразившись от точки с координатой $x > 0$. Рассмотрим движение в сторону возрастания координаты (знак плюс). Так как $x(t_1) = 0$, из (46) следует, что в момент времени $t = t_1$:

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_1} = 1, \qquad \frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=t_1} = (\dot{w}x + \frac{dx}{dt}\,w)_{t=t_1} = w(t_1), \tag{47}$$

где вторая производная получена дифференцированием (46). Поэтому траектория удаляющегося сигнала имеет вид:

$$x_+(t) \approx (t - t_1) + w(t_1)\,\frac{(t-t_1)^2}{2} + ... \tag{48}$$

Аналогично находится траектория приближающегося к началу отсчёта сигнала $x(t_2) = 0$, соответствующая в (46) знаку минус:

$$x_-(t) \approx (t_2 - t) + w(t_2)\,\frac{(t_2-t)^2}{2} + ... \tag{49}$$

При отражении эти две траектории совпадают: $x_+(t) = x_-(t) = x$. Решая квадратные уравнения относительно $t - t_1 > 0$ и $t_2 - t > 0$ и складывая решения, получаем:

$$t_2 - t_1 \approx \frac{\sqrt{1 + 2w_1\,x} - 1}{w_1} + \frac{\sqrt{1 + 2w_2\,x} - 1}{w_2}, \tag{50}$$

где $w_1 = w(t_1)$ и $w_2 = w(t_2)$. При малом интервале времени $t_2 - t_1$ координата точки отражения является величиной того же порядка малости. Поэтому разложим корень до малых x^2 включительно:

$$l = \frac{t_2 - t_1}{2} \approx x - \frac{w_1}{2}\,x^2, \tag{51}$$

где член $(w_1 + w_2)x^2$ с точностью до второго порядка малости заменен на $2w_1x^2$. Так как для наблюдателя в начале системы отсчёта $x = 0$, собственное время совпадает с координатным, то полученное выражение является радиолокационным расстоянием к точке с координатой x. В первом порядке малости это расстояние постоянно, что отражено в постоянстве физической длины $\delta l^2 = dx^2 + dy^2$. Однако уже следующее приближение по x оказывается зависящим от времени посылки сигнала, если только величина $w(t)$ не является константой.

8 Жесткость, время и геометрия

Как мы видели, постоянство бесконечно малого радиолокационного расстояния $\delta l^2 = \gamma_{ij}\,dx^i dx^j$, вообще говоря, не гарантирует, что конечное радиолокационное расстояние между двумя точками будет постоянным (локальная жёсткость не влечёт за собой глобальной жёсткости). Это свойство неинерциальных систем отсчёта тесно связано с другой, отмеченной выше, особенностью. В жесткой равноускоренной системе радиолокационное расстояние равно $l = \ln(1 + ax)/a$. В то же время $\delta l^2 = dx^2 + dy^2$ и при движении вдоль оси x мы, на первый взгляд, должны были бы иметь $l = x$.

Причина этих расхождений кроется в измерительном смысле физической длины $\delta l^2 = \gamma_{ij}\,dx^i dx^j$. Её получает наблюдатель, измеряя *время* распространения светового сигнала в обе стороны к бесконечно близкой к нему точке. Суммирование малых элементов δl вдоль некоторой кривой подразумевает, что вдоль этой кривой расположено множество таких наблюдателей, каждый из которых получает своё значение δl. Однако время для разных наблюдателей в неинерциальной системе отсчёта, в общем случае, течёт различным образом. Поэтому сумма измерений радиолокационных расстояний в которых используются часы, расположенные в различных точках, отличается от единственного измерения такого же расстояния, проведенного одним наблюдателем по одним часам.

