

Глава 7

Теория поля

В этой главе мы продолжим изучение электродинамики и других теорий, основу которых составляет понятие “поле”. В фокусе нашего внимания будет ковариантный формализм. Мы рассмотрим достаточно общий метод Жозефа Луи Лагранжа, позволяющий получать уравнения движения и законы сохранения. Замечательная связь между различными симметриями и законами сохранения будет установлена при помощи теоремы Эмми Нётер. Мы обсудим проблему неоднозначности возникающих при этом тензоров и их ковариантные свойства.

Затем будет рассмотрен ряд трудностей присущих различным полевым теориям. Эти трудности связаны с точечностью источников поля и их самодействием. Мы дадим решение проблемы электромагнитной массы и изучим простые солитонные модели.

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ МИР

Сергей С. Степанов

Последняя версия находится на сайте <http://synset.com>. Все обнаруженные ошибки и замечания просьба присылать по почте: phys@synset.com. (с) 2009-2013. Печать: 2 июля 2013 г.

7.1 Ковариантная электродинамика

Электродинамике, рассмотренной в пятой главе, можно придать элегантный вид при помощи ковариантных обозначений. Напомним, что 4-вектор потенциала A^α определён таким образом, что его нулевая компонента является скалярным потенциалом φ , а пространственные – компонентами векторного потенциала \mathbf{A} (стр. 321). Кроме этого мы определили 4-вектор тока j^α :

$$A^\alpha = \{\varphi, \mathbf{A}\}, \quad j^\alpha = \{\rho, \mathbf{j}\},$$

где ρ – плотность заряда, а $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ – плотность тока зарядов, движущихся со скоростью \mathbf{v} . Пространственные компоненты 4-ковектора имеют обратный знак по сравнению с 4-вектором: $A_\alpha = \{\varphi, -\mathbf{A}\}$. Событие в пространстве-времени также является 4-вектором $x^\alpha = \{t, \mathbf{r}\}$. Для операции взятия частной производной по x^α было введено обозначение:

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right\}.$$

Определим *антисимметричный тензор* второго ранга:

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha. \quad (7.1)$$

Компоненты этого тензора выражаются через напряжённости электрического ($\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t - \nabla\varphi$) и магнитного ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) полей. Так:

$$F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} = -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = E_x,$$

где минус появился, так как $A_1 = -A^1 = -A_x$. Напомним, что когда пишется проекция 3-вектора не с индексом (A_1), а с именем оси (A_x), подразумевается, что это контравариантная компонента 4-вектора (A^1). Аналогично находятся $F_{02} = E_y$, $F_{03} = E_z$ или $\mathbf{E} = \{F_{01}, F_{02}, F_{03}\}$. Остальные компоненты связаны с магнитным полем:

$$F_{32} = \partial_3 A_2 - \partial_2 A_3 = -\frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial y} = [\nabla \times \mathbf{A}]_x = B_x.$$

В результате $\mathbf{B} = \{F_{32}, F_{13}, F_{21}\}$. Подъём индексов осуществляется при помощи метрического тензора. Для компонент с нулевым индексом происходит смена знака (по повторяющимся индексам сумма от 0 до 3):

$$F^{01} = g^{0\alpha} g^{1\beta} F_{\alpha\beta} = g^{00} g^{11} F_{01} = -F_{01}.$$

Компоненты без нулевого индекса знак не меняют:

$$F^{12} = g^{1\alpha} g^{2\beta} F_{\alpha\beta} = g^{11} g^{22} F_{12} = F_{12}.$$

Напомним, что $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, см. стр.132.

Таким образом, с учётом антисимметричности $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$, получаем:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

В 4-мерном пространстве любой антисимметричный тензор имеет 6 независимых компонент, которые можно представить в виде проекций двух 3-мерных векторов. Условно это записывается так (см. стр. 180):

$$F_{\alpha\beta} = (-\mathbf{E}, -\mathbf{B}), \quad F^{\alpha\beta} = (\mathbf{E}, -\mathbf{B}).$$

При помощи антисимметричного тензора Леви-Чевиты $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ (стр. 182), определим ещё один антисимметричный тензор второго ранга, который будем помечать звёздочкой (это не комплексное сопряжение!):

$$*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (7.2)$$

Расписывая сумму по α и β несложно (\llcorner Н79) найти его компоненты:

$$*F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -E_z & E_y \\ B_y & E_z & 0 & -E_x \\ B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}, \quad *F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично тензорам $F_{\alpha\beta}$ и $F^{\alpha\beta}$ можно записать:

$$*F_{\alpha\beta} = (\mathbf{B}, -\mathbf{E}), \quad *F^{\alpha\beta} = (-\mathbf{B}, -\mathbf{E}).$$

Поля поменялись местами, поэтому $*F_{\mu\nu}$ называют *дуальным* к $F^{\mu\nu}$.

