Глава 11

Геометрия

В этой главе мы возвращаемся к произвольным системам отсчёта. При помощи символов Кристоффеля и ковариантного дифференцирования рассмотрена запись физических уравнений в криволинейных координатах. На основе этого аппарата получено уравнение движение свободной частицы или импульса света в неинерциальной системе отсчёта и рассмотрены другие вопросы динамики, включая ковариантную запись электродинамики. Специальная теория относительности, которой посвящена эта книга, описывает физику в плоском пространстве-времени, кривизна которого равна нулю. Тем не менее 3-мерное пространство в неинерциальных системах отчёта в некотором смысле может иметь геометрию, отличную от евклидовой. Поэтому мы введём тензор кривизны, после чего разберёмся с неевклидовостью пространственной геометрии. В криволинейных координатах очень мощным математическим инструментом является формализм дифференциальных форм, которым посвящены последние разделы главы.

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ МИР

Сергей С. Степанов

Последняя версия находится на сайте http://synset.com. Все обнаруженные ошибки и замечания просьба присылать по почте: phys@synset.com. (c) 2009-2013. Печать: 1 сентября 2013 г.

11.1 Ковариантные уравнения

При помощи векторов взаимного базиса e^α (стр. 232) определим оператор *4-вектор градиента* (не путать с обычной наблой 3-мерного векторного анализа!):

$$\nabla = \mathrm{e}^\alpha \partial_\alpha. \tag{11.1}$$

То, что это 4-вектор следует из того, что ковариантные компоненты 4-вектора при смене системы координат преобразуются как производные $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$ (см. 4.66, стр. 234). Поэтому свёртка ∂_α в (11.1) с векторами взаимного базиса e^α является 4-вектором.

Оператор ∇ позволяет в компактном виде записать дифференциал (бесконечно малое изменение) произвольной скалярной функции $f = f(x)$ при смещении вдоль 4-вектора $d\mathrm{x} = \mathrm{e}_\alpha\, dx^\alpha$:

$$df = (d\mathrm{x} \cdot \nabla) f = \partial_\alpha f\, dx^\alpha \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\, dx^\alpha. \tag{11.2}$$

Вычислим теперь аналог дивергенции, взяв скалярное произведение 4-мерного оператора наблы и произвольного 4-вектора (это инвариант, имеющий одинаковое значение в различных системах отсчета):

$$\nabla \cdot \mathrm{A} = \mathrm{e}^\alpha \partial_\alpha \cdot (A^\beta \mathrm{e}_\beta) = \partial_\alpha A^\alpha + (\mathrm{e}^\alpha \partial_\alpha \mathrm{e}_\beta)\, A^\beta.$$

Обратим внимание, что производная подействовала не только на A^α, но и на векторы криволинейного базиса, так как они также в общем случае зависят от координат. Введём *символы Кристоффеля*, равные скалярному произведению 4-векторов взаимного базиса и производных от базисных векторов:

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \mathrm{e}^\gamma \cdot \partial_\beta \mathrm{e}_\alpha. \tag{11.3}$$

Кроме этого, при помощи метрического тензора $g_{\alpha\beta}$, определим символы Кристоффеля с нижними индексами:

$$\Gamma_{\gamma,\,\alpha\beta} = g_{\gamma\mu} \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \mathrm{e}_\gamma \partial_\beta \mathrm{e}_\alpha. \tag{11.4}$$

Теперь 4-дивергенцию можно записать следующим образом:

$$\nabla \cdot \mathrm{A} = \partial_\alpha A^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\, A^\beta. \tag{11.5}$$

Векторы лоренцевского базиса постоянны, поэтому для них символы Кристоффеля равны нулю и 4-дивергенция совпадает с обычной ковариантной сверткой $\partial_\alpha A^\alpha$. В произвольных же криволинейных координатах символы Кристоффеля отличны от нуля и их необходимо использовать для получения *ковариантной* 4-дивергенции $\nabla \cdot \mathrm{A}$.

Из определения 4-вектора бесконечно малого смещения $d\mathrm{x} = \mathrm{e}_\alpha\, dx^\alpha$ следует, что векторы базиса можно записать в виде $\mathrm{e}_\alpha = \partial_\alpha \mathrm{x}$. Так как частные производные перестановочны, справедливо следующее свойство:

$$\partial_\alpha \mathrm{e}_\beta = \partial_\beta \mathrm{e}_\alpha. \tag{11.6}$$

Стоит его проверить для базиса равноускоренной системы (4.65), стр. 233. Из (11.6) и определений (11.3), (11.4) следуют свойства симметричности:

$$\Gamma_{\gamma,\,\alpha\beta} = \Gamma_{\gamma,\,\beta\alpha}, \qquad\qquad \Gamma^{\gamma}_{\ \alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\ \beta\alpha}. \tag{11.7}$$

Симметричная матрица 4x4 имеет 10 независимых компонент. В символах Кристоффеля для каждого индекса γ существует 4 таких матриц. Поэтому возможно 40 различных функций, определяющих $\Gamma^{\gamma}_{\ \alpha\beta}$.

Символы Кристоффеля можно вычислить как при помощи векторов базиса (11.4), так и непосредственно из коэффициентов метрического тензора. Для получения соответствующей формулы возьмём производную от $\mathrm{e}_\alpha \cdot \mathrm{e}_\beta = g_{\alpha\beta}$ по координате x^γ:

$$\mathrm{e}_\alpha \partial_\gamma \mathrm{e}_\beta + \mathrm{e}_\beta \partial_\gamma \mathrm{e}_\alpha = \partial_\gamma g_{\alpha\beta}.$$

Переименовывая индексы (или беря производные от $g_{\alpha\gamma}$ и $g_{\beta\gamma}$), получаем два аналогичных уравнения:

$$\mathrm{e}_\alpha \partial_\beta \mathrm{e}_\gamma + \mathrm{e}_\gamma \partial_\beta \mathrm{e}_\alpha = \partial_\beta g_{\alpha\gamma}, \qquad\qquad \mathrm{e}_\beta \partial_\alpha \mathrm{e}_\gamma + \mathrm{e}_\gamma \partial_\alpha \mathrm{e}_\beta = \partial_\alpha g_{\beta\gamma}.$$

Складывая их и вычитая $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}$, с учётом (11.6), имеем:

$$\Gamma_{\gamma,\,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\big(\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}\big). \tag{11.8}$$

Символы Кристоффеля с верхним индексом получаются из этого выражения при помощи метрического тензора: $\Gamma^{\gamma}_{\ \alpha\beta} = g^{\gamma\mu}\Gamma_{\mu,\,\alpha\beta}$. В качестве упражнения ($\lessdot$ H$_{181}$), предлагается вычислить $\Gamma^{\gamma}_{\ \alpha\beta}$ в жесткой равноускоренной системе $ds^2 = e^{2ax}\,(dt^2 - dx^2)$ используя формулы (11.4) и (11.8), а также в полярных координатах $ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$ ($\lessdot$ H$_{182}$).

Заметим, что символы Кристоффеля не являются тензором (стр. 234):

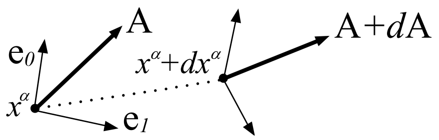
$$\Gamma'_{\gamma,\,\alpha\beta} = \mathrm{e}'_\gamma \partial'_\beta \mathrm{e}'_\alpha = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\gamma}\,\mathrm{e}_\sigma\,\frac{\partial}{\partial x'^\beta}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\,\mathrm{e}_\mu\right).$$

В результате раскрытия производной ($\lessdot$ H$_{183}$) от круглых скобок появляется вторая производная по координатам:

$$\Gamma'_{\gamma,\,\alpha\beta} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\gamma}\,\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\,\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\,\Gamma_{\sigma,\,\mu\nu} + g_{\sigma\mu}\,\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\gamma}\,\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}, \tag{11.9}$$

которая в случае нелинейных преобразований нарушает (второе слагаемое) тензорный характер преобразования $\Gamma_{\gamma,\,\alpha\beta}$.

• Пусть задано векторное поле $\mathrm{A} = \mathrm{A}(x^\alpha)$ (т.е. 4-векторы в каждой точке пространства и времени). В лоренцевых координатах изменение проекций векторного поля обусловлено только изменением самого поля. В криволинейном базисе компоненты вектора изменяются как из-за изменения векторного поля, так и в результате изменения базисных векторов при смещении в пространстве:



$$\mathrm{A} = A^\beta\, \mathrm{e}_\beta = A_\beta\, \mathrm{e}^\beta$$

$$d\mathrm{A} = \mathrm{A}(x+dx) - \mathrm{A}(x).$$

Раскрывая дифференциал произведения $d(A^\beta \mathrm{e}_\beta)$, имеем:

$$d\mathrm{A} = d(A^\beta \mathrm{e}_\beta) = \left(\mathrm{e}_\beta\, \partial_\gamma A^\beta + A^\beta \partial_\gamma \mathrm{e}_\beta\right) dx^\gamma = \mathrm{e}_\beta\, DA^\beta.$$

Во втором равенстве записано разложение вектора $d\mathrm{A}$ по базису e_β. Коэффициенты DA^β найдем, умножив обе части на e^α и учтя условие ортогональности $\mathrm{e}^\alpha \mathrm{e}_\beta = \delta^\alpha_\beta$ и определение символов $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \mathrm{e}^\alpha \partial_\gamma \mathrm{e}_\beta$:

$$DA^\alpha = \mathrm{e}^\alpha d\mathrm{A} = (\partial_\gamma A^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\, A^\beta)\, dx^\gamma = (D_\gamma A^\alpha)\, dx^\gamma.$$

Величины DA^α называются *ковариантным дифференциалом*, а множитель $D_\gamma A^\alpha$ – *ковариантной производной*:

$$D_\gamma A^\alpha = \partial_\gamma A^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\, A^\beta. \tag{11.10}$$

Для неё принято также следующее обозначение: $A^\alpha_{;\gamma} \equiv D_\gamma A^\alpha$.

Аналогично проводится разложение дифференциала вектора по взаимному базису:

$$d\mathrm{A} = d(A_\beta e^\beta) = (e^\beta \partial_\gamma A_\beta + A_\beta \partial_\gamma e^\beta)\, dx^\gamma = \mathrm{e}^\alpha\, DA_\alpha = \mathrm{e}^\alpha\, D_\gamma A_\alpha\, dx^\gamma.$$

При этом надо учесть соотношение $\mathrm{e}_\alpha \partial_\gamma \mathrm{e}^\beta = -\mathrm{e}^\beta \partial_\gamma \mathrm{e}_\alpha$, получающееся дифференцированием $\mathrm{e}_\alpha \mathrm{e}^\beta = \delta^\beta_\alpha$. В результате:

$$D_\gamma A_\alpha = \partial_\gamma A_\alpha - \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\, A_\beta. \tag{11.11}$$

Изменение вектора $d\mathrm{A}$ является физической (геометрической) величиной и не зависит от системы координат. Так как e_α и dx^γ преобразуются по тензорному закону, то и ковариантные производные $D_\gamma A^\alpha$, $D_\gamma A_\alpha$ также являются тензорами. В отличие от производной скалярного поля $\partial_\gamma f$, выражение $\partial_\gamma A^\alpha$ в криволинейных координатах тензором не является. Поэтому, дифференциальные уравнения, имеющие *ковариантный* (неизменный) вид в различных системах координат, должны содержать вместо производных $\partial_\gamma A^\alpha$ их ковариантную версию $D_\gamma A^\alpha$, которая является тензором. В частности, дивергенция – это $\nabla \cdot \mathrm{A} = D_\alpha A^\alpha \equiv A^\alpha_{;\alpha}$.

• Аналогично можно ввести ковариантное дифференцирование тензора, которое подчиняется обычным правилам дифференцирования. Запишем производную произведения компонент двух векторов:

$$D_\gamma(A^\alpha B^\beta) = (D_\gamma A^\alpha)B^\beta + A^\alpha(D_\gamma B^\beta) = \partial_\gamma(A^\alpha B^\beta) + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma}A^\mu B^\beta + \Gamma^\beta_{\mu\gamma}A^\alpha B^\mu,$$

где во втором равенстве подставлена ковариантная производная каждого вектора. Так как $(D_\gamma A^\alpha)$ и B^β преобразуются как тензор, сумма тензоров также тензор, то определенная таким образом ковариантная производная $D_\gamma(A^\alpha B^\beta)$ оказывается тензором. Таким образом, для тензоров второго ранга (с двумя индексами) ковариантная производная *определяется* следующим образом:

$$D_\gamma F^{\alpha\beta} = \partial_\gamma F^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma}F^{\mu\beta} + \Gamma^\beta_{\mu\gamma}F^{\alpha\mu},$$

$$D_\gamma F_{\alpha\beta} = \partial_\gamma F_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}F_{\mu\beta} - \Gamma^\mu_{\beta\gamma}F_{\alpha\mu},$$

$$D_\gamma F^\alpha_{\ \beta} = \partial_\gamma F^\alpha_{\ \beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma}F^\mu_{\ \beta} - \Gamma^\mu_{\beta\gamma}F^\alpha_{\ \mu}.$$

Первое выражение записано по аналогии производной от $A^\alpha B^\beta$, второе и третье – как производные от $A_\alpha B_\beta$ и $A^\alpha B_\beta$. Аналогично определяется производная от тензора произвольного типа. Ковариантная производная повышает ранг тензора на единицу. При этом она сохраняет тензорность выражения. Поэтому уравнение в которое она входит будет иметь одинаковую форму во всех системах отсчета. *Ковариантный дифференциал тензора* равен $DF^{\alpha\beta} = D_\gamma F^{\alpha\beta}\,dx^\gamma$, и т.д.

• Ковариантная производная метрического тензора равна нулю:

$$D_\gamma g_{\alpha\beta} = 0. \tag{11.12}$$

Этот важный факт называется *теоремой Риччи*. Она доказывается прямым вычислением. По определению производной тензора имеем:

$$D_\gamma g_{\alpha\beta} = \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}g_{\mu\beta} - \Gamma^\mu_{\beta\gamma}g_{\alpha\mu} = \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\beta,\alpha\gamma} - \Gamma_{\alpha,\beta\gamma} = 0.$$

Во втором равенстве опущен вниз индекс у символа Кристоффеля, а ноль в третьем получается после подстановки выражения (11.8) для символов Кристоффеля через производные метрического тензора. Аналогично проверяется тождество $D_\gamma g^{\alpha\beta} = 0$ (оно следует сразу и из $g_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta} = \delta^\beta_\alpha$).

Теорема Риччи позволяет обращаться с метрическим тензором как с постоянным тензором, внося его под ковариантную производную:

$$g_{\alpha\gamma}\,D_\beta A^\gamma = D_\beta(g_{\alpha\gamma}A^\gamma) = D_\beta A_\alpha,$$

поднимая и опуская индексы под производной.

• Получим несколько полезных соотношений, упрощающих вычисление ковариантных производных в криволинейных координатах. Важную роль при этом играет *определитель метрического тензора* с нижними индексами $g = \det|g_{\alpha\beta}|$. Метрический тензор с верхними индексами может быть выражен через производную этого определителя:

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{g}\,\frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}}. \tag{11.13}$$

Например, в 2-мерном пространстве определитель равен:

$$g = \det\begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{pmatrix} = g_{00}g_{11} - g_{01}g_{10}.$$

Беря от него производную последовательно по g_{00}, g_{01}, и т.д., получаем:

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} g_{11} & -g_{10} \\ -g_{01} & g_{00} \end{pmatrix}.$$

Прямым умножением матриц несложно проверить, что, если $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, то этот тензор является обратным к $g_{\alpha\beta}$. В общем случае (11.13) доказывается на основе алгоритма построения обратной матрицы (стр. 813). Её элементом $g^{\alpha\beta}$ будет алгебраическое дополнение к этому же элементу исходной матрицы $g_{\alpha\beta}$, делённое на определитель g (матрица $g_{\alpha\beta}$ симметрична). С другой стороны, определитель g равен сумме произведений элементов на их алгебраические дополнения. Следовательно, производная определителя по элементу равна его алгебраическому дополнению.

Ещё одно важное соотношение нам даёт теорема Риччи (стр. 667):

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma} + \Gamma_{\beta,\,\alpha\gamma}. \tag{11.14}$$

Она позволяет записать простое выражение для симметричных символов Кристоффеля, свёрнутых по паре индексов:

$$\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} = g^{\beta\mu}\Gamma_{\mu,\,\beta\alpha} = \frac{1}{2}\,g^{\beta\mu}(\Gamma_{\mu,\,\beta\alpha} + \Gamma_{\beta,\,\mu\alpha}) = \frac{1}{2}\,g^{\beta\mu}\partial_\alpha g_{\beta\mu} = \frac{1}{2g}\,\frac{\partial g}{\partial g_{\beta\mu}}\,\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha}.$$

Во втором равенстве, с учётом симметричности $g^{\beta\mu}$, переименованы и переставлены индексы μ, β. Затем подставлено (11.14) и (11.13). В результате:

$$\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} = \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} = \frac{\partial_\alpha g}{2g}, \tag{11.15}$$

где выполнено дифференцирование сложной функции.

• Теперь не составляет труда записать выражение для ковариантной дивергенции:

$$\nabla\cdot\mathrm{A}=D_\alpha A^\alpha=\partial_\alpha A^\alpha+\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}A^\mu=\partial_\alpha A^\alpha+\frac{\partial_\mu g}{2g}\,A^\mu.$$

Сворачивая производную произведения, имеем:

$$\nabla\cdot\mathrm{A}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\alpha(\sqrt{-g}\,A^\alpha). \tag{11.16}$$

В отличие от исходного выражения, теперь нет необходимости вычислять множество компонент символов Кристоффеля, нужен только определитель метрического тензора g.

Заметим, что в (11.16) мы выделили знак минус под корнем у определителя метрического тензора. В пространстве событий этот определитель всегда отрицательный (см. стр. 243). Это очевидно для лоренцевых координат в которых $g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}=\mathrm{diag}(1,\,-1,-1,-1)$ и, следовательно, $g=-1$. Для жесткой равноускоренной и вращающихся систем (стр. 228) в 4-мерном пространстве определители, соответственно, равны:

$$g=-e^{4ax},\qquad\qquad g=-r^2. \tag{11.17}$$

Ковариантные компоненты градиента $\nabla f=\mathrm{e}^\alpha\,\partial_\alpha f$ – это производные $\partial_\alpha f$. Поэтому лапласиан скалярной функции равен

$$\Delta f=\nabla\cdot(\nabla f)=\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\alpha(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\,\partial_\beta f), \tag{11.18}$$

где мы воспользовались выражением для дивергенции от вектора ∇f. Так как в (11.16) стоят компоненты вектора с верхними индексами, в (11.18) они подняты из $\partial_\alpha f$ при помощи метрического тензора $g^{\alpha\beta}\,\partial_\beta f$.

Найдём также дивергенцию антисимметричного тензора $F^{\mu\nu}=-F^{\nu\mu}$:

$$D_\alpha F^{\alpha\beta}=\partial_\alpha F^{\alpha\beta}+\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}F^{\mu\beta}+\Gamma^\beta_{\mu\alpha}F^{\alpha\mu}=\partial_\alpha F^{\alpha\beta}+\frac{\partial_\alpha g}{2g}\,F^{\alpha\beta},$$

где во втором равенстве подставлено тождество (11.15) и учтено, что свертка симметричной матрицы ($\Gamma^\beta_{\mu\alpha}$ по μ и α) и антисимметричной ($F^{\alpha\mu}$) равно нулю. Собирая слагаемые в производную произведения, окончательно, имеем:

$$D_\alpha F^{\alpha\beta}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\alpha(\sqrt{-g}\,F^{\alpha\beta}). \tag{11.19}$$

Для вычисления такой дивергенции снова требуется только определитель метрического тензора, а не символы Кристоффеля.

• При рассмотрении тензоров в 4-мерном пространстве (стр. 182) был введен антисимметричный *символ* Леви-Чивиты $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$, имеющий значение $\varepsilon_{0123} = 1$ и меняющий знак при перестановке любой пары индексов. В *лоренцевых* координатах он является тензором и символ Леви-Чивиты с верхними индексами $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ определён таким образом, что $\varepsilon^{0123} = -1$ (в декартовых координатах при этом $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk}$). Построим теперь антисимметричный тензор, обобщающий символ Леви-Чивиты на случай произвольных криволинейных координат.

Прежде всего заметим, что *якобиан* преобразования от лоренцевых координат X^α к криволинейным x^α можно записать следующим образом:

$$J = \det\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha}\right) = \begin{vmatrix} \partial_0 T & \partial_0 X & \partial_0 Y & \partial_0 Z \\ \partial_1 T & \partial_1 X & \partial_1 Y & \partial_1 Z \\ \partial_2 T & \partial_2 X & \partial_2 Y & \partial_2 Z \\ \partial_3 T & \partial_3 X & \partial_3 Y & \partial_3 Z \end{vmatrix} = \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\,\frac{\partial X^\mu}{\partial x^0}\,\frac{\partial X^\nu}{\partial x^1}\,\frac{\partial X^\sigma}{\partial x^2}\,\frac{\partial X^\tau}{\partial x^3}.$$

Этот якобиан также выражается через определитель g матрицы, составленной из компонент метрического тензора $g_{\alpha\beta}$, т.е. $g = \det(g_{\alpha\beta})$. Действительно, запишем преобразование тензора из лоренцевых координат к криволинейным:

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\beta}\;\eta_{\mu\nu}.$$

Справа – произведение трёх квадратных матриц: поэтому $g = -J^2$ (определитель произведения матриц равен произведению их определителей, и в лоренцевых координатах $\det\eta_{\alpha\beta} = \det\operatorname{diag}(1,-1,-1,-1) = -1$).

Определим теперь антисимметричный *тензор* Леви-Чивиты, совершая преобразования из лоренцевых координат для $\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}$:

$$E_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\beta}\,\frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\gamma}\,\frac{\partial X^\tau}{\partial x^\delta}\;\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} = J\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

В последнем равенстве учтено, что $E_{\alpha\beta\gamma\delta}$ отличен от нуля только, когда все индексы различны и при этом $E_{0123} = J$. Таким образом:

$$E_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-g}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}, \qquad\qquad E^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{11.20}$$

где тензор $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$ получается, как обычно, поднятием индексов:

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta} = g^{\alpha\mu}\,g^{\beta\nu}\,g^{\gamma\sigma}\,g^{\delta\tau}\,E_{\mu\nu\sigma\tau} = \det\left(g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{\sqrt{-g}}{g}\,\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta},$$

(учтено, что из $g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta$, следует, что $\det(g^{\alpha\beta}) = 1/\det(g_{\alpha\beta}) = 1/g$ и в псевдоевклидовом пространстве $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$).

Аналогично определяется антисимметричный тензор Леви-Чивиты и в пространстве любой размерности. Например, в 3-мерном пространстве в сферических или цилиндрических координатах с положительным определителем метрики, антисимметричный тензор равен (индексы пробегают значения от 1 до 3):

$$E_{ijk} = \sqrt{g}\,\varepsilon_{ijk}, \qquad E^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\varepsilon^{ijk}. \tag{11.21}$$

В таких криволинейных координатах можно определить векторную операцию ротора:

$$[\nabla\times\mathbf{A}]^i = E^{ijk}D_jA_k = E^{ijk}\,(\partial_jA_k - \Gamma^p_{kj}A_p) = E^{ijk}\,\partial_jA_k,$$

где учтено, что свёртка антисимметричного тензора E^{ijk} и симметричных по нижним индексам символов Кристоффеля Γ^p_{kj} равна нулю. Так как E^{ijk} и D_jA_k являются тензорами, то их свёртка даёт контравариантные компоненты вектора ротора:

$$[\nabla\times\mathbf{A}]^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\varepsilon^{ijk}\,\partial_jA_k. \tag{11.22}$$

Таким образом, выражение для ротора в криволинейных координатах в 3-мерном пространстве от декартовых координат отличается лишь множителем $1/\sqrt{g}$. Векторное произведение (и, следовательно, ротор) можно определить только для трёх измерений. Впрочем, чуть позже в этой главе мы рассмотрим аппарат дифференциальных форм, обобщающий понятие ротора на произвольные размерности пространства. Пока же отметим, что аналог ротора в 4-мерном пространстве является антисимметричным тензором второго ранга:

$$E^{\alpha\beta\mu\nu}D_\mu A_\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\,\partial_\mu A_\nu,$$

в котором символы Кристоффеля сокращаются аналогично трёхмерному случаю.

Компоненты 4-вектора получаются при свёртке антисимметричного тензора Леви-Чивиты и ковариантной производной с антисимметричным тензором:

$$E^{\alpha\mu\nu\lambda}D_\mu F_{\nu\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\varepsilon^{\alpha\mu\nu\lambda}\,\partial_\mu F_{\nu\lambda}$$

(свёртка с симметричным тензором привела бы к нулевому результату).

11.2 Геодезическая

• Рассмотрим движение свободной частицы, траектория которой зависит от собственного времени τ. Её 4-скорость $\mathrm{U} = d\mathrm{X}/d\tau$ постоянна: $d\mathrm{U}/d\tau = 0$. В лоренцевых координатах $X^\alpha = (T,\, X,\, Y,\, Z)$ векторы базиса n_α одинаковы во всём пространстве. Поэтому компоненты разложения 4-вектора скорости $U^\alpha = dX^\alpha/d\tau$ по базису $\mathrm{U} = U^\alpha\,\mathrm{n}_\alpha$ также будут постоянными. Иная ситуация в криволинейных координатах, в которых базисные векторы зависят от точки пространства: $\mathrm{e}_\alpha = \mathrm{e}_\alpha(x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3)$. Для сохранения постоянства вектора $\mathrm{U} = u^\alpha\,\mathrm{e}_\alpha$ необходимо, чтобы его компоненты были функциями координат: $u^\alpha = u^\alpha(x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3)$. С другой стороны, вдоль траектории $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$ компоненты u^α являются функциями собственного времени, поэтому:

$$\frac{du^\gamma}{d\tau} = \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^\beta}\,\frac{dx^\beta}{d\tau} = (\partial_\beta u^\gamma)\,u^\beta. \tag{11.23}$$

Найдем как выглядит траектория свободной частицы в криволинейных координатах x^α. Так как dx^γ преобразуется, как контравариантный вектор, а τ – скаляр (инвариант), то 4-скорость $u^\gamma = dx^\gamma/d\tau$ в произвольных криволинейных координатах является 4-вектором (точнее компонентами 4-вектора). Придадим ковариантный вид дифференциальному уравнению $dU^\gamma/d\tau = 0$, справедливому в лоренцевых координатах. Заменим обычный дифференциал d ковариантным D:

$$\frac{Du^\gamma}{d\tau} = \frac{D_\beta u^\gamma\,dx^\beta}{d\tau} = (\partial_\beta u^\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\,u^\alpha)\,u^\beta = 0.$$

Учтем (11.23) и перейдём от компонент 4-скорости к производным координат по собственному времени: $u^\gamma = dx^\gamma/d\tau$. В результате получается уравнение, которое описывает движение свободной частицы в криволинейных координатах. Его называют *уравнением геодезической*:

$$\frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{d\tau}\,\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \tag{11.24}$$

Ещё одно уравнение, которому удовлетворяет траектория, следует из равенства квадрата 4-вектора скорости единице:

$$g_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{d\tau}\,\frac{dx^\beta}{d\tau} = 1 \tag{11.25}$$

(делим $ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta$ на $d\tau^2$ и учитываем, что интервал вдоль траектории частицы равен её собственному времени: $ds = d\tau$).

• Важным фактом является то, что *линия минимальной длины, соединяющая две точки пространства, удовлетворяет уравнению геодезической.* Действительно, просуммируем вдоль геодезической элементы длины ds в пространстве событий, перейдя к интегрированию по $d\tau$:

$$I[x] = \int\limits_0^s \sqrt{ds^2} = \int\limits_0^s (g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta)^{1/2} = \int\limits_0^s (g_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha\, \dot{x}^\beta)^{1/2}\, d\tau = min,$$

где $\dot{x}^\alpha = dx^\alpha/d\tau$. Значение этого интеграла зависит от выбора конкретной функции траектории частицы $x^\alpha(\tau)$. Поэтому $I[x]$ – это функционал, поиск экстремума которого приводит ($\lessdot$ H$_{184}$) к уравнениям Лагранжа (стр. 436) для лагранжиана $L(x,\dot{x}) = (g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta)^{1/2}$:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{g_{\gamma\beta}\dot{x}^\beta}{L}\right) = \frac{1}{2L}\,\partial_\gamma g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta.$$

Учтем теперь, что τ – это собственное время ($ds/d\tau = 1$) для которого *на экстремальной кривой* лагранжиан обращается в единицу $L = 1$:

$$\frac{d}{d\tau}\left(g_{\gamma\beta}\dot{x}^\beta\right) = \frac{1}{2}\,\partial_\gamma g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta \tag{11.26}$$

(фактически мы сначала пользуемся произвольной параметризацией $x^\alpha(\tau)$, и только, получив уравнения Лагранжа, делаем τ собственным временем). Беря в (11.26) производную по τ, имеем:

$$\partial_\alpha g_{\gamma\beta}\,\dot{x}^\beta\dot{x}^\alpha + g_{\gamma\beta}\,\ddot{x}^\beta = \frac{1}{2}\,\partial_\gamma g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta.$$

Так как произведение $\dot{x}^\beta\dot{x}^\alpha$ симметрично по индексам α и β, симметризуем (переименовав индексы) первый член в левой части уравнения:

$$\partial_\alpha g_{\gamma\beta}\,\dot{x}^\beta\dot{x}^\alpha = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha g_{\gamma\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha}\right)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta.$$

Свернув с $g^{\mu\gamma}$, приходим к *уравнению геодезической* (11.24). Уравнение (11.26) можно получить дифференцируя квадратичную форму:

$$S(x,\dot{x}) = g_{\alpha\beta}(x)\,\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta, \qquad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial S}{\partial\dot{x}^\gamma}\right) = \frac{\partial S}{\partial x^\gamma}. \tag{11.27}$$

Это уравнение проще, чем (11.24) и оно автоматически дает *все* ненулевые символы Кристоффеля как коэффициенты при первых производных $\dot{x}^\alpha$. Этим методом предлагается найти символы Кристоффеля для вращающейся системы отсчета в координатах Борна ($\lessdot$ H$_{185}$).