Хорошей иллюстрацией этого утверждения является вращающаяся система отсчёта. Для наблюдателей, находящихся на одинаковом расстоянии от центра, темп хода часов одинаков. В разделе 6 мы рассматривали движение светового сигнала по геодезической. В принципе, можно измерять длину любой линии, вдоль которой распространяется свет. Экспериментально такая линия может быть организована при помощи световода или системы зеркал. Пусть сигнал движется по окружности ($r = const$) от точки $\phi = 0$, до точки $\phi > 0$ и обратно. Равенство нулю интервала (37) приводит к уравнению:

$$\frac{d\phi}{dt} = \pm\frac{1}{r} - \omega. \tag{52}$$

Повторяя рассуждения предыдущих разделов, имеем:

$$l = \sqrt{g_{00}}\;\frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{r\phi}{\sqrt{1 - (\omega r)^2}}. \tag{53}$$

Такое же расстояние мы получим, интегрируя выражение для физической длины (38) во вращающейся системе при $r = const$.

Иная ситуация будет при движении светового сигнала вдоль радиуса ($\phi = const$). В этом случае уравнение его движения

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{1-(\omega r)^2} \tag{54}$$

приводит к следующему радиолокационному расстоянию для наблюдателя, расположенного в центре вращения:

$$l = \frac{1}{\omega}\arcsin(\omega r). \tag{55}$$

Это выражение уже отличается от $l = r$, которое следует при интегрировании (38) вдоль линии $\phi = const$.

Таким образом, одинаковый темп течения времени вдоль траектории светового сигнала приводит к совпадению результата единичного радиолокационного измерения расстояния и суммы измерений бесконечно малых расстояний. Если же темп течения времени вдоль траектории различен, то результаты измерений будут отличаться.

В связи с этим отметим ещё один момент. Отклонение физической длины $\delta l^2 = \gamma_{ij}\, dx^i dx^j$ от евклидового выражения, обычно интерпретируется как неевклидовость 3-пространства в неинерциальной системе отсчёта. Например, 3-пространство вращающейся системы отсчёта (38) с метрикой γ_{ij} имеет отрицательную кривизну. Стоит, однако иметь ввиду, что подобная неевклидовость существенно отличается от неевклидовости обычных искривлённых пространств. В геометрии нет времени. Длина линии должна равняться сумме длин её бесконечно малых элементов. Однако оба эти утверждения не выполняются в неинерциальных системах отсчёта. Поэтому, рассмотрение геометрических свойств пространства, например, с метрикой (38) несколько формально. К примеру, физическая длина в жесткой равноускоренной системе евклидова: $\delta l^2 = dx^2 + dy^2$. Эта длина получена в результате анализа распространения света на бесконечно малое расстояние. Однако, в таком евклидовом пространстве тот же свет, распространяясь на конечные расстояния, движется не по прямым, а по искривлённым линиям.

За геометрическими свойствами метрики γ_{ij} необходимо видеть множество наблюдателей, использующих различные часы для измерения радиолокационных расстояний в своих непосредственных окрестностях. Геометрия 3-пространства неинерциальной системы, основанная на γ_{ij}, является геометрией, объединяющей такие бесконечно малые локальные измерения.

9 Глобально жёсткие поступательно движущиеся системы

Из рассмотренных выше неинерциальных систем отсчёта только жесткая равноускоренная система обладала жёсткостью с точки зрения всех критериев жёсткости. Выясним, возможно ли определить отличную от неё неинерциальную систему, обладающую аналогичным свойством в классе поступательно движущихся систем отсчёта. В общем случае метрика системы, движущейся относительно лабораторной системы вдоль оси X, имеет вид:

$$ds^2 = g_{00}\,dt^2 + 2g_{01}\,dtdx + g_{11}\,dx^2. \tag{56}$$

При помощи переопределения координатного времени $t = t(t',\,x')$ этот интервал всегда можно диагонализовать, обнулив метрический коэффициент g_{01}. Если после этого g_{11} зависит от времени, то такая система не обладает локальной жесткостью, а, следовательно, не является жесткой и в глобальном смысле. Поэтому жёсткая система отсчёта должна иметь g_{11}, не зависящий от времени. При помощи изменения способа нумерации точек системы $x = x(x')$ этот коэффициент можно сделать единичным. Следовательно, без потери общности метрика локально жёсткой системы отсчёта записывается в следующем виде:

$$ds^2 = f^2(t,x)\,dt^2 - dx^2. \tag{57}$$

Мы ограничиваемся анализом неинерциальных систем в рамках специальной теории относительности, в которой пространство является псевдоевклидовым и имеет нулевой тензор кривизны:

$$R^{\alpha}{}_{\beta,\,\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \partial_\nu\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} = 0. \tag{58}$$