Введём единичный ($U^\alpha U_\alpha = 1$) 4-вектор. Пусть в данной системе отсчёта S он имеет компоненты $U^\alpha = \{1, \mathbf{0}\}$. При помощи преобразований Лоренца можно найти его компоненты в произвольной инерциальной системе отсчёта (они будут зависеть от скорости этой системы относительно S). Вектор U^α и тензоры напряженности $F^{\alpha\beta}$, $*F^{\alpha\beta}$ позволяют определить 4-векторы напряженности электрического и магнитного поля:

$$E^\mu = F^{\mu\nu} U_\nu, \quad B^\mu = U_\nu *F^{\nu\mu}.$$

Они ортогональны вектору U^μ , т.е. $U_\mu E^\mu = U_\mu B^\mu = 0$, а в системе S их компоненты равны $E^\mu = \{0, \mathbf{E}\}$ и $B^\mu = \{0, \mathbf{B}\}$. При помощи этих 4-векторов можно, в свою очередь, выразить тензор напряженности:

$$F_{\mu\nu} = E_\mu U_\nu - E_\nu U_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} B^\alpha U^\beta,$$

что проверяется расписыванием его компонент в системе S . В электродинамике сплошных сред вектор U^α имеет смысл макроскопической скорости среды. Подробнее мы рассмотрим это в главе 10.

• При помощи введенных обозначений 4 уравнения Максвелла можно записать в виде двух явно *ковариантных уравнений* (имеющих одинаковый вид во всех инерциальных системах):

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 4\pi j^\beta, \quad \partial_\alpha {}^*F^{\alpha\beta} = 0. \quad (7.3)$$

Распишем в первом уравнении сумму по индексу α , положив $\beta = 0$:

$$\partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \nabla \mathbf{E} = 4\pi j^0 = 4\pi \rho.$$

Также ($\ll H_{80}$) записываем для $\beta = 1$ и т.д. В результате, получается пара уравнений Максвелла с источниками:

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Аналогично ($\ll H_{81}$) второе ковариантное уравнение (7.3), приводит к уравнениям Максвелла без источников:

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Естественно, уравнения Максвелла в векторной форме также являются ковариантными. В них можно подставить преобразования для напряженностей полей, плотностей зарядов-токов и преобразования Лоренца для времени и координат. В результате, в произвольной (“штрихованной”) инерциальной системе, двигающейся относительно исходной со скоростью \mathbf{v} , получатся такие же уравнения, но со штрихами. Тем не менее, уравнения Максвелла (7.3) нагляднее демонстрируют такую ковариантность, так как в силу своего тензорного характера, по определению, имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчёта.

• Из первого ковариантного уравнения Максвелла следует *уравнение непрерывности* для зарядов. Действительно, возьмём от него производную по x^β :

$$\partial_\beta \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 4\pi \partial_\beta j^\beta = 0.$$

Это соотношение равно нулю, так как вторая производная симметрична (перестановочна) $\partial_\alpha \partial_\beta = \partial_\beta \partial_\alpha$, а тензор антисимметричен $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$, поэтому их свёртка равна нулю (см. стр. 763):

$$\partial_\beta j^\beta = \partial_0 j^0 + \partial_i j^i = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} = 0.$$

Таким образом, “самостоятельный” закон сохранения заряда “заложен” в уравнения Максвелла и непосредственно связан с их линейностью и антисимметричностью тензора $F_{\alpha\beta}$.

• Второе ковариантное уравнение Максвелла (7.3) без источников может быть переписано в эквивалентном виде для тензора электромагнитного поля без звёздочки:

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0. \quad (7.4)$$

Заметим, что индексы слагаемых в этом уравнении циклически переставляются: $\alpha\beta\gamma \mapsto \beta\gamma\alpha \mapsto \gamma\alpha\beta$. Уравнение (7.4) несложно получить (\llcorner Н₈₂) непосредственно из определения тензора $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$. Чтобы получить (7.4) из $\partial_\mu {}^*F^{\mu\lambda} = 0$ необходимо (\llcorner Н₈₃) последнее свернуть с $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda}$ и воспользоваться тождеством (см. стр. 783):

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} = \delta_\alpha^\mu \varepsilon_{\beta\gamma}^{\nu\sigma} + \delta_\gamma^\mu \varepsilon_{\alpha\beta}^{\nu\sigma} + \delta_\beta^\mu \varepsilon_{\gamma\alpha}^{\nu\sigma} \quad (7.5)$$

где $\varepsilon_{\beta\gamma}^{\nu\sigma} = \delta_\beta^\nu \delta_\gamma^\sigma - \delta_\gamma^\nu \delta_\beta^\sigma$ – антисимметричный по парам индексов тензор.

• Уравнению движения пробного заряда во внешнем электромагнитном поле также можно придать явно ковариантный вид:

$$m \frac{du^\alpha}{ds} = q F^{\alpha\beta} u_\beta, \quad (7.6)$$

где $u^\alpha = dx^\alpha/ds = \{1/\sqrt{1-\mathbf{v}^2}, \mathbf{v}/\sqrt{1-\mathbf{v}^2}\}$ – 4-вектор скорости. Действительно, вдоль траектории частицы интервал равен $ds = dt\sqrt{1-\mathbf{v}^2}$. Поэтому для $\alpha = 0$ уравнение (7.6) имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} \frac{d}{dt} \frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} = q F^{0i} u_i = \frac{q \mathbf{E} \mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}},$$

так как для 4-ковектора u_α компоненты равны $\{u^0, -u^i\}$, а $F^{0i} = -\mathbf{E}_i$. Полученное уравнение является производной кинетической энергии по времени. Эта производная равна скалярному произведению силы Лоренца на скорость частицы: $d\mathbf{E}/dt = \mathbf{F}\mathbf{v}$.