• В качестве примера решения уравнения геодезической, рассмотрим жесткую равноускоренную систему отсчета в симметричных по x и y координатах Меллера, в которых $S=(1+ax)^2\,\dot t^2-\dot x^2-\dot y^2$, где точка над функцией – производная по τ. Подставляя S в (11.27) для $\gamma=0,1,2$, где $x^\gamma=(t,\,x,\,y)$ получаем три уравнения:

$$\frac{d((1+ax)^2\,\dot t)}{d\tau}=0,\qquad \ddot x=-a\,(1+ax)\,\dot t^2,\qquad \ddot y=0. \tag{11.28}$$

Ещё одно уравнение $S=1$ дает единичный квадрат 4-скорости (11.25):

$$(1+ax)^2\,\dot t^2-\dot x^2-\dot y^2=1. \tag{11.29}$$

Будем считать, что в момент времени $t=t_0$ частица имела нулевое собственное время ($\tau=0$) и находилась в точке $x_0=x(0)$, $y_0=y(0)$, имея компоненты 4-скорости $u_{0x}=\dot x(0)$, $u_{0y}=\dot y(0)$. Интегрируя первое уравнение (11.28), получаем:

$$\dot t=\frac{\gamma_0\,(1+ax_0)}{(1+ax)^2}, \tag{11.30}$$

где γ_0 – константа интегрирования, а постоянный множитель $(1+ax_0)$ выделен для упрощения дальнейших формул. Интегрирование третьего уравнения дает $\dot y=u_{0y}=const$. Подставим (11.30) в (11.29), для $t=t_0$:

$$\gamma_0^2=1+u_{0x}^2+u_{0y}^2.$$

Чтобы найти связь констант u_{0x} и u_{0y} с координатными скоростями v_{0x} и v_{0y}, запишем $dx/d\tau=(dx/dt)(dt/d\tau)$ или $\dot x=v_x\,\dot t$. Поэтому, учитывая выражение для (11.30) при $t=t_0$, имеем:

$$u_{0x}=\frac{v_{0x}\gamma_0}{1+ax_0},\qquad u_{0y}=\frac{v_{0y}\gamma_0}{1+ax_0},\qquad \gamma_0=\frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}_0^2/(1+ax_0)^2}},$$

где $\mathbf{v}_0^2=v_{0x}^2+v_{0y}^2$. Таким образом, константа γ_0 имеет смысл фактора Лоренца для *физической скорости* частицы в начальный момент времени (физическое время (4.73), стр. 236 связано с координатным как $d\tau_0=(1+ax_0)\,dt$, а физическая длина равна $dl^2=dx^2+dy^2$). Подставляя (11.30) в (11.29) и интегрируя с начальными условиями, приходим к следующей траектории ($\lessdot\,\mathrm{H}_{186}$):

$$(1+ax)^2=(1+ax_0)^2\frac{\gamma_0^2}{1+u_{0y}^2}-(1+u_{0y}^2)\Bigl(a\tau-\frac{v_{0x}\gamma_0}{1+u_{0y}^2}\Bigr)^2, \tag{11.31}$$

$$y=y_0+u_{0y}\,\tau. \tag{11.32}$$

Зависимость τ от t теперь получается интегрированием (11.30).

В нерелятивистском пределе $(1+ax)^2 \approx 1+2ax$, $\gamma_0 = 1$, $\tau = t$, поэтому из (11.31), (11.32) имеем движение по классической траектории:

$$x = x_0 + v_{0x}\, t - \frac{at^2}{2}, \qquad y = y_0 + v_{0y}\, t.$$

Рассмотрим частный случай, при котором в момент времени $t = t_0 = 0$ частица находилась в начале системы отсчета $x_0 = y_0 = 0$ и имела составляющую скорости v_{0y} вдоль оси y, а $v_{0x} = 0$. В этом случае выражения для траектории упрощаются:

$$(1+ax)^2 = 1 - (\gamma_0\, a\tau)^2, \qquad\qquad y = u_{0y}\, \tau.$$

Из (11.30) имеем связь собственного (τ) и координатного (t) времён:

$$\gamma_0\, a\, \tau = \mathrm{th}(a\, t).$$

Поэтому:

$$x(t) = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{\mathrm{ch}(a\, t)} - 1\right], \qquad\qquad y(t) = \frac{v_{0y}}{a}\, \mathrm{th}(at). \tag{11.33}$$

Это выражение мы получили на стр. 253. Обратим ещё раз внимание, что бесконечное значение координатного времени $t = \infty$ соответствует конечному собственному времени $\tau = 1/a\gamma_0$. За это время частица уходит за горизонт событий неинерциального наблюдателя.

Выше отмечалось, что уравнения движения в форме (11.27) позволяют получить все ненулевые символы Кристоффеля. Продемонстрируем это на примере равноускоренной системы отсчёта. Раскроем производную произведения первого уравнения (11.28), и ещё раз перепишем второе:

$$\ddot{t} + 2\frac{a}{1+ax}\,\dot{t}\dot{x} = 0, \qquad \ddot{x} + a\,(1+ax)\,\dot{t}^2 = 0.$$

Коэффициенты при первых производных равны символам Кристоффеля:

$$\Gamma^t_{tx} = \Gamma^t_{xt} = \frac{a}{1+ax}, \qquad \Gamma^x_{tt} = a\,(1+ax).$$

Заметим, что обе части первого уравнения мы разделили на $(1+ax)^2$, чтобы придать ему вид $\ddot{x}^\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0$. Все остальные символы Кристоффеля равны нулю. Если бы мы изучали движение в координатах с метрикой $ds^2 = e^{2ax}\,(dt^2 - dx^2) - dy^2$, то уравнения геодезической имели бы вид:

$$\ddot{t} + 2a\,\dot{t}\dot{x} = 0, \qquad \ddot{x} + a\,(\dot{t}^2 + \dot{x}^2) = 0, \qquad \ddot{y} = 0$$

и символы Кристоффеля равнялись

$$\Gamma^t_{tx} = \Gamma^t_{xt} = \Gamma^x_{tt} = \Gamma^x_{xx} = a,$$

что другими методами было получено на стр. 665.

• В отличие от массивных частиц, собственное время, связанное с движением импульса света не определено (оно для света "останавливается"). Тем не менее, всегда можно описать траекторию такого импульса в параметрическом виде $x^\alpha(\lambda)$, где λ – некоторый скалярный параметр. Вдоль траектории движения светового импульса интервал равен нулю $ds = 0$:

$$g_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\,\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \tag{11.34}$$

В лоренцевых координатах параметризацию можно выбрать таким образом, чтобы $d^2X^\gamma/d\lambda^2 = 0$. Записывая это уравнение в криволинейных координатах, снова получаем *уравнение геодезической*:

$$\frac{d^2x^\gamma}{d\lambda^2} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\,\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \tag{11.35}$$

Для жесткой равноускоренной системы отсчета в координатах Мёллера для импульса света уравнения (11.28) остаются без изменений с $\tau = \lambda$, а уравнение (11.29) имеет ноль в правой части:

$$(1+ax)^2\,\dot t^2 - \dot x^2 - \dot y^2 = 0. \tag{11.36}$$

Подставляя в него (11.30) и $\dot y = u_{0y}$ с начальными ($t = t_0$, $\lambda = 0$) условиями $x_0 = y_0 = 0$ и $v_{0x} = 0$, $v_{0y} = 1$, приходим к связи констант: $u_{0y} = \gamma_0$. Поэтому, при произвольной λ это уравнение имеет вид:

$$\frac{\gamma_0^2}{(1+ax)^2} - \gamma_0^2 = \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2.$$

Интегрируя его, имеем:

$$\begin{cases} (1+ax)^2 = 1 - (a\,\gamma_0\lambda)^2, \\ y = \gamma_0\lambda. \end{cases}$$

С помощью этого решения проинтегрируем $\dot t = \gamma_0/(1+ax)^2$, найдя связь параметра λ и координатного времени t:

$$a\,\gamma_0\lambda = \mathrm{th}(at).$$

Неопределенная константа γ_0 входит в решение в комбинации $\gamma_0\lambda$. Выбор параметризации λ достаточно произволен (см. ниже) и всегда можно переопределить параметр $\lambda \mapsto \lambda/\gamma_0$, включив в него произвольную константу γ_0. Переходя в траекториях от параметра ко времени t, мы получаем выражения, совпадающие с (11.33) при $v_{0y} = 1$ (ультрарелятивистская частица) Совпадает также и траектория: $(1+ax)^2 + (ay)^2 = 1$. Двигаясь по окружности с центром, лежащим на горизонте $(-1/a,\,0)$, свет при $t \to \infty$ стремится к точке $(x,\,y) = (-1/a,\,1/a)$.

В качестве параметризации траектории света $x^i(\lambda)$ можно выбрать физическую длину линии траектории $\lambda = l$, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки. Элемент длины этой линии в системе единиц с $c = 1$ равен физическому времени $\delta\tau$ (стр. 236):

$$\sqrt{g_{00}}\,dt + \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}\,dx^i = dl \qquad => \qquad \frac{dt}{dl} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} - \frac{g_{0i}}{g_{00}}\,\frac{dx^i}{dl}.$$

Подставляя производную от времени в (11.34), получаем:

$$\gamma_{ij}\,\frac{dx^i}{dl}\,\frac{dx^j}{dl} = 1, \tag{11.37}$$

где γ_{ij} – тензор (стр. 236), определяющий элемент физической длины dl.

Для равноускоренной системы несложно найти связь координатного времени t и длины траектории. Учитывая, что физическая длина равна $dl^2 = dx^2 + dy^2 = (v_x^2 + v_y^2)\,dt^2$, и подставляя (11.33) при $v_{0y} = 1$, имеем: $dl = dt/\operatorname{ch}(at)$. Интегрируя, получаем:

$$\operatorname{tg}(al) = \operatorname{sh}(at) = \frac{a\gamma_0\lambda}{\sqrt{1-(a\gamma_0\lambda)^2}}.$$

При $t \to \infty$ длина траектории стремиться к $l \to \pi/(2a)$, уходя за горизонт событий для наблюдателя в начале системы отсчета.

Траекторию движения массивной частицы мы параметризовали при помощи её собственного времени τ. Для света использовался произвольный параметр λ. По сути вывода уравнения геодезической, эти параметры являются инвариантами и не зависят от выбора конкретных криволинейных координат. Действительно, заменяя в уравнениях движения свободной частицы обычную производную на ковариантную, для общей ковариантности уравнения мы должны следить за ковариантностью не только производных, но и переменной дифференцирования.

В *данной* системе отсчета всегда можно перейти к другой параметризации (не обязательно ковариантной), например, $\lambda = \lambda(l)$. При этом производные по старому и новому параметру связаны следующим образом:

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{dx^\alpha}{dl}\,\frac{dl}{d\lambda} = \frac{dx^\alpha}{dl}\,\frac{1}{\lambda'}, \qquad\qquad \frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} = \frac{d^2x^\alpha}{dl^2}\,\frac{1}{\lambda'^2} - \frac{dx^\alpha}{dl}\,\frac{\lambda''}{\lambda'^3},$$

где штрихи – производные функции $\lambda(l)$ по l. В такой параметризации уравнение геодезической имеет вид:

$$\frac{d^2x^\gamma}{dl^2} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{dl}\,\frac{dx^\beta}{dl} = \frac{\lambda''}{\lambda'}\,\frac{dx^\gamma}{dl}.$$

Для линейной связи старого λ и нового l параметров в правой части получается ноль и мы снова приходим к (11.35).

11.3 Динамика в неинерциальных системах

В главе 4, стр.259 на примерах вращающейся и жесткой равноускоренной систем отсчёта, была построена сохраняющаяся величина, имеющая смысл полной энергии свободной частицы, движущейся в неинерциальной системе. Докажем теперь, что эта энергия сохраняется в общем случае стационарной метрики, когда коэффициенты $g_{\alpha\beta}$ не зависят от координатного времени $t = x^0$. Для этого запишем "уравнения Лагранжа" (11.27) стр. 673 для

$$S = g_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{ds}\,\frac{dx^\beta}{ds} = g_{00}\,\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + 2g_{0i}\,\frac{dt}{ds}\,\frac{dx^i}{ds} + g_{ij}\,\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}, \qquad (11.38)$$

где ds – собственное время частицы (интервал, вычисленный вдоль её траектории). Для переменной $x^0 = t$, имеем следующее уравнение геодезической:

$$\frac{d}{ds}\left(g_{00}\,\frac{dt}{ds} + g_{0i}\,\frac{dx^i}{ds}\right) = 0$$

(в правой части стоит ноль, так как $g_{\alpha\beta}$ и, следовательно, S не зависят от t). Таким образом, для свободной частицы сохраняется (является интегралом движения) величина:

$$\left(g_{00} + g_{0i}\,\frac{dx^i}{dt}\right)\,\frac{dt}{ds} = g_{00}\left(1 - \gamma_i v^i\right)\,\frac{dt}{ds} = const,$$

где $\gamma_i = -g_{0i}/g_{00}$ и $v^i = dx^i/dt$ – координатная скорость частицы. С другой стороны, изменение собственного времени частицы ds связано с разницей *физических времен* $\delta\tau = \sqrt{g_{00}}\,dt + g_{0i}\,dx^i/\sqrt{g_{00}} = (1 - \gamma_i v_i)\,\sqrt{g_{00}}\,dt$ двух часов мимо которых она пролетает следующим образом (см. стр. 258):

$$ds = [\delta\tau^2 - \delta l^2]^{1/2} = \sqrt{1 - \tilde{\mathbf{v}}^2}\,\delta\tau = \sqrt{1 - \tilde{\mathbf{v}}^2}\,(1 - \gamma_i v^i)\,\sqrt{g_{00}}\,dt,$$

где $\tilde{\mathbf{v}}$ – физическая скорость частицы. Выражая из этого соотношения производную dt/ds и умножая интеграл на массу m частицы, окончательно имеем:

$$E = \frac{m\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \tilde{\mathbf{v}}^2}} = const. \qquad (11.39)$$

В инерциальной системе отсчёта $g_{00} = 1$ и E является энергией движения (частица свободна!). В неинерциальной системе g_{00} в общем случае зависит от координат и появляются "силы инерции", которые эффективно входят в полную энергию.

• Запишем теперь уравнения движения частицы в системе отсчёта со стационарной метрикой. Из (11.38) получаются следующие уравнения Лагранжа для x^k:

$$2\,\frac{d}{ds}\left(g_{0k}\dot{t} + g_{ki}u^i\right) = \partial_k g_{00}\,\dot{t}^2 + 2\partial_k g_{0i}u^i\dot{t} + \partial_k g_{ij}\,u^i u^j,$$

где $\dot{t} = dt/ds$ и $u^i = dx^i/ds$. Выразим $\dot{t}$ через полную энергию частицы $\varepsilon = E/m = g_{00}\,\dot{t} + g_{0i}u^i$ и перейдём от метрических коэффициентов к 3-мерным параметрам γ_i и γ_{ij}:

$$\dot{t} = \frac{\varepsilon}{g_{00}} + \gamma_i\,u^i, \qquad g_{0i} = -g_{00}\gamma_i, \qquad g_{ij} = g_{00}\gamma_i\gamma_j - \gamma_{ij}.$$

После несложных преобразований имеем:

$$\frac{d}{ds}\big(\varepsilon\gamma_k + \gamma_{ki}u^i\big) = \frac{1}{2}\,\partial_k\gamma_{ij}\,u^i u^j - \frac{\varepsilon^2}{2}\,\frac{\partial_k g_{00}}{g_{00}^2} + \varepsilon u^i\partial_k\gamma_i.$$

Раскрывая производную произведения в левой части, окончательно получаем:

$$\gamma_{ki}\,\frac{du^i}{ds} + \tilde{\Gamma}_{k,ij}\,u^i u^j = -\frac{\varepsilon^2}{2}\,\frac{\partial_k g_{00}}{g_{00}^2} + \varepsilon u^i(\partial_k\gamma_i - \partial_i\gamma_k), \tag{11.40}$$

где 3-мерные символы Кристоффеля с тильдой выражаются через величины γ_{ij} также как и 4-мерные символы Кристоффеля через g_{ij}:

$$\tilde{\Gamma}_{k,ij} = \frac{1}{2}\,(\partial_i\gamma_{jk} + \partial_j\gamma_{ik} - \partial_k\gamma_{ij}).$$

Левая часть уравнений (11.40) является ковариантной производной $\gamma_{ki}\tilde{D}u^i/ds$, вычисленной в метрике γ_{ij}. В инерциальной системе отсчёта (в криволинейных координатах) такая производная равняется нулю (свободная частица). Поэтому в неинерциальной системе правая часть (11.40) имеет смысл *силы инерции*. Запишем эту силу в векторных обозначениях. Напомним, что в инерциальной системе отсчёта в лоренцевых координатах сила, действующая на частицу по определению равна произвольной импульса по физическому времени T:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dT} = m\frac{d\mathbf{u}}{ds}\,\sqrt{1-\tilde{\mathbf{v}}^2},$$

где $ds = \sqrt{1-\tilde{\mathbf{v}}^2}\,dT$ – изменение собственного времени частицы, $\tilde{\mathbf{v}}$ – её физическая скорость, и $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{v}}/\sqrt{1-\tilde{\mathbf{v}}^2}$ – пространственные компоненты 4-скорости (4.114), стр. 258. Сохраним это определение и в неинерциальной системе отсчёта, заменяя dT на синхронизированное физическое время $\delta\tau$ наблюдателей, изучающих движение частицы и дифференциал вектора $d\mathbf{u}$ на его ковариантную версию $D\mathbf{u}$: $f_k = m(\tilde{D}u_k/ds)\,\sqrt{1-\tilde{\mathbf{v}}^2}$.

Умножая уравнение (11.40) на $m\sqrt{1-\tilde{\mathbf{v}}^2}$ и учитывая определение сохраняющейся энергии (11.39), имеем:

$$\frac{f_k}{E} = \partial_k \left(\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\right) + \tilde{v}^i(\partial_k\gamma_i - \partial_i\gamma_k), \tag{11.41}$$

где во втором слагаемом стоит уже 3-мерная физическая скорость $\tilde{v}^i$.

Выражение в последнем слагаемом (11.41) можно переписать в следующим образом:

$$\partial_k\gamma_i - \partial_i\gamma_k = (\delta^j_k\delta^n_i - \delta^j_i\delta^n_k)\,\partial_j\gamma_n = \varepsilon_{lki}\varepsilon^{ljn}\,\partial_j\gamma_n,$$

где во втором равенстве использовано тождество свёртки двух символов Леви-Чивита по одному индексу. Под векторным произведением $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ в 3-мерных криволинейных координатах подразумевается вектор с ковариантными компонентами:

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]_i = E_{ijk}\,a^j b^k = \sqrt{\gamma}\,\varepsilon_{ijk}\,a^j b^k,$$

где $\gamma = \det(\gamma_{ij})$. Векторность этого выражения обусловлена тензорными свойствами величин E_{ijk}, которые сворачиваются с контравариантными компонентами векторов. Последнее равенство записано в соответствии с соотношением (11.21), стр. 671 (пространственной метрикой считается тензор γ_{ij}). Наконец, ротор определяется соотношением (11.22):

$$[\nabla\times\boldsymbol{\gamma}]^i = E^{ijk}\,\partial_j\gamma_k = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,\varepsilon^{ijk}\,\partial_j\gamma_k.$$

Поэтому, сворачивая (11.41) с 3-мерным вектором $\mathbf{e}^k$ взаимного базиса метрики $\delta l^2 = \gamma_{ij}\,dx^i dx^j$, окончательно получаем:

$$\frac{\mathbf{f}}{E} = \nabla\left(\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\right) + \tilde{\mathbf{v}}\times[\nabla\times\boldsymbol{\gamma}]. \tag{11.42}$$

Энергия E в стационарной метрике постоянна и равна некоторой константе. Поэтому, первая составляющая силы инерции имеет потенциальный характер (является градиентом скалярной функции). Вторая составляющая зависит от физической скорости частицы $\tilde{\mathbf{v}}$ и направлена перпендикулярно к ней. Эта составляющая является релятивистским аналогом *силы Кориолиса* и возникает в системах отсчёта с недиагональным метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$, имеющим вихревой характер вектора $\boldsymbol{\gamma}$ (его ротор отличен от нуля). Наличие силы Кориолиса приводит к тому, что траектория частицы зависит от направления её движения (см. рисунок на стр. 254)

В качестве примера, найдём силы инерции, действующие во вращающейся системе отсчёта. В координатах Борна её метрика имеет стационарный вид (4.51), стр. 228:

$$ds^2 = (1 - \omega^2 r^2)\, dt^2 - 2\omega\, r^2\, dt\, d\phi - dr^2 - r^2\, d\phi^2 - dz^2.$$

Квадрат физического расстояния в этой системе отсчёта записывается следующим образом:

$$\delta l^2 = dr^2 + \frac{r^2\, d\phi^2}{1 - \omega^2 r^2} + dz^2$$

и соответствующий определитель метрического тензора, определяющего физическое расстояние, равен

$$\gamma = \det(\gamma_{ij}) = \frac{r^2}{1 - \omega^2 r^2}.$$

Так как $1/\sqrt{g_{00}}$, зависит только расстояния до оси вращения r, несложно найти вектор градиента в первой составляющей силы инерции (потенциальный член):

$$\nabla \left(\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \right) = \partial_r \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2 r^2}} \right) \mathbf{e}^r = \frac{\omega^2\, r\, \mathbf{e}^r}{(1 - \omega^2 r^2)^{3/2}} = \frac{\omega^2\, \mathbf{r}}{(1 - \omega^2 r^2)^{3/2}}.$$

Ковариантные компоненты вектора $\boldsymbol{\gamma}$ равны:

$$\gamma_i = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} = \frac{\omega r^2}{1 - \omega^2 r^2}\, \{0, 1, 0\},$$

где координаты перечисляются обычным образом: $x^i = \{r,\, \phi,\, z\}$. Так как этот вектор зависит только от расстояния до оси вращения, отличной от нуля производной будет $\partial_1 \gamma_2 \equiv \partial_r \gamma_\phi = 2\omega r/(1 - \omega^2 r^2)^2$. Соответственно у ротора отлична от нуля z-тая компонента:

$$[\nabla \times \boldsymbol{\gamma}]^z = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\, \varepsilon^{312}\, \partial_1 \gamma_2 = \frac{2\omega}{(1 - \omega^2 r^2)^{3/2}}.$$

При помощи вектора $\boldsymbol{\omega} = \{0, 0, \omega\}$, направленного вдоль оси вращения, окончательно выражение для силы можно записать в следующем виде:

$$\frac{\mathbf{f}}{E} = \frac{\omega^2\, \mathbf{r} + 2\, \tilde{\mathbf{v}} \times \boldsymbol{\omega}}{(1 - \omega^2 r^2)^{3/2}}, \tag{11.43}$$

В нерелятивистском приближении $E \approx m$ и отсутствует знаменатель:

$$\mathbf{f} \approx m\, \omega^2\, \mathbf{r} + 2m\, \tilde{\mathbf{v}} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Первая составляющая силы является центробежной силой, а вторая – силой Кориолиса, направленной вправо от скорости.

11.4 Электродинамика в неинерциальных системах отсчёта

• Запишем уравнения электродинамики в ковариантном виде, справедливом в любой системе отсчёта. Для этого выразим тензор напряженности электромагнитного поля через 4-вектор потенциала A^α. Чтобы получить тензорное выражение, вместо обычных производных необходимо использовать ковариантные (11.11):

$$F_{\alpha\beta} = D_\alpha A_\beta - D_\beta A_\alpha = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha.$$

Символы Кристоффеля во втором равенстве сокращаются, поэтому зависимость $F_{\alpha\beta}$ от A_α остается такой же, как и в лоренцевых координатах. Соответственно не изменяется уравнение Максвелла без токов (7.4), стр. 431:

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0. \tag{11.44}$$

Обратим внимание, что это уравнение справедливо только для тензора напряженности с нижними индексами. Для верхних индексов

$$F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\mu\nu}$$

и, так как метрический тензор в общем случае зависит от координат, простое уравнение типа (11.44) уже не получается.

Второе уравнение электродинамики $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 4\pi j^\beta$ (7.3), стр.430 также обобщается на случай криволинейных координат заменой обычной производной ∂_α на ковариантную D_α. Учитывая тождество (11.19), имеем:

$$\partial_\alpha(\sqrt{-g}\, F^{\alpha\beta}) = 4\pi \sqrt{-g}\, j^\beta. \tag{11.45}$$

Уравнение непрерывности в ковариантных обозначениях $D_\alpha j^\alpha = 0$ с учетом тождества (11.16) можно записать следующим образом:

$$\partial_\alpha(\sqrt{-g}\; j^\alpha) = 0. \tag{11.46}$$

Несложно видеть, что это уравнение сразу получается из (11.45), взятием производной по ∂_β (частные производные перестановочны: $\partial_\alpha\partial_\beta = \partial_\beta\partial_\alpha$, а тензор $F^{\alpha\beta}$ антисимметричный: $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$).

Аналогичным образом запишем ковариантное уравнение движения пробного заряда q во внешнем поле (сила Лоренца) для $u^\gamma = dx^\gamma/ds$. Заменяя дифференциал d на его ковариантную версию D, имеем:

$$\frac{Du^\gamma}{ds} = \frac{du^\gamma}{ds} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\, u^\alpha u^\beta = \frac{q}{m}\, F^{\gamma\beta} u_\beta. \tag{11.47}$$

Понятно, что если поля отсутствуют ($F^{\alpha\beta} = 0$), частица является свободной и движется по геодезической.

Осталось построить 4-вектор плотности тока системы точечных зарядов в криволинейных координатах. Сначала отметим, что при преобразовании координат $x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3)$ инвариантом является 4-объём:

$$\sqrt{-g}\, d^4x = \sqrt{-g'}\, d^4x' = inv, \tag{11.48}$$

где $g = \det g_{\alpha\beta}$. Этот факт несложно доказать, переходя от лоренцевых координат X^{α} к криволинейным x^{α} при помощи якобиана и выражая его через g. Последний получается взятием определителя от преобразования метрического тензора ($\lessdot$ H_{187}), см. также стр. 670.

Определитель $\gamma = \det \gamma_{ij}$ метрики физической длины $dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j$, стр. 236 определяет 3-объём в криволинейных координатах:

$$\sqrt{\gamma}\, dV = \sqrt{\gamma}\, dx^1 dx^2 dx^3.$$

Аналогично ковариантному объёму (11.48), он является инвариантом относительно координатных преобразований внутри данной системы отсчёта: $x'^i = x'^i(x^1, x^2, x^3)$, стр. 242. Это следует из того, что при таких преобразованиях γ_{ij} изменяется как тензор ($\lessdot$ H_{31}) и можно повторить рассуждения ($\lessdot$ H_{187}).

Поэтому, заряд в объёме равен $Q = \rho\sqrt{\gamma}\, dV$ (фактически это определение плотности заряда ρ). Заряд инвариантен, в силу принятых в пятой главе постулатов, объём 4-пространства $\sqrt{-g}\, d^4x$ также инвариант, а dx^{α} – 4-вектор. В результате, *4-вектор тока* можно определить следующим образом (см. также стр. 327):

$$j^{\alpha} = \rho\, \sqrt{\gamma}\, dV\, \frac{dx^{\alpha}}{\sqrt{-g} d^4x} = \frac{\rho}{\sqrt{g_{00}}}\, \frac{dx^{\alpha}}{dt}, \tag{11.49}$$

где в последнем равенстве учтена связь $g = -\gamma\, g_{00}$ (стр. 243). Систему точечных зарядов Q_k надо описывать при помощи функций Дирака. Будем считать, что:

$$\rho(t,\, x^1,\, x^2,\, x^3) = \sum_k \frac{Q_k}{\sqrt{\gamma}}\, \delta(x^1 - x^1_k)\, \delta(x^2 - x^2_k)\, \delta(x^3 - x^3_k),$$

так, что при интегрировании по малому объёму dV суммарный заряд будет равен $\rho\sqrt{\gamma}\, dV$. В этом случае, 4-вектор тока равен:

$$j^{\alpha}(t,\, \mathbf{r}) = \sum_k \frac{Q_k}{\sqrt{-g}}\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)\, \frac{dx^{\alpha}}{dt}. \tag{11.50}$$

Обратим внимание, что под $\delta(\mathbf{r})$ понимается произведение $\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$, независимо от геометрического смысла координат x^i и интеграл от $\delta(\mathbf{r})$ равен единице по объёму $dV = dx^1 dx^2 dx^3$, а не по объему $\sqrt{\gamma}\, dV$.

• Запишем уравнения Максвелла в векторных обозначениях. Напомним (стр. 670), что в координатах с метрикой $dl^2 = \gamma_{ij}\,dx^i dx^j$ тензорами относительно преобразования пространственных координат являются: $E_{ijk} = \sqrt{\gamma}\,\varepsilon_{ijk}$ и $E^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,\varepsilon^{ijk}$, где $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ – символ Леви-Чивиты. Эти тензоры определяют компоненты векторного произведения:

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]_i = E_{ijk}\,a^j b^k, \qquad\qquad [\mathbf{a}\times\mathbf{b}]^i = E^{ijk}\,a_j b_k,$$

где $c_i = \gamma_{ij}c^j$, $c^i = \gamma^{ij}c_j$ и $\gamma^{ik}\gamma_{kj} = \delta^i_j$, а дивергенция и ротор равны:

$$\nabla\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_i(\sqrt{\gamma}a^i), \qquad\qquad [\nabla\times\mathbf{a}]^i = E^{ijk}\partial_j a_k.$$

Определим *напряженность* электрического поля E_i и электрическую *индукцию* D^i:

$$E_i = F_{0i}, \qquad\qquad D^i = -\sqrt{g_{00}}\,F^{0i}, \tag{11.51}$$

а также *напряженность* магнитного поля B_i и магнитную *индукцию* H^i:

$$B_i = -\frac{\sqrt{g_{00}}}{2}\,E_{ijk}\,F^{jk}, \qquad\qquad H^i = -\frac{1}{2}\,E^{ijk}\,F_{jk}. \tag{11.52}$$

Пользуясь тождеством $E^{ijk}E_{pqk} = \delta^i_p\delta^j_q - \delta^i_q\delta^j_p$ последние определения можно обратить:

$$F^{ij} = -\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\,E^{ijk}B_k, \qquad\qquad F_{ij} = -E_{ijk}\,H^k. \tag{11.53}$$

Введём величины, составленные из компонент метрического тензора:

$$\gamma_i = -\frac{g_{0i}}{g_{00}}, \qquad \gamma_{ij} = g_{00}\,\gamma_i\gamma_j - g_{ij}, \qquad \gamma^{ij} = -g^{ij}, \qquad \gamma^i = -g^{0i}, \tag{11.54}$$

где $\gamma^i = \gamma^{ij}\gamma_j$. Тензоры напряженности с верхними и нижними индексами связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{0i} &= g_{0\mu}g_{i\nu}\,F^{\mu\nu} = g_{00}\,(\gamma_{ik}F^{k0} + \gamma_p\gamma_{iq}\,F^{pq}),\\ F^{ij} &= g^{i\mu}g^{j\nu}\,F_{\mu\nu} = (\gamma^i\,\gamma^{jk} - \gamma^j\gamma^{ik})\,F_{0k} + \gamma^{ip}\gamma^{jq}\,F_{pq}, \end{aligned}$$

где расписаны суммы по 4-мерным индексам, подставлены определения (11.54) и учтено, что $\gamma_p\gamma_q F^{pq} = 0$. Подставляя в эти соотношения определения (11.51)-(11.53), имеем:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{g_{00}}} - \boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{B}, \qquad\qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{g_{00}}} + \boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{E}, \tag{11.55}$$

где при получении второго соотношения произведена свёртка с тензором Леви-Чивиты с учетом тождества $E^{ijp}\,E_{ijq} = 2\delta^p_q$).

С помощью этих векторов запишем уравнения Максвелла в криволинейных координатах. В уравнении с токами (11.45), положив $\beta = 0$ $(-g = \gamma\, g_{00})$, получаем *закон Гаусса*, а при $\beta = i$ – *закон Ампера-Максвелла*:

$$\nabla \mathbf{D} = 4\pi\rho, \qquad \nabla\times\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,\frac{\partial(\sqrt{\gamma}\,\mathbf{D})}{\partial t} + 4\pi\,\mathbf{j}, \tag{11.56}$$

где $\mathbf{j} = \rho\,\mathbf{v}$ – вектор плотности тока и $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ – координатная скорость зарядов. Аналогично, расписывая уравнение без токов (11.44), имеем *закон Гаусса* для магнитной индукции $(\alpha = i,\ \beta = j,\ \gamma = k)$ и *закон Фарадея* $(\alpha = 0,\ \beta = i,\ \gamma = j)$:

$$\nabla \mathbf{H} = 0, \qquad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,\frac{\partial(\sqrt{\gamma}\,\mathbf{H})}{\partial t}. \tag{11.57}$$

(оба необходимо свернуть с ε^{ijk}). Запишем также *уравнение непрерывности* (11.46):

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,\frac{\partial(\sqrt{\gamma}\rho)}{\partial t} + \nabla\mathbf{j} = 0. \tag{11.58}$$

Уравнения несколько упрощаются, если определитель $\gamma = \det\gamma_{ij}$ не зависит от времени (стационарная 3-мерная геометрия). В этом случае, в членах с производной по времени $\sqrt{\gamma}$ сокращается. Кроме этого, для диагональной 4-метрики имеем простую связь между напряженностями и индукциями:

$$\boldsymbol{\gamma} = 0: \qquad \mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{g_{00}}}, \qquad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{g_{00}}}.$$

Несложно видеть, что метрика неинерциальной системы отсчёта играет роль среды с электрической и магнитной проницаемостями равными $1/\sqrt{g_{00}}$. В таком диагональном, стационарном случае, при помощи уравнений Максвелла, несложно проверить справедливость закона сохранения (*теоремы Пойнтинга*, стр.316):

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla\mathbf{P} + \mathbf{E}\mathbf{j} = 0,$$

где плотность энергии и потока энергии поля равны:

$$W = \frac{\mathbf{ED} + \mathbf{BH}}{8\pi}, \qquad \mathbf{P} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{4\pi}. \tag{11.59}$$

В качестве примера, рассмотрим движение равноускоренного заряда, поле которого мы сначала получим в инерциальной системе отсчёта, а затем перейдём в неинерциальную систему и убедимся, что это решение удовлетворяет уравнениям (11.56), (11.57).