Выясним при каких функциях $f = f(t,x)$ это происходит. Ненулевые символы Кристоффеля, соответствующие метрике (57) равны:

$$\Gamma^t_{tx} = \Gamma^t_{tx} = \frac{\partial_x f}{f}, \qquad \Gamma^t_{tt} = \frac{\partial_t f}{f}, \qquad \Gamma^x_{tt} = f\,\partial_x f, \tag{59}$$

где $\partial_x f$ – частная производная функции $f = f(t,x)$ по x, а $\partial_t f$ – по t и $\Gamma^t_{tx} = \Gamma^0_{01}$, и т.д. В пространстве размерности $1+1$, с учётом свойств симметрии, единственной нетривиальной компонентой тензора кривизны будет компонента:

$$R^t{}_{x,\,tx} = -\partial_x\Gamma^t_{xt} - \Gamma^t_{tx}\Gamma^t_{xt}, \tag{60}$$

где сразу опущены нулевые символы Кристоффеля.

Это выражение равно нулю, если выполняется уравнение:

$$\partial_x \Gamma = -\Gamma^2 \qquad => \qquad \Gamma = \frac{1}{x + \alpha(t)}, \tag{61}$$

где $\Gamma = \Gamma^t_{tx}$ и $\alpha(t)$ – произвольная функция времени. Интегрируя ещё раз $\Gamma = \partial_x f / f$, получаем:

$$f(t, x) = \beta(t)\,(\,x + \alpha(t)\,). \tag{62}$$

С учётом оставшегося произвола в выборе преобразования координатного времени $t = t(t')$, эта функция совпадает с метрическим коэффициентом g_{00} поступательно движущихся неинерциальных систем Мёллера из раздела 7. Они являются жесткими в глобальном смысле только, если $g_{00} = f^2$ не зависит от времени.

Таким образом, единственной поступательно движущейся неинерциальной системой отсчёта, в которой одновременно выполняется критерии локальной и глобальной жесткости, является жесткая равноускоренная система отсчёта Борна-Мёллера, рассмотренная в разделе 5.

10 Заключение

Проведенный анализ показывает, что локальная жесткость системы отсчёта, вообще говоря, не влечет за собой жесткости глобальной. Не смотря на то, что в основе каждого критерия лежит радиолокационный эксперимент, смысл его организации отличается. При глобальном измерении расстояния наблюдатель отправляет световой сигнал на конечное расстояние. При локальном измерении это делается для бесконечно близкой к наблюдателю точке. При помощи последовательности измерений бесконечно малых расстояний можно измерить и конечное расстояние. Однако такой эксперимент будет проводить не один наблюдатель, а множество наблюдателей, расположенных между двумя удалёнными точками. Эти наблюдатели имеют различный темп течения собственного времени. В результате, сумма их последовательных измерений, в общем случае, будет отличаться от единственного измерения радиолокационного расстояния, проведенного одним наблюдателем.

Автор благодарит Орлянского О.Ю., Войтик В.В. и Эфроимского М. за полезные обсуждения вопросов, затронутых в статье.