Аналогично, если $\alpha = 1$, то $q F^{1\beta} u_\beta = q F^{10} u_0 + q F^{1i} u_i$, поэтому:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} \frac{d}{dt} \frac{m v_x}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} = \frac{q E_x + B_z v_y - B_y v_z}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} = \frac{q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_x}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}},$$

и т.д., что приводит к силе Лоренца (стр.271). В пятой главе мы получили силу Лоренца при помощи преобразований Лоренца для силы. Понятно, что она будет иметь одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчёта, что явным образом и демонстрирует ковариантное уравнение (7.6). В качестве упражнения (\llcorner Н₈₈) предлагается решить уравнения движения заряда в постоянном электрическом поле \mathbf{E} для 4-скорости u^μ , как функции собственного времени заряда (интервала s).

• Опишем в ковариантных обозначениях заряд, который равномерно движется со скоростью \mathbf{v} . Потенциал поля такого заряда можно записать в следующем виде (см. стр. 337):

$$A^\alpha(t, \mathbf{r}) = Q \frac{\{\gamma, \gamma \mathbf{v}\}}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)^2 + \gamma^2((\mathbf{r} - \mathbf{v}t)\mathbf{v})^2 + a^2}}, \quad (7.7)$$

где сделана подстановка $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} - \mathbf{v}t$ так как в общем случае начало координат не совпадает с положением заряда (см. стр. 276). Кроме этого введен параметр a для регуляризации сингулярности, возникающей при обращении знаменателя в ноль при $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$.

Выражение для потенциала можно существенно упростить, если ввести следующий 4-вектор:

$$\eta^\alpha = x^\alpha - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) u^\alpha \quad (7.8)$$

или в безиндексной форме:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u},$$

где $\mathbf{x} \equiv x^\alpha = \{t, \mathbf{r}\}$ и $\mathbf{u} \equiv u^\alpha = \{\gamma, \gamma \mathbf{v}\}$ (не путаем 3-скорость $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ и пространственные компоненты 4-скорости $u^\alpha = dx^\alpha/ds$). Так как $u^2 = 1$, несложно видеть, что этот вектор ортогонален 4-скорости:

$$\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{u} = 0,$$

а его квадрат равен:

$$\eta^2 = \mathbf{x}^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})^2.$$

Перепишем теперь выражение в знаменателе 4-потенциала следующим образом:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)^2 + \gamma^2((\mathbf{r} - \mathbf{v}t)\mathbf{v})^2 = \gamma^2(t - \mathbf{r}\mathbf{v})^2 - (t^2 - \mathbf{r}^2).$$

Это равенство проверяется прямым раскрытием квадратов в левой и правой частях. Заметим, что $\gamma(t - \mathbf{r}\mathbf{v}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$ и $t^2 - \mathbf{r}^2 = \mathbf{x}^2$, поэтому это выражение равно $-\eta^2$. Таким образом 4-потенциал точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью равен:

$$A^\alpha = \frac{Q u^\alpha}{\sqrt{a^2 - \eta^2}}. \quad (7.9)$$

Проделанное выше преобразование знаменателя явным образом демонстрирует, что квадрат η всегда отрицателен, поэтому выражение под корнем остаётся положительным и в пределе $a \rightarrow 0$.

Найдём теперь тензор напряженности электромагнитного поля точечного заряда. Для этого возьмём частную производную по x^α от η^2 :

$$\partial_\alpha \eta^2 = \partial_\alpha (x^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})^2) = 2x_\alpha - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) u_\alpha$$

или

$$\partial_\alpha \eta^2 = 2\eta_\alpha. \quad (7.10)$$

При помощи этого соотношения не составляет труда найти производную 4-потенциала (7.9):

$$\partial_\alpha A_\beta = Q \frac{\eta_\alpha u_\beta}{(a^2 - \eta^2)^{3/2}}.$$

Обратим внимание, что 4-потенциал удовлетворяет калибровке Лоренца $\partial_\alpha A^\alpha = 0$. Это и понятно. В системе отсчёта где заряд покоится, потенциал φ не зависит от времени, а $\mathbf{A} = 0$ (закон Кулона). Поэтому калибровка Лоренца выполняется автоматически. В силу своей ковариантности она будет иметь одинаковое значение (ноль) и в любой другой инерциальной системе отсчёта. Соответственно, по определению тензора электромагнитного поля $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, имеем:

$$F_{\alpha\beta} = Q \frac{\eta_\alpha u_\beta - \eta_\beta u_\alpha}{(a^2 - \eta^2)^{3/2}}. \quad (7.11)$$

Найдём также регуляризованную плотность 4-тока для точечного заряда. Используя

$$\partial_\alpha \eta^\beta = \delta_\alpha^\beta - u_\alpha u^\beta, \quad \delta_\alpha^\alpha = 4, \quad \partial_\alpha \eta^\alpha = 3 \quad (7.12)$$

и первое ковариантное уравнение Максвелла (7.3):

$$j^\beta = \frac{1}{4\pi} \partial_\alpha F^{\alpha\beta},$$

после несложных вычислений ($\llcorner \text{H}_{84}$), имеем:

$$j^\beta = \frac{3}{4\pi} Q u^\beta \frac{a^2}{(a^2 - \eta^2)^{5/2}}. \quad (7.13)$$

В силу (7.10) и ортогональности $\eta \cdot \mathbf{u} = 0$, автоматически выполняется уравнение непрерывности $\partial_\alpha j^\alpha = 0$. При стремлении параметра a к нулю, плотность тока становится пропорциональной сингулярной δ -функции Дирака:

$$j^\beta = Q u^\beta \delta(-\eta^2)$$

(см. аналогичный предельный переход при обсуждении неподвижного точечного заряда на стр.265).