• Напомним (стр. 343), что в инерциальной системе отсчёта поле произвольно движущегося по траектории $\mathbf{X}_0(T)$ заряда описывается потенциалами Лиенара-Вихерта:

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{X},T) = \frac{Q}{R' - \mathbf{V}'\mathbf{R}'}, \qquad \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X},T) = \frac{Q\,\mathbf{V}'}{R' - \mathbf{V}'\mathbf{R}'},$$

где $R' = T - T'$ – расстояние в точку измерения поля от положения заряда в момент времени T' в прошлом, отстоящем от текущего момента T на время $T - T'$. Это время находится из уравнения:

$$(T - T')^2 = \bigl(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0(T')\bigr)^2 \tag{11.60}$$

(сейчас, в отличие от главы 5, координаты обозначаются заглавным шрифтом и над потенциалами поставлена тильда, так как без тильды мы будем записывать потенциалы в неинерциальной системе). Пусть заряд движется релятивистски равноускоренно вдоль оси X ($Y_0(T) = Z_0(T) = 0$) по траектории:

$$X_0(T') = \frac{1}{a}\left[\sqrt{1 + (aT')^2} - 1\right] = \frac{1}{a}\left[\mathrm{ch}(a\tau) - 1\right], \qquad aT' = \mathrm{sh}(a\tau),$$

где τ – собственное время заряда в момент времени T'. Будем параметризировать [14] координаты точки X и времени наблюдения T поля новыми переменными ρ и t:

$$X = \rho\ \mathrm{ch}(at) - \frac{1}{a}, \qquad T = \rho\ \mathrm{sh}(at). \tag{11.61}$$

Несложно видеть, что:

$$\mathrm{th}(at) = \frac{aT}{1 + aX}, \qquad a^2\rho^2 = (1 + aX)^2 - a^2T^2. \tag{11.62}$$

Подставляя параметризацию (11.61) в (11.60), имеем:

$$\mathrm{ch}\bigl(a(t-\tau)\bigr) = \frac{1 + a^2(\rho^2 + Y^2 + Z^2)}{2a\rho}. \tag{11.63}$$

Это уравнение позволяет по координатам точки наблюдения найти τ. Кроме этого, так как скорость заряда вдоль оси X “в прошлом” равна $V' = X_0(T')/dT'$ и $R' - \mathbf{V}'\mathbf{R}' = T - T' - V'\,(X - X_0(T'))$, имеем:

$$V' = \mathrm{th}(a\tau), \qquad R' - \mathbf{V}'\mathbf{R}' = \rho\,\frac{\mathrm{sh}\bigl(a(t-\tau)\bigr)}{\mathrm{ch}(a\tau)}.$$

В результате, потенциалы равноускоренно движущегося заряда равны:

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{X},T) = \frac{Q\,\mathrm{ch}(a\tau)}{\rho\,\mathrm{sh}\bigl(a(t-\tau)\bigr)}, \quad \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X},T) = \frac{Q\,\mathrm{sh}(a\tau)}{\rho\,\mathrm{sh}\bigl(a(t-\tau)\bigr)}\,\bigl\{1,\,0,\,0\bigr\}, \tag{11.64}$$

где τ находится из уравнения (11.63), а ρ и t из (11.62).

Совершим теперь переход из инерциальной системы отсчёта $(T, \mathbf{X})$ в неинерциальную $(t, \mathbf{x})$ в координатах Мёллера (стр. 210):

$$aT = \mathrm{sh}(at)\,(1+ax), \qquad 1 + aX = \mathrm{ch}(at)\,(1+ax), \qquad Y = y, \qquad Z = z.$$

Время t наблюдателя в начале координат совпадает с введенным выше параметром t и $a\rho = 1+ax$. Скалярный и векторный потенциал являются компонентами 4-вектора $\tilde{A}^\mu = \{\tilde{\varphi},\, \tilde{\mathbf{A}}\}$, которые связаны в двух системах отсчёта следующим образом:

$$\tilde{A}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu.$$

Распишем это соотношение в явном виде:

$$\begin{array}{rcccccccc} \tilde{A}^0 &=& \partial_t T\, A^0 &+& \partial_x T\, A^1 &=& \mathrm{ch}(at)(1+ax)\, A^0 &+& \mathrm{sh}(at)\, A^1, \\ \tilde{A}^1 &=& \partial_t X\, A^0 &+& \partial_x X\, A^1 &=& \mathrm{sh}(at)(1+ax)\, A^0 &+& \mathrm{ch}(at)\, A^1. \end{array}$$

Отсюда несложно выразить $\{A^0,\, A^1\}$ через $\{\tilde{A}^0,\, \tilde{A}^1\}$:

$$A^0 = \frac{Qa}{(1+ax)^2}\,\frac{\mathrm{ch}\big(a\,(t-\tau)\big)}{\mathrm{sh}\big(a\,(t-\tau)\big)}, \qquad A^1 = -\frac{Qa}{1+ax}.$$

Удобно перейти к векторным обозначением, введя 3-вектор ускорения $\mathbf{a} = \{1, 0, 0\}$ неинерциальной системы отсчёта:

$$a\rho = 1 + \mathbf{ar}, \qquad 1 + a^2(\rho^2 + y^2 + z^2) = 2(1 + \mathbf{ar}) + a^2 r^2,$$

где $\mathbf{r} = \{x,\, y,\, z\}$. В равноускоренной системе отсчёта интервал равен $ds^2 = (1+\mathbf{ar})^2\, dt^2 - d\mathbf{r}^2$, поэтому $A_0 = g_{00} A^0 = (1+\mathbf{ar})^2\, A^0$ и $A_1 = -A^1$. В результате, учитывая (11.63), для ковариантных компонент потенциалов в равноускоренной системе окончательно имеем:

$$A_0 = \frac{Q}{r}\,\frac{1 + \mathbf{ar} + a^2r^2/2}{\sqrt{1 + \mathbf{ar} + a^2r^2/4}}, \qquad \mathbf{A}_i = \frac{Q\mathbf{a}_i}{1 + \mathbf{ar}}.$$

По определению $E_i = F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0$ и, так как $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$, у компонент 3-векторов можно не различать верхние и нижние индексы. Кроме этого, так как метрика диагональна, то $\mathbf{E} = \sqrt{g_{00}}\,\mathbf{D} = (1+\mathbf{ar})\,\mathbf{D}$. В результате, получаем следующее выражение для электрической индукции:

$$\mathbf{D} = Q\, \left(1 + \mathbf{ar} + a^2r^2/4\right)^{-3/2}\, \left[(1+\mathbf{ar})\frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{a}}{2r}\right], \tag{11.65}$$

а магнитное поле $\mathbf{B}$ и магнитная индукция $\mathbf{H}$ равны нулю.

Проверим, что это выражение, действительно, удовлетворяет уравнениям Максвелла в равноускоренной системе. Для этого запишем в векторных обозначениях уравнения (11.56)-(11.57) для точечного заряда, находящегося в начале системы отсчета. В статическом случае (электростатика) мы имеем $\mathbf{H} = \mathbf{D} = 0$ и

$$\nabla\mathbf{D} = 4\pi Q\,\delta(\mathbf{r}), \qquad\qquad \nabla\times\mathbf{D} = \frac{\mathbf{D}\times\mathbf{a}}{1+\mathbf{ar}}, \tag{11.66}$$

где второе уравнение следует из $\nabla\times\mathbf{E} = 0$ и связи $\mathbf{E} = (1+\mathbf{ar})\,\mathbf{D}$. Таким образом, не смотря на то, что индукция $\mathbf{D}$ удовлетворяет обычному для инерциальных систем отсчёта уравнению для дивергенции, его решение не может равняться кулоновскому выражению $Q\mathbf{r}/r^3$, так как его ротор равен нулю, тогда как $\nabla\times\mathbf{D} \neq 0$. Ясно, что в силу неизотропности пространства (выделенное направление $\mathbf{a}$), индукция $\mathbf{D}$ является функций двух векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$. Именно такую функцию мы получили выше (11.65) и, как несложно проверить, она удовлетворяет уравнениям (11.66).

В первом порядке малости по ускорению $\mathbf{a}$, вектор электрической индукции (11.65) равен:

$$\mathbf{D} \approx Q\,\frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{Q}{2}\left\{\frac{(\mathbf{ar})\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{a}}{r}\right\}. \tag{11.67}$$

Пользуясь соотношением (11.8), стр. 665 можно вычислить символы Кристоффеля в равноускоренной системе с метрическими коэффициентами $g_{00} = (1+\mathbf{ar})^2$, $g_{ij} = -\delta_{ij}$, $g_{0i} = 0$:

$$\Gamma^i_{00} = (1+\mathbf{ar})\,a^i, \qquad\qquad \Gamma^0_{0i} = \Gamma^0_{i0} = \frac{a_i}{1+\mathbf{ar}}.$$

Подставляя их в уравнение (11.47) и учитывая определение (11.51) и значения компонент 4-скорости (4.114), стр. 258, запишем закон движения пробного заряда q в поле, создаваемом зарядом Q:

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{m\mathbf{a}}{\sqrt{1-\tilde{\mathbf{v}}^2}} + q\mathbf{D},$$

где τ – физическое время и $\tilde{\mathbf{v}}$ – физическая скорость пробного заряда. В правой части первое слагаемое – это сила инерции, которую можно также получить из (11.42), стр. 680 (ограничившись первым порядком по $\mathbf{a}$). Второе – электромагнитная сила, определяемая индукцией (11.67). Она состоит из обычного кулоновского члена, убывающего с расстоянием как $1/r^2$ и члена, зависящего от ускорения. Последний убывает существенно медленнее кулоновского (как $1/r$).

Обратим внимание, что выражение для индукции $\mathbf{D}$ совпадает с напряженностью движущегося с постоянным ускорением заряда *в инерциальной* системе отсчёта (7.125), стр. 489. Таким образом, в неинерциальной системе, не смотря на статический характер поля, проявляются дальнодействующие силы, характерные для излучения в инерциальной системе. При небольших ускорениях эти силы невелики. Так, если считать, что равноускоренная система отсчёта физически эквивалента однородному гравитационному полю (см. стр. 207), то в гравитационном поле Земли с $a = g = 10$ м$/c^2$, дальнодействующая сила сравнивается с кулоновским членом на расстояниях порядка $r \sim c^2/g \sim 10^{16}$ м.

Энергию поля U заряда в неинерциальной системе можно найти интегрируя плотность (11.59) энергии поля $W = \mathbf{ED}/8\pi = (1 + \mathbf{ar})\,\mathbf{D}^2/8\pi$. В первом порядке по $\mathbf{a}$ она равняется:

$$W \approx \frac{Q^2}{8\pi}\left(\frac{1}{r^4} - \frac{\mathbf{ar}}{r^4}\right).$$

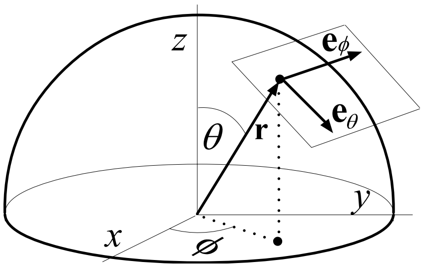
Интеграл от второго слагаемого, зависящего от $\mathbf{a}$, равен нулю, поэтому (после регуляризации) получается такое же выражение, как и в инерциальной системе отсчёта.

В неинерциальной системе отсчёта можно применить теорию самодействия электрона, повторяя рассуждения на стр. 489. В этом случае, мы придём к выводу, что массу в силе инерции $-m\mathbf{a}$ необходимо увеличить на $(3/4)U$, где U – полная энергия поля заряда. Таким образом, чтобы удерживать заряд в неинерциальной системе в одной точке необходимо прикладывать большую силу, чем к нейтральной частице с “той же” массой. Аналогично, в инерциальной системе отчёта радиационная сила трения “увеличивает” массу частицы.

Заметим, что в литературе, следуя [14], иногда утверждают, что релятивистски равноускоренный заряд не излучает. Это, естественно, не верно и формулы для напряженностей электромагнитного поля (5.90), стр. 344 применимы для произвольно движущегося заряда. Если у него есть ускорение, то обязательно появляется дальнодействующая составляющая полей заряда, которая и связана с его излучением. Рассуждения, на основании которых в [14] сделан вывод об отсутствии излучения, математически некорректны. Дело в том, что равенство нулю запаздывающей скорости и, следовательно, векторного потенциала в сопутствующей системе отсчёта не означает, что при этом равна нулю производная этого потенциала. В этом легко убедиться на примере прямого вычисления производных, которые были проведены при выводе напряженности поля из потенциалов Лиенара-Вихерта (см. стр. 344).

11.5 Кривизна пространства

Геометрия пространства в неинерциальных системах отсчета может отличаться от привычной евклидовой геометрии. Простейшим примером пространства с неевклидовой геометрией является поверхность в обычном 3-мерном пространстве. Поверхность можно задать при помощи уравнения $F(x, y, z) = 0$ или $z = f(x, y)$. Другой способ – параметрическое задание: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1,\, x^2)$. Параметры $(x^1,\, x^2)$ могут быть координатами плоскости (x, y), на которую проектируется точка поверхности: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y)$. Тогда компоненты радиус-вектора $\mathbf{r}$ к точке поверхности равны $\{x,\ y,\ f(x, y)\}$. В общем случае возможна произвольная нумерация *двумя* параметрами *2-мерной* поверхности. Так, для сферы радиуса a имеем следующие варианты задания её поверхности:



$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y) = a\,\{x,\ y,\ \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\},$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta, \phi) = a\,\{s_\theta c_\phi,\ s_\theta s_\phi,\ c_\theta\},$$

где $s_\theta = \sin\theta$ и т.д. Параметрическое задание сферы $\mathbf{r}(\theta, \phi)$ – это компоненты радиус-вектора в сферической системе координат с постоянным радиусом $r = a = const$. Любая точка на сфере задаётся парой углов $x^i = (\theta, \phi)$. Угол θ отсчитывается от оси z, а ϕ – от оси x.

Введём два касательных к поверхности вектора:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^1} = \partial_1 \mathbf{r}, \qquad\qquad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^2} = \partial_2 \mathbf{r} \tag{11.68}$$

и разложим функцию $\mathbf{r}(x^1,\, x^2)$ в ряд в окрестности точки $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(x_0^1,\, x_0^2)$, $\mathbf{e}_i = (\partial_i \mathbf{r})_0$, ограничившись линейным приближением:

$$\mathbf{r}(x^1,\, x^2) \approx \mathbf{r}_0 + \mathbf{e}_1\,(x^1 - x_0^1) + \mathbf{e}_2\,(x^2 - x_0^2).$$

Это уравнение плоскости, касательной к поверхности в точке $\mathbf{r}_0$. Предполагается, что параметризация $\mathbf{r}(x^1,\, x^2)$ такова, что векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ являются линейно независимыми и вместе с точкой $\mathbf{r}_0$ полностью определяют касательную плоскость. Точки поверхности, где можно провести касательную плоскость, называются *неособыми.* Вершина конуса – это *особая точка* и к ней нельзя провести касательную плоскость.

Дифференциал радиус вектора $\mathbf{r}(x^1,\, x^2)$ является бесконечно малым смещением $d\mathbf{r}$ *вдоль поверхности.* С учетом определений (11.68) он равен:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1\, dx^1 + \mathbf{e}_2\, dx^2. \tag{11.69}$$

Его длина – это расстояние dl между двумя близкими точками на поверхности:

$$dl^2 = (d\mathbf{r})^2 = (\mathbf{e}_1\, dx^1 + \mathbf{e}_2\, dx^2)^2 = \mathbf{e}_1^2\, (dx^1)^2 + 2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\, dx^1\, dx^2 + \mathbf{e}_2^2\, (dx^2)^2.$$

Расстояние можно записать при помощи метрического тензора:

$$dl^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j, \qquad\qquad g_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j. \tag{11.70}$$

Если в векторе $d\mathbf{r}$ положить $x^2 = const$, то при изменении x^1 имеем смещение $d\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_1 dx^1$. Аналогично, вектор смещения $d\mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_2 dx^2$, соответствует изменению x^2 при постоянстве $x^1 = const$. Эти два вектора на поверхности образуют параллелограмм, площадь которого по модулю равна:

$$dS = |d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2| = |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|\, dx^1\, dx^2 = \sqrt{\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2^2 - (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2}\, dx^1 dx^2 = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2,$$

где в последнем равенстве через g обозначен определитель метрического тензора $g = \det g_{ij}$ (матрицы 2x2 в (11.70)).

Для сферы $\mathbf{r} = a\,\{s_\theta\, c_\phi,\;\; s_\theta\, s_\phi,\;\; c_\theta\}$ (сферические координаты) найдя по формуле (11.68) векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ ($\lessdot$ H_{188}), несложно получить ($\lessdot$ H_{189}) следующее расстояние и элемент площади на поверхности сферы:

$$dl^2 = a^2\, \left[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right], \qquad dS = a^2\, \sin\theta\, d\theta\, d\phi.$$

Выбрав другую параметризацию, мы получим другую метрику. Но никакой выбор координат *не позволит* привести метрику к евклидовому виду $dl^2 = dx^2 + dy^2$, которая эквивалентна теореме Пифагора. Сферу, в отличии от цилиндра или конуса, нельзя "распрямить" в плоскость и она принципиально отличается от плоского пространства.

Представим себе "плоскатиков" – существ, живущих в 2-мерном мире на некоторой поверхности. На малых расстояниях их пространство выглядит плоским. Отрезком прямой плоскатики называют такую линию, длина которой минимальна. Окружностью – множество точек, равноудалённых от данной, и т.д. Если выясняется, что в их мире для больших треугольников теорема Пифагора не выполняется, то это означает, что они живут не на плоскости, а в искривлённом пространстве с неплоской *внутренней геометрией.*

• Любая линия в пространстве может быть задана в виде $x^i = x^i(l)$, где l – некоторый параметр. Если он равен длине линии, отсчитываемой от фиксированной точки, то такую параметризацию называют *натуральной*. “Отрезком прямой” между двумя точками в искривлённом пространстве является линия минимальной длины. Чтобы её найти, необходимо минимизировать функционал:

$$l = \int \sqrt{g_{ij}\, dx^i dx^j} = min.$$

Повторя рассуждения на стр. 673 для натуральной параметризации (11.70) в которой:

$$g_{ij}\, \dot{x}^i\, \dot{x}^j = 1, \qquad (11.71)$$

где $\dot{x}^i = dx^i/dl$, получаем *уравнение геодезической*:

$$S(x, \dot{x}) = g_{ij}(x)\, \dot{x}^i \dot{x}^j, \qquad\qquad \frac{d}{dl}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{x}^k}\right) = \frac{\partial S}{\partial x^k}. \qquad (11.72)$$

Вводя символы Кристоффеля:

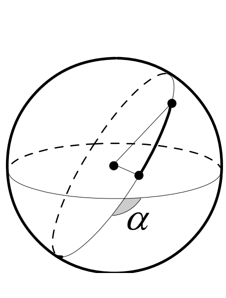
$$\Gamma^k_{ij} = g^{kp}\, \Gamma_{p,\, ij}, \qquad\qquad \Gamma_{k,\, ij} = \frac{1}{2}\, [\partial_i\, g_{jk} + \partial_j\, g_{ik} - \partial_k\, g_{ij}]. \qquad (11.73)$$

его можно переписать (см. стр. 673) в следующем виде:

$$\frac{d^2 x^k}{dl^2} + \Gamma^k_{ij}\, \frac{dx^i}{dl}\, \frac{dx^j}{dl} = 0. \qquad (11.74)$$

На поверхности сферы единичного радиуса ($a = 1$) с $S = \dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2$ уравнения прямой (11.72) приводят ($\lessdot$ H_{191}) к соотношениям:

$$\begin{cases} \dot{\theta}^2 = 1 - \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\theta}, \\ \dot{\phi} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\theta}, \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cos\theta = \sin\alpha\, \cos(l + \beta), \\ \mathrm{tg}(\phi + \gamma) = \dfrac{\mathrm{tg}(l + \beta)}{\cos\alpha}, \end{cases}$$

где α, β, γ – константы. Отрезком прямой на сфере является сегмент *большого круга*, центр которого совпадает с центром сферы. Примерами являются *экватор* ($\theta = \pi/2$, $\alpha = 0$) и *меридианы* ($\phi = const$, $\alpha = \pi/2$). Угол пересечения геодезической и экватора равен α.

• В 2-мерном пространстве у вектора две компоненты. В мире плоскатиков такой вектор на поверхности определяется следующим образом:

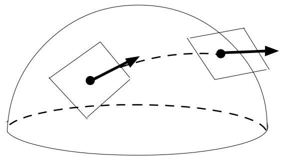
$$\mathbf{A} = A^1\,\mathbf{e}_1 + A^2\,\mathbf{e}_2, \tag{11.75}$$

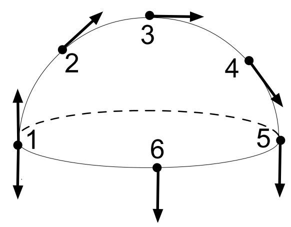
где $\mathbf{e}_i = \partial_i\,\mathbf{r}$ – касательные к поверхности векторы. Смещение $d\mathbf{r}$ вдоль поверхности также является вектором и имеет компоненты $\{dx^1,\, dx^2\}$.

Перемножив два вектора $\mathbf{A} = A^1\,\mathbf{e}_1 + A^2\,\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{B} = B^1\,\mathbf{e}_1 + B^2\,\mathbf{e}_2$ при помощи метрических коэффициентов $g_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, имеем следующее выражение для скалярного произведения и длины вектора:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = g_{ij}\,A^iB^j, \qquad\qquad \mathbf{A}^2 = g_{ij}\,A^iA^j.$$

В плоском пространстве длина и направление вектора при параллельном переносе не изменяется. Хотя при этом, в криволинейном базисе могут изменяться компоненты вектора, если в различных точках различны направления базисных векторов. Несколько иная ситуация при параллельном переносе вектора, определённого на поверхности. С точки зрения 3-мерного евклидового пространства, в которое вложена поверхность, вектор плоскатиков при параллельном переносе всё время остаётся касательным к поверхности (ниже первый рисунок):





В отличие от евклидового пространства, параллельно перенесённый вектор по поверхности вдоль замкнутого контура не обязательно совпадёт с начальным вектором. Выше на втором рисунке показан подобный перенос на сфере, приводящий к вектору с противоположным направлением.

По определению, при бесконечно малом параллельном переносе вектор не изменяется:

$$d\mathbf{A} = d(A^i\,\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i\,dA^i + A^i\,\partial_j\mathbf{e}_i\,dx^j = 0.$$

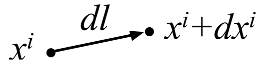
Умножая на $\mathbf{e}^k = g^{kp}\,\mathbf{e}_p$, где $g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j$, получаем изменения компонент вектора, который параллельно перенесли из точки x^i в точку $x^i + dx^i$:

$$d\,A^k = -\Gamma^k_{ij}\,A^i\,dx^j,$$

где $\Gamma^k_{ij} = g^{kp}\mathbf{e}_p\,\partial_j\mathbf{e}_i$ – символы Кристоффеля на поверхности. Зная параметрическое уравнение поверхности можно найти $\mathbf{e}_k = \partial_k\mathbf{r}$ и вычислить коэффициенты Γ^k_{ij}. В качестве упражнения предлагается проделать это на поверхности сферы ($\lessdot$ H$_{190}$) в координатах $(\theta,\,\phi)$.

• Пространство имеет размерность n, если его точки могут быть пронумерованы при помощи n координат $(x^1, x^2, ..., x^n)$. В каждой точке может быть задан вектор A^i. При замене координат его компоненты изменяются в соответствии с законами тензорных преобразований (стр. 234). Предполагается, что расстояние между двумя бесконечно близкими точками мало и зависит от метрических коэффициентов g_{ij}:

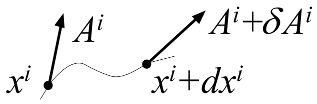
$$dl^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j.$$



Хотя расстояние определяется между 2-я точками, коэффициенты метрического тензора относятся к *одной точке*. Они определяют связь компонент вектора $A_i = g_{ij}A^j$ и его длину $A^2 = g_{ij}A^iA^j$ в *данной точке*. Под бесконечно малым расстоянием подразумевается *длина вектора*, указывающего направление смещения. Тем не менее, этот вектор задан в одной точке (вспомним касательный к сфере в данной точке вектор $d\mathbf{r}$).

Складывать и вычитать векторы можно только в той точке пространства, где они определены. Чтобы можно было вычесть два вектора, заданных в “соседних” точках пространства, необходимо один из них перенести в ”точку сравнения”. Если разность координат между точками равна dx^k, то при *параллельном переносе вектора* его компоненты изменяются $A^i \mapsto A^i + \delta A^i$. Это изменение δA^i определяется символами Кристоффеля или *коэффициентами связности*:

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{\ jk}\, A^j\, dx^k.$$



Геометрия пространства считается заданной, если в данной системе координат определены метрический тензор g_{ij} и связности Γ^k_{ij}. В силу своего определения $g_{ij} = g_{ji}$. Индексы связностей в δA^i входят неравноправным образом, поэтому *в общем случае* не предполагается их симметричность. Свойства пространства определяются $(n^2 + n)/2$ функциями g_{ij} и n^3 функциями Γ^k_{ij}. Дополнительные условия, накладываемые на эти функции, *сужают* класс возможных геометрий.

Например, в *римановых пространствах* требуют, чтобы скалярное произведение векторов $g_{ij}A^iB^j$ не изменялось при параллельном переносе из точки x^i в точку $x^i + dx^i$ и символы Кристоффеля были симметричными по последним индексам (как в геометрии поверхностей). Этот аксиоматический подход к геометрии в известной мере является обратным принципу параметрической неполноты (стр.44), в рамках которого, уменьшение числа ограничений приводит к более *общим* теориям.

Рассмотрим *векторное поле* $A^i = A^i(x)$. Если в точке x^k компоненты вектора равны A^k, то в точке $x^k + dx^k$ они равны $A^k + dA^k$. Перенесем параллельным образом A^k в $x^k + dx^k$ и вычтем из $A^k + dA^k$:

$$DA^k = (A^k+dA^k)-(A^k+\delta A^k) = dA^k-\delta A^k = (\partial_j A^k+\Gamma^k_{ij}A^i)\,dx^j = D_iA^k\,dx^i,$$

где D_iA^k – знакомая нам по пространству Минковского в криволинейных координатах *ковариантная производная*.

Пусть $A_i = g_{ij}\,A^j$. *Если* скалярное произведение не изменяется при параллельном переносе, то:

$$\delta(A_iB^i) = (A_i + \delta A_i)\,(B^i + \delta B^i) - A_iB^i = A_i\,\delta B^i + B^i\,\delta A_i = 0.$$

Поэтому $B^i\,\delta A_i = -A_i\,\delta B^i = \Gamma^i_{pq}\,A_iB^p\,dx^q$ и, в силу произвольности B^i,

$$\delta A_p = \Gamma^i_{pq}\,A_i\,dx^q.$$

Это соотношение позволяет определить ковариантную производную от ковариантных компонент вектора и далее, по аналогии со стр. 667, ковариантные производные от произвольных тензоров.

Теперь несложно установить связь связностей и метрических тензоров. Как и для любых векторов $A_i = g_{ij}\,A^j$ имеем $DA_i = g_{ij}\,DA^j$. Поэтому

$$DA_i = D(g_{ij}\,A^j) = g_{ij}\,DA^j + A^j\,Dg_{ij} = DA_i + A^j\,Dg_{ij},$$

откуда, в силу произвольности вектора A^j, приходим к теореме Риччи $Dg_{ij} = 0$ или $D_kg_{ij} = 0$, см. стр. 667. Записывая ковариантную производную тензора g_{ij}, получаем:

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{i,\,jk} + \Gamma_{j,\,ik}. \tag{11.76}$$

Переименовывая индексы (или беря производные $\partial_i g_{jk}$ и $\partial_j g_{ik}$) с учетом симметричности $\Gamma_{k,\,ij} = \Gamma_{k,\,ji}$, приходим к (11.73), стр. 692.

Вообще говоря, можно отказаться от условия симметричности символов Кристоффеля. В этом случае возникает *пространство с кручением*, свойства которого определяются метрическими коэффициентами g_{ij} и антисимметричным *тензором кручения* $S^k_{ij} = (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})/2$, а связности выражаются через g_{ij} и S^k_{ij}. Если риманова геометрия полностью определяется $(n^2 + n)/2$ функциями g_{ij}, то в пространстве с кручением необходимо дополнительно задать $n\,(n^2 - n)/2$ функций S^k_{ij}.

В неинерциальных системах отсчёта можно ограничиться римановой геометрией, большинство соотношений которой повторяют соотношения дифференциальной геометрии плоского пространства в криволинейных координатах.

11.6 Тензор кривизны

• Найдем критерий, позволяющий выяснить, когда подходящим выбором координат метрика

$$dl^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

может быть преобразована к евклидовому виду

$$dl^2 = (d\tilde{x}^1)^2 + ... + (d\tilde{x}^n)^2,$$

т.е. когда пространство является плоским. Для этого рассмотрим ковариантную производную:

$$D_p A^i = \partial_p A^i + \Gamma^i_{\;jp}\, A^j.$$

В декартовых координатах евклидового пространства $\Gamma^i_{\;jp} = 0$, $D_p = \partial_p$ и выражение $(D_pD_q - D_qD_p)A^i$ равно нулю. Это тензор, поэтому равенство его нулю в одной системе координат означает равенство нулю в любой другой системе. Найдем вторую ковариантную производную:

$$D_p(D_q A^i) = D_p(\partial_q A^i + \Gamma^i_{\;jq}\, A^j).$$

Выражение в скобках является тензором, поэтому:

$$D_p(D_q A^i) = \partial_p(\partial_q A^i + \Gamma^i_{\;jq}\, A^j) + \Gamma^i_{\;kp}(\partial_q A^k + \Gamma^k_{\;jq}\, A^j) - \Gamma^k_{\;qp}(\partial_k A^i + \Gamma^i_{\;jk}\, A^j).$$

Раскроем производную произведения в первой скобке и опустим слагаемые (ниже многоточие) симметричные по p, q, так как они сократятся после вычитания $D_q(D_p A^i)$ (связность симметрична $\Gamma^k_{pq} = \Gamma^k_{qp}$):

$$D_p(D_q A^i) = (\partial_p \Gamma^i_{\;jq})\, A^j + \Gamma^i_{\;jq} \partial_p A^j + \Gamma^i_{\;kp} \partial_q A^k + \Gamma^i_{\;kp} \Gamma^k_{\;jq}\, A^j + ...$$

Сумма второго и третьего слагаемых является симметричной по p и q величиной, поэтому производные по компонентам вектора сокращаются:

$$(D_pD_q - D_qD_p)A^i = R^i_{\;\;j,pq} A^j,$$

где коэффициенты при A^j называются *тензором кривизны*:

$$R^i_{\;\;j,pq} = \partial_p \Gamma^i_{jq} - \partial_q \Gamma^i_{jp} + \Gamma^i_{kp} \Gamma^k_{jq} - \Gamma^i_{kq} \Gamma^k_{jp}. \qquad (11.77)$$

В евклидовом пространстве все компоненты тензора кривизны равны нулю. Справедливо и обратное утверждение:

> Если хотя бы одна компонента тензора кривизны не равна нулю, то пространство не является евклидовым.