11 Приложение A: технические детали

• **A1: Базис в 4-пространстве**. Мы обозначаем 4-векторы прямым шрифтом: A, B. Аналогично, 3-векторы записываются в жирном шрифте: **a**, **b**. В конкретной системе отсчёта (системе координат 4-пространства) введём четыре базисных 4-вектора: $\mathrm{e}_0, ..., \mathrm{e}_3$, по которым можно разложить произвольный 4-вектор. При этом скалярное произведение базисных векторов равно метрическим коэффициентам данной системы отсчёта:

$$\mathrm{A} = A^\mu \mathrm{e}_\mu, \qquad\qquad \mathrm{e}_\alpha \cdot \mathrm{e}_\beta = g_{\alpha\beta}. \tag{63}$$

Соответственно, скалярное произведение любых 4-векторов равно:

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = A^\mu B^\nu \, \mathrm{e}_\mu \cdot \mathrm{e}_\nu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu. \tag{64}$$

Разложим 4-вектор смещения $d\mathrm{x}$ в пространстве Минковского по двум базисам, двух систем отсчёта: $d\mathrm{x} = dx^\alpha \mathrm{e}_\alpha = dx'^\alpha \mathrm{e}'_\alpha$. Из этого соотношения следует следующая связь между базисами:

$$\mathrm{e}_\alpha = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} \, \mathrm{e}'_\beta. \tag{65}$$

• **A2: Метрические коэффициенты**. Подставляя дифференциалы преобразований (3)

$$dT = \partial_0 X^0 \, dt + \partial_i X^0 \, dx^i, \qquad dX^k = \partial_0 X^k \, dt + \partial_i X^k \, dx^i, \tag{66}$$

где $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$ – частная производная, в интервал $ds^2 = dT^2 - dX^k dX^k$ (по k сумма), получаем метрические коэффициенты:

$$\begin{aligned} g_{00} &= \partial_0 X^0 \, \partial_0 X^0 - \partial_0 X^k \, \partial_0 X^k, \\ g_{0i} &= \partial_0 X^0 \, \partial_i X^0 - \partial_0 X^k \, \partial_i X^k, \\ g_{ij} &= \partial_i X^0 \, \partial_j X^0 - \partial_i X^k \, \partial_j X^k. \end{aligned} \tag{67}$$

• **A3: Собственное время**. Из (66) следует, что компоненты скорости фиксированной точки системы отсчёта ($dx^k = 0$) равны:

$$U^k = \frac{dX^k}{dT} = \frac{\partial_0 X^k}{\partial_0 X^0}. \tag{68}$$

Поэтому коэффициент g_{00} можно переписать в следующем виде:

$$g_{00} = (\partial_0 X^0)^2 \, (1 - \mathbf{U}^2), \tag{69}$$

где $\mathbf{U}^2 = U^k U^k$. Кроме этого $\partial_0 X^0 \, dt = dT$ при $dx^i = 0$.

• **A4: Инвариантность физического времени**. При преобразованиях (5), не изменяющих системы отсчёта, физическое время $\delta\tau$ не меняется. Так как $d\mathrm{x}\cdot\mathrm{e}_0 = dx^\alpha \mathrm{e}_\alpha \cdot \mathrm{e}_0 = g_{0\alpha}dx^\alpha$, физическое время можно записать в следующем виде:

$$\delta\tau = d\mathrm{x}\cdot\mathrm{e}_0/|\mathrm{e}_0|, \tag{70}$$

где $|\mathrm{e}_0| = \sqrt{\mathrm{e}_0\cdot\mathrm{e}_0} = \sqrt{g_{00}}$ – длина базисного вектора e_0. При преобразованиях (5), базисный вектор e_0 (65) не меняет своей ориентации:

$$\mathrm{e}_0 = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^0}\,\mathrm{e}'_\beta = \frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\,\mathrm{e}'_0, \tag{71}$$

а, следовательно, не меняется и единичный вектор $\mathrm{e}_0/|\mathrm{e}_0|$. Поэтому не меняется и $\delta\tau$ (8). Соответственно, в силу инвариантности интервала $ds^2 = \delta\tau^2 - \delta l^2$, не меняется и физическая длина δl.