• После того, как основные величины определены как 4-векторы или тензоры, несложно записать их преобразования при смене системы отсчёта. Так, 4-потенциал $A^\alpha = \{\varphi, \mathbf{A}\}$ и 4-ток $j^\alpha = \{\rho, \mathbf{j}\}$ являются 4-векторами, поэтому они преобразуются так же, как и компоненты 4-вектора $x^\alpha = \{t, \mathbf{r}\}$. Например, для потенциалов имеем:

$$\varphi' = \gamma(\varphi - \mathbf{v}\mathbf{A}), \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \gamma\mathbf{v}\varphi + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{A}),$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$ и $\Gamma = (\gamma - 1)/v^2 = \gamma^2/(1 + \gamma)$. Обратим внимание, что в правой и левой части преобразований стоят *функции* координат и времени, которые соответствуют “своей” системе отсчёта: $\varphi' = \varphi'(t', \mathbf{r}')$, $\varphi = \varphi(t, \mathbf{r})$, и аналогично для функций \mathbf{A}' и \mathbf{A} .

Преобразование для плотности заряда запишем в виде одного соотношения, так как между временной и пространственной частями 4-тока существует связь: $\mathbf{j} = \rho\mathbf{u}$, где \mathbf{u} – скорость зарядов в точке, где измеряется их плотность ρ :

$$\rho' = \gamma(1 - \mathbf{v}\mathbf{u})\rho.$$

Не стоит забывать, что скорость \mathbf{u} , как и плотность ρ , является функцией координат \mathbf{r} и времени t .

• Ковариантное выражение без индексов является инвариантом. Оно имеет одинаковое значение во всех системах отсчёта. Построение соответствующих выражений позволяет легко получать различные инварианты физических величин. Так, вычислим свертку тензоров электромагнитного поля:

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = F_{01}F^{01} + F_{02}F^{02} + F_{03}F^{03} + F_{12}F^{12} + F_{13}F^{13} + F_{23}F^{23} + \dots,$$

где многоточием обозначены такие же слагаемые с переставленными индексами. Так как $F_{\alpha\beta}$ и $F^{\alpha\beta}$ – антисимметричны, одновременная перестановка индексов ничего не изменит. Подставляя значения компонент, имеем:

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2). \quad (7.14)$$

В безиндексном виде этот инвариант можно записать следующим образом: $-\text{Tr } F^2$, где $(F^2)^\mu{}_\nu = F^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu} = -F^{\mu\alpha}F_{\nu\alpha}$, а Tr обозначает суммирование диагональных элементов (след матрицы). Аналогично получается ещё один инвариант при свёртке тензора $F^{\alpha\beta}$ с дуальным к нему тензором $*F_{\alpha\beta}$:

$$*F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 4\mathbf{E}\mathbf{B}. \quad (7.15)$$

Эти два инварианта были уже найдены ранее (стр. 298).

• Получим ещё раз преобразования для напряжённости электромагнитного поля. Величина $F^{\alpha\beta}$ преобразуется как тензор:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha F^{\alpha\beta} \Lambda^T_{\beta\nu},$$

где во второй матрице преобразования Λ переставлены индексы по горизонтали и поставлен знак транспонирования. В результате этих действий порядок индексов становится соответствующим правилу перемножения матриц. Поэтому, опуская индексы, запишем преобразование тензора напряжённости электромагнитного поля в матричном виде:

$$\mathbf{F}' = \Lambda \cdot \mathbf{F} \cdot \Lambda^T.$$

В случае когда оси x и x' выбраны в направлении относительной скорости, матрица преобразований Лоренца Λ^μ_α выглядит достаточно просто (см. стр. 137):

$$\Lambda^\mu_\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому в явном матричном виде преобразование для тензора $F^{\mu\nu}$ можно записать следующим образом:

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы, получаем:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - vB_z), & E'_z &= \gamma(E_z + vB_y), \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma(B_y + vE_z), & B'_z &= \gamma(B_z - vE_y). \end{aligned}$$

Если относительная скорость двух систем отсчёта направлена не вдоль оси x , а в произвольном направлении, то преобразования имеют вид (см. стр. 299):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{E}), \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}) - \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{B}), \end{aligned}$$

где γ и Γ определены точно также, как и в преобразованиях Лоренца. Эти преобразования можно получить при помощи тензора $F_{\alpha\beta}$, если записать общий вид матрицы преобразования Λ^μ_α при произвольном направлении скорости (стр. 137). Можно также воспользоваться преобразованием для двух 4-векторов ∂^α , A^α и определением $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$.