Докажем его, исходя из геометрического смысла тензора кривизны.

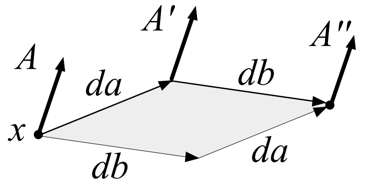
• Рассмотрим два малых смещения в пространстве da^i и db^i. Переместим некоторый вектор A^i параллельным образом из точки x^i в точку $x^i + da^i$:

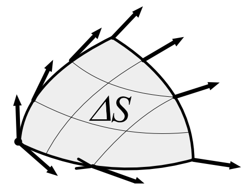
$$A^i \mapsto A'^i = A^i - \Gamma^i_{\;jp}(x)\,A^j\,da^p,$$

а затем ещё раз перенесём его вдоль db^i:

$$A^i \mapsto A''^i = A'^i - \Gamma^i_{\;kq}(x+da)A'^k\,db^q,$$

где учтено, что в точке $x^i + da^i$ связности изменились, см. левый рисунок:





Подставим A'^i из первого выражения во второе:

$$A^i \mapsto A''^i = A^i - \Gamma^i_{\;jp}(x)\,A^j\,da^p - \Gamma^i_{\;kq}(x+da)\,(A^k - \Gamma^k_{\;jp}(x)\,A^j\,da^p)db^q$$

и разложим коэффициенты связности в ряд Тейлора:

$$\Gamma^i_{\;kq}(x+da) \approx \Gamma^i_{\;kq} + \partial_p\Gamma^i_{\;kq}\,da^p,$$

где величины без указания аргументов относятся к начальной точке x^i. Пренебрегая членами третьего порядка малости по da, db, получаем:

$$A^i \mapsto A''^i = A^i - \Gamma^i_{\;jp}A^j\,(da^p + db^p) - (\partial_p\Gamma^i_{\;jq} - \Gamma^i_{\;kq}\Gamma^k_{\;jp})\,A^j\,da^p db^q.$$

Если бы вектор переносился сначала вдоль db, а затем вдоль da, то получилось бы выражение с переставленными a и b ($p \leftrightarrow q$):

$$A^i \mapsto A'''^i = A^i - \Gamma^i_{\;jp}A^j\,(db^p + da^p) - (\partial_q\Gamma^i_{\;jp} - \Gamma^i_{\;kp}\Gamma^k_{\;jq})\,A^j\,db^q da^p.$$

Вычитая эти два выражения, получаем изменение вектора при его переносе вдоль малого замкнутого контура:

$$\Delta A^i = -R^i_{\;\;j,pq}\,A^j\,da^p db^q = -\frac{1}{2}\,R^i_{\;\;j,pq}\,A^j\,\Delta S^{pq},$$

где $\Delta S^{pq} = da^p db^q - da^q db^p$ – тензор площади контура (параллелограмма) и учтено, что $R^i_{\;\;j,pq}$ антисимметричен по индексам p, q.

Таким образом, тензор кривизны характеризует изменение компонент вектора при его переносе по бесконечно малому замкнутому контуру. Чем больше кривизна пространства и площадь ΔS^{pq}, тем сильнее изменяются компоненты вектора (см. картинку на стр. 693). В евклидовом же пространстве параллельный перенос вектора по замкнутому контуру его не меняет. В качестве упражнения предлагается найти тензор кривизны плоскости ($\lessdot$ H$_{192}$) в полярных координатах и сферы ($\lessdot$ H$_{193}$) радиуса a.

• Тензор кривизны можно записать в следующем виде:

$$R^i{}_{j,\,pq} = \partial_p \Gamma^i_{jq} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^k_{jq} - \{p \leftrightarrow q\},$$

где $\{p \leftrightarrow q\}$ обозначает предыдущее выражение с переставленными индексами p и q. Опустим в первых двух слагаемых индекс i вниз:

$$g_{ik}\partial_p\Gamma^k_{jq} + \Gamma_{i,\,kp}\Gamma^k_{jq} = \partial_p(g_{ik}\Gamma^k_{jq}) + (\Gamma_{i,\,kp} - \partial_p g_{ik})\Gamma^k_{jq} = \partial_p(g_{ik}\Gamma^k_{jq}) - \Gamma_{k,\,ip}\Gamma^k_{jq},$$

где в последнем равенстве учтено, что $\Gamma_{i,\,kp} - \partial_p g_{ik} = -\Gamma_{k,\,ip}$, см. (11.76), стр. 695. В производную $\partial_p\Gamma_{i,\,jq}$ подставим выражение $\Gamma_{i,\,jq}$ через метрические тензоры (11.73), стр. 692. Опуская симметричные $\partial_p\partial_q$, имеем:

$$R_{ij,\,pq} = \frac{1}{2}\left(\partial_p\partial_j g_{iq} - \partial_p\partial_i g_{jq}\right) - \Gamma_{k,\,ip}\Gamma^k_{jq} - \{p \leftrightarrow q\} \tag{11.78}$$

или

$$R_{ij,\,pq} = \frac{1}{2}(\partial_p\partial_j g_{iq} + \partial_q\partial_i g_{jp} - \partial_p\partial_i g_{jq} - \partial_q\partial_j g_{ip}) - g_{lm}(\Gamma^l_{ip}\Gamma^m_{jq} - \Gamma^l_{iq}\Gamma^m_{jp}).$$

Из этого представления тензора кривизны следует, что он антисимметричен по первой и второй паре индексов:

$$R_{ij,\,pq} = -R_{ji,\,pq} = -R_{ij,\,qp} = R_{ji,\,qp} \tag{11.79}$$

и не изменяется при перестановке первой пары индексов со второй:

$$R_{ij,\,pq} = R_{pq,\,ij}. \tag{11.80}$$

Кроме этого, сумма циклических перестановок по *любым трём* индексам (ниже последние три индекса) равна нулю:

$$R_{ij,\,pq} + R_{ip,\,qj} + R_{iq,\,jp} = 0. \tag{11.81}$$

Справедливо также дифференциальное *тождество Бианки*:

$$D_k\, R^i{}_{j,\,pq} + D_q\, R^i{}_{j,\,kp} + D_p\, R^i{}_{j,\,qk} = 0, \tag{11.82}$$

в котором два индекса тензора кривизны фиксированны, а по (k, p, q) проводится циклическая перестановка. Для его доказательства напомним, что связности не являются тензорами (стр. 665). В данной точке пространства можно выбрать систему координат, в которой все связности обращаются в ноль $\Gamma^i_{kj} = 0$ (но не обязательно их производные). В такой системе координат и в такой точке:

$$D_k R^i{}_{j,pq} = \partial_k R^i{}_{j,pq} = \partial_k\partial_p\Gamma^i_{jq} - \partial_k\partial_q\Gamma^i_{jp}.$$

При помощи этого соотношения проверяется тождество Бианки. В силу тензорности оно будет справедливо в любой другой системе координат.

• Тензор кривизны $R_{ij,\,pq}$ можно свернуть по паре индексов, получив тензор второго ранга. По паре антисимметричных индексов это делать бессмысленно, так как получится ноль. Поэтому определим *тензор Риччи* свёрткой первого и третьего индексов:

$$R_{jq} = R^i{}_{j,\,iq} = \partial_i \Gamma^i_{jq} - \partial_q \Gamma^i_{ji} + \Gamma^i_{ki}\Gamma^k_{jq} - \Gamma^i_{kq}\Gamma^k_{ji}.$$

Напомним, что свёртка связности выражается через производную метрического тензора (стр. 668):

$$\partial_q \Gamma^i_{ji} = \partial_q \left(\frac{\partial_j g}{2g}\right) = \frac{\partial_q \partial_j g}{2g} - \frac{\partial_q g\, \partial_j g}{2g^2}.$$

Поэтому тензор Риччи симметричен $R_{jq} = R_{qj}$. Ещё одна его свёртка приводит к скаляру, называемому скалярной *кривизной пространства*:

$$R = g^{jq} R_{jq} = g^{ip} g^{jq}\, R_{ij,\,pq}.$$

Сворачивая пары индексов (i, q) и (j, p) в тождестве Бианки, получаем:

$$D_k\,(g^{jp} R^i{}_{j,\,pi}) + D_i\,(g^{jp} R^i{}_{j,\,kp}) + D_p\,(g^{jp} R^i{}_{j,\,ik}) = 0,$$

где учтено, что в силу теоремы Риччи (стр. 667) метрический тензор можно вносить и выносить из-под ковариантной производной. Переставим индексы с учётом свойств симметрии ($R^i{}_{j,pi} = -R^i{}_{j,ip}$, и т.д.):

$$-D_k\, R + D_i\, R^i{}_k + D_p\, R^p{}_k = 0,$$

или, так как R – скаляр, окончательно:

$$D_i R^i{}_k = \frac{1}{2}\,\partial_k R.$$

Производная тензора Риччи может быть записана в виде следующего тождества:

$$D_i (R^i_j - \frac{1}{2}\,\delta^i_j\, R + \Lambda \delta^i_j) = 0, \qquad (11.83)$$

где Λ – некоторая константа. Именно это тождество привело в своё время Альберта Эйнштейна к построению уравнений гравитационного взаимодействия в общей теории относительности. Свойства вещества определяются тензором энергии-импульса T^{ij}. Он должен удовлетворять уравнению непрерывности $D_i T^{ij} = 0$. По гипотезе Эйнштейна материя влияет на геометрию пространства-времени. Уравнение непрерывности согласуется с (11.83), если:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}\, g_{ij}\, R + \Lambda g_{ij} = \chi\, T_{ij}, \qquad (11.84)$$

где χ – ещё одна константа. Это и есть уравнения гравитации Эйнштейна.

11.7 Геометрия неинерциальных систем

Изучим свойства пространственной геометрии во вращающейся системе отсчета в координатах Борна. Элемент физической длины (метрика 2-пространства) в плоскости $z = 0$ равна (стр. 240):

$$\delta l^2 = dr^2 + \frac{r^2\, d\phi^2}{1-\omega^2 r^2}. \qquad (11.85)$$

Это выражение отличается от евклидового расстояния в полярных координатах $\delta l^2 = dr^2 + r^2\, d\phi^2$ знаменателем во втором слагаемом. Такое пространство обладает кривизной и никаким преобразованием координат не может быть приведено к евклидовому виду. Более того, его даже нельзя представить как поверхность, вложенную в 3-мерное евклидово пространство ($\lessdot$ H_{194}).

Чтобы доказать неевклидовость метрики (11.85), найдём тензор кривизны. Вычислим сначала символы Кристоффеля записав уравнение геодезической. Для этого введем функцию $S = g_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j$:

$$S(x,\, \dot{x}) = \dot{r}^2 + \frac{r^2\, \dot{\phi}^2}{1-\omega^2 r^2}, \qquad\qquad x^k = \{r,\, \phi\},$$

где $\dot{x}^k = dx^k/dl$ и подставим её в уравнение (11.72), стр. 692 для $k = 1, 2$:

$$\frac{d\dot{r}}{dl} = \frac{r\dot{\phi}^2}{(1-\omega^2 r^2)^2}, \qquad\qquad \frac{d}{dl}\left(\frac{r^2\dot{\phi}}{1-\omega^2 r^2}\right) = 0. \qquad (11.86)$$

Беря производную во втором уравнении и делая коэффициенты при вторых производных единичными, имеем:

$$\ddot{r} - \frac{r\dot{\phi}^2}{(1-\omega^2 r^2)^2} = 0, \qquad\qquad \ddot{\phi} + \frac{2\dot{r}\dot{\phi}/r}{1-\omega^2 r^2} = 0.$$

С другой стороны, уравнение геодезической в форме $\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij}\, \dot{x}^i\, \dot{x}^j = 0$ содержит символы Кристоффеля при первых производных, поэтому:

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -\frac{r}{(1-\omega^2 r^2)^2}, \qquad \Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1/r}{1-\omega^2 r^2}, \qquad (11.87)$$

где $\Gamma^r_{\phi\phi} = \Gamma^1_{22}$ и т.д. Оставшиеся 3 символа равны нулю. Эти же соотношения можно получить и из связи символов Кристоффеля и метрического тензора (11.73), стр. 692, однако при этом прийдется перебрать все 6 вариантов, 3 из которых приведут к нулевым значениям.

В 2-мерном пространстве индексы у тензоров пробегают 2 значения. Так как тензор кривизны $R_{ij,\,pq}$ антисимметричен по парам индексов, стоящих до и после запятой, то единственное ненулевое его значение может быть только для $R_{12,\,12}$ (и получаемых из него перестановкой индексов). Метрический тензор диагонален и $g^{11} = g_{11} = 1$, поэтому:

$$R_{r\phi,\,r\phi} = R^{r}{}_{\phi,\,r\phi} = \partial_r \Gamma^r_{\phi\phi} - \partial_\phi \Gamma^r_{\phi r} + \Gamma^r_{kr}\Gamma^k_{\phi\phi} - \Gamma^r_{k\phi}\Gamma^k_{\phi r} = \partial_r \Gamma^r_{\phi\phi} - \Gamma^r_{\phi\phi}\Gamma^\phi_{\phi r},$$

где в последнем равенстве расписана сумма по k и отброшены нулевые символы Кристоффеля. Подставляя (11.87), имеем:

$$R_{r\phi,\,r\phi} = -\frac{3\,\omega^2 r^2}{(1-\omega^2 r^2)^3}.$$

Тензор отличен от нуля, поэтому не существует преобразования переводящее метрику (11.85) к евклидовому виду.

Найдём также скалярную кривизну, для которой запишем формулу, справедливую в произвольной метрике для пространства с двумя измерениями. По определению:

$$R = g^{ip}g^{jq}\,R_{ij,\,pq} = g^{11}g^{22}\,R_{12,12} + g^{12}g^{21}\,R_{12,21} + g^{21}g^{12}\,R_{21,12} + g^{22}g^{11}\,R_{21,21},$$

где в последнем равенстве опущены нулевые компоненты тензора кривизны. Переставляя индексы с учётом симметрии, и вводя определитель

$$\det g^{ij} = g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21} = 1/\det g_{ij} = 1/g,$$

получаем:

$$R = \frac{2\,R_{12,12}}{g}. \tag{11.88}$$

Для вращающейся системы отсчета (11.85) $g = r^2/(1-\omega^2 r^2)$, поэтому:

$$R = -\frac{6\,\omega^2}{(1-\omega^2 r^2)^2}.$$

Скалярная кривизна отрицательна и тем больше, чем ближе скорость вращения точки системы к фундаментальной скорости (при $\omega r \to 1$ имеем $R \to \infty$), Отметим, также конечность $R = -6\omega^2$ при $r = 0$.

Отрицательная кривизна 3-пространства приводит к тому, что длина окружности радиуса r с центром на оси вращения равна $2\pi r/\sqrt{1-\omega^2 r^2}$. Это больше, чем $2\pi r$. Для сравнения геометрия на сфере радиуса a дает положительную скалярную кривизну $R = 1/a^2$ ($\lessdot$ H$_{193}$) и длина окружности равна $2\pi a \sin(r/a)$, что меньше, чем $2\pi r$ ($\lessdot$ H$_{195}$).

Найдём решения уравнения геодезической для метрики (11.85). Для этого нам потребуется второе уравнение (11.86) и равенство единице функции $S = dl^2/dl^2 = 1$:

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{r^2\dot\phi}{1-\omega^2r^2}\right) = 0, \qquad \dot r^2 + \frac{r^2\dot\phi^2}{1-\omega^2r^2} = 1.$$

Интегрируя первое уравнение и подставляя результат во второе, имеем:

$$\dot\phi = \pm\frac{\alpha}{r^2}\,(1-\omega^2r^2), \qquad \dot r^2 = 1 + \omega^2\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{r^2}, \tag{11.89}$$

где $\alpha > 0$ – константа интегрирования и знак плюс соответствует движению вдоль геодезической в сторону увеличения угла, а минус – в сторону уменьшения. Расстояние от центра к геодезической достигает минимума $r = r_0$, когда $\dot r$ обращается в ноль. Поэтому:

$$r_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\omega^2\alpha^2}}, \qquad \alpha = \frac{r_0}{\sqrt{1-\omega^2r_0^2}}.$$

С новым параметром r_0 уравнение для $\dot r$ принимает вид:

$$\dot r^2 = \frac{\alpha^2}{r_0^2} - \frac{\alpha^2}{r^2}. \tag{11.90}$$

Интегрируя его, получаем:

$$r^2 = r_0^2 + \frac{\alpha^2}{r_0^2}\,l^2, \tag{11.91}$$

где длина l отсчитывается от точки минимума $r = r_0$. Теперь можно проинтегрировать первое уравнение (11.89):

$$\phi = \phi_0 \pm \mathrm{arctg}\left(\frac{\alpha\, l}{r_0^2}\right) \mp \alpha\omega^2\, l. \tag{11.92}$$

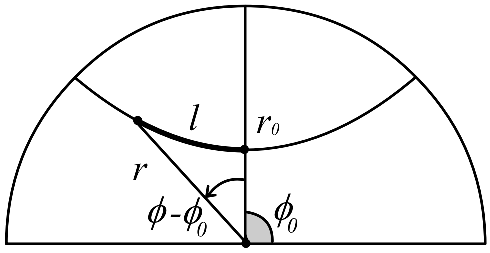
Верхний знак соответствует увеличению угла ϕ с ростом l (в одну строну от точки минимума r_0), а нижний – уменьшению (см. ниже первый рисунок). С учётом этого соотношения можно записать явную связь угла и безразмерного расстояния $\rho = r/r_0$ от центра:

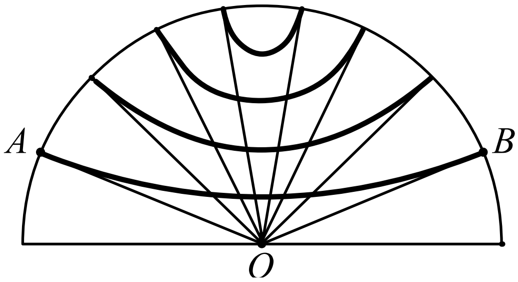
$$\phi = \phi_0 \pm \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\rho^2-1}\right) \mp \omega^2r_0^2\sqrt{\rho^2-1}, \tag{11.93}$$

где ϕ_0 имеет смысл угла при котором $r = r_0$. Если положить $\omega = 0$ (т.е. отбросить последнее слагаемое), то получится уравнение евклидовой прямой в полярных координатах. При $\omega \neq 0$ это изогнутая линия, симметричная относительно нормали к ней из центра в точку $r = r_0$.

Для предельных точек $\omega r = 1$, из (11.89) следует, что $\dot{\phi} = 0$. Это означает, что при $r = 1/\omega$ изменение угла меняет свой знак, и в этой точке геодезическая касательна к прямой, проведенной из центра. Эта прямая также является геодезической линией, которая соответствует случаю $\alpha = r_0 = 0$, $\alpha/r_0 = 1$.

Ниже на первом рисунке на *евклидовой* плоскости изображены параметры r_0 и ϕ_0, определяющие геодезическую и её отрезок, проведенный от минимума $r = r_0$ влево (в сторону увеличения угла ϕ). Эта часть геодезической в формуле (11.89) и далее соответствует верхнему знаку. Для движения по геодезической вправо от точки минимума (в сторону уменьшения ϕ) нужно использовать нижний знак.





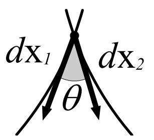
На втором рисунке приведено несколько геодезических “параллельных” оси x с параметром $\phi_0 = \pi/2$ и $r_0 = 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8$ (снизу вверх жирные линии). Тонкие прямые, касающиеся их на предельной окружности $r = 1/\omega$, также являются геодезическими ($\phi = const$). Максимальное отклонение угла ϕ от середины геодезической ($\phi = \phi_0$, $r = r_0$) соответствует $r = 1/\omega$. Сравнивая (11.93) при $\rho = 1/\omega r_0$ и (11.92) получаем общую длину геодезической (от одной точки на окружности до другой), как функцию параметра r_0:

$$l_{tot} = \frac{2}{\omega}\,(1 - \omega^2 r_0^2). \tag{11.94}$$

Геодезические максимальной длины $l_{tot} = 2/\omega$ проходят через центр вращения ($r_0 = 0$). Чем больше r_0, тем меньше их длина. Угол $\Delta\phi$ между двумя касательными, проведенными к одной “жирной” геодезической изменяется от π (при $r_0 = 0$) до 0 (при $r_0 = 1/\omega$).

Три пересекающиеся геодезические образуют треугольник неевклидовой геометрии. В пространстве отрицательной кривизны сумма углов такого треугольника меньше π. Например, в треугольнике OAB выше на втором рисунке углы OAB и OBA с касательными равны нулю, а угол AOB меньше π. В отличие от этого, на сфере, обладающей положительной кривизной, с точки зрения внешнего евклидового пространства (в которое вложена сфера) треугольники выглядят “выпуклыми”. Сумма углов таких треугольников всегда больше π.

• В общем случае косинус угла между двумя пересекающимися геодезическими можно определить введя два вектора, касательных к геодезической. Пусть dx_1^i – бесконечно малое смещение вдоль одной геодезической, а dx_2^i – аналогичное смещение вдоль второй геодезической из точки их пересечения. Тогда по аналогии с евклидовым пространством:



$$\cos\theta = \frac{d\mathrm{x}_1\cdot d\mathrm{x}_2}{\sqrt{d\mathrm{x}_1^2\cdot d\mathrm{x}^2{}_2}} = g_{ij}\,\dot{x}_1^i\dot{x}_2^j, \qquad (11.95)$$

где учтено, что $d\mathrm{x}^2 = dl^2$. Подставляя пространственную метрику во вращающейся системе отсчета, имеем:

$$\cos\theta = \dot r_1\dot r_2 + \frac{r^2\dot\phi_1\dot\phi_2}{1-\omega^2r^2} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{r^2}\left[\sqrt{\left(\frac{r^2}{r_{01}^2}-1\right)\left(\frac{r^2}{r_{02}^2}-1\right)} - (1-\omega^2r^2)\right].$$

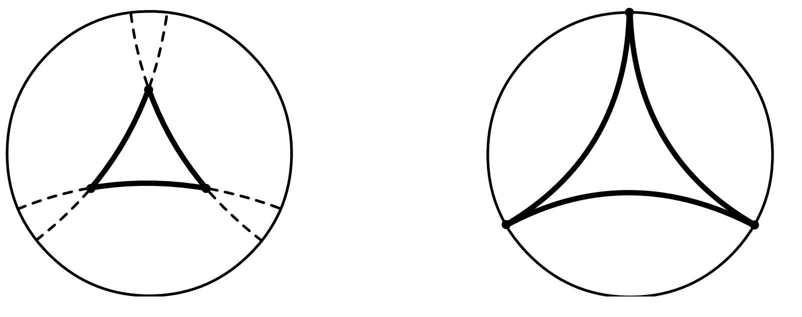
При извлечении корня в (11.90) и в (11.89) знак выбран так, как это показано на рисунке выше (смещение направлено в сторону уменьшения r, а угол увеличивается вдоль одной геодезической и уменьшается вдоль второй). Точку пересечения геодезических r (зависящую от $\phi_{02}-\phi_{01}$) можно найти из уравнения (11.93):

$$\phi_{01} + \mathrm{arctg}\,\mu_1 - \omega^2r_{01}^2\mu_1 = \phi_{02} - \mathrm{arctg}\,\mu_2 + \omega^2r_{02}^2\mu_2,$$

где $\mu_i = \sqrt{r^2/r_{0i}^2-1}$. В случае когда параметры минимального расстояния геодезических от центра совпадают $r_{01}=r_{02}=r_0$, имеем ($\rho = r/r_0$):

$$\cos\theta = 1 - 2\,\frac{r_0^2}{r^2}\,\frac{1-\omega^2r^2}{1-\omega^2r_0^2}, \qquad \frac{\phi_{02}-\phi_{01}}{2} = \mathrm{arctg}\,\sqrt{\rho^2-1} - \omega^2r_0^2\sqrt{\rho^2-1}.$$

Ниже приведено два равносторонних треугольника с центром на оси вращения параметрами $\omega r_0 = 0.2$ и $\omega r_0 = 0.471308$:



Сумма углов в меньшем треугольнике равна $\approx 0.75\,\pi$. Все три угла большего треугольника, вершины которого лежат на окружности $r = 1/\omega$, равны нулю.

• Подведем итоги. Пространство с метрикой (11.85) является неевклидовым. Что это означает физически? Обычно, рисуя треугольники и окружности при помощи циркуля и линейки, мы выступаем в виде существа, способного охватить своими чувствами всё или почти всё пространство. Даже плоскатики, живущие на поверхности сферы, могут себя мыслить такими существами, "размазанными" по всей сфере.

Несколько иная ситуация возникает при рассмотрении геометрии в неинерциальных системах отсчета. В каждой точке такой системы находятся наблюдатели, способные лишь локально измерять время и расстояния в своей непосредственной окрестности. Они *определяют* физическое расстояние к *соседним* наблюдателем как время проведения радиолокационного эксперимента с движением света "туда и обратно". "Прямая" (геодезическая) при таком определении оказывается состоящей из последовательности отрезков между ближайшими друг к другу наблюдателями. Разбиение прямой на такие отрезки является важным. Напомним, например, что пространство в равноускоренной системе является евклидовым с расстоянием в координатах Мёллера равным $dl^2 = dx^2+dy^2$. При этом, лучи света движутся по искривлённым линиям, а не прямым. К тому же, конечное радиолокационное расстояние равно $l = \ln(1+ax)/a$, а не $l = x$. Если бы наблюдатели приняли за определение прямой траекторию импульса света, они бы получили другую геометрию. Во вращающейся системе такое определение принять было бы достаточно затруднительным, т.к. траектория света, движущегося из точки A в точку B не совпадает с траекторией его движения из B в A. Поэтому принимается определение бесконечно близкого радиолокационного расстояния между двумя соседними точками. Именно это *операционное определение* приводит к неевклидовости пространственной геометрии неинерциальных систем.

Отметим её один важный момент. Несмотря на возможную невклидовость пространственной геометрии неинерциальных систем отсчёта, геометрия их 4-пространства событий остаётся псевдоевклидовой и имеет нулевую кривизну. В отличие от этого, в теории гравитации Эйнштейна постулируется, что массивные тела искривляют пространство событий. Для неустранимых гравитационных полей ни каким преобразованием координат нельзя подобное искривлённое пространство привести к метрике Минковского $ds^2 = dT^2 - d\mathbf{R}^2$. Именно отсутствие или наличие кривизны в пространстве событий является границей, проходящей между *специальной теорией относительности* (которой посвящена эта книга) и *общей теорией относительности* (теории гравитации Эйнштейна).

11.8 Немного алгебры **

• Фундаментальным понятием математики является *множество* – объединение некоторых объектов по определённым признакам (множество всех функций, множество векторов, множество умных блондинок и т.п.) Множество может быть и пустым, т.е. не содержащим элементов ($\varnothing$). Запись $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$ означает, что объект $\mathbf{a}$ принадлежит множеству $\mathbb{V}$. На множестве можно вводить операции. Например, *бинарная операция* (функция с двумя аргументами) ставит в соответствие любым двум элементам множества $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ некоторый третий элемент $\mathbf{c} \in \mathbb{V}$. Это обозначается так: $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \mapsto \mathbb{V}$ (крестик это не векторное произведение, а множество всех упорядоченных пар $\mathbb{V}$). Подобные операции можно записывать в функциональной форме $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{c}$ или операторной $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{c}$. Некоторые операции могут быть *коммутативными* и *ассоциативными*:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \qquad\qquad \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}.$$

Можно постулировать существование *выделенного* элемента $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ и *обратного* к $\mathbf{a}$ элемента $(-\mathbf{a})$, таких, что для любого $\mathbf{a}$ справедливо:

$$\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}, \qquad\qquad \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

Множество элементов с такой операцией называется *абелевой группой*.

Рассмотрим множество Ω, на элементах которого введём две бинарные ($\Omega \times \Omega \mapsto \Omega$) операции, которые обозначим как $\alpha + \beta$ и $\alpha \cdot \beta$. Пусть они являются абелевыми группами. Относительно "сложения" обратный элемент обозначается как $(-\alpha)$, а выделенный – как 0. Относительно "умножения" это α^{-1} и 1:

$$\begin{array}{l|l}
\alpha + \beta = \beta + \alpha & \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \\
\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma & \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \\
0 + \alpha = \alpha & 1 \cdot \alpha = \alpha \\
\alpha + (-\alpha) = 0 & \alpha \cdot \alpha^{-1} = 1.
\end{array}$$

Свяжем эти две (пока независимые!) операции при помощи аксиомы:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma),$$

которая называется *дистрибутивностью* относительно "умножения". Две абелевы группы на одном множестве, связанные дистрибутивностью, в алгебре называются *коммутативным телом*. Наиболее привычные примеры – это множества рациональных $\mathbb{Q}$, вещественных $\mathbb{R}$ и комплексных $\mathbb{Z}$ чисел с арифметическими сложением и умножением.

• Пока множества Ω и $\mathbb{V}$ никак не были связаны друг с другом. Все три введенные операции, определяющие абелеву группу и коммутативное тело, были *замкнутыми* (т.е. аргументы функции=операции и её результат оставался в одном множестве). Введём теперь четвёртую операцию, которую по бедности также будем обозначать точкой. Однако это будет уже функция вида: $\Omega \times \mathbb{V} \mapsto \mathbb{V}$. Первый её аргумент – элемент из Ω, второй – из $\mathbb{V}$, а результат находится в множестве $\mathbb{V}$, т.е. $(\alpha \cdot \mathbf{a}) \in \mathbb{V}$.

Будем считать, что введенные четыре функции (стоит их все найти в формулах ниже) удовлетворяют следующим аксиомам:

$$
\begin{aligned}
&(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{a}),\\
&\alpha \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\alpha \cdot \mathbf{a}) + (\alpha \cdot \mathbf{b}),\\
&(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{a} = (\alpha \cdot \mathbf{a}) + (\beta \cdot \mathbf{a}).
\end{aligned}
$$

Первое соотношение можно назвать ассоциативностью, правда, сразу для двух операций (точки имеют различный смысл), а второе и третье – дистрибутивностью (хотя в третьем плюсы также различны). Выделенные элементы множеств свяжем следующим образом (различаем $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$ и $0 \in \Omega$):

$$
1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}, \qquad (-1) \cdot \mathbf{a} = (-\mathbf{a}), \qquad \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \qquad 0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}.
$$

Любые множества объектов двух видов Ω и $\mathbb{V}$, удовлетворяющие всем этим аксиомам, называются *векторным пространством*, а элементы множества $\mathbb{V}$ – *векторами*.