• **A5: Физическая длина в сопутствующей системе**. Пусть в данный момент времени в окрестности фиксированной точки неинерциальной системы S находится сопутствующая к ней инерциальная система S_0. Относительно неё *эта* точка системы S имеет нулевую скорость $U^k = 0$, и из (68) следует, что $\partial_0 X^k = 0$. Эта производная равна нулю при заданных значениях $(t,\, x^i)$, для которых имеем следующие коэффициенты метрического тензора (67):

$$g_{00} = (\partial_0 X^0)^2, \qquad g_{0i} = \partial_0 X^0\,\partial_i X^0, \qquad g_{ij} = \partial_i X^0\,\partial_j X^0 - \partial_i X^k\,\partial_j X^k,$$

откуда: $\partial_i X^k\,\partial_j X^k = \gamma_{ij}$. С другой стороны, евклидово расстояние в сопутствующей инерциальной системе равно

$$\delta l^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dX^k\,dX^k = \partial_i X^k\,\partial_j X^k\,dx^i dx^j = \gamma_{ij}\,dx^i dx^j.$$

Использование одинаковых линеек наблюдателем в неинерциальной и в сопутствующей инерциальной системах приводит к одинаковому расстоянию.

• **A6: Преобразование метрики физической длины**. Записывая преобразования метрического тензора

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu x'^\alpha \partial_\nu x'^\beta\, g'_{\alpha\beta}$$

для частного случая преобразований (5) и выделяя в них временной индекс (отбрасывая члены с $\partial_0 x'^i = 0$) несложно получить:

$$\gamma_{ij} = \partial_i x'^p \partial_j x'^q\, \gamma'_{pq}, \tag{72}$$

где γ'_{ij} выражается через $g'_{\mu\nu}$ так же, как и γ_{ij} через $g_{\mu\nu}$. Таким образом, γ_{ij} – 3-мерный тензор относительно преобразований (5).

12 Приложение B: жёсткость по Борну

Приведём в ковариантных обозначениях вывод условия жёсткости Борна [1]. Вместо жёсткой неинерциальной системы, следуя Борну, будем говорить о жёстком теле. Запишем траекторию произвольной точки такого тела относительно лабораторной системы S_0 : $\{T,\, X,\, Y,\, Z\}$:

$$X^\alpha = X^\alpha(\tau,\, x^1, x^2,\, x^3). \tag{73}$$

При этом, x^i – это координаты, однозначно определяющие фиксированную точку тела, а τ – её собственное время. Ниже мы используем безындексную запись в которой прямым шрифтом будут обозначаться 4-векторы (скалярное произведение $A^\alpha B_\alpha$ имеет вид $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$ и т.д.).

Интервал вдоль траектории движения точки $x^i = const$ совпадает с изменением её собственного времени:

$$d\tau^2 = dX^\alpha dX_\alpha = (\partial_0 X^\alpha)(\partial_0 X_\alpha)\, d\tau^2 \equiv (\partial_0 \mathrm{X})^2\, d\tau^2. \tag{74}$$

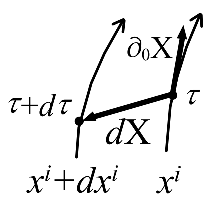
Поэтому:

$$(\partial_0 \mathrm{X})^2 = 1, \tag{75}$$

где $\partial_0 = \partial/\partial\tau$ – производная по собственному времени при постоянстве $x^i = const$. Рассмотрим две соседние точки с координатами x^i и $x^i + dx^i$. Положение первой точки соответствует моменту собственного времени τ, а второй: $\tau + d\tau$. Расстояние между этими точками в пространстве Минковского определяется 4-вектором:

$$d\mathrm{X} = \partial_0 \mathrm{X}\, d\tau + \partial_i \mathrm{X}\, dx^i, \tag{76}$$

где $\partial_i = \partial/\partial x^i$. Для определения значения $d\tau$, потребуем, чтобы этот вектор был ортогонален к 4-вектору $\partial_0\mathrm{X}$, касательному к траектории при изменении собственного времени (первое уравнение):



$$\begin{cases} d\mathrm{X}\cdot\partial_0\mathrm{X} = 0, \\ (d\mathrm{X})^2 = const. \end{cases} \tag{77}$$

При таком выборе тело, по определению, считается *локально жёстким*, если длина вектора $d\mathrm{X}$ не меняется со временем (второе уравнение).