7.2 Лагранжев подход

• Для построения ковариантных уравнений движения, как для частиц, так и для полей удобен лагранжев метод. Напомним, что *функционалом* называется математический объект, который каждой функции ставит в соответствие некоторое число. Простейшим примером функционала является определённый интеграл. Той или иной функции он ставит в соответствие ограничивающую её площадь. Из всех возможных функций особый интерес представляют те функции, которые минимизируют значение интеграла. Пусть т.н. *функция Лагранжа* $L(q_k, \dot{q}_k)$, зависит от n функций $q_k = q_k(t)$ и их производных $\dot{q}_k = dq_k/dt$, где $k = 1, \dots, n$. Проинтегрируем её от t_1 до t_2 :

$$I[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) dt = \min.$$

Функционал $I[q]$ будет минимальным (точнее экстремальным), если функции $q_k(t)$ удовлетворяют *уравнениям Лагранжа*:



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}. \quad (7.16)$$

Для доказательства к *экстремальной траектории* $q_k(t)$ добавим *произвольные* функции $\phi_k(t)$, умноженные на некоторое число ε . Таким способом, мы перебираем все возможные функции соединяющие начальную и конечную точки, считая, что $\phi_k(t_1) = \phi_k(t_2) = 0$ (см. рисунок). Интеграл, как функция ε , имеет экстремум при $\varepsilon = 0$, следовательно:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} L(q_k + \varepsilon \phi_k, \dot{q}_k + \varepsilon \dot{\phi}_k) dt \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \phi_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{\phi}_k \right] dt = 0.$$

В квадратных скобках, во втором слагаемом выделим производную произведения по времени (по повторяющимся индексам k сумма от 1 до n):

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \phi_k dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \phi_k \right) dt = 0.$$

В силу фиксированности начальной и конечной точки $\phi_k(t_1) = \phi_k(t_2) = 0$ второй интеграл равен нулю (\llcorner H₈₅). Так как функции $\phi_k(t)$ *произвольны*, первый интеграл будет равен нулю только, если равно нулю выражение в квадратных скобках, что и приводит к уравнениям Лагранжа.

• Аналогично можно рассмотреть функционал от функций, которые зависят не только от времени, но и от точки в пространстве. При этом динамической переменной является *поле*, которое, в общем случае, имеет несколько компонент $\Psi_k(t, \mathbf{x})$. Индекс k может отсутствовать или пробегать, например, четыре значения от 0 до 3. В первом случае говорят о *скалярном поле*, а во втором о поле, являющимся 4-вектором (*векторное поле*). Возможны и более сложные случаи. Не конкретизируя число компонент поля запишем следующий функционал

$$I[\Psi] = \int \mathcal{L}(\Psi_k, \partial_\alpha \Psi_k) d^4x = \min. \quad (7.17)$$

Это 4-кратный интеграл в котором интегрирование ведётся по 4-мерному объёму $d^4x = dt d^3\mathbf{x}$. Обычно рассматривается случай, когда интегрирование по $d^3\mathbf{x}$ ведётся по всему пространству и поля на бесконечности убывают $\Psi_k(t, \infty) = 0$. Интегрирование по времени ведётся между t_1 и t_2 , в которых поле фиксировано: $\Psi_k(t_1, \mathbf{x}) = \Psi_k^{(1)}(\mathbf{x})$, $\Psi_k(t_2, \mathbf{x}) = \Psi_k^{(2)}(\mathbf{x})$.

Введём *произвольные* функции $\phi_k = \phi_k(t, \mathbf{x})$ отклонения от поля, минимизирующего (7.17) и обращающиеся в ноль при t_1, t_2 . Умножим их на малый параметр ε и найдём экстремум функционала по этому параметру при $\varepsilon = 0$:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int \mathcal{L}(\Psi_k + \varepsilon \phi_k, \partial_\alpha \Psi_k + \varepsilon \partial_\alpha \phi_k) d^4x = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_k} \phi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \Psi_k)} \partial_\alpha \phi_k \right] d^4x = 0.$$

По индексам k и α проводится суммирование. В последнем слагаемом можно выделить полную производную по ∂_α :

$$\int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_k} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \Psi_k)} \right) \right] \phi_k d^4x + \int \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \Psi_k)} \phi_k \right) d^4x = 0.$$

Второй интеграл равен нулю, так как он имеет вид:

$$\int \partial_\alpha f^\alpha d^4x = \int \frac{\partial f^0}{\partial t} dt d^3\mathbf{x} + \int \nabla \mathbf{f} dt d^3\mathbf{x} = 0.$$

Первый интеграл обращается в ноль при интегрировании по dt так как в моменты времени t_1 и t_2 поле ϕ_k равно нулю. Второй интеграл при интегрировании по пространству $d^3\mathbf{x}$, в силу интегральной теоремы Гаусса, заменяется на интеграл по поверхности “охватывающей всё пространство”. На этой поверхности (на бесконечности) поля Ψ_k равны нулю. В результате получаются *уравнения Лагранжа для поля*

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \Psi_k)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_k}, \quad (7.18)$$

решения которых соответствуют экстремуму функционала (7.17).