Векторное пространство является n-мерным, если в нём существует n элементов $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ (*базисных векторов*), которые *линейно независимы* (ни один из них не равен сумме остальных с некоторыми коэффициентами). При этом любой вектор $\mathbf{a}$ можно "разложить" по этому базису с коэффициентами a^i (ковариантные компоненты). Их перечисление полностью определяет вектор в данном базисе:

$$
\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = a^1 \mathbf{e}_1 + ... + a^n \mathbf{e}_n.
$$

Всё изложенное выше, является абстрактным алгебраическим подходом к понятию вектора. *Абстрактность* (взгляд с более общей точки зрения) в данном случае означает, что подобные определения и аксиомы выполняются для самых различных *конструктивных* ("обычных") математических объектов. Например, направленный отрезок (стрелка) в евклидовом пространстве, производная по времени радиус-вектора (скорость), 4-вектор пространства теории относительности, всё это, с алгебраической точки зрения, векторы.

• Кроме базовых функций (операций) сложения и умножения, которые определяют алгебру векторного пространства, на нём можно дополнительно вводить и другие функции. Так, *скалярное произведение* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ – это бинарная, линейная, симметричная, вещественнозначная функция векторов $\mathbb{V}\times\mathbb{V}\mapsto\mathbb{R}$, которая любым двум векторам ставит в соответствие вещественное число. В функциональном виде скалярное произведение можно записать следующим образом: $g(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Действие этой функции на базисные векторы определяет *метрику* векторного пространства:

$$g_{ij}=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j\equiv g(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j).$$

При помощи этих чисел (один раз заданных в данном базисе) мы можем *вычислять* скалярное произведение любых двух векторов (значение функции g), если они заданы в этом же базисе при помощи компонент:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\equiv g(\mathbf{a},\mathbf{b})=(a^i\mathbf{e}_i)\cdot(b^j\mathbf{e}_j)=g_{ij}\,a^ib^j.$$

Один-форма $\omega(\mathbf{a})$ – это линейная вещественнозначная функция на векторах: $\mathbb{V}\mapsto\mathbb{R}$ (каждому вектору ставится в соответствие вещественное число). В *данном* базисе форму, как и вектор, можно выражать (определять) при помощи её компонент. Для этого вычисляются значения этой функции от базисных векторов:

$$\omega_i=\omega(\mathbf{e}_i).$$

Задав эти числа, можно вычислить 1-форму (найти значение функции) от любого вектора:

$$\omega(\mathbf{a})=\omega(a^i\mathbf{e}_i)=a^i\omega(\mathbf{e}_i)=\omega_ia^i.$$

Поэтому, как вектор $\mathbf{a}=\{a^1,...,a^n\}$, так и форму $\omega=\{\omega_1,...,\omega_n\}$ можно задать, перечислив n вещественных чисел (в данном базисе).

От одного базиса $\mathbf{e}_i$ можно переходить к другому базису $\tilde{\mathbf{e}}_i$ при помощи набора n^2 чисел (матрицы перехода, по j сумма от 1 до n):

$$\tilde{\mathbf{e}}_i=\mathbf{e}_j\,R^j{}_i.$$

Вектор $\mathbf{a}$ (элемент множества $\mathbb{V}$) при смене базиса не меняется, но меняются его компоненты:

$$\mathbf{a}=a^i\mathbf{e}_i=\tilde{a}^i\tilde{\mathbf{e}}_i,\qquad\qquad a^i=R^i{}_j\,\tilde{a}^j.$$

При смене базиса пространства $\mathbb{V}$ меняются и компоненты 1-форм:

$$\tilde{\omega}_i=\omega(\tilde{\mathbf{e}}_i)=\omega(\mathbf{e}_j\,R^j{}_i)=\omega(\mathbf{e}_j)\,R^j{}_i=\omega_j\,R^j{}_i,$$

где $R^j{}_i$ вынесены за функцию ω, так как она является линейной.

• Множество 1-форм, например, как все совокупности n вещественных чисел $\omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ (их компонент), в свою очередь, образует векторное пространство (проверьте, что наборы упорядоченных n чисел удовлетворяют аксиомам векторного пространства). Оно, *в общем* случае, не связано с исходным (к которому относятся аргументы форм) и называется *сопряжённым пространством* $\mathbb{V}^*$. Поэтому 1-формы иногда называют ковекторами (векторами сопряженного векторного пространства $\mathbb{V}^*$). Таким образом, 1-формы ω, с одной стороны, это функции в пространстве $\mathbb{V}$, а с другой стороны – векторы, принадлежащие $\mathbb{V}^*$.

В сопряжённом пространстве $\mathbb{V}^*$ можно ввести базис e^1, ..., e^n и линейные функции одного аргумента (1-формы). Эти функции образуют новое векторное пространство $\mathbb{V}^{**}$ и т.д. Такую цепочку можно оборвать, если считать, что 1-формы пространства $\mathbb{V}^*$ являются векторами пространства $\mathbb{V}$. Тогда в $\mathbb{V}^*$ можно задать n 1-форм $\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_n$, значения которых на векторах $\mathbb{V}^*$ равны компонентам этих векторов как 1-форм в $\mathbb{V}$:

$$\mathbf{e}_i(\omega) = \omega_i, \qquad\qquad \mathbf{e}_i(e^j) = \delta_i^j,$$

где $e^1, ..., e^n$ базис в $\mathbb{V}^*$. Обратим внимание, что имена $\mathbf{e}_i$ этих 1-форм $\mathbb{V}^*$ совпадают с именами базиса в $\mathbb{V}$, где они уже выступают как векторы. Аналогично, в обратную сторону, базисные векторы $e^i \in \mathbb{V}^*$ выступают 1-формами в $\mathbb{V}$ со свойствами

$$e^i(\mathbf{a}) = a^i, \qquad\qquad e^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i.$$

Можно также говорить о *контравариантном метрическом тензоре*, как о линейной бинарной функции на $\mathbb{V}^*$, дающей числа $g^{ij} = \mathbf{g}(e^i, e^j)$, на базисных векторах e^i. Несложно проверить, что $g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$.

Иногда аксиоматику *упрощают* и не различают исходное векторное пространство $\mathbb{V}$ и ему сопряжённое $\mathbb{V}^*$, считая, что $\mathbb{V}^* = \mathbb{V}$. Аналогично, в декартовых координатах "обычного" тензорного анализа мы не различаем верхние и нижние индексы. Хотя в криволинейных координатах это уже делаем. Эта некоторая потеря общности позволяет сократить число сущностей и операций между ними. Базисные 1-формы e^i в этом случае считаются сопряжённым базисом $\mathbf{e}^1, ..., \mathbf{e}^n$, где векторы $\mathbf{e}^i \in \mathbb{V}$ и удовлетворяют соотношениям:

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i, \qquad \mathbf{a} = a_i \mathbf{e}^i = a^i \mathbf{e}_i, \qquad a_i = g_{ij} a^j, \qquad g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j.$$

Таким образом, есть векторы только одного типа (из одного пространства). Именно такой упрощённый подход был принят ранее при рассмотрении базисов в криволинейных координатах.

• *Тензор* типа (k, m) может быть определён, как *полилинейная функция* T (линейная по каждому аргументу) от k 1-форм и m векторов:

$$T: \underbrace{\mathbb{V}^* \times ... \times \mathbb{V}^*}_{k} \times \underbrace{\mathbb{V} \times ... \times \mathbb{V}}_{m} \mapsto \mathbb{R}.$$

Такое алгебраическое определение может быть приведено к "обычному" индексному виду, если вычислить эту функцию от базисных векторов пространства $\mathbb{V}$ и базисных ковекторов ему сопряжённого пространства $\mathbb{V}^*$. Например, для (1,2)-тензора имеем набор чисел:

$$T^i_{jk} = T(e^i,\ \mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_k).$$

Если считать, что $\mathbb{V}^* = \mathbb{V}$, то в первом аргументе функции можно также использовать жирный шрифт.

В таком общем подходе тензор (k, m) – это линейная функция $k + m$ аргументов. Как и вектор или 1-форма в n-мерном пространстве, он может быть определён (задан) при помощи набора n^{k+m} чисел – компонент тензора. Сумма $k + m$ называется *рангом тензора.*

Если задана матрица $R^i{}_j$ перехода к новому базису в $\mathbb{V}$, то она же определяет (в силу полилинейности функции T) закон преобразования компонент тензора. Например, для тензора (0,2) имеем:

$$\tilde{T}_{ij} = T(\tilde{\mathbf{e}}_i,\, \tilde{\mathbf{e}}_j) = T(\mathbf{e}_p\, R^p{}_i,\, \mathbf{e}_q\, R^q{}_j) = R^p{}_i R^q{}_j\, T(\mathbf{e}_p,\, \mathbf{e}_q) = R^p{}_i R^q{}_j\, T_{pq}.$$

Аналогично записываются преобразования в общем случае. При этом для базиса ковекторов сопряжённого пространства $\mathbb{V}^*$ (1-форм в $\mathbb{V}$) необходимо использовать преобразование, аналогичное преобразованию контравариантных компонент (тильда справа!):

$$e^i = R^i{}_j\, \tilde{e}^j.$$

Действительно, с одной стороны

$$e^i(\tilde{\mathbf{e}}_j) = e^i(\mathbf{e}_k R^k{}_j) = e^i(\mathbf{e}_k) R^k{}_j = \delta^i_k\, R^k{}_j = R^i{}_j.$$

С другой стороны, тот же результат получается при использовании приведенного выше преобразования 1-форм в $\mathbb{V}$:

$$e^i(\tilde{\mathbf{e}}_j) = R^i{}_k\, \tilde{e}^k(\tilde{\mathbf{e}}_j) = R^i{}_k\, \delta^k_j = R^i{}_j.$$

Заметим, что тензор (0,1) является 1-формой в $\mathbb{V}$ и вектором в $\mathbb{V}^*$. Тензор (1,0) – это 1-форма в $\mathbb{V}^*$ и вектор в $\mathbb{V}$. Скалярное произведение (метрика), как функция $g(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, является (0,2) тензором. Тензор нулевого ранга – это просто вещественное число.

• *Тензорным произведением* называется произведение двух тензорных функций. Например, при помощи тензоров $A^k = A(e^k)$ и $B_{ij} = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ можно определить тензор (1,2), т.е. функцию с тремя аргументами, следующим образом:

$$(A \otimes B\,)(e^k,\ \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = A(e^k)\,B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Обратим внимание, что $(A{\otimes}B\,)$ – это *имя* нового тензора (функции). Аргументы следуют, как обычно, в круглых скобках после имени функции. Компоненты получившегося тензора ранга 3 имеют 3 индекса и равны произведению компонент тензоров A и B:

$$(A \otimes B\,)^k_{ij} = A^k\,B_{ij}.$$

Тензорное произведение ассоциативно, но, вообще говоря, не коммутативно:

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C, \qquad\qquad A \otimes B \neq B \otimes A.$$

Например, рассмотрим тензорное произведение двух векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ из $\mathbb{V}$ (они же 1-формы из $\mathbb{V}^*$, они же (1,0) - тензоры). Его результатом будет (2,0) тензор, определяемый в компонентном виде n^2 числами:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^{ij} = a^i\,b^j.$$

Если компоненты векторов различны, то получившаяся матрица компонент тензора $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ будет не симметрична, а $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^{ij} \neq (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})^{ij}$.

Множество всех тензоров одного типа (k, m) образуют *векторное пространство* относительно сложения и умножения на вещественное число. В частности, при сложении компонент двух тензоров типа (1,2): $A^i_{jk}+B^i_{jk}$ и умножения на число: $\lambda\,A^i_{jk}$ снова получаются компоненты некоторого тензора того же типа. На примере тензора (1,2) введём *базис* векторного пространства тензоров:

$$\mathbf{e}_i \otimes e^j \otimes e^k.$$

Любой тензор типа (1,2) может быть разложен по этому базису:

$$T = T^i_{jk}\ \mathbf{e}_i \otimes e^j \otimes e^k.$$

Напомним, что e^i являются базисными 1-формами (функциями на пространстве $\mathbb{V}$), а $\mathbf{e}_i$ – 1-формы на сопряжённом пространстве $\mathbb{V}^*$. Поэтому, чтобы получить компоненты тензора, надо вычислить функцию:

$$T(e^r, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q) = T^i_{jk}\ (\mathbf{e}_i \otimes e^j \otimes e^k)(e^r, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q) = T^i_{jk}\ \mathbf{e}_i(e^r)\,e^j(\mathbf{e}_p)\,e^k(\mathbf{e}_q) = T^r_{pq}.$$

Аналогично записывается базис и разложение по нему для векторного пространства, задаваемого тензорами произвольного типа (k, m).

• *Внешняя форма* ($\equiv$ *m-форма* или *кососимметрическая* или *антисимметрическая* форма) – это линейная функция m векторов, которая антисимметрична по всем своим аргументам. Например, для любой внешней 2-формы (бинарной функции) должно выполняться свойство:

$$\omega(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -\omega(\mathbf{b},\mathbf{a}).$$

Таким образом, из класса бинарных линейных функций $\mathbb{V}\times\mathbb{V}\mapsto\mathbb{R}$ мы выделяем подкласс антисимметричных линейных функций, которые называем внешними формами. Аналогично для 3-формы:

$$\omega(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = -\omega(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}) = \omega(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}) = -\omega(\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}).$$

Перестановка любых *двух* аргументов внешней формы должна изменить знак у значения функции. Примером внешней 3-формы является смешанное произведение $\mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]$ в 3-мерном евклидовом пространстве.

Любую функцию можно "антисимметризовать", превратив её во внешнюю форму. Для этого необходимо сложить $m!$ перестановок m аргументов функции со знаком "+" для чётных и "−" для нечётных парных перестановок. Такое действие называется операцией *альтернирования* $\hat{\mathrm{Alt}}$. Поясним её на примере 2-формы $\omega(\mathbf{a},\mathbf{b})$, получаемой из произвольной функции $f=f(\mathbf{a},\mathbf{b})$:

$$\omega(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \hat{\mathrm{Alt}} f = \frac{1}{2}\bigl(f(\mathbf{a},\mathbf{b}) - f(\mathbf{b},\mathbf{a})\bigr).$$

Если функция f имела компоненты f_{ij}, то внешняя форма ω будет иметь компоненты:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\bigl(f_{ij} - f_{ji}\bigr).$$

Эту же внешнюю форму можно записать в виде разложения по базису:

$$\omega = \frac{1}{2}\bigl(f_{ij} - f_{ji}\bigr)\, e^i\otimes e^j.$$

Действительно, так как e^i являются функциями (1-формами), то:

$$\omega_{pq} = \omega(\mathbf{e}_p,\mathbf{e}_q) = \frac{1}{2}\bigl(f_{ij}-f_{ji}\bigr)\,(e^i\otimes e^j)(\mathbf{e}_p,\mathbf{e}_q) = \frac{1}{2}\bigl(f_{ij}-f_{ji}\bigr)\,\delta^i_p\,\delta^j_q.$$

Сворачивая символы Кронекера, получаем требуемые коэффициенты. Так же строится внешняя 3-форма $\omega(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \hat{\mathrm{Alt}} f$:

$$\frac{1}{6}\bigl(f(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) - f(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}) + f(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}) - f(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}) + f(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}) - f(\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a})\bigr).$$

Обычно принято внешнюю m-форму при альтернировании делить на $m!$.

• *Операция внешнего произведения* (или *косого произведения*) вводится для двух k и m форм:

$$A \wedge B = \frac{(k+m)!}{k!\,m!}\,\hat{\mathrm{Alt}}\,(A \otimes B).$$

Например, при внешнем произведении двух 1-форм $\sigma = \sigma(\mathbf{a})$ и $\lambda = \lambda(\mathbf{a})$ получаем внешнюю 2-форму

$$\omega(\mathbf{a},\mathbf{b}) \equiv (\sigma \wedge \lambda)(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sigma(\mathbf{a})\lambda(\mathbf{b}) - \lambda(\mathbf{a})\sigma(\mathbf{b}).$$

Напомним, что $(\sigma \wedge \lambda)$ является *именем* внешней 2-формы, эквивалентным букве ω, а вот круглые скобки после этого имени – это уже аргументы функции. Если вместо произвольных векторов подставить векторы базиса, то получится связь компонент $\omega_{ij} = \omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ форм:

$$\omega_{ij} \equiv (\sigma \wedge \lambda)_{ij} = \sigma_i \lambda_j - \lambda_i \sigma_j.$$

Аналогично вводится внешнее произведение трёх $k-$, $l-$, $m-$ форм:

$$A \wedge B \wedge C = A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C = \frac{(k+l+m)!}{k!\,l!\,m!}\,\hat{\mathrm{Alt}}\,(A \otimes B \otimes C).$$

Внешнее произведение k штук 1-форм $\omega^1(\mathbf{a})$,...,$\omega^k(\mathbf{a})$ (индекс – номер формы, а не её компонента!) можно выразить при помощи определителя:

$$\omega(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k) \equiv (\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^k)(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k) = \begin{vmatrix} \omega^1(\mathbf{a}_1) & ... & \omega^k(\mathbf{a}_1) \\ ... & ... & ... \\ \omega^1(\mathbf{a}_k) & ... & \omega^k(\mathbf{a}_k) \end{vmatrix}.$$

Наличие всевозможных факториалов является вопросом соглашения. В операции альтернирования m штук 1-форм ставится множитель $(1/m!)$, так как при альтернировании возникает $m!$ перестановок аргументов. При определении косого произведения эти факториалы сокращаются. В результате косое произведение не содержит числовых множителей.

Внешнее произведение базисных 1-форм является базисом для антисимметричных тензоров типа $(0,k)$. Например, тензор (0,2) с коэффициентами $T_{ij} = -T_{ji}$ равен:

$$T = \frac{1}{2}\,T_{ij}\,e^i \wedge e^j.$$

Множитель $1/2$ (для тензоров типа $(0,k)$ будет $1/k!$) необходим, чтобы получились верные коэффициенты при вычислении функции от базисных векторов $T_{pq} = T(\mathbf{e}_p,\,\mathbf{e}_q)$:

$$\frac{1}{2}\,T_{ij}\,(e^i \wedge e^j)(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q) = \frac{1}{2}T_{ij}\,(e^i(\mathbf{e}_p)e^j(\mathbf{e}_q) - e^i(\mathbf{e}_q)e^j(\mathbf{e}_p)) = \frac{1}{2}\,T_{ij}\,(\delta^i_p\,\delta^j_q - \delta^i_q\,\delta^j_p).$$

Аналогично определяется базис $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge ...$ для тензоров, коэффициенты которых антисимметричны по верхним индексам.

11.9 Внешнее дифференцирование *

• Введём в 3-мерном пространстве базис $\mathbf{e}_i$, определяющий разложение вектора бесконечно малого смещения $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_i\, dx^i$ при изменении координат x^i. Обозначим градиент скалярной функции ∇f при помощи жирной буквы $\mathbf{d}f$. В произвольных криволинейных координатах со *взаимным* базисом $\mathbf{e}^i$ (не различаем $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$, см. 709), имеем:

$$\mathbf{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\mathbf{e}^i = \partial_i f\,\mathbf{e}^i, \qquad\qquad \mathbf{d}f = \Bigl\{\frac{\partial f}{\partial x^1},\ \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}\Bigr\}, \tag{11.96}$$

где в фигурных скобках перечислены *ковариантные компоненты* вектора. Естественно, символ $\mathbf{d}$ не стоит путать с дифференциалом функции:

$$df = \mathbf{d}f \cdot d\mathbf{r} = (\partial_i f\,\mathbf{e}^i)\cdot(\mathbf{e}_j\,dx^j) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\ dx^i.$$

Напомним, что с алгебраической точки зрения *1-форма* – это линейная функция, которая каждому вектору ставит в соответствие вещественное число. Если вектор $\mathbf{a}$ задан компонентами a^i, то 1-форма ω (функция вектора) может быть записана следующим образом: $\omega(\mathbf{a}) = \omega_i\, a^i$.

Градиент $\mathbf{d}f$ является 1-формой дифференциала, где $\mathbf{d}f$ – *имя* 1-формы. Её *компоненты* $(\mathbf{d}f)_i$ равны частным производным (11.96). Аргументом 1-формы выступает бесконечно малое смещение $d\mathbf{r}$. Результат вычисления 1-формы: $\mathbf{d}f(d\mathbf{r}) = (\mathbf{d}f)_i(d\mathbf{r})^i = df$ – число, равное дифференциалу. Если не различать $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^*$, то $\mathbf{d}f$ также является вектором.

В любой системе координат (x^1, x^2, x^3) ковариантные компоненты вектора градиента (11.96) от каждой координаты равны $(\mathbf{d}x^i)_\alpha = \delta^i_\alpha$, или:

$$\mathbf{d}x^1 = \{1,0,0\}; \qquad \mathbf{d}x^2 = \{0,1,0\}; \qquad \mathbf{d}x^3 = \{0,0,1\}. \tag{11.97}$$

Так как $\mathbf{d}f = (\mathbf{d}f)_i\,\mathbf{e}^i$, то из (11.97) следует, что градиент от координат есть не что иное, как *ещё одно обозначение* векторов взаимного базиса:

$$\mathbf{d}x^i \equiv \mathbf{e}^i, \qquad\qquad \mathbf{d}x^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j.$$

Подчеркнём, что $\mathbf{d}x^i$ – это *градиент, а не дифференциал*, поэтому его компоненты не являются бесконечно малыми величинами!

При замене координат векторы взаимного базиса преобразуются аналогично дифференциалам координат (см. (4.68) стр. 234):

$$\mathbf{d}\tilde{x}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\ \mathbf{d}x^j = \partial_j \tilde{x}^i\ \mathbf{d}x^j,$$

что оправдывает несколько странное новое обозначение для векторов взаимного базиса.

Из ковариантных компонент векторов можно получить тензор при помощи *тензорного произведения*:

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_{\alpha\beta} = a_\alpha b_\beta.$$

Аналогично можно определить *косое произведение* векторов, как антисимметричный тензор:

$$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})_{\alpha\beta} = (\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}-\mathbf{b}\otimes\mathbf{a})_{\alpha\beta} = a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha.$$

Для градиентов координат имеем:

$$(\mathbf{d}x^i\wedge\mathbf{d}x^j)_{\alpha\beta} = (\mathbf{d}x^i)_\alpha(\mathbf{d}x^j)_\beta - (\mathbf{d}x^i)_\beta(\mathbf{d}x^j)_\alpha = \delta^i_\alpha\delta^j_\beta - \delta^i_\beta\delta^j_\alpha. \qquad (11.98)$$

Верхние индексы i и j – это номера координат (или векторов взаимного базиса). Собственно к тензору относятся нижние индексы α и β. Запишем компоненты этих тензоров в явном виде в 3-мерном пространстве:

$$\mathbf{d}x^1\wedge\mathbf{d}x^2 = \begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{d}x^1\wedge\mathbf{d}x^3 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{d}x^2\wedge\mathbf{d}x^3 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

Например, $(\mathbf{d}x^1\wedge\mathbf{d}x^2)_{\alpha\beta} = \delta^1_\alpha\delta^2_\beta - \delta^1_\beta\delta^2_\alpha$, и т.д.

В силу определения, косое произведение является антисимметричным:

$$\mathbf{d}x^i\wedge\mathbf{d}x^j = -\mathbf{d}x^j\wedge\mathbf{d}x^i,$$

а косое произведение одинаковых координат равно нулю (матрице со всеми нулевыми компонентами): $\mathbf{d}x^1\wedge\mathbf{d}x^1 = \mathbf{d}x^2\wedge\mathbf{d}x^2 = \mathbf{d}x^3\wedge\mathbf{d}x^3 = \mathbf{0}$.

Антисимметричный тензор $\mathbf{F}$ с двумя индексами $F_{ij} = -F_{ji}$ определяется тремя величинами F_{12}, F_{13} и F_{23}, которые можно использовать для разложения $\mathbf{F}$ по полученным выше *матрицам* 3×3:

$$(\mathbf{F})_{\alpha\beta} = F_{12}\,(\mathbf{d}x^1\wedge\mathbf{d}x^2)_{\alpha\beta} + F_{13}\,(\mathbf{d}x^1\wedge\mathbf{d}x^3)_{\alpha\beta} + F_{23}\,(\mathbf{d}x^2\wedge\mathbf{d}x^3)_{\alpha\beta}.$$

Так как F_{ij} и косое произведение антисимметричны, можно одновременно переставлять их индексы: $F_{12}\,\mathbf{d}x^1\wedge\mathbf{d}x^2 = F_{21}\,\mathbf{d}x^2\wedge\mathbf{d}x^1$, поэтому:

$$\mathbf{F} = \sum_{i<j} F_{ij}\,\mathbf{d}x^i\wedge\mathbf{d}x^j = \frac{1}{2}\,F_{ij}\,\mathbf{d}x^i\wedge\mathbf{d}x^j,$$

где, как обычно, по повторяющимся индексам i, j проводится суммирование без указания знака суммы. Такое представление антисимметричного тензора называется *дифференциальной 2-формой*. Разложение вектора по взаимному базису $\mathbf{A} = A_i\,\mathbf{d}x^i$ является *дифференциальной 1-формой*.

• Запишем ещё раз закон преобразования градиента координат (векторов взаимного базиса) при смене системы координат:

$$\mathbf{d}\tilde{x}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\,\mathbf{d}x^j = \partial_j \tilde{x}^i\,\mathbf{d}x^j.$$

Рассмотрим декартовую и полярную системы координат в 2-мерном пространстве:

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\,c_\phi \\ y = r\,s_\phi \end{array}\right| \quad => \qquad \begin{array}{l} \mathbf{d}x = \partial_r x\,\mathbf{d}r + \partial_\phi x\,\mathbf{d}\phi = c_\phi \mathbf{d}r - r s_\phi \mathbf{d}\phi \\ \mathbf{d}y = \partial_r y\,\mathbf{d}r + \partial_\phi y\,\mathbf{d}\phi = s_\phi \mathbf{d}r + r c_\phi \mathbf{d}\phi. \end{array}$$

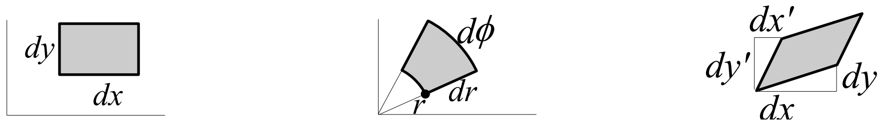
Перемножим градиенты координат косым образом:

$$\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y = (c_\phi \mathbf{d}r - r s_\phi \mathbf{d}\phi) \wedge (s_\phi \mathbf{d}r + r c_\phi \mathbf{d}\phi) = r c_\phi^2 \mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}\phi - r s_\phi^2 \mathbf{d}\phi \wedge \mathbf{d}r,$$

где учтено, что $\mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}r = \mathbf{d}\phi \wedge \mathbf{d}\phi = 0$. Переставляя $\mathbf{d}\phi \wedge \mathbf{d}r = -\mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}\phi$, окончательно получаем:

$$\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y = r\,\mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}\phi. \tag{11.99}$$

Это соотношение определяет *2-форму площади* в декартовых (слева) и в полярных (справа) координатах. Действительно, в полярных координатах длина дуги равна $r d\phi$, и умножая её на dr, получаем площадь:



Естественно подобная мнемоника является огрублением смысла уравнения (11.99). На самом деле (11.99) – это не произведение дифференциалов, а тензорное выражение (11.98). Однако, если его свернуть с двумя бесконечно малыми смещениями $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}'$, мы получим правильное выражение для соответствующей площади. В декартовых координатах:

$$(\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y)_{\alpha\beta}\, d\mathbf{r}^\alpha d\mathbf{r}'^\beta = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx' \\ dy' \end{pmatrix} = dx dy' - dy dx'.$$

Таким образом, парное косое произведение $\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j$ имеет смысл 2-формы (антисимметричной функции от двух векторов), при помощи которой можно получать значения проекции площади параллелограмма (построенного на этих векторах) на координатные плоскости (x^i, x^j). В функциональной форме это можно записать при помощи антисимметричной функции $\mathbf{d}S(d\mathbf{r}, d\mathbf{r}')$ =площадь, где $\mathbf{d}S = \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j$ – 2-форма.

• В произвольных криволинейных координатах $x^i = (x^1, x^2, x^3)$ роль декартовых плоскостей играют поверхности, возникающие при последовательном фиксировании значения одной из координат. Так, координатная поверхность (x^1, x^2) имеет уравнение $x^3 = const$. В декартовых координатах пространство разбивается на прямоугольные ячейки. В криволинейных координатах ячейки имеют различный размер и ориентацию. Например, в сферических координатах это набор вложенных сфер ($r = const$), разрезанных плоскостями параллелей ($\theta = const$) и меридианов ($\phi = const$). Ориентация каждой такой ячейки определяется векторами криволинейного базиса $\mathbf{e}_i$. 2-форма поверхности, например, $r\mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}\phi$ в цилиндрической системе, определяет ориентацию координатной плоскости. Свертка этой формы с двумя векторами малых смещений равна проекции параллелограмма, построенного на этих векторах, на координатную плоскость криволинейной системы координат. В 3-х измерениях возможны 3 комбинации $\{\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z,\ \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x,\ \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y\}$, которые условно можно считать компонентами 3-вектора площади $(\mathbf{d}S)^i$. Хотя на самом деле это три 2-формы (антисимметричные тензоры $(\mathbf{d}S)^i_{\alpha\beta}$).

• Аналогично косому произведению двух сомножителей в пространстве с размерностью $n > 2$ можно определить тройное косое произведение, антисимметричное при перестановке любых сомножителей. Например, в 3-мерных декартовых координатах, пользуясь свойством парного косого умножения, переставим $\mathbf{d}x$ и $\mathbf{d}z$:

$$\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z = -\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}z = \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x = -\mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}x.$$

В компонентах оно определяется аналогично двойному косому произведению при помощи антисимметризации компонент градиентов по всем трём индексам. Это удобно записать при помощи определителя:

$$(\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z)_{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} (\mathbf{d}x)_\alpha & (\mathbf{d}y)_\alpha & (\mathbf{d}z)_\alpha \\ (\mathbf{d}x)_\beta & (\mathbf{d}y)_\beta & (\mathbf{d}z)_\beta \\ (\mathbf{d}x)_\gamma & (\mathbf{d}y)_\gamma & (\mathbf{d}z)_\gamma \end{vmatrix} = \begin{matrix} (\mathbf{d}x)_\alpha(\mathbf{d}y)_\beta(\mathbf{d}z)_\gamma - (\mathbf{d}x)_\alpha(\mathbf{d}y)_\gamma(\mathbf{d}z)_\beta \\ +(\mathbf{d}x)_\beta(\mathbf{d}y)_\gamma(\mathbf{d}z)_\alpha - (\mathbf{d}x)_\beta(\mathbf{d}y)_\alpha(\mathbf{d}z)_\gamma \\ +(\mathbf{d}x)_\gamma(\mathbf{d}y)_\alpha(\mathbf{d}z)_\beta - (\mathbf{d}x)_\gamma(\mathbf{d}y)_\beta(\mathbf{d}z)_\alpha. \end{matrix}$$

Так как $\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}x = 0$, то в $n-$мерном пространстве возможно косое произведение не более чем n градиентов.

Если двойное косое произведение определяет 2-форму проекции параллелограмма на координатную поверхность (площадь), то тройное косое произведение – это 3-форма проекции параллелепипеда, построенного на трёх бесконечно малых смещениях $d\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}'$ и $d\mathbf{r}''$. В 3-мерном пространстве это будет объём. Антисимметризация косого произведения при переходе от декартовой системы координат к криволинейной будет давать правильный якобиан этого объёма (множитель при $\mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3$).

• Дифференциальные формы позволяют в едином виде записать аналоги градиента, ротора и дивергенции для пространств произвольной размерности. Напомним, что ротор (как векторное произведение оператора набла на вектор) определён только в 3-мерном пространстве. Тем не менее, существуют его аналоги для размерности $n > 3$.