Из соотношения ортогональности и (76), (75) получаем

$$d\tau = -(\partial_0\mathrm{X}\cdot\partial_i\mathrm{X})\, dx^i. \tag{78}$$

Подставляя это значение в квадрат расстояния (76) между точками

$$(d\mathrm{X})^2 = d\tau^2 + 2(\partial_0\mathrm{X}\cdot\partial_i\mathrm{X})\,d\tau dx^i + (\partial_i\mathrm{X}\cdot\partial_j\mathrm{X})\,dx^i dx^j, \qquad (79)$$

имеем:

$$(d\mathrm{X})^2 = \left\{\partial_i\mathrm{X}\cdot\partial_j\mathrm{X} - (\partial_0\mathrm{X}\cdot\partial_i\mathrm{X})(\partial_0\mathrm{X}\cdot\partial_j\mathrm{X})\right\} dx^i dx^j. \qquad (80)$$

Первое слагаемое в фигурных скобках – это g_{ij}, а второе – произведение $g_{0i}g_{0j}$. Действительно, интервал равен:

$$ds^2 = (d\mathrm{X})^2 = (\partial_\alpha\mathrm{X}\cdot\partial_\beta\mathrm{X})\,dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta,$$

поэтому метрические коэффициенты $g_{\alpha\beta}$ неинерциальной системы, связанной с телом, равны $\partial_\alpha\mathrm{X}\cdot\partial_\beta\mathrm{X}$. При этом, так как в преобразованиях (73) τ – собственное время, то $g_{00} = (\partial_0\mathrm{X})^2 = 1$.

Таким образом, критерий жёсткости Борна эквивалентен постоянству тензора γ_{ij}, определяющего физическую длину (9).

Список литературы

[1] Born M. – *Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips*, Annalen der Physik 335 (11), 1-56, 1909.

[2] Rosen N. – "*Notes on Rotation and Rigid Bodies in Relativity Theory*" Phys. Rev. 71, 54 (1947)

[3] Newman E.T., Janis A.I. – "*Rigid Frames in Relativity*" Phys. Rev. 116, 6, p.1610 (1959)

[4] Newman E.T., Janis A.I. – “*Rigid frames in relativity*” Phys. Rev. 116, 1610 (1959)

[5] Dana I. – “*Retardation in rigid motion and degree of rigidity*” General Relativity and Gravitation, 13, 8, p 807 (1981)

[6] Мёллер К. – “*Теория относительности*” М.: "Атомиздат", 1975.

[7] Dewan, Edmond M.; Beran, Michael J. “*Note on stress effects due to relativistic contraction*” American Journal of Physics 27 (7): p.517 (1959).

[8] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. – “*Теоретическая физика: Теория поля*”, Т.II, М.: "Физматлит", 2003.

[9] Bailey J. et al. – "*Measurements of relativistic time dilatation for positive and negative muons in circular orbit*", Nature, v.268, p.301-305 (1977)

[10] Pound, R. V.; Rebka Jr. G. A. – “*Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance*”, Phys.Rev.Let. 3 (9): p.439-441 (1959)

[11] Логунов А.А. – “*Лекции по теории относительности и гравитации: Современный анализ проблемы*” М.: ”Наука”, 1987.

[12] Степанов С.С. – “*Релятивистский мир*”, глава 4: “Неинерциальные системы отсчёта”, www.synset.com.

2013-06-20 v1
2014-10-26 v2

Are rigid non-inertial frames of reference really rigid?

S. S. Stepanov

In this paper the notion of the rigid frame of reference within special relativity is analysed. Three definitions of rigidity are formulated. By using several examples of non-inertial frames, it is shown that these definitions are not equivalent. It is also shown that so called Möller rigid non-inertial frames are locally rigid, but do not exhibit global rigidity. The physical meaning of this phenomenon is discussed, as well as its relation to the non-Euclidean nature of space in non-inertial frames of reference.