• Лагранжев подход удобен тем, что, записав релятивистски инвариантное выражение для функционала I , называемого *действием*, при помощи уравнений Лагранжа, мы автоматически получим ковариантные уравнения движения в тензорной форме. Рассмотрим сначала движение пробной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Если полей нет, состояние частицы полностью определяется её скоростью $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$. Существует естественный инвариант ds , равный интервалу между двумя бесконечно близкими событиями. Вдоль траектории частицы $ds^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2 = (1 - \mathbf{u}^2) dt^2$. Внешнее электромагнитное поле в ковариантном виде будем задавать при помощи 4-потенциала A^α . Если его свернуть с 4-вектором бесконечно малого смещения dx^α , то получится ещё одна инвариантная величина. Умножив эти два инварианта на константы m , q и сложив, получим следующее действие:

$$I = -m \int ds - q \int A_\alpha dx^\alpha = \int (-m\sqrt{1 - \mathbf{u}^2} - q\varphi + q\mathbf{A}\mathbf{u}) dt.$$

Во втором равенстве действие записано как интеграл по времени (\llcorner Н₈₆) и для 4-потенциала использованы 3-мерные обозначения $A^\alpha = \{\varphi, \mathbf{A}\}$. В результате мы приходим к *функции Лагранжа* частицы в электромагнитном поле:

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = -m\sqrt{1 - \mathbf{u}^2} - q\varphi + q\mathbf{A}\mathbf{u}. \quad (7.19)$$

Коэффициенты m (масса частицы) и q (заряд частицы) выбраны таким образом, чтобы получились правильные уравнения движения, соответствующие силе Лоренца. Убедимся в этом. Положение частицы $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ – это обобщённая координата q_k , а её производная по времени \dot{q}_k – это скорость частицы \mathbf{u} . Уравнения Лагранжа (7.16) в векторной форме имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}. \quad (7.20)$$

Производная по скорости равна:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} + q\mathbf{A} = \mathbf{p} + q\mathbf{A},$$

где первый член является релятивистским импульсом \mathbf{p} . Для взятия полной производной по времени необходимо учесть, что потенциалы зависят от координат, соответствующих положению пробной частицы, поэтому:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} + q \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + q(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{A},$$

где взят полный дифференциал от векторного поля \mathbf{A} (\llcorner Н₈₇).

Найдём теперь правую часть уравнений Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \nabla L = -q\nabla\varphi + q\nabla(\mathbf{A}\mathbf{u}).$$

В результате уравнения Лагранжа принимают вид:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left(-\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + q (\nabla(\mathbf{A}\mathbf{u}) - (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{A}).$$

Последние два слагаемые при помощи тождества для двойного векторного произведения сворачиваются в одно: $\mathbf{u} \times [\nabla \times \mathbf{A}]$. Учитывая связь полей и потенциалов, приходим к силе Лоренца (стр. 271):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (7.21)$$

Чтобы сразу получить ковариантные уравнения (7.6), стр. 425 необходимо в лагранжевом подходе использовать не время t , а инвариантный интервал s . Тогда динамическими переменными q_k становятся x^α , а их производными $u^\alpha = dx^\alpha/ds$. Однако, в этом случае, не все динамические переменные являются независимыми. В частности, компоненты 4-скорости u^α связаны соотношением $u^2 = u_\alpha u^\alpha = 1$. Чтобы использовать лагранжевый подход необходимо искать экстремум *со связями*, используя *метод множителей Лагранжа* (см. стр. 792). Так, запишем лагранжиан в виде:

$$L = -q A_\alpha u^\alpha - \frac{1}{2} \lambda (u^2 - 1).$$

Функция $\lambda = \lambda(s)$ (множитель Лагранжа) является дополнительной динамической переменной, обеспечивающей в *каждый* момент времени выполнения связи $u^2 = 1$. Так как производной по s от $\lambda(s)$ в лагранжиане нет, уравнение Лагранжа по этой переменной $\partial L/\partial \lambda = 0$ приводит к соотношению $u^2 = 1$. Остальные производные лагранжиана по x^α и u^α равны:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = -q \partial_\alpha A_\beta u^\beta, \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha} \right) = -q \frac{dA_\alpha}{ds} - \frac{d(\lambda u_\alpha)}{ds}.$$

Учитывая, что $dA_\alpha/ds = \partial_\beta A_\alpha dx^\beta/ds = \partial_\beta A_\alpha u^\beta$, получаем уравнение:

$$\frac{d(\lambda u_\alpha)}{ds} = q (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) u^\beta = q F_{\alpha\beta} u^\beta.$$

Так как $F_{\alpha\beta}$ – антисимметричен, свёртка уравнения с u^α в правой части даст ноль. В левой части имеем:

$$\frac{d(\lambda u_\alpha)}{ds} u^\alpha = \frac{d\lambda}{ds} u^2 + \lambda \frac{du_\alpha}{ds} u^\alpha = \frac{d\lambda}{ds} + \frac{\lambda}{2} \frac{d(u^2)}{ds} = \frac{d\lambda}{ds} = 0,$$

где учтена связь $u^2 = 1$. Таким образом, λ является константой, равной массе частицы m .

• Перейдём к динамическим уравнениям для электромагнитного поля. В основу лагранжевого подхода положим 4-потенциал A^α . Мы хотим найти уравнения которым он удовлетворяет. Эти уравнения должны быть:

- 1) линейными уравнениями (принцип суперпозиции)
- 2) дифференциальными уравнениями второго порядка.