Введём ещё одну операцию, называемую *внешним дифференцированием*. Для разложения некоторого вектора по базису $\mathbf{d}x^i$ (*1-форма*):

$$\mathbf{A} = A_j\,\mathbf{d}x^j$$

внешнее дифференцирование определяется следующим образом:

$$\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathbf{d}A_j \wedge \mathbf{d}x^j = \partial_i A_j\ \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j.$$

Другими словами, берётся градиент от компонент вектора A_j и косым образом умножается *слева* на уже стоящие в выражении 1-формы $\mathbf{d}x^j$. Заметим, что для обозначения внешнего дифференцирования мы выбрали букву d в прямом нежирном шрифте, чтобы отличать её и от градиента ($\mathbf{d}$), и от обычного дифференциала (d). Впрочем, часто не делают подобных различий в обозначениях.

Аналогично определяется внешнее дифференцирование 2-форм:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}\,F_{ij}\ \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j.$$

Для этого берётся градиент и косым образом слева умножается на уже существующее косое произведение:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \frac{1}{2}\,\mathbf{d}F_{ij} \wedge \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j = \frac{1}{2}\,\partial_k F_{ij}\ \mathbf{d}x^k \wedge \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j.$$

Двойное применение операции внешнего дифференцирования всегда приводит к нулевому результату:

$$\mathrm{d}^2 = 0. \tag{11.100}$$

Продемонстрируем это на примере двойного дифференциала 1-формы:

$$\mathrm{d}^2\mathbf{A} = \mathrm{d}(\mathrm{d}\mathbf{A}) = \mathrm{d}(\partial_i A_j\ \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j) = \partial_k\partial_i A_j\ \mathbf{d}x^k \wedge \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j = 0.$$

Так как частные производные по k-той и i-той координате перестановочны (симметричны), а косое произведение антисимметрично, то это выражение равно нулю.

На примере 3-мерного пространства продемонстрируем связь внешнего дифференцирования и операций дивергенции и ротора обычного векторного анализа.

• Пусть в декартовых координатах 1-форма равна:

$$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{d}x + A_y\,\mathbf{d}y + A_z\,\mathbf{d}z. \tag{11.101}$$

Найдём её внешний дифференциал $\mathrm{d}\mathbf{A}$:

$$\Bigl(\frac{\partial A_x}{\partial y}\,\mathbf{d}y+\frac{\partial A_x}{\partial z}\,\mathbf{d}z\Bigr)\wedge\mathbf{d}x+\Bigl(\frac{\partial A_y}{\partial x}\,\mathbf{d}x+\frac{\partial A_y}{\partial z}\,\mathbf{d}z\Bigr)\wedge\mathbf{d}y+\Bigl(\frac{\partial A_z}{\partial x}\,\mathbf{d}x+\frac{\partial A_z}{\partial y}\,\mathbf{d}y\Bigr)\wedge\mathbf{d}z,$$

где опущены члены, которые в косом произведении дадут ноль $\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}x$, и т.д. Переставляя местами градиенты координат, получаем:

$$\mathrm{d}\mathbf{A} = \Bigl(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\Bigr)\,\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z+\Bigl(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\Bigr)\,\mathbf{d}z\wedge\mathbf{d}x+\Bigl(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\Bigr)\,\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y.$$

Таким образом, в 3-мерном пространстве внешнее дифференцирование 1-формы вектора равно скалярному произведению вектора ротора на “вектор” площади $\mathrm{d}\mathbf{A} = [\nabla\times\mathbf{A}]_i\,(\mathbf{d}S)^i$, имеющей проекции на координатные плоскости $(\mathbf{d}S)^i = \{\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z,\ \mathbf{d}z\wedge\mathbf{d}x,\ \mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y\}$. В 4-мерном пространстве это уже будет не вектор, а тензор, но, тем не менее, компоненты подобной 2-формы будут являться обобщённым вариантом ротора.

Аналогично, пусть есть 2-форма, которую в 3-мерном пространстве можно интерпретировать, как “поток” векторного поля:

$$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z + A_y\,\mathbf{d}z\wedge\mathbf{d}x + A_z\,\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y.$$

Проводя внешнее дифференцирование, получаем произведение дивергенции на “объём”:

$$\mathrm{d}\mathbf{A} = \Bigl(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\Bigr)\,\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z = (\nabla\cdot\mathbf{A})\,\mathbf{d}V.$$

Будем под внешним дифференцированием скалярной функции (это 0-форма) понимать её градиент:

$$\mathrm{d}f \equiv \mathbf{d}f = \partial_i f\,\mathbf{d}x^i.$$

Тогда операторное тождество $\mathrm{d}^2 = 0$, применённое к скалярной функции, соответствует равенству нулю ротора от градиента $\nabla\times(\nabla f) = 0$. Аналогично, $\nabla\cdot[\nabla\times\mathbf{A}] = 0$ (дивергенция ротора равна нулю) является следствием тождества $\mathrm{d}^2 = 0$, применённого к 1-форме (11.101).

Таким образом, градиент, ротор и дивергенция в 3-мерном пространстве получаются в виде внешних дифференцирований 0, 1 и 2 - форм: d(0-форма)$\mapsto$ градиент; d(1-форма)$\mapsto$ ротор; d(2-форма)$\mapsto$ дивергенция. В 4-мерном пространстве эта цепочка будет на единицу длиннее.

11.10 Дуальные формы и интегралы *

• В n-мерном пространстве тензор ${}^*F$ типа $(0, n-k)$ называют *дуальным* к тензору F типа $(k, 0)$, если:

$$({}^*F)_{i_1\dots i_{n-k}} = \frac{1}{k!}\, E_{j_1\dots j_k\, i_1\dots i_{n-k}}\, F^{j_1\dots j_k}. \qquad (11.102)$$

В правой части определения идёт суммирование по первым k индексам антисимметричного *тензора* Леви-Чивиты (стр. 670). Оставшиеся $n-k$ индексов образуют дуальный тензор. Звёздочку называют *оператором Ходжа* (это не комплексное сопряжение!). Операция дуализации, как и опускание индексов при помощи метрического тензора $F_{ij} = g_{ip}g_{iq}F^{pq}$, связывает два *различных* тензора. Однако принято их обозначать одинаковой буквой (в случае с дуальностью ставя слева звёздочку). Обычно в операции дуализации участвуют антисимметричные тензоры, так как симметричная часть тензора при свёртке с антисимметричным символом Леви-Чивиты даст 0.

В 3-мерном пространстве с $g = \det(g_{ij}) > 0$ существует две операции дуализации (F^{pq} – антисимметричный тензор):

$$ {}^*F_i = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,\varepsilon_{ipq}\, F^{pq}, \qquad {}^*F_{ij} = \sqrt{g}\;\varepsilon_{ijp}\, F^p,$$

где суммирование ведётся по последним индексам, что не принципиально, так как в данном случае $\varepsilon_{ipq} = \varepsilon_{pqi}$, и т.д. Распишем ${}^*F_1$ (для $F^{ij} = -F^{ji}$):

$$ {}^*F_1 = \frac{\sqrt{g}}{2}\,(\varepsilon_{123}\, F^{23} + \varepsilon_{132}\, F^{32}) = \sqrt{g}\; F^{23}.$$

Поэтому компоненты вектора, дуального к тензору F^{ij}, равны:

$$ {}^*F_i = \sqrt{g}\;\{F^{23},\; F^{31},\; F^{12}\}. \qquad (11.103)$$

Аналогично получается антисимметричный тензор (0,2) из вектора (1,0):

$$ {}^*F_{ij} = \sqrt{g}\; \begin{pmatrix} 0 & F^3 & -F^2 \\ -F^3 & 0 & F^1 \\ F^2 & -F^1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (11.104)$$

В 4-мерном пространстве операций дуализации на одну больше:

$$ {}^*F_\alpha = -\frac{1}{6}\sqrt{-g}\;\varepsilon_{\alpha\mu\nu\sigma}\, F^{\mu\nu\sigma}, \qquad {}^*F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\;\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\, F^{\mu\nu}$$

и

$$ {}^*F_{\alpha\beta\gamma} = -\sqrt{-g}\;\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}\, F^{\mu}.$$

Обратим внимание на знаки минус, связанные с нечётной перестановкой индексов суммирования в антисимметричном символе $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в конец.

• В n-мерном пространстве для тензора $\mathbf{F}$ типа $(k, 0)$ и дуального к нему тензора$^*\mathbf{F}$ типа $(0, n-k)$ справедливо следующее тождество:

$$^{**}\mathbf{F} = (-1)^{k(n-k)}\,\mathrm{sign}(g)\,\mathbf{F}, \tag{11.105}$$

где $\mathrm{sign}(g)$ – знак определителя g метрического тензора. Две звёздочки означают двойное применение операции Ходжа (сначала один раз, и затем к результату ещё раз). Докажем это тождество, записав его в координатном виде. Первая дуализация проводится по формуле (11.102). Двойная дуализация равна:

$$(^{**}F)_{i_1\dots i_k} = \frac{1}{(n-k)!}\,E_{j_1\dots j_{n-k}\,i_1\dots i_k}\,(^*F)^{j_1\dots j_{n-k}}.$$

Подставляя в этот соотношение (11.102), имеем:

$$(^{**}F)_{i_1\dots i_k} = \frac{1}{k!(n-k)!}\,E_{j_1\dots j_{n-k}\,i_1\dots i_k}\,E^{\mu_1\dots\mu_k\,j_1\dots j_{n-k}}\,F_{\mu_1\dots\mu_k}.$$

Тензор Леви-Чивиты с нижними индексам равен символу Леви-Чивиты, умноженному на $\sqrt{-g}$. С верхними индексами – множитель $1/\sqrt{-g}$. Поэтому произведение тензоров Леви-Чивиты равно произведению символов Леви-Чивиты. Во втором символе Леви-Чивиты поменяем местами группу индексов $\mu_1\dots\mu_k$ и $j_1\dots j_{n-k}$. Для этого необходимо перенести сначала $n-k$ раз вправо индекс μ_k. Появится множитель $(-1)^{n-k}$. Затем столько же раз переставить индекс μ_{k-1}, и т.д. k раз. Результирующий множитель $(-1)^{k(n-k)}$. Поэтому осталось доказать, что:

$$F_{i_1\dots i_k} = \frac{\mathrm{sign}(g)}{k!(n-k)!}\,\varepsilon_{j_1\dots j_{n-k}\,i_1\dots i_k}\,\varepsilon^{j_1\dots j_{n-k}\,\mu_1\dots\mu_k}\,F_{\mu_1\dots\mu_k}.$$

Все индексные символы в выражении антисимметричны при любой перестановке двух индексов. В суммах по $j_1\dots j_{n-k}$ и $\mu_1\dots\mu_k$ отличны от нуля только те слагаемые, у которых значения всех индексов различны. В суммах по $j_1\dots j_{n-k}$ будет $(n-k)!$ таких ненулевых слагаемых. Для каждого из них в суммах по $\mu_1\dots\mu_k$ получится $k!$ слагаемых. В результате появляется множитель $k!(n-k)!$.

Поэтому, например,

$$F_{1\dots k} = \mathrm{sign}(g)\frac{k!(n-k)!}{k!(n-k)!}\,\varepsilon_{(k+1)\dots n\,1\dots k}\,\varepsilon^{(k+1)\dots n\,1\dots k}\,F_{1\dots k} = F_{1\dots k},$$

где k и n не индексы, а числа. Знак определителя метрического тензора сокращается, т.к. в псевдоевклидовых пространствах с нечётной сигнатурой метрики (например $++---$) по определению принято, что $\varepsilon^{1\dots n} = -\varepsilon_{1\dots n} = -1$.

• Косое произведение градиентов координат и образуемые с их помощью формы также являются тензорами (по нижними индексам). Поэтому к ним применима операция дуализации. Распишем, например, $\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y$ в 3-мерных декартовых координатах. В этом случае нижние и верхние индексы в (11.102) совпадают. Используя матрицы на стр. 715 и полученные компоненты ${}^*F_i$ (11.103), имеем:

$$^*(\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y)_i = \{(\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y)_{23},\ (\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y)_{31},\ (\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y)_{12}\} = \{0,0,1\} = \mathbf{d}z.$$

Также проводятся вычисления для остальных двух пар косых произведений. В результате:

$$^*(\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z) = \mathbf{d}x, \qquad ^*(\mathbf{d}z\wedge\mathbf{d}x) = \mathbf{d}y, \qquad ^*(\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y) = \mathbf{d}z.$$

Обратим внимание на порядок градиентов координат в косых произведениях. Они такие же как и произведения компонент векторного произведения. В частности $[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]_y = a_zb_x - a_xb_z$.

Аналогично для $({}^*\mathbf{d}x)_{ij} = \varepsilon_{ij\alpha}\,(\mathbf{d}x)_\alpha$, используя матрицу ${}^*F_{ij}$ (11.104) для $(\mathbf{d}x)_\alpha = \{1,0,0\}$, получаем матрицу $\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z$ (стр. 715), и т.д.:

$$^*\mathbf{d}x = \mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z, \qquad ^*\mathbf{d}y = \mathbf{d}z\wedge\mathbf{d}x, \qquad ^*\mathbf{d}z = \mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y.$$

Таким образом, в данном случае операция двойной дуализации является единичной ${}^{**}\mathbf{d}x = \mathbf{d}x$, и т.д. Этот же результат можно было получить сразу при помощи формулы (11.105), в которой при $n = 3$ знак плюс возникает как для $k = 1$, так и для $k = 2$.

Можно применять дуализацию и к общим формам, в которых градиенты координат умножаются на некоторые числа (или функции). Например:

$$^*\mathbf{A} = {}^*(A_x\mathbf{d}x + A_y\mathbf{d}y + A_z\mathbf{d}z) = A_x\,\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z + A_y\,\mathbf{d}z\wedge\mathbf{d}x + A_z\,\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y.$$

Такая форма ("поток вектора через поверхность") была использована для получения дивергенции. Поэтому, если $\mathbf{A} = A_x\mathbf{d}x + A_y\mathbf{d}y + A_z\mathbf{d}z$, то $\mathrm{d}\mathbf{A}$ является ротором, а $\mathrm{d}\,{}^*\mathbf{A}$ – дивергенцией. Это утверждение применимо и к произвольным размерностям пространства. В этом случае, звезда Ходжа превращает 1-форму бесконечно малого смещения в пространстве в $(n-1)$-форму элемента гиперповерхности в $n-$мерном пространстве.

В криволинейных (не декартовых) координатах формулы дуализации форм содержат метрический тензор и его определитель. Рассмотрим подробнее такие соотношения на примере пространства событий теории относительности. Аналогичные соотношения для трёхмерного пространства предлагается получить в качестве упражнения.

• В 4-мерном псевдоевклидовом пространстве компоненты косых произведений следующим образом выражаются через символы Кронекера

$$(\mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu)_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \delta^\mu_\alpha & \delta^\nu_\alpha \\ \delta^\mu_\beta & \delta^\nu_\beta \end{vmatrix}, \quad (\mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu \wedge \mathbf{d}x^\sigma)_{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} \delta^\mu_\alpha & \delta^\nu_\alpha & \delta^\sigma_\alpha \\ \delta^\mu_\beta & \delta^\nu_\beta & \delta^\sigma_\beta \\ \delta^\mu_\gamma & \delta^\nu_\gamma & \delta^\sigma_\gamma \end{vmatrix} \qquad (11.106)$$

или учитывая (стр. 810) свойства свёрток символов Леви-Чивиты:

$$(\mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu)_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\tau}, \qquad (\mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu \wedge \mathbf{d}x^\sigma)_{\alpha\beta\gamma} = -\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\tau}.$$

Кроме этого справедливо тождество $(*)$:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}(\mathbf{d}x^\mu)_\delta = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu)_{\gamma\delta} = \frac{1}{6}\,\varepsilon_{\alpha\mu\nu\sigma}(\mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu \wedge \mathbf{d}x^\sigma)_{\beta\gamma\delta},$$

проверяемое подстановкой компонент косых произведений, записанных при помощи символов Кронекера (11.106).

Эти соотношения позволяют получить следующие выражения для дуализации косых произведений (нижние индексы компонент тензоров слева и справа одинаковые и поэтому не выписаны):

$$^*(\mathbf{d}x^\mu) = \frac{1}{6}\,E^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}\,\mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta \wedge \mathbf{d}x^\gamma, \qquad (11.107)$$

$$^*(\mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu) = \frac{1}{2}\,E^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\,\mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta, \qquad (11.108)$$

$$^*(\mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu \wedge \mathbf{d}x^\sigma) = E^{\mu\nu\sigma}{}_\alpha\,\mathbf{d}x^\alpha. \qquad (11.109)$$

где $E^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} = g^{\mu\nu}\,E_{\nu\alpha\beta\gamma}$ и т.д. Докажем, например, (11.108). По определению дуализации, имеем:

$$^*(\mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,E_{\sigma\tau\alpha\beta}\,g^{\sigma\gamma}g^{\tau\lambda}(\mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu)_{\gamma\lambda} = \frac{1}{2}\,E_{\sigma\tau\alpha\beta}\,g^{\sigma\gamma}g^{\tau\lambda}(\delta^\mu_\gamma\delta^\nu_\lambda - \delta^\mu_\lambda\delta^\nu_\gamma).$$

Сворачивая с символами Кронекера, имеем

$$^*(\mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu)_{\alpha\beta} = \sqrt{-g}\,g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\,\varepsilon_{\sigma\tau\alpha\beta} = \sqrt{-g}\,g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\sigma\tau\gamma\delta}(\mathbf{d}x^\gamma \wedge \mathbf{d}x^\delta)_{\alpha\beta},$$

где в последнем равенстве символ Леви-Чивиты выражен при помощи тождества $(*)$ через компоненты косого произведения.

Отметим также правило перебрасывания индексов (ниже это α и ν), справедливое для любого антисимметричного тензора $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$:

$$\frac{1}{2}\,F^{\mu\nu}\,\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\,\mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\sigma \wedge \mathbf{d}x^\tau = \frac{1}{3}\,F^{\mu\alpha}\,\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\,\mathbf{d}x^\nu \wedge \mathbf{d}x^\sigma \wedge \mathbf{d}x^\tau. \qquad (11.110)$$

Оно доказывается применением к нему операции дуализации ($\lessdot$ H_{196}).

• Выше мы видели (стр. 719), что внешнее дифференцирование 1-формы приводит к ротору, умноженному на 2-форму элемента поверхности. С учётом теоремы Стокса формально можно записать:

$$\int_L \underbrace{A_i\,\mathbf{d}x^i}_{\mathbf{A}} = \int_S \underbrace{[\nabla\times\mathbf{A}]_i\,\mathbf{d}S^i}_{\mathrm{d}\mathbf{A}}.$$

"Смещение" вдоль контура равно $\mathbf{d}x^i$ и определяет 1-форму $\mathbf{A}$. Элемент "площади" $\mathbf{d}S^i = \{\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z,\ \mathbf{d}z\wedge\mathbf{d}x,\ \mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y\}$ возникает при внешнем дифференцировании этой 1-формы. Кавычки у "смещения" и "площади" напоминают, что полноценными контурами и площадями эти выражения станут при их свертке с вектором, касательным к контуру, или двумя векторами, образующими параллелограмм площади в окрестности каждой бесконечно малой области интегрирования. Именно в таком смысле необходимо понимать интегралы от дифференциальных форм, которые не являются бесконечно малыми величинами.

Аналогично в формах записывается теорема Гаусса:

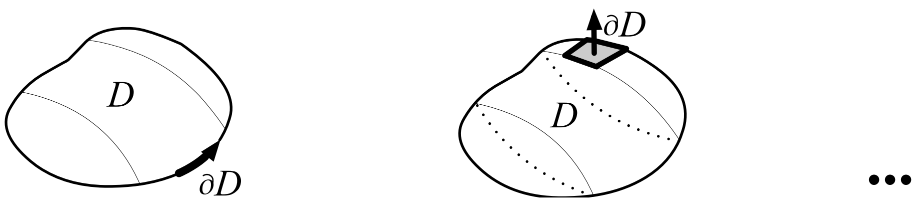
$$\int_S \underbrace{A_i\cdot\mathbf{d}S^i}_{\mathbf{A}} = \int_V \underbrace{(\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{d}V}_{\mathrm{d}\mathbf{A}},$$

где элемент "объёма" равен $\mathbf{d}V = \mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z$.

Эти соотношения можно представить в виде единой интегральной теоремы, которая объединяет терему Гаусса и Стокса, а также справедлива для пространств произвольной размерности:

$$\int_{\partial D}\mathbf{A} = \int_D \mathrm{d}\mathbf{A}, \tag{11.111}$$

где $\mathbf{A}$ – некоторая форма (тензор, свёрнутый с косыми произведениями), D – область в пространстве, а ∂D – её граница. В 3-мерном пространстве, например, D может быть открытой поверхностью S, а ∂D – её границей L, или D – некоторый объём V, а ∂D – окружающая его замкнутая поверхность S:



Несложно видеть, что размерность формы $\mathbf{A}$ и ∂D должны совпадать.

• В 4-мерном псевдоевклидовом пространстве в произвольных криволинейных координатах x^μ определить поток вектора через 2-поверхность нельзя (компонент у вектора 4, а проекций элемента поверхности на координатные плоскости - 6). Но можно определить "поток" вектора "через" гиперповерхность (3-мерный объект!). Это будет 3-форма. Пусть в 4-мерном псевдоевклидовом пространстве задана 1-форма:

$$\mathbf{A} = A_\mu \, \mathbf{d}x^\mu.$$

По формуле (11.107), имеем

$${}^*\mathbf{A} = A_\mu \, ({}^*\mathbf{d}x^\mu) = \frac{1}{6} \, \sqrt{-g} \, A^\nu \, \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} \, \mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta \wedge \mathbf{d}x^\gamma,$$

где $A^\nu = g^{\nu\mu} A_\mu$. Внешнее дифференцирование сопряжённой формы ${}^*\mathbf{A}$ равно:

$$\mathrm{d}\, {}^*\mathbf{A} = \frac{1}{6} \, \partial_\delta(\sqrt{-g} \, A^\nu) \, \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} \, \mathbf{d}x^\delta \wedge \mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta \wedge \mathbf{d}x^\gamma.$$

Косое произведение четырёх градиентов (сопряженных базисных векторов) отлично от нуля только, когда все 4 индекса различны. Расписывая сумму по $\delta = 0, ..., 3$, получаем:

$$\mathrm{d}\, {}^*\mathbf{A} = \partial_\nu(\sqrt{-g} \, A^\nu) \, \mathbf{d}x^0 \wedge \mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3 = D_\nu A^\nu \, \sqrt{-g} \, \mathbf{d}x^0 \wedge \mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3,$$

где $D_\nu A^\nu = \partial_\nu(\sqrt{-g} \, A^\nu)/\sqrt{-g}$ – ковариантная 4-дивергенция в криволинейных координатах (см. стр. 669). Эта дивергенция умножается на 4-форму инвариантного объёма $\mathbf{d}V$ (обратим внимание на множитель $\sqrt{-g}$).

Применяя интегральную теорему (11.111), можно записать 4-мерный вариант теоремы Гаусса:

$$\int_{\partial D} {}^*\mathbf{A} \; = \; \int_D \mathrm{d}\, {}^*\mathbf{A}. \qquad => \qquad \int A_\mu \mathbf{d}S^\mu = \int D_\mu A^\mu \, \mathbf{d}V.$$

Если же взять внешнее дифференцирование от исходной 1-формы, то получится 4-мерный аналог ротора

$$\mathrm{d}\mathbf{A} = \partial_\nu A_\mu \, \mathbf{d}x^\nu \wedge \mathbf{d}x^\mu = \frac{1}{2} \, (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) \, \mathbf{d}x^\nu \wedge \mathbf{d}x^\mu$$

Соответственно, интегральная теорема (11.111) приводит к 4-мерной версии теоремы Стокса с интегрированием по контуру и 2-поверхности.

Напомним ещё раз, что при интегрировании выражений с формами их необходимо свернуть с векторами смещения в пространстве, которые определяют контур, 2-поверхность, 3-поверхность, и т.д. В результате получатся обычные k-кратные интегралы.

11.11 Формы в физике и геометрии *

В этой книге уравнения Максвелла были записаны уже пятью (!) различными способами: в трёхмерном виде при помощи оператора наблы (стр. 282), в ковариантной форме в лоренцевых координатах (стр. 430), на языке кватернионов (стр. 536) и спиноров (стр. 558). Наконец, в этой главе уравнения Максвелла записаны при помощи ковариантных производных (стр. 682). Теперь нам предстоит освоиться с ещё одним способом работы с этими (и аналогичными) уравнениями поля на языке дифференциальных форм.

Заметим, что любой из перечисленных выше способов записи уравнений в известной степени эквивалентен всем остальным. Для конкретной задачи выбирается тот инструмент, который удобнее (лаконичнее, быстрее позволяет получить требуемый результат и т.д.). Ковариантное дифференцирование и формы – это наиболее общий подход, в том смысле, что он справедлив в различных пространствах и координатах, а также легко обобщается на произвольные размерности. В любом случае, все эти языки необходимо знать, чтобы понимать других людей которые на них "говорят".

Образуем при помощи ковариантных компонент 4-вектора потенциалов $A_\alpha = g_{\alpha\beta}A^\beta$, 1-форму (жирный шрифт – это формы, а не 3-векторы!):

$$\mathbf{A} = A_\beta\,\mathbf{d}x^\beta$$

и возьмём от неё внешний дифференциал:

$$\mathbf{F} = \mathrm{d}\mathbf{A} = \partial_\alpha A_\beta\,\mathbf{d}x^\alpha\wedge\mathbf{d}x^\beta = \frac{1}{2}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)\,\mathbf{d}x^\alpha\wedge\mathbf{d}x^\beta = \frac{1}{2}\,F_{\alpha\beta}\,\mathbf{d}x^\alpha\wedge\mathbf{d}x^\beta.$$

Это 2-форма, компоненты которой являются антисимметричным тензором напряженностей поля $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$. Пользуясь соотношением (11.108), стр. 723 запишем дуальную к ней форму:

$$^*\mathbf{F} = \frac{1}{4}\,F^{\mu\nu}\,E_{\mu\nu\sigma\tau}\,\mathbf{d}x^\sigma\wedge\mathbf{d}x^\tau = \frac{1}{2}\,{}^*F_{\sigma\tau}\,\mathbf{d}x^\sigma\wedge\mathbf{d}x^\tau,$$

где ${}^*F_{\alpha\beta} = (1/2)\,E_{\alpha\beta\mu\nu}\,F^{\mu\nu}$ – компоненты тензора, дуального к $F^{\alpha\beta}$. Введём также 1-форму тока

$$\mathbf{J} = j_\alpha\mathbf{d}x^\alpha.$$

Дуальная к ней форма имеет вид:

$$^*\mathbf{J} = \frac{1}{6}\,j^\alpha E_{\alpha\mu\nu\sigma}\,\mathbf{d}x^\mu\wedge\mathbf{d}x^\nu\wedge\mathbf{d}x^\sigma, \tag{11.112}$$

где учтено соотношение (11.107).

Теперь всё готово к записи уравнений Максвелла на языке дифференциальных форм:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = 0, \qquad \mathrm{d}\,{}^*\mathbf{F} = -4\pi\,{}^*\mathbf{J}. \tag{11.113}$$

Первое уравнение является тождеством, так как двойное применение внешнего дифференцирования равно нулю: $\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathrm{d}^2\mathbf{A} = 0$, см. стр. 718. Покажем, что оно эквивалентно уравнению (11.44), стр. 682. Беря внешний дифференциал от 2-формы $\mathbf{F}$, имеем:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu F_{\alpha\beta}\,\mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta.$$

Произведение трёх градиентов координат антисимметрично, поэтому это уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \frac{1}{6}\,(\partial_\mu F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\mu} + \partial_\beta F_{\mu\alpha})\,\mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta.$$

Например, для второго слагаемого сделаны замены суммационных индексов $\mu \mapsto \alpha$, $\alpha \mapsto \beta$, $\beta \mapsto \mu$, после чего упорядочены "дифференциалы" в косом произведении. Выражение в круглых скобках равно нулю в силу уравнения (11.44), следовательно и $\mathrm{d}\mathbf{F} = 0$.

Второе уравнение (11.114) также проверяется прямым вычислением внешнего дифференциала:

$$\mathrm{d}\,{}^*\mathbf{F} = \frac{1}{4}\,\partial_\alpha(F^{\mu\nu}\,E_{\mu\nu\sigma\tau})\,\mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\sigma \wedge \mathbf{d}x^\tau.$$

Обратим внимание, что производная подействовала как на $F^{\mu\nu}$, так и на тензор $E_{\mu\nu\sigma\tau} = \sqrt{-g}\,\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}$ (в криволинейных координатах он зависит от метрического тензора и, следовательно, не является константой). Переставляя *верхние* индексы α и ν при помощи тождества (11.110), имеем:

$$\mathrm{d}\,{}^*\mathbf{F} = \frac{1}{6}\,\partial_\alpha(\sqrt{-g}\,F^{\mu\alpha})\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\,\mathbf{d}x^\nu \wedge \mathbf{d}x^\sigma \wedge \mathbf{d}x^\tau,$$

Учитывая что $F^{\mu\alpha} = -F^{\alpha\mu}$ и сравнивая с (11.112), из $\mathrm{d}\,{}^*\mathbf{F} = -4\pi\,{}^*\mathbf{J}$ получаем ковариантное уравнение (11.45), стр. 682:

$$\partial_\alpha(\sqrt{-g}\,F^{\alpha\beta}) = 4\pi\,\sqrt{-g}\,j^\beta.$$

Заметим, из второго уравнения Максвелла с токами сразу ($\mathrm{d}^2 = 0$) следует уравнение непрерывности для тока:

$$\mathrm{d}\,{}^*\mathbf{J} = 0. \tag{11.114}$$

Беря внешнюю производную от (11.112) получаем:

$$\partial_\alpha(\sqrt{-g}\;j^\alpha) = 0,$$

что является ковариантной записью уравнения непрерывности (11.46).

• Распишем также уравнения Максвелла (11.114) в трёхмерных обозначениях в лоренцевых координатах ($g = -1$). Далее будем использовать 3-форму “объёма” и три 2-формы “проекций площади”:

$$\mathbf{d}V = \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z, \qquad \mathbf{d}S^i = \{\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z,\ \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x,\ \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y\}.$$

По общим формулам (11.107)-(11.109), стр. 723, имеем следующие дуальные формы:

$$^*\mathbf{d}t = \mathbf{d}V, \quad ^*\mathbf{d}x^i = \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}S^i, \quad ^*\mathbf{d}S^i = \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x^i, \quad ^*(\mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x^i) = -\mathbf{d}S^i.$$

Для 4-вектора тока $j^\alpha = \{\rho, \mathbf{j}\}$ или $j_\alpha = \{\rho, -\mathbf{j}\}$, 1-форма тока $\mathbf{J} = j_\alpha \mathbf{d}x^\alpha$ и дуальная к ней форма равны:

$$\mathbf{J} = \rho\, \mathbf{d}t - j^i \mathbf{d}x^i, \qquad ^*\mathbf{J} = \rho\, \mathbf{d}V - j^i\, \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}S^i.$$

Уравнение непрерывности $\mathrm{d}^*\mathbf{J} = 0$ запишем, вычисляя явным образом внешнюю производную от

$$^*\mathbf{J} = \rho\, \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z - j_x\, \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z - j_y\, \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x - j_z\, \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$$

(далее для проекций 3-векторов не различаем верхние и нижние индексы: $j^1 = j_x$, и т.д.). При взятии внешней производной, оставляем только градиенты не обнуляющие косые произведения:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,^*\mathbf{J} \;&=\; \frac{\partial \rho}{\partial t}\, \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z - \frac{\partial j_x}{\partial x}\, \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z \\ &-\; \frac{\partial j_y}{\partial y}\, \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x - \frac{\partial j_z}{\partial z}\, \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y. \end{aligned}$$

Упорядочивая переменные в косых произведениях (с учётом их антисимметричности), имеем:

$$\mathrm{d}^*\mathbf{J} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j}\right) \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}V = 0.$$

Выражение в круглых скобках – это 3-мерная запись уравнения непрерывности для тока и всё выражение, следовательно, равно нулю.

Компоненты 2-формы напряженностей поля $\mathbf{F} = (1/2)\, F_{\alpha\beta}\, \mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta$, как обычно, выразим через напряженности электрического и магнитного полей:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

(для компонент напряженностей полей также не различаем верхние и нижние индексы).

Расписывая суммы по α и β, имеем:

$$\mathbf{F} = E^i\,\mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x^i - B^i\,\mathbf{d}S^i.$$

Дуальная к ней форма равна:

$$^*\mathbf{F} = -B^i\,\mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x^i - E^i\,\mathbf{d}S^i.$$

Обратим внимание, что $^*\mathbf{F}$ получается из $\mathbf{F}$ заменами $\mathbf{E} \mapsto -\mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \mapsto \mathbf{E}$ (как получается и $^*F_{\mu\nu}$, стр. 429 из $F_{\mu\nu}$). Запишем $\mathbf{F}$ в явном виде:

$$\mathbf{F} = E_x\,\mathbf{d}t\wedge\mathbf{d}x + E_y\,\mathbf{d}t\wedge\mathbf{d}y + E_z\,\mathbf{d}t\wedge\mathbf{d}z - B_x\,\mathbf{d}y\wedge\mathbf{d}z - B_y\,\mathbf{d}z\wedge\mathbf{d}x - B_z\,\mathbf{d}x\wedge\mathbf{d}y$$

и возьмём внешний дифференциал, опуская сразу нулевые косые произведения (по повторяющимся переменным):

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{F} = &\Bigl[\frac{\partial E_x}{\partial y}\,\mathbf{d}y + \frac{\partial E_x}{\partial z}\,\mathbf{d}z\Bigr] \wedge \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x - \Bigl[\frac{\partial B_x}{\partial t}\,\mathbf{d}t + \frac{\partial B_x}{\partial x}\,\mathbf{d}x\Bigr] \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z \\ &+ \Bigl[\frac{\partial E_y}{\partial x}\,\mathbf{d}x + \frac{\partial E_y}{\partial z}\,\mathbf{d}z\Bigr] \wedge \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}y - \Bigl[\frac{\partial B_y}{\partial t}\,\mathbf{d}t + \frac{\partial B_y}{\partial y}\,\mathbf{d}y\Bigr] \wedge \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x \\ &+ \Bigl[\frac{\partial E_z}{\partial x}\,\mathbf{d}x + \frac{\partial E_z}{\partial y}\,\mathbf{d}y\Bigr] \wedge \mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}z - \Bigl[\frac{\partial B_z}{\partial t}\,\mathbf{d}t + \frac{\partial B_z}{\partial z}\,\mathbf{d}z\Bigr] \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y. \end{aligned}$$

Переставим косые произведения и перегруппируем слагаемые:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = -\Bigl([\nabla \times \mathbf{E}]_i + \frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial t}\Bigr)\,\mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}S^i - \bigl(\nabla \cdot \mathbf{B}\bigr)\,\mathbf{d}V = 0.$$

Это выражение равно нулю, если равны нулю коэффициенты при формах, откуда следуют уравнения Максвелла без токов, выражающие закон Фарадея и факт отсутствия магнитных зарядов (закон Гаусса для магнитного поля):

$$[\nabla \times \mathbf{E}] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Внешняя производная от дуального тензора $^*\mathbf{F}$ берётся также, и результат можно записать сразу, сделав в $\mathrm{d}\mathbf{F}$ замены $\mathbf{E} \mapsto -\mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \mapsto \mathbf{E}$:

$$\mathrm{d}^*\mathbf{F} = \Bigl([\nabla \times \mathbf{B}]_i - \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial t}\Bigr)\,\mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}S^i - \bigl(\nabla \cdot \mathbf{E}\bigr)\,\mathbf{d}V.$$

Приравнивая коэффициенты при различных формах в уравнении Максвелла $\mathrm{d}^*\mathbf{F} = -4\pi\,^*\mathbf{J}$, получаем его трёхмерные эквиваленты:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\,\rho, \qquad \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi\,\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

(закон Гаусса для электрического поля и закон Ампера-Максвелла).

• В качестве второго примера использования форм, рассмотрим дифференциальную геометрию. Количество компонент символов Кристоффеля (связностей) и тензора кривизны быстро растёт с увеличением размерности пространства n. Чтобы вычислить связности по формуле (11.8), стр. 665 необходимо перебрать $n\,(n^2+n)/2$ комбинаций индексов (40 в 4-мерном пространстве). Тензор кривизны, с учетом свойств симметрии (11.79), (11.80), стр. 698 имеет $n(n-1)(n^2-n+2)/8$ различных компонент (21 в 4-мерном пространстве). Если геометрия пространства обладает определённой симметрией, многие компоненты связностей и тензора кривизны равны нулю. Дифференциальные формы позволяют получить все ненулевые значения без перебора индексов.

Определим при помощи метрического тензора g_{ij} и связностей $\Gamma_{i,jk}$ следующие 1-формы:

$$\omega_i = g_{ij}\,\mathbf{d}x^j, \qquad\qquad \omega_{ij} = \Gamma_{i,jk}\,\mathbf{d}x^k.$$

Поднимая индекс, можно записать дополнительные 1-формы:

$$\omega^i = g^{ip}\omega_p = \mathbf{d}x^i, \qquad\qquad \omega^i{}_j = g^{ip}\omega_{pj} = \Gamma^i_{jk}\,\mathbf{d}x^k.$$

Таким образом, ω^i являются градиентами координат, а $\omega^i{}_j$ содержат в качестве коэффициентов связности с верхним индексом. В общем случае формы ω_{ij} не симметричны, поэтому обратим внимание на то, что в них поднимается именно первый индекс. Вычислим следующее выражение:

$$\mathrm{d}\omega^i_j + \omega^i{}_k\wedge\omega^k{}_j = \big(\partial_p\Gamma^i{}_{jq} + \Gamma^i{}_{kp}\Gamma^k{}_{jq}\big)\,\mathbf{d}x^p\wedge\mathbf{d}x^q.$$

В первом слагаемом записан внешний дифференциал для $\omega^i{}_j = \Gamma^i_{jq}\,\mathbf{d}x^q$. Второе слагаемое равно произведению форм. Сложим это выражение дважды, разделив на 2. Затем во втором слагаемом переименуем индексы $p\leftrightarrow q$ (индекс p назовём q, и наоборот):

$$\frac{1}{2}\big(\partial_p\Gamma^i{}_{jq} + \Gamma^i{}_{kp}\Gamma^k{}_{jq}\big)\,\mathbf{d}x^p\wedge\mathbf{d}x^q + \frac{1}{2}\big(\partial_q\Gamma^i{}_{jp} + \Gamma^i{}_{kq}\Gamma^k{}_{jp}\big)\,\mathbf{d}x^q\wedge\mathbf{d}x^p.$$

Переставим во втором члене сомножители в косом произведении. В силу его антисимметричности получаем *структурное уравнение Картана*:

$$\mathrm{d}\omega^i_j + \omega^i_k\wedge\omega^k{}_j \;=\; \frac{1}{2}\,R^i_{j,\,pq}\,\mathbf{d}x^p\wedge\mathbf{d}x^q, \tag{11.115}$$

где $R^i{}_{j,pq}$ – тензор кривизны (11.77), стр. 696.

Если в n-мерном пространстве известно n^2 форм ω^i_j, то при вычислении левой части уравнения Картана получится 2-форма, коэффициенты которой будут являться *ненулевыми* компонентами тензора кривизны.

Для римановой геометрии с симметричными связностями несложно записать явное выражение *форм связности* ω_{ij} через коэффициенты метрического тензора:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\,(\mathrm{d}g_{ij} + \partial_j\omega_i - \partial_i\omega_j) \;=\; \frac{1}{2}\,(\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk})\,\mathbf{d}x^k = \Gamma_{i,jk}\,\mathbf{d}x^k.$$

Внешний дифференциал от метрических коэффициентов (0-форма) вычисляется обычным образом: $\mathrm{d}g_{ij} = \partial_k g_{ij}\,\mathbf{d}x^k$. Частные производные от форм ω_i берутся только от коэффициентов этих форм: $\partial_i\omega_j = \partial_i g_{jk}\,\mathbf{d}x^k$. Кажется, что первое равенство в определении ω_{ij} не обладает особыми преимуществами перед явным выражением символов Кристоффеля $\Gamma_{i,jk}$ через метрический тензор во втором равенстве. Однако, определение n^2 форм ω_{ij} часто оказывается проще, чем перебор всех $n\,(n^2+n)/2$ индексов в связностях. В то же время коэффициенты в форме ω_{ij} при $\mathbf{d}x^k$ дают ненулевые символы Кристоффеля.

Проиллюстрируем это на примере метрики в 3-мерной сферической системе координат $dl^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\,s_\theta^2\,d\phi^2$. В этом случае метрический тензор диагонален: $\omega_1 = g_{11}\mathbf{d}x^1$, $\omega_2 = g_{22}\mathbf{d}x^2$, $\omega_3 = g_{33}\mathbf{d}x^3$. Матрицу 1-форм ω_{ij} можно записать в следующем явном виде:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{d}g_{11} & \cdot & \cdot \\ \partial_1 g_{22}\,\mathbf{d}x^2 - \partial_2 g_{11}\,\mathbf{d}x^1 & \mathrm{d}g_{22} & \cdot \\ \partial_1 g_{33}\,\mathbf{d}x^3 - \partial_3 g_{11}\,\mathbf{d}x^1 & \partial_2 g_{33}\,\mathbf{d}x^3 - \partial_3 g_{22}\,\mathbf{d}x^2 & \mathrm{d}g_{33} \end{pmatrix},$$

где на месте точек стоят с обратным знаком элементы матрицы под диагональю (т.е. если $i \neq j$, то $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$). Запишем 1-формы связности для сферических координат $g_{11} = 1$, $g_{22} = r^2$, $g_{33} = r^2 s_\theta^2$:

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -r\mathbf{d}\,\theta & -rs_\theta^2\,\mathbf{d}\phi \\ r\mathbf{d}\,\theta & r\,\mathbf{d}r & -r^2 s_\theta c_\theta\,\mathbf{d}\phi \\ rs_\theta^2\,\mathbf{d}\phi & r^2 s_\theta c_\theta\,\mathbf{d}\phi & rs_\theta^2\,\mathbf{d}r + r^2 s_\theta c_\theta\,\mathbf{d}\theta \end{pmatrix}.$$

По определению:

$$\omega_{ij} = \Gamma_{i,j1}\,\mathbf{d}r + \Gamma_{i,j2}\,\mathbf{d}\theta + \Gamma_{i,j3}\,\mathbf{d}\phi,$$

поэтому коэффициенты при градиентах приводят к следующим ненулевым связностям:

$$\Gamma_{1,22} = -r, \qquad \Gamma_{1,33} = -rs_\theta^2, \qquad \Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = r, \qquad \Gamma_{2,33} = -r^2\,s_\theta c_\theta,$$
$$\Gamma_{3,13} = \Gamma_{3,31} = rs_\theta^2, \qquad\qquad \Gamma_{3,23} = \Gamma_{3,32} = r^2 s_\theta c_\theta.$$

Таким образом, вместо перебора 18 коэффициентов связности (с учётом симметрии) мы сразу получили все их ненулевые значения.

Докажем теперь при помощи уравнений Картана (11.115), что в сферических координатах евклидового пространства все компоненты тензора кривизны равны нулю: $R^i{}_{j,pq} = 0$. Перемножая метрический тензор g^{ik} и 1-формы ω_{kj} (см. стр. 731):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 s_\theta^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -r\mathbf{d}\,\theta & -rs_\theta^2\,\mathbf{d}\phi \\ r\,\mathbf{d}\theta & r\,\mathbf{d}r & -r^2 s_\theta c_\theta\,\mathbf{d}\phi \\ rs_\theta^2\,\mathbf{d}\phi & r^2 s_\theta c_\theta\,\mathbf{d}\phi & rs_\theta^2\,\mathbf{d}r + r^2 s_\theta c_\theta\,\mathbf{d}\theta \end{pmatrix}$$

находим 1-формы связности с верхним индексом:

$$\omega^i{}_j = \begin{pmatrix} 0 & -r\,\mathbf{d}\theta & -rs_\theta^2\,\mathbf{d}\phi \\ \frac{\mathbf{d}\theta}{r} & \frac{\mathbf{d}r}{r} & -s_\theta c_\theta\,\mathbf{d}\phi \\ \frac{\mathbf{d}\phi}{r} & \frac{c_\theta}{s_\theta}\,\mathbf{d}\phi & \frac{\mathbf{d}r}{r} + \frac{c_\theta}{s_\theta}\,\mathbf{d}\theta \end{pmatrix}.$$

Её внешняя производная:

$$\mathrm{d}\omega^i{}_j = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{d}r\wedge\mathbf{d}\theta & -s_\theta^2\mathbf{d}r\wedge\mathbf{d}\phi - 2rs_\theta c_\theta\,\mathbf{d}\theta\wedge\mathbf{d}\phi \\ -\frac{\mathbf{d}r\wedge\mathbf{d}\theta}{r^2} & 0 & (s_\theta^2 - c_\theta^2)\,\mathbf{d}\theta\wedge\mathbf{d}\phi \\ -\frac{\mathbf{d}r\wedge\mathbf{d}\phi}{r^2} & -\frac{\mathbf{d}\theta\wedge\mathbf{d}\phi}{s_\theta^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления $\omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_j$ перемножаем матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & -r\mathbf{d}\,\theta & -rs_\theta^2\,\mathbf{d}\phi \\ \frac{\mathbf{d}\theta}{r} & \frac{\mathbf{d}r}{r} & -s_\theta c_\theta\,\mathbf{d}\phi \\ \frac{\mathbf{d}\phi}{r} & \frac{c_\theta}{s_\theta}\,\mathbf{d}\phi & \frac{\mathbf{d}r}{r} + \frac{c_\theta}{s_\theta}\,\mathbf{d}\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & -r\,\mathbf{d}\theta & -rs_\theta^2\,\mathbf{d}\phi \\ \frac{\mathbf{d}\theta}{r} & \frac{\mathbf{d}r}{r} & -s_\theta c_\theta\,\mathbf{d}\phi \\ \frac{\mathbf{d}\phi}{r} & \frac{c_\theta}{s_\theta}\,\mathbf{d}\phi & \frac{\mathbf{d}r}{r} + \frac{c_\theta}{s_\theta}\,\mathbf{d}\theta \end{pmatrix}.$$

Подобное перемножение делается, как обычное умножение матриц (строка на столбец), однако сохраняется последовательность сомножителей и между ними ставится символ косого произведения. Например:

$$\omega^3{}_k \wedge \omega^k{}_2 = -\frac{\mathbf{d}\phi}{r} \wedge r\mathbf{d}\theta + \frac{c_\theta}{s_\theta}\,\mathbf{d}\phi \wedge \frac{\mathbf{d}r}{r} + \Bigl(\frac{\mathbf{d}r}{r} + \frac{c_\theta}{s_\theta}\,\mathbf{d}\theta\Bigr) \wedge \frac{c_\theta}{s_\theta}\,\mathbf{d}\phi.$$

Переставим местами градиенты координат в косом произведении:

$$\omega^3{}_k \wedge \omega^k{}_2 = \mathbf{d}\theta\wedge\mathbf{d}\phi - \frac{c_\theta}{rs_\theta}\,\mathbf{d}r\wedge\mathbf{d}\phi + \frac{c_\theta}{rs_\theta}\,\mathbf{d}r\wedge\mathbf{d}\phi + \frac{c_\theta^2}{s_\theta^2}\,\mathbf{d}\theta\wedge\mathbf{d}\phi = \frac{\mathbf{d}\theta\wedge\mathbf{d}\phi}{s_\theta^2}.$$

Аналогично для остальных элементов. При этом получится матрица $\mathrm{d}\omega^i{}_j$, но с обратным знаком. Поэтому:

$$\mathrm{d}\omega^i{}_j + \omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_j = 0,$$

т.е. тензор кривизны для евклидового пространства равен нулю.

Простейшим пространством с ненулевой кривизной является сфера. Рассмотрим сферу единичного радиуса с $x^i = (\theta, \phi)$:

$$dl^2 = d\theta^2 + s_\theta^2\, d\phi^2, \qquad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_\theta^2 \end{pmatrix}, \qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/s_\theta^2 \end{pmatrix}.$$

1-формы ω_i равны:

$$\omega_1 = \mathbf{d}\theta, \qquad \omega_2 = s_\theta^2\, \mathbf{d}\phi.$$

Поэтому 1-формы связности, записанные в виде матрицы, для *диагонального* тензора g_{ij} имеют вид:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{d}g_{11} & \partial_2\omega_1 - \partial_1\omega_2 \\ \partial_1\omega_2 - \partial_2\omega_1 & \mathrm{d}g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -s_\theta c_\theta\, \mathbf{d}\phi \\ s_\theta c_\theta\, \mathbf{d}\phi & s_\theta c_\theta\, \mathbf{d}\theta \end{pmatrix}.$$

Так как $\omega_{ij} = \Gamma_{i,j1}\mathbf{d}\theta + \Gamma_{i,j2}\mathbf{d}\phi$, отличными от нуля символами Кристоффеля будут:

$$\Gamma_{1,22} = -s_\theta c_\theta, \qquad \Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = s_\theta c_\theta.$$

Умножим ω_{ij} слева на матрицу g^{ij} для получения $\omega^i_{\ j}$ и возьмём внешний дифференциал от этих 1-форм:

$$\omega^i_{\ j} = \begin{pmatrix} 0 & -s_\theta c_\theta\ \mathbf{d}\phi \\ \frac{c_\theta}{s_\theta}\mathbf{d}\phi & \frac{c_\theta}{s_\theta}\mathbf{d}\theta \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{d}\omega^i_{\ j} = \begin{pmatrix} 0 & s_\theta^2 - c_\theta^2 \\ -\frac{1}{s_\theta^2} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{d}\theta \wedge \mathbf{d}\phi.$$

Перемножим матрицы $\omega^i_{\ j}$ (не забывая про косое произведение):

$$\omega^i_{\ k} \wedge \omega^k_{\ j} = \begin{pmatrix} 0 & -s_\theta c_\theta\, \mathbf{d}\phi \\ \frac{c_\theta}{s_\theta}\mathbf{d}\phi & \frac{c_\theta}{s_\theta}\mathbf{d}\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & -s_\theta c_\theta\, \mathbf{d}\phi \\ \frac{c_\theta}{s_\theta}\mathbf{d}\phi & \frac{c_\theta}{s_\theta}\mathbf{d}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_\theta^2 \\ \frac{c_\theta^2}{s_\theta^2} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{d}\theta \wedge \mathbf{d}\phi.$$

Напомним, что $\mathbf{d}\phi \wedge \mathbf{d}\theta = -\mathbf{d}\theta \wedge \mathbf{d}\phi$. Окончательно:

$$\mathrm{d}\omega^i_{\ j} + \omega^i_{\ k} \wedge \omega^k_{\ j} = \begin{pmatrix} 0 & s_\theta^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{d}\theta \wedge \mathbf{d}\phi = R^i_{\ j,12}\, \mathbf{d}\theta \wedge \mathbf{d}\phi.$$

Поэтому ненулевые коэффициенты тензора кривизны равны:

$$R^1_{\ 2,12} = s_\theta^2, \qquad R^2_{\ 1,12} = -1.$$

Опуская индекс вниз, приходим (как и должно быть в 2-х измерениях) к единственной независимой компоненте: $R_{12,12} = s_\theta^2$. Напомним (стр. 701), что скалярная кривизна в 2-мерном пространстве равна:

$$R = \frac{2R_{12,12}}{g} = 2\frac{s_\theta^2}{s_\theta^2} = 2 = 2K.$$

Коэффициент K называется *гауссовой кривизной*.

11.12 Многообразие **

• Физик, думая о пространстве, представляет множество точек, которые *непрерывно* заполняют это пространство . Простейшая математическая модель n-мерного пространства – это множество упорядоченных последовательностей из n вещественных чисел $\mathbf{x} = \{x^1, ..., x^n\}$ (вверху индексы), обозначаемое, как $\mathbb{R}^n$. Каждая такая последовательность является точкой пространства. У каждой точки есть сколь угодно малая окрестность, в которой есть другие точки. Чтобы говорить об окрестности, необходимо некоторым образом определить понятие близости или расстояния $d = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Подобная функция ещё не является "физическим" расстоянием и может быть достаточно произвольной, задавая лишь степень близости точек. Например:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x^1 - y^1| + ... + |x^n - y^n| \quad \text{или} \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max(|x^1 - y^1|, ..., |x^n - y^n|).$$

Окрестность точки $\mathbf{x}$ радиуса r – это точки $\mathbf{y}$, для которых $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r$. *Открытое множество* U содержит точки, *каждая* из которых имеет окрестность, полностью принадлежащую U. Например, в $\mathbb{R}^1$ множество $a < x < b$ открыто, а $a \leqslant x < b$ – нет, так как точка a не имеет окрестности, полностью лежащей в этом множестве. Пересечение или объединение открытых множеств также является открытым множеством.

Наряду с множеством элементов, в основе всех математических теорий лежит понятие "*отображения*". В результате отображения элементы одного множества ставятся в соответствие элементам другого множества. Например, каждой матрице соответствует её определитель. Матрицы и определители – это элементы различных множеств. Отображение $\det: \mathbb{D} \mapsto \mathbb{R}$ направлено из множества матриц $\mathbb{D}$ в множество определителей $\mathbb{R}$ (чисел). В данном примере обратное отображение не определено (по определителю нельзя восстановить матрицу).

Отображение можно записывать в функциональном виде $\det(\mathbb{D}) = \mathbb{R}$. Обычная вещественная функция $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ или $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ является отображением. Она может быть однозначной или многозначной. Т.е. отображение $f(x)$ каждому x должно давать одно $y = f(x)$. Но каждому $y = f(x)$ не обязательно соответствует одно x.

Взаимно-однозначное отображение (или 1-1 отображение) – это отображение, "работающее" в обе стороны. Для такого $f: \mathbb{A} \mapsto \mathbb{B}$ всегда существует обратное отображение $f^{-1}: \mathbb{B} \mapsto \mathbb{A}$. Функции $y = x$, $y = x^3$ являются взаимно-однозначными отображениями. Функции $y = x^2$, $y = \sin(x)$ – нет, так как они многозначны.

• *Многообразие* $\mathbb{M}^n$ – это множество точек, каждая из которых имеет открытую окрестность, допускающую непрерывное взаимно-однозначное отображение на открытое множество $\mathbb{R}^n$. Естественно $\mathbb{R}^n$ также является многообразием. Могут быть более общие модели пространства. Однако все они (являясь многообразием) *локально* подобны $\mathbb{R}^n$. *Размерностью* многообразия служит число n, а отображение в $\mathbb{R}^n$ называется *координатным*. Числа $\{x^1, ..., x^n\} \in \mathbb{R}^n$ – это координаты точки многообразия. Многообразие – это очень общее понятие. На данном уровне аксиоматики ещё нет расстояний, углов и т.п. "привычных" элементов геометрии. Есть лишь *локальная топология* точек и их окрестностей, которые в многообразии "устроены" так же, как и в $\mathbb{R}^n$.

Картой называется окрестность данной точки многообразия $p \in \mathbb{M}^n$ вместе с её отображением $f\ :\ \mathbb{M}^n \mapsto \mathbb{R}^n$. Окрестности разных точек могут иметь различные карты. Множество перекрывающихся карт, отражающих все точки многообразия, называется *атласом*.

Простейший пример многообразия, глобально отличного от $\mathbb{R}^n$ – это точки поверхности сферы. Какие бы способы отображения мы не придумывали, *все* точки 2-мерной сферы нельзя отобразить в плоскость $\mathbb{R}^2$. Однако, если у сферы выколоть (выбросить) одну точку, то она *топологически* станет эквивалентна плоскости. Стоит представить себе такую сферу резиновой и растянуть её через выколотую "дырку" в плоскость.

Сфера может быть представлена атласом, состоящим минимум из двух карт. Например, это могут быть проекции (отображения!) точек северного и южного полушарий на плоскость, проходящую через центр по экватору сферы (точнее, нужны две несовпадающие плоскости, чтобы получить на картах открытое множество перекрывающихся точек).

Необходимо различать локальную и *глобальную топологию*. Сфера и тор имеют одинаковую локальную топологию (подобную $\mathbb{R}^n$), но различную глобальную топологию. Например, резиновый тор никакими растяжениями поверхности нельзя превратить в сферу.

В *связных многообразиях* при помощи последовательности перекрывающихся окрестностей можно перейти от одной точки к любой другой. Две сферы с общим центром и различными радиусами являются *несвязным многообразием*. Заметим, что *связностью* 2-мерных поверхностей также называют количество несводимых друг к другу деформацией замкнутых контуров. Плоскость и сфера односвязны. Круг с вырезанной дыркой двухсвязный. Тор - трёхсвязное многообразие.

Многообразия могут быть очень разнообразными: фазовое пространство импульсов и координат (p, q); все вращения твёрдого тела и т.д.

• *Кривая* на многообразии $\mathbb{M}^n$ – это дифференцируемое отображение $\mathbb{R}$ на $\mathbb{M}^n$. Пусть на некоторой карте определены дифференцируемые функции $\{x^1(t), ..., x^n(t)\}$. В силу взаимной однозначности отображения $\mathbb{M}^n$ на $\mathbb{R}^n$ эти функции определяют кривую на многообразии. Таким образом, с точки зрения "обычной" дифференциальной геометрии речь идёт о параметрическом задании кривой в пространстве.

Функция на многообразии – это отображение $f: \mathbb{M}^n \mapsto \mathbb{R}$, т.е. каждой точке многообразия ставится в соответствие вещественное число. Так как точки многообразия могут быть (при помощи карт) "пронумерованы" координатами, то для $p \in \mathbb{M}^n$ можно писать $f(p) = f(x^1, ..., x^n)$.

Пусть на многообразии задана функция и некоторая кривая. В каждой точке кривой функция принимает определённое значение. Поэтому возникает функция $g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$:

$$g(t) = f\big(x^1(t), ..., x^n(t)\big).$$

Её производная вычисляется, как производная сложной функции:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\frac{dx^i}{dt},$$

где по повторяющемуся индексу i идёт суммирование от 1 до n. *Зафиксировав кривую*, можно рассматривать самые различные функции на многообразии. Полученная производная справедлива для них всех. Поэтому запишем её в *операторном виде*:

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx^i}{dt}\,\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Будем отличать различные кривые именем параметра. Таким образом, $x^i(t)$ и $x^i(u)$ – это *различные функции*, определяющие различные кривые. Через данную точку пространства $p \in \mathbb{M}^n$ проходит бесконечное множество пересекающихся кривых. К каждой такой кривой *в данной точке* можно определить производную и соответствующий оператор d/dt, d/du. Эти операторы действуют на одну и ту же функцию, значения которой заданы вдоль этих кривых. Можно говорить о линейной комбинации операторов, умножив их на вещественные числа α, β:

$$\alpha\frac{d}{dt} + \beta\frac{d}{du} = \left(\alpha\frac{dx^i}{dt} + \beta\frac{dx^i}{du}\right)\,\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Производные dx^i/dt, dx^i/du по *различным функциям* вычислены в одной точке пространства и являются некоторыми числами.

Несложно видеть, что такие операции с операторами (сложение и умножение на число) образуют векторное пространство (стр.706). Поэтому говорят, что d/dt – это *касательный вектор* к кривой:

$$\frac{d}{dt} \; - \; \text{вектор}, \qquad \frac{\partial}{\partial x^i} \; - \; \text{базисные векторы}, \qquad \frac{dx^i}{dt} \; - \; \text{компоненты}.$$

Возможно, физику, представляющему вектор как стрелку, покажется странным считать дифференциальный оператор вектором. Однако вспомним, что с математической точки зрения вектор – это абстрактный элемент некоторого множества с введенными на нём операциями (функциями). А вот "стрелочка" является как раз примером такого объекта. Скорость, сила, бесконечно малый сдвиг в некотором направлении – это всё векторы, лишь потому, что их свойства удовлетворяют соответствующим аксиомам векторного пространства.

На самом деле, к утверждению о том, что d/dt – касательный вектор, а $\partial/\partial x^i$ – базисные векторы (т.н. *координатный базис*), можно относиться просто, как к некоторым обозначениям. В конечном счёте, обозначим мы базис значком $\mathbf{e}_i$ или $\partial/\partial x^i$, роли не играет. Для физика, умеющего измерять вещественные числа, важны *компоненты вектора* dx^i/dt.

Ранее касательный вектор мы записывали как бесконечно малое смещение $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_i \, dx^i$ вдоль кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где $\mathbf{e}_i$ – базис (стрелочки) в данной точке пространства, или:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \, \mathbf{e}_i.$$

Компоненты dx^i/dt разложения по базису $\mathbf{e}_i$ получаются такими же, как и при разложении d/dt по $\partial/\partial x^i$.

Стоит особо обратить внимание, что касательный вектор (как бы мы его не обозначали) – это объект, определённый в *данной точке* пространства. В другой (даже "соседней") точке будет иное множество касательных векторов к кривым, пересекающимся в этой точке. Говорят, что касательные векторы определены в *касательном* к многообразию пространстве T_P в точке P. Например, думая о сфере, как о многообразии, можно представлять касательную к сфере плоскость. Это и будет касательное пространство, в котором "лежат" все векторы, касательные к тем или иным кривым, проходящим по сфере через точку касания плоскости.

Множество всех касательных пространств само является многообразием. Его называют *расслоённым пространством*, или просто *расслоением TM*. Касательные плоскости к точкам сферы, собранные в "стопку" плоскостей, будут таким расслоением.

• *Векторное поле* возникает, когда в каждой точке многообразия задаётся вектор. В касательном пространстве существует свой базис и множество векторов. Поэтому векторное поле – это некоторое правило, по которому из этого множества выбирается один вектор в каждой точке.

Раньше некоторое векторное поле мы записывали в виде разложения $\mathbf{V}(x^1, ..., x^n) = V^i(x^1, ..., x^n)\,\mathbf{e}_i$, где векторы $\mathbf{e}_i$ мыслились, как "стрелочки" смещений в пространстве вдоль линий координатной сетки. Эти векторы в криволинейном базисе также зависели от координат точки пространства (теперь мы скажем: от координат на карте $\mathbb{R}^n$ многообразия $\mathbb{M}^n$). Поэтому, например, при параллельном переносе даже постоянного векторного поля ($\mathbf{V} = const$) его компоненты менялись.

В новых, операторных обозначениях векторное поле записывается следующим образом:

$$\mathbf{V} \equiv \frac{d}{dv} = V^i(x^1, ..., x^n)\,\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Функции компонент в обоих представлениях одни и те же, а вот векторы базиса и само векторное поле обозначаются при помощи операторов. Обратим внимание, что в теории групп Ли вектор d/dv имеет смысл генератора некоторой непрерывной группы.

Операторная запись позволяет естественным образом вводить новые операции с векторными полями. Рассмотрим, например, два векторных поля d/dt и d/du, разложив их на базисе $\partial/\partial x^i$:

$$\frac{d}{dt} = T^i(x^1, ..., x^n)\,\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad\qquad \frac{d}{du} = U^j(x^1, ..., x^n)\,\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Вычислим коммутатор этих операторов (т.н. *скобку Ли*). Для этого подействуем скобкой Ли на произвольную функцию f:

$$\left[\frac{d}{dt}, \frac{d}{du}\right] f \equiv \left(\frac{d}{dt}\frac{d}{du} - \frac{d}{du}\frac{d}{dt}\right) f = T^i\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left(U^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - U^j\,\frac{\partial}{\partial x^j}\left(T^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right).$$

Переименовывая в первом слагаемом немые индексы (переставляя их местами) и раскрывая производные произведения, получаем:

$$\left[\frac{d}{dt}, \frac{d}{du}\right] = \left(T^j\,\frac{\partial U^i}{\partial x^j} - U^j\,\frac{\partial T^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

где опущена функция f. Таким образом, скобки Ли определяют векторное поле, которое в "обычных" векторных обозначениях, в пространствах с симметричной связностью ($\partial_j \mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{e}_j$) можно записать так:

$$[\mathbf{T}, \mathbf{U}] = (\mathbf{T}\nabla)\mathbf{U} - (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{T},$$

где $\nabla = \mathbf{e}^i \partial_i$ – оператор наблы.