Эти требования, благодаря уравнениям Лагранжа, выполняются, если лагранжиан будет не более чем квадратичен по полям. Из 4-тока j^α , потенциала A^α и его производных $\partial_\alpha A_\beta$ можно сформировать следующие инварианты:

$$A^\alpha j_\alpha, (\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\alpha A^\beta), (\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\beta A^\alpha), A^\alpha j^\beta \partial_\alpha A_\beta, j^\alpha A^\beta \partial_\alpha A_\beta, A^\alpha A_\alpha.$$

В принципе, если их умножить на некоторые константы и сложить, получится наиболее общий лагранжиан векторного поля, соответствующий линейным динамическим уравнениям. Последняя комбинация, квадратичная по потенциалу $A^\alpha A_\alpha$, приводит к теории в которой скорость электромагнитных волн оказывается меньшей скорости света, а закон Кулона нарушается. Поэтому от этого члена мы откажемся. Следующие два члена с конца в этом списке также не приведут к уравнениям Максвелла. При их подстановке в уравнения Лагранжа появятся производные тока. Уравнения для потенциалов станут зависеть не только от скоростей, но и от ускорения частиц. Хорошо это или плохо трудно сказать. Если коэффициенты при этих членах в лагранжиане малы, то и возникающие эффекты будут малы. Поэтому, возможно, пока никто и не обнаружил отклонений от уравнений Максвелла. Тем не менее мы откажемся и от них, ограничившись только первыми тремя инвариантами:

$$\mathcal{L} = -A^\alpha j_\alpha - \frac{a}{2} (\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\alpha A^\beta) + \frac{b}{2} (\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\beta A^\alpha).$$

Множитель при первом члене лагранжиана выбран равным -1. Понятно, что если лагранжиан умножить на произвольную константу, уравнения от этого не поменяются. Следовательно одну из констант в сумме инвариантных комбинаций можно выбрать произвольной.

Возьмём соответствующие производные от лагранжиана (\llcorner Н₈₉):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} = -j^\beta, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} = -a \partial^\alpha A^\beta + b \partial^\beta A^\alpha.$$

Их подстановка в уравнения Лагранжа (7.18) (сейчас $k = \beta$) приводит к следующим уравнениям поля:

$$a \partial^2 A^\beta - b \partial^\beta \partial_\alpha A^\alpha = j^\beta,$$

где $\partial^2 = \partial^\alpha \partial_\alpha = \partial^2 / \partial t^2 - \Delta$ – оператор Д'Аламбера.

Эти уравнения совпадут с уравнениями Максвелла, если $a = b = 1/4\pi$. Действительно, напомним, что уравнения для потенциалов, следующие из уравнений Максвелла имеют вид (стр. 318):

$$\partial^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \mathbf{A} \right) = 4\pi\rho, \quad \partial^2 \mathbf{A} + \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \mathbf{A} \right) = 4\pi\mathbf{j}.$$

Выражения в круглых скобках являются ни чем иным, как свёрткой $\partial_\alpha A^\alpha$. По определению, компоненты 4-ковектора ∂_β равны $\{\partial_0, \nabla\}$, поэтому для 4-вектора производной с индексом вверху имеем $\partial^\beta = \{\partial_0, -\nabla\}$.

Если определение константы a сказывается лишь на выбор единиц измерения поля, то с выбором константы b ситуация хитрее. Свойства полей, в конечном счёте, проявляются при их действии на пробную частицу. Поэтому в классической электродинамике измеримыми являются напряжённости поля, а не потенциалы. Последние определены неоднозначно, что позволяет наложить на них калибровочное условие, например в форме $\partial_\alpha A^\alpha = 0$. В этом случае, константа b является произвольной. Её можно положить как равной нулю, так и равной $b = 1/4\pi$. В последнем случае лагранжиан может быть записан ($\llcorner \text{H}_{90}$) при помощи тензора $F^{\alpha\beta}$:

$$\mathcal{L} = -A_\alpha j^\alpha - \frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (7.22)$$

Член $A_\alpha j^\alpha$ совпадает с введенным ранее лагранжианом для точечной частицы с плотностью заряда $\rho(\mathbf{x}, t) = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t))$. Действительно, запишем часть действия (см. (5.73) стр. 321):

$$\int A_\alpha j^\alpha d^4x = \int A_\alpha q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)) \frac{dx_0^\alpha(t)}{dt} dt d^3\mathbf{x} = q \int A_\alpha dx^\alpha.$$

В последнем равенстве взят интеграл по объёму $d^3\mathbf{x}$ с дельта-функцией. Потенциал $A^\alpha = A^\alpha(\mathbf{x}_0(t), t)$ стал зависеть от траектории частицы $\mathbf{x}_0(t)$ (поэтому мы его и дифференцировали при выводе (7.21)).

В результате можно записать единое действие для зарядов и полей:

$$I = - \sum \int m ds - \sum q A_\alpha dx^\alpha - \frac{1}{16\pi} \int F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} d^4x. \quad (7.23)$$

Суммирование ведётся по всем точечным зарядам. Это действие можно минимизировать одновременно и для частиц и полей. В этом случае нет разделения на пробные частицы и частицы создающие поле.

В качестве упражнения предлагается добавить к лагранжиану электромагнитного поля член $\mu^2 A_\alpha A^\alpha / 8\pi$, найти уравнения движения в лоренцевской калибровке ($b = 0$) ($\llcorner \text{H}_{91}$) и решить их для случая электростатики ($\llcorner \text{H}_{92}$). Затем получить решения этих уравнений в свободном пространстве (волновые уравнения с $\mu \neq 0$) ($\llcorner \text{H}_{93}$).