Векторное поле задаёт в пространстве множество кривых, которые называются *интегральными кривыми* векторного поля. Название происходит от способа получения таких кривых. Считая, что компоненты векторного поля являются касательными к кривой, можно записать:

$$\frac{dx^i}{dt} = V^i(x^1, ..., x^n).$$

Решением этой системы дифференциальных уравнений будет параметрическое задание кривой $x^i(t)$. Различные начальные условия $x^i(0)$ приводят к кривым, проходящим через различные точки пространства. Множество всех таких кривых называется *конгруэнцией*.

Рассмотрим две конгруэнции, определяемые векторными полями $T^i = T^i(x^1, ..., x^n)$ и $U^i = U^i(x^1, ..., x^n)$. Сдвинемся из точки x в p вдоль интегральной кривой с касательным вектором T^i, увеличив параметр на Δt. Раскладывая в ряд Тейлора, находим координаты точки p:

$$p^i = x^i(t + \Delta t) = x^i + T^i(x)\,\Delta t + T^j \frac{\partial T^i}{\partial x^j}\,\frac{\Delta t^2}{2} + ...,$$

где учтено, что $dx^i/dt = T^i$, а $d^2x^i/dt^2 = (\partial T^i/\partial x^j)(dx^j/dt)$. В этой точке векторное поле U^i уже имеет другие компоненты. Применяя снова разложение Тейлора, имеем:

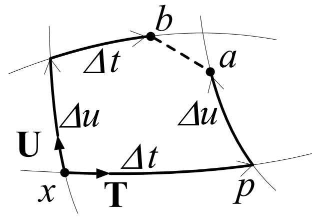
$$U^i\big(p\big) = U^i(x^j + T^j(x)\Delta t + ...) = U^i(x) + \frac{\partial U^i(x)}{\partial x^j} T^j(x)\,\Delta t + ...$$

Если мы теперь сдвинемся на Δu вдоль кривой с касательным вектором $U^i(p)$, то попадём в точку с координатами $a^i = p^i + U^i(p)\Delta u + ...$:

$$a^i = x^i + T^i\Delta t + U^i\Delta u + T^j\,\frac{\partial T^i}{\partial x^j}\,\frac{\Delta t^2}{2} + U^j\,\frac{\partial U^i}{\partial x^j}\,\frac{\Delta u^2}{2} + T^j\,\frac{\partial U^i}{\partial x^j}\,\Delta t\Delta u + ...$$

Сдвиги, проделанные в обратном порядке, приведут к точке $b \neq a$ (см. рисунок). В выражении для её координат необходимо поменять компоненты векторов U^i и T^i местами. Разность координат этих точек выражается через компоненты векторного поля, порождаемого скобками Ли:

$$a^i - b^i \approx \left(T^j\,\frac{\partial U^i}{\partial x^j} - U^j\,\frac{\partial T^i}{\partial x^j}\right)\Delta t\,\Delta u.$$



Векторные поля, для которых скобка Ли равна нулю, называют *координатными*. Систему подобных полей порождают, например, базисные векторы, которые, очевидно, коммутируют друг с другом: $[\partial_i, \partial_j] = 0$.

• Запишем уравнение кривой, порождаемой полем $V^i(x^1,...,x^n)$ в окрестности точки x_0^i, через которую кривая проходит при $t=0$. При малом t из $dx^i/dt = V^i$ следует:

$$x^i(t) \approx x_0^i + t\,V^i(x_0^1,...,x_0^n).$$

Это соотношение можно интерпретировать, как однопараметрическое отображение одной точки многообразия $x_0^i = x^i(0)$ в другую $x^i = x^i(t)$ при движении вдоль интегральной кривой $x^i(t)$. Компоненты векторного поля считаются дифференцируемыми. Поэтому такое взаимно-однозначное отображение называется *диффеоморфизмом.*

Подобное отображение можно интерпретировать, как преобразование координат от x^i к x_0^i. Будем считать, что при этом выполняется обычный закон преобразования тензоров. Например:

$$\overset{0}{T}{}^i_{jk} = T^r_{pq}\,\frac{\partial x^p}{\partial x_0^j}\,\frac{\partial x^q}{\partial x_0^k}\,\frac{\partial x_0^i}{\partial x^r}.$$

Говорят, что такое преобразование тензора определяет его *перенос* из точки x_0^i в точку x^i вдоль векторного поля $\mathbf{V}$.

Производная Ли $\mathcal{L}_V$ вдоль векторного поля $\mathbf{V}$ от тензора T – по определению тензор того же типа, имеющий следующие компоненты:

$$(\mathcal{L}_V T)^i_{jk} = \frac{d\overset{0}{T}{}^i_{jk}}{dt}\Big|_{t=0}.$$

Так как матрицы преобразований координат известны:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x_0^j} = \delta^i_j + t\,\frac{\partial V^i}{\partial x_0^j}, \qquad\qquad \frac{\partial x_0^i}{\partial x^j} = \delta^i_j - t\,\frac{\partial V^i}{\partial x_0^j},$$

несложно записать, например, производную Ли от вектора:

$$(\mathcal{L}_V U)^i = \frac{d}{dt}\left[U^j\,\left(\delta^i_j - t\,\frac{\partial V^i}{\partial x_0^j}\right)\right]_{t=0} = V^j\,\frac{\partial U^i}{\partial x_0^j} - U^j\,\frac{\partial V^i}{\partial x_0^j},$$

где в первом слагаемом учтено, что $dU^i/dt = (\partial U^i/\partial x_0^j)(dx_0^j/dt)$, и подставлены координаты касательного вектора $dx_0^i/dt = V^i(x_0)$. Подобную производную можно записать при помощи скобок Ли:

$$\mathcal{L}_V\mathbf{U} = [\mathbf{V},\mathbf{U}].$$

Жирные буквы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ имеют смысл векторных полей в операторной записи. Т.е. это на самом деле $\mathbf{U} = U^i(x^1,...,x^n)\partial/\partial x^i$, и т.д. Компоненты получившегося вектора и будут производной Ли от вектора $\mathbf{U}$.

Аналогично вычисляется ($\lessdot$ H_{197}) производная Ли от 1-формы:

$$(\mathcal{L}_V\omega)_i = V^j\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j} + \omega_j\frac{\partial V^j}{\partial x^i}.$$

Производная Ли от тензора нулевого ранга (скалярной функции) равна:

$$\mathcal{L}_V f = \frac{df}{dt}\Big|_{t=0} = V^i\,\frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Связь производной от вектора, 1-формы и скаляра можно записать в виде "*правила Лейбница*", которое стоит проверить ($\lessdot$ H_{198}) в компонентном виде:

$$\mathcal{L}_V\big(\omega(\mathbf{U})\big) = (\mathcal{L}_V\omega)(\mathbf{U}) + \omega(\mathcal{L}_V\mathbf{U}).$$

В левой части стоит производная от скалярной функции (которой равна 1-форма от векторного поля). Выражение $(\mathcal{L}_V\omega)$ – это имя 1-формы, получающейся после взятия производной Ли от формы ω. Второе слагаемое в правой части – это результат вычисления исходной формы от вектора, равного производной Ли от $\mathbf{U}$.

Справедливо также "правило Лейбница" для прямого произведения тензоров:

$$\mathcal{L}_V(A\otimes B) = (\mathcal{L}_V A)\otimes B + A\otimes(\mathcal{L}_V B).$$

В безындексном виде производная Ли от произвольного тензора (функции от векторов и 1-форм) $\mathcal{L}_V[T(\mathbf{a},...,\omega,...)]$ имеет вид:

$$(\mathcal{L}_V T)(\mathbf{a},...,\omega,...) + T(\mathcal{L}_V\mathbf{V},...,\omega,...) + ... + T(\mathbf{a},...,\mathcal{L}_V\omega,...) + ...,$$

где $\mathbf{a},...$ – векторы и $\omega,...$ – 1-формы, от которых зависит тензор (точнее, в данном случае векторные поля и поля 1-форм).

Производная Ли является в некотором смысле альтернативой к ковариантному дифференцированию тензоров. Для введения ковариантной производной необходимо определить на многообразии дополнительную геометрическую структуру – *связность* Γ^i_{jk}, при помощи которой проводятся параллельные переносы тензоров. Производная Ли не требует связности, а параллельный перенос определяется вдоль интегральной кривой любого фиксированного векторного поля.

Напомним (стр. 694), что многообразие станет пространством в "привычном" смысле этого слова, если мы определим на нём две геометрические структуры – расстояние между двумя бесконечно близкими точками g_{ij} и параллельный перенос вектора (связность Γ^i_{jk}). До введения этих структур многообразие ещё не обладает более или менее богатыми геометрическими свойствами.

XI Геометрия

• **H**$_{181}$ *Символы Кристоффеля в равноускоренной системе* (стр. 665)

В жесткой равноускоренной системе:

$$g_{00}=e^{2ax},\qquad g_{11}=-e^{2ax},\qquad g^{00}=e^{-2ax},\qquad g^{11}=-e^{-2ax},$$

поэтому по формуле (11.8) получаем следующие ненулевые символы:

$$\Gamma_{t,\,tx}=\Gamma_{t,\,xt}=a\,e^{2ax},\qquad\quad \Gamma_{x,\,tt}=\Gamma_{x,\,xx}=-a\,e^{2ax},$$

где вместо индексов записаны соответствующие им координаты ($\Gamma_{t,\,xx}$ то же, что и $\Gamma_{0,\,11}$). Поднимая индексы вверх, имеем:

$$\Gamma^t_{tx}=\Gamma^t_{xt}=\Gamma^x_{tt}=\Gamma^x_{xx}=a.$$

Этот же результат можно получить используя явный вид векторов (4.65). Для этого вычисляем производные $\partial_t \mathrm{e}_t=\partial_x \mathrm{e}_x=a\,\mathrm{e}_x$, $\partial_x \mathrm{e}_t=\partial_t \mathrm{e}_x=a\,\mathrm{e}_t$ и в (11.3) учитываем ортогональность векторов $\mathrm{e}_t\mathrm{e}_x=0$.

• **H**$_{182}$ *Символы Кристоффеля в полярных координатах* (стр. 665)

В полярных координатах: $\mathbf{x}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}=\mathbf{i}\,r\cos\phi+\mathbf{j}\,r\sin\phi$ векторы криволинейного базиса равны:

$$\mathbf{e}_r=\partial_r\mathbf{x}=\mathbf{i}\,\cos\phi+\mathbf{j}\,\sin\phi,\qquad \mathbf{e}_\phi=\partial_\phi\mathbf{x}=r\,(-\mathbf{i}\,\sin\phi+\mathbf{j}\,\cos\phi).$$

Базисные векторы ортогональны $\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\phi=0$, вектор $\mathbf{e}_r$ – единичный, а $\mathbf{e}_\phi$ имеет длину r. Поэтому $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=g_{ij}=\mathrm{diag}(1,r^2)$. Дифференцирование векторов базиса, даёт:

$$\partial_r\mathbf{e}_r=0,\qquad \partial_r\mathbf{e}_\phi=\partial_\phi\mathbf{e}_r=\frac{\mathbf{e}_\phi}{r},\qquad \partial_\phi\mathbf{e}_\phi=-r\,\mathbf{e}_r,$$

поэтому ненулевые символы Кристоффеля равны:

$$\Gamma_{1,\,22}=\mathbf{e}_r\,\partial_\phi\mathbf{e}_\phi=-r,\qquad\qquad \Gamma_{2,\,12}=\Gamma_{2,\,21}=\mathbf{e}_\phi\,\partial_r\mathbf{e}_\phi=r.$$

Обратный к метрическому тензору $g_{ij}=\mathrm{diag}(1,r^2)$ тензор g^{ij} имеет два ненулевых элемента: $g^{11}=1$, $g^{22}=1/r^2$. Суммируя символы $\Gamma_{p,\,ij}$ с тензором g^{kp}, получим символы Кристоффеля с верхним индексом:

$$\Gamma^1_{22}=-r,\qquad\qquad \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=1/r.$$

Соответственно дивергенция вектора $\mathbf{A}=A_r\mathbf{e}_r+A_\phi\mathbf{e}_\phi$ имеет вид:

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\partial_i A^i+\Gamma^i_{ji}\,A^j=\partial_r A^r+\partial_\phi A^\phi+\frac{1}{r}\,A_r=\frac{1}{r}\,\partial_r(rA_r)+\partial_\phi A_\phi$$

и т.д.

• $\mathbf{H}_{183}$ *Преобразование символов Кристоффеля* (стр. 665)

Необходимо от производной по штрихованным координатам от базисного вектора, перейти к производной по не штрихованным:

$$\frac{\partial \mathrm{e}_\mu}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial \mathrm{e}_\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} = \partial_\nu \mathrm{e}_\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}.$$

• $\mathbf{H}_{184}$ *Уравнения Лагранжа для геодезической* (стр. 673)

$$\frac{\partial [g_{\alpha\beta}(x)\,\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta]^{1/2}}{\partial x^\gamma} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial_\gamma g_{\mu\nu}\,\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}{[g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta]^{1/2}},$$

$$\frac{\partial [g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta]^{1/2}}{\partial \dot{x}^\gamma} = \frac{1}{2}\,\frac{g_{\mu\nu}\,(\delta^\mu_\gamma \dot{x}^\nu + \dot{x}^\mu \delta^\nu_\gamma)}{[g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta]^{1/2}} = \frac{1}{2}\,\frac{g_{\gamma\nu}\,\dot{x}^\nu + g_{\gamma\mu}\dot{x}^\mu}{[g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta]^{1/2}} = \frac{g_{\gamma\mu}\dot{x}^\mu}{[g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta]^{1/2}},$$

где, как обычно, используется символ Кронекера $\partial \dot{x}^\mu / \partial \dot{x}^\nu = \delta^\mu_\nu$.

• $\mathbf{H}_{185}$ *Символы Кристоффеля во вращающейся системе* (стр. 673)

Квадратичная форма $S(x, \dot{x})$ равна

$$S(r,\,\dot{t},\,\dot{r},\,\dot{\phi}) = (1-\omega^2 r^2)\,\dot{t}^2 - 2\omega\, r^2\,\dot{t}\dot{\phi} - \dot{r}^2 - r^2\,\dot{\phi}^2.$$

Уравнения геодезической (11.27), стр. 673 для $x = t$ и $x = \phi$ имеют вид:

$$\frac{d}{d\tau}\Bigl((1-\omega^2 r^2)\dot{t} - \omega r^2 \dot{\phi}\Bigr) = 0, \qquad \frac{d}{d\tau}\Bigl(\omega r^2 \dot{t} + r^2 \dot{\phi}\Bigr) = 0.$$

Раскроем производные:

$$(1-\omega^2 r^2)\,\ddot{t} - \omega r^2\,\ddot{\phi} = 2\omega^2 r\,\dot{r}\dot{t} + 2\omega r\,\dot{r}\dot{\phi}, \qquad \omega r^2\,\ddot{t} + r^2 \ddot{\phi} = -2\omega r\,\dot{r}\dot{t} - 2r\,\dot{r}\dot{\phi}.$$

Решая эти уравнения относительно вторых производных $\ddot{t}$, $\ddot{\phi}$ и добавляя уравнение геодезической для $x = r$, имеем:

$$\begin{aligned}
\ddot{t} &= 0,\\
\ddot{\phi} &+ \frac{2\omega}{r}\,\dot{r}\dot{t} + \frac{2}{r}\,\dot{r}\dot{\phi} = 0,\\
\ddot{r} &- \omega^2 r\,\dot{t}^2 - 2\omega r\,\dot{t}\dot{\phi} - r\,\dot{\phi}^2 = 0.
\end{aligned}$$

Коэффициенты при первых производных – это символы Кристоффеля:

$$\Gamma^r_{tt} = -\omega^2 r, \qquad \Gamma^r_{\phi\phi} = -r, \qquad \Gamma^r_{t\phi} = \Gamma^r_{\phi t} = -\omega r,$$

$$\Gamma^\phi_{tr} = \Gamma^\phi_{rt} = \frac{\omega}{r}, \qquad \Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}.$$

Остальные 32 символа Кристоффеля с верхним индексом равны нулю.

• $\mathbf{H}_{186}$ *Геодезическая в равноускоренной системе* (стр. 674)

Переписывая уравнение:

$$d\tau = \frac{1}{2a}\,\frac{d(1+ax)^2}{\sqrt{\gamma_0^2\,(1+ax_0)^2 - (1+u_{0y}^2)\,(1+ax)^2}}$$

и интегрируя его, получаем:

$$\tau + \tau_0 = -\frac{1}{a\,(1+u_{0y}^2)}\,\sqrt{\gamma_0^2\,(1+ax_0)^2 - (1+u_{0y}^2)\,(1+ax)^2}.$$

Константу интегрирования τ_0 находим из начальных условий при $\tau = 0$. Правильность выбора знака при извлечении корня из $(dx/d\tau)^2$, проще всего проверить в частном случае $u_{0y} = 0$, $x_0 = 0$, для которого имеем $(1+ax)^2 = \gamma_0^2 - (a\tau - u_{0x})^2$. В нерелятивистском пределе, пренебрегая членом $(ax)^2$ получаем параболу с верными знаками: $x \approx \tau\,u_{0x} - a\tau^2/2$.

• $\mathbf{H}_{187}$ *Инвариантный объем* (стр. 683)

Перейдем от лоренцевых координат X^α к произвольным координатам x^α. При замене переменных в интеграле появляется *якобиан* J:

$$\int F(X^\alpha)\,d^4X = \int F(x^\alpha)\,J\,d^4x,$$

где J – определитель матрицы:

$$J = \det\left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta}\right), \qquad g_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\beta}\,\eta_{\mu\nu},$$

а второе равенство – преобразование метрического тензора $\eta_{\mu\nu}$ равного матрице $\mathrm{diag}(1,\,-1,\,-1,\,-1)$. Это преобразование является произведением трёх матриц. Его определитель равен произведению определителей каждой матрицы. Так как $\det(\eta_{\alpha\beta}) = -1$ имеем $g = -J^2$ или $J = \sqrt{-g}$.

• $\mathbf{H}_{188}$ *Метрика на сфере* (стр. 691)

Для параметризации сферы углами $x^i = \{\theta, \phi\}$ сферической системы координат запишем радиус-вектор:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta,\,\phi) = a\,(\mathbf{i}\,s_\theta c_\phi + \mathbf{j}\,s_\theta s_\phi + \mathbf{k}\,c_\theta),$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – базис в декартовых координатах 3-мерного евклидового пространства и приняты обычные сокращения для синуса и косинуса. Беря производные по θ и ϕ, получаем базисные векторы на сфере:

$$\mathbf{e}_\theta = a\,(\mathbf{i}\,c_\theta\,c_\phi + \mathbf{j}\,c_\theta\,s_\phi - \mathbf{k}\,s_\theta), \qquad \mathbf{e}_\phi = a\,s_\theta\,(-\mathbf{i}\,s_\phi + \mathbf{j}\,c_\phi).$$

Перемножая эти векторы, с учетом ортогональности $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, приходим к искомым метрическим коэффициентам.

• $\mathbf{H}_{189}$ *Площадь на сфере* (стр. 691)

Векторное произведение касательных векторов равно:

$$\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\phi = a^2\, s_\theta\, (c_\theta\, \mathbf{k} + s_\theta s_\phi\, \mathbf{j} + s_\theta c_\phi\, \mathbf{i}),$$

где учтено, что $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ и аналогично для циклических перестановок $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$. Длина (модуль) этого вектора равна $a^2\, s_\theta$.

Площадь поверхности сферы вычисляется интегрированием по угловым координатам:

$$S = \int dS = \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} a^2 \sin\theta\, d\theta d\phi = 4\pi a^2.$$

• $\mathbf{H}_{190}$ *Связности на сфере* (стр. 693)

Для сферы единичного радиуса: $\mathbf{r} = \{s_\theta c_\phi,\ s_\theta s_\phi,\ c_\theta\}$, параметризируемой координатами $x^i = \{\theta, \phi\}$, находим:

$$\begin{array}{lcllcl}
\mathbf{e}_\theta & = & \{c_\theta\, c_\phi,\ c_\theta\, s_\phi,\ -s_\theta\}, & \mathbf{e}_\phi & = & \{-s_\theta\, s_\phi,\ s_\theta\, c_\phi,\ 0\}, \\
\partial_\theta \mathbf{e}_\theta & = & \{-s_\theta c_\phi, -s_\theta s_\phi, -c_\theta\}, & \partial_\theta \mathbf{e}_\phi & = & \{-c_\theta s_\phi,\ \ c_\theta c_\phi,\ 0\}, \\
\partial_\phi \mathbf{e}_\theta & = & \{-c_\theta s_\phi,\ \ c_\theta c_\phi,\ \ 0\}, & \partial_\phi \mathbf{e}_\phi & = & \{-s_\theta c_\phi, -s_\theta s_\phi,\ 0\}.
\end{array}$$

Подставляя их в $\Gamma_{k,\,ij} = \mathbf{e}_k \partial_j \mathbf{e}_i$, получаем 3 отличных от нуля символа:

$$\Gamma_{1,\,22} = -s_\theta c_\theta, \qquad \Gamma_{2,\,12} = \Gamma_{2,\,21} = s_\theta c_\theta.$$

Обратный метрический тензор $g^{11} = 1$, $g^{11} = 1/s_\theta^2$ поднимает индексы:

$$\Gamma^1_{22} = -s_\theta c_\theta, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{c_\theta}{s_\theta}.$$

Более быстрый способ (стр. 673) с $S = \dot\theta^2 + s_\theta^2\, \dot\phi^2$ даёт:

$$\ddot\theta - s_\theta c_\theta\, \dot\phi^2 = 0, \qquad \ddot\phi + 2\,\frac{c_\theta}{s_\theta}\,\dot\theta\dot\phi = 0,$$

откуда сразу получаются ненулевые Γ^k_{ij}.

• $\mathbf{H}_{191}$ *Геодезические на сфере* (стр. 692)

Запишем уравнение (11.72) стр. 692 для $x^2 = \phi$:

$$\frac{d(\sin^2\theta\,\dot{\phi})}{dl} = 0 \qquad => \qquad \dot{\phi} = \frac{\cos\alpha}{\sin^2\theta},$$

где константа интегрирования обозначена как $\cos\alpha$. Параметр α имеет смысл угла наклона геодезической к экватору сферы ($\theta = \pi/2$). Действительно, запишем вектор бесконечно малого смещения вдоль геодезической $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_\theta\,d\theta + \mathbf{e}_\phi\,d\phi = (\mathbf{e}_\theta\,\dot{\theta} + \mathbf{e}_\phi\,\dot{\phi})\,dl$ в точке пересечения её с экватором. Базисный вектор $\mathbf{e}_\phi$ на экваторе направлен вдоль него в сторону увеличения угла ϕ и имеет единичную длину: $\mathbf{e}_\phi^2 = g_{22} = \sin^2(\pi/2) = 1$. Длина вектора $d\mathbf{r}$ равна dl и векторы $\mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{e}_\phi$ ортогональны. Поэтому $(\mathbf{e}_\phi\,d\mathbf{r})/|\mathbf{e}_\phi|\,|d\mathbf{r}| = \cos\alpha$. Зависимость θ от l найдём из уравнения (11.71):

$$\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2 = 1 \qquad => \qquad \dot{\theta}^2 = 1 - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\theta}.$$

Интегрируя его, имеем:

$$\pm(l+\beta) = \int \frac{d\theta}{\sqrt{1-\cos^2\alpha/\sin^2\theta}} = \int \frac{-d\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\theta}} = \arccos\left(\frac{\cos\theta}{\sin\alpha}\right).$$

Произвольность знака можно включить в новую константу β:

$$\cos\theta = \sin\alpha\,\cos(l+\beta).$$

Эта константа связана с углом θ_0 начальной точки от которой отсчитывается длина геодезической: $\cos(\beta) = \cos\theta_0/\sin\alpha$. Интегрируя теперь $\dot{\phi} = \cos\alpha/\sin^2\theta$, имеем

$$\mathrm{tg}(\phi+\gamma) = \frac{\mathrm{tg}(l+\beta)}{\cos\alpha}.$$

Константа γ находится по координате ϕ_0 начальной точки. Напомним (стр. 521), что отрезок на сфере длиной L можно также задать в виде:

$$\mathbf{r}(l) = \frac{\mathbf{r}_1\,\sin(L-l) + \mathbf{r}_2\,\sin(l)}{\sin L},$$

где $l = [0...L]$ и $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ – радиус-векторы крайних точек отрезка. Это соотношение несложно получить при помощи формулы (6.25), стр. 391, поворачивая вектор $\mathbf{r}_1$ вокруг единичного вектора $\mathbf{n} = [\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2]/|\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2|$.

• $\mathbf{H}_{192}$ *Тензор кривизны плоскости в полярных координатах* (стр. 697)

Для метрики $dl^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$ отличные от нуля символы Кристоффеля ($\lessdot$ H$_{182}$) равны $\Gamma^1_{22} = -r$ и $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1/r$. Поэтому для $x^i = \{r, \phi\}$:

$$R^1{}_{2,\,12} = \partial_1\Gamma^1_{22} - \partial_2\Gamma^1_{21} + \Gamma^1_{k1}\Gamma^k_{22} - \Gamma^1_{k2}\Gamma^k_{21} = \partial_1\Gamma^1_{22} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{21} = -1 + 1 = 0.$$

• $\mathbf{H}_{193}$ *Тензор кривизны сфере* (стр. 697)

Для метрики $dl^2 = a^2\,(d\theta^2 + s^2_\theta\, d\phi^2)$ отличные от нуля символы Кристоффеля ($\lessdot$ H$_{190}$) равны $\Gamma^1_{22} = -s_\theta c_\theta$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = c_\theta/s_\theta$. Поэтому для $x^i = \{\theta, \phi\}$ тензор кривизны равен:

$$R^1{}_{2,12} = \partial_1\Gamma^1_{22} - \partial_2\Gamma^1_{21} + \Gamma^1_{k1}\Gamma^k_{22} - \Gamma^1_{k2}\Gamma^k_{21} = \partial_1\Gamma^1_{22} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{21} = s^2_\theta.$$

Так как $g_{11} = a^2$, имеем $R_{12,12} = g_{11}R^1{}_{2,12} = a^2\, s^2_\theta$. Определитель метрического тензора $g = a^4\, s^2_\theta$ (диагональная матрица) позволяет найти скалярную кривизну (см. стр. 701):

$$R = \frac{2R_{12,12}}{g} = \frac{1}{a^2}.$$

Скалярная кривизна постоянна и зависит от радиуса сферы.

• $\mathbf{H}_{194}$ *2-поверхность для вращающейся геометрии* (стр. 700)

Пусть поверхность с цилиндрической симметрией имеет уравнение $z = f(\rho)$, где ρ – расстояние от оси z. Так как $dz = f'(\rho)\, d\rho$, то элемент длины вдоль такой поверхности равен:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\phi^2 + dz^2 = \left[1 + f'^2(\rho)\right]\, d\rho^2 + \rho^2\, d\phi^2.$$

Чтобы получить (11.85), стр. 700 положим $\rho = r/\sqrt{1-\omega^2 r^2}$. Тогда

$$dl^2 = \left[1 + f'^2\left(\frac{r}{\sqrt{1-\omega^2 r^2}}\right)\right]\frac{dr^2}{(1-\omega^2 r^2)^3} + \frac{r^2 d\phi^2}{1-\omega^2 r^2}.$$

Так как $(1-\omega^2 r^2)^3 < 1$, коэффициент при dr^2 ни при какой функции $f(\rho)$ не может быть сделан равным единице. Таким образом, геометрия (11.85) не вкладывается как поверхность в 3-мерное евклидово пространство.

• $\mathbf{H}_{195}$ *Окружность на сфере* (стр. 701)

Расположим центр окружности в точке $\theta = 0$ (северный полюс сферы). Исходя из метрики $dl^2 = a^2\,(d\theta^2 + s^2_\theta\, d\phi^2)$ при $\phi = const$ выражаем длину радиуса $r = a\theta$ окружности как функцию координаты θ. Длина окружности получается суммированием элементов длин dl при $\theta = const$ и изменении угла ϕ от 0 до 2π. В результате $L = a\sin(\theta)\, 2\pi = 2\pi a\, \sin(r/a)$. При малых r получаем евклидово выражение $L = 2\pi r$.

• $\mathbf{H}_{196}$ *Тождество с* $F^{\mu\nu}$ (стр. 723)
Применяя операцию дуализации

$$\frac{1}{2}\,F^{\mu\nu}\,\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\,{}^*(\mathbf{d}x^\alpha\wedge\mathbf{d}x^\sigma\wedge\mathbf{d}x^\tau)=\frac{1}{3}\,F^{\mu\alpha}\,\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\,{}^*(\mathbf{d}x^\nu\wedge\mathbf{d}x^\sigma\wedge\mathbf{d}x^\tau),$$

по формуле (11.109), стр. 723, имеем:

$$\frac{1}{2}\,F^{\mu\nu}\,\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\,\varepsilon^{\alpha\sigma\tau\gamma}=\frac{1}{3}\,F^{\mu\alpha}\,\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\,\varepsilon^{\nu\sigma\tau\gamma}.$$

Используя тождества свёртки символов Леви-Чивиты (стр.810), имеем:

$$-2\,\frac{1}{2}\,F^{\mu\nu}\,(\delta^\alpha_\mu\delta^\gamma_\nu-\delta^\alpha_\nu\delta^\gamma_\mu)=6\,\frac{1}{3}\,F^{\mu\alpha}\,\delta^\gamma_\mu.$$

Сворачивая с символами Кронекера, окончательно, получаем:

$$-2\,F^{\alpha\gamma}=2\,F^{\gamma\alpha}.$$

• $\mathbf{H}_{197}$ *Производная Ли от 1-формы* (стр. 741)

$$(\mathcal{L}_V\omega)_i=\frac{d}{dt}\left[\omega_j\frac{\partial x^j}{\partial x^i_0}\right]_{t=0}=\frac{d}{dt}\left[w_j\,\left(\delta^j_i+t\,\frac{\partial V^j}{\partial x^i_0}\right)\right]_{t=0}=V^j\,\frac{\partial w_i}{\partial x^j_0}+\omega_j\,\frac{\partial V^j}{\partial x^i_0}.$$

• $\mathbf{H}_{198}$ *Правило Лейбница для формы и вектора* (стр. 741)
Распишем определения правой части правила Лейбница:

$$\mathcal{L}_V\big(\omega(\mathbf{U})\big)=(\mathcal{L}_V\omega)(\mathbf{U})+\omega(\mathcal{L}_V\mathbf{U})$$

в координатном виде

$$\left(V^j\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j}+\omega_j\frac{\partial V^j}{\partial x^i}\right)U^i+\omega_i\left(V^j\,\frac{\partial U^i}{\partial x^j}-U^j\,\frac{\partial V^i}{\partial x^j}\right)=V^j\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j}U^i+\omega_iV^j\,\frac{\partial U^i}{\partial x^j}.$$

Это производная от скалярной функции (от значения 1-формы):

$$\mathcal{L}_V(\omega_iU^i)=\frac{d}{dt}\big(\omega_iU^i\big)=\frac{d\omega_i}{dt}\,U^i+\omega_i\,\frac{dU^i}{dt}.$$