7.3 Тензор энергии-импульса

• Как для заряженных частиц, движущихся во внешних полях, так и для самих полей, справедливы законы сохранения. Рассмотрим сначала закон сохранения энергии при движении пробной частицы в стационарном поле. Пусть потенциалы поля в лагранжиане явным образом не зависят от времени ($\partial L/\partial t = 0$). В этом случае время в них входит только через траекторию частицы $A^\alpha(\mathbf{x}) = A^\alpha(\mathbf{x}(t))$. Используя уравнения Лагранжа (7.20), стр. 432, запишем полную производную по времени:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathbf{u} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u} \right).$$

Перенося dL/dt в правую часть, приходим к выводу, что следующая величина, называемая *полной энергией*

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u} - L \quad (7.24)$$

сохраняется, т.е. $d\mathcal{E}/dt = 0$. Производная функции Лагранжа по скоростям динамических переменных называется *обобщённым импульсом*. Для функции Лагранжа свободной частицы $L = -m\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$ обобщённый импульс совпадает с релятивистским импульсом. При движении частицы в электромагнитном поле он “удлиняется” (стр. 432) за счёт члена в лагранжиане (7.19), зависящего от скорости:

$$L = -m\sqrt{1 - \mathbf{u}^2} - q\varphi + q\mathbf{A}\mathbf{u}, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} + q\mathbf{A}.$$

Подставляя его в выражение для полной энергии (7.24), получаем:

$$\mathcal{E} = \frac{m}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} + q\varphi = \mathbb{E} + q\varphi. \quad (7.25)$$

Векторный потенциал сокращается и полная энергия частицы равняется сумме энергии движения \mathbb{E} и потенциальной энергии. Последняя определяется только значением скалярного потенциала φ .

Приравнивая полную производную этого выражения по времени нулю, получаем знакомое выражение связи изменения энергии движения и силы (потенциал φ явно от времени не зависит)

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d\mathbb{E}}{dt} + q(\nabla\varphi) \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbb{E}}{dt} - \mathbf{F}\mathbf{u} = 0,$$

где учтено, что $\partial \mathbf{A}/\partial t = 0$ и, следовательно, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, а магнитная составляющая силы при произведении на скорость даёт ноль $\mathbf{u}[\mathbf{u} \times \mathbf{B}] = 0$. Таким образом, *стационарное* электромагнитное поле полную энергию частицы \mathcal{E} не меняет.

• Введём *плотность массы* точечной частицы $\mu(t, \mathbf{r}) = m \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))$, движущейся по траектории $\mathbf{r}_0(t)$. По аналогии с плотностью тока заряда (5.73), стр. 321 для непрерывного распределения вещества определим плотность тока массы, удовлетворяющего уравнению непрерывности:

$$J^\alpha = \mu \frac{dx^\alpha}{dt} = \{\mu, \mu \mathbf{v}\}, \quad \partial_\alpha J^\alpha = 0. \quad (7.26)$$

Как и плотность тока заряда, плотность тока массы является 4-вектором, а соответствующее уравнение непрерывности – ковариантным.

Умножим уравнение движения *точечного заряда* (стр. 425):

$$m \frac{du^\alpha}{ds} = q F^{\alpha\beta} u_\beta$$

слева и справа на дельта-функцию $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))$. Слева получится плотность массы μ , а справа плотность заряда ρ . Так как плотность тока заряда равна $j^\nu = \rho dx^\nu/dt = \rho u^\nu(ds/dt)$, получаем уравнение движения, справедливое и для непрерывного распределения массы и заряда:

$$\mu \frac{du^\alpha}{dt} = F^{\alpha\beta} j_\beta. \quad (7.27)$$

Говоря о непрерывной среде в которой распределён заряд и масса мы подразумеваем, что в каждой точке пространства изменяется не только их плотность но и скорость. Другими словами, скорость становится функцией координат (именно так понимается плотность тока $\mathbf{j} = \rho \mathbf{u}$). Поэтому полная производная по времени от 4-скорости $u^\alpha = dx^\alpha/ds = \{\gamma, \gamma \mathbf{v}\}$ равна $du^\alpha/dt = (\partial_\beta u^\alpha) dx^\beta/dt$. В результате уравнение движения (7.27) заряженной среды можно переписать следующим образом:

$$\mu \frac{du^\alpha}{dt} = J^\beta \partial_\beta u^\alpha = \partial_\beta (J^\beta u^\alpha) = F^{\alpha\beta} j_\beta, \quad (7.28)$$

где во втором равенстве использовано уравнение непрерывности массы (7.26). Введём следующий симметричный тензор:

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} = J^\alpha u^\beta = \mu \frac{ds}{dt} u^\alpha u^\beta = \mu \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} u^\alpha u^\beta. \quad (7.29)$$

С его помощью уравнение движения непрерывной заряженной среды (7.27) можно записать следующим образом:

$$\partial_\beta \mathcal{T}^{\beta\alpha} = F^{\alpha\beta} j_\beta. \quad (7.30)$$

Выпишем в явном виде компоненты тензора $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$:

$$\mathcal{T}^{00} = \mu\gamma, \quad \mathcal{T}^{0i} = \mathcal{T}^{i0} = \mu\gamma v^i, \quad \mathcal{T}^{ij} = \mu\gamma v^i v^j,$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$ и $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ – 3-скорость. Таким образом, \mathcal{T}^{00} – это плотность энергии движения частиц, а \mathcal{T}^{0i} – плотность их импульса.

• Перейдём теперь к сохранению энергии-импульса электромагнитного поля. Вычислим производную от лагранжиана:

$$\partial_\beta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\gamma} \partial_\beta A_\gamma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\gamma)} \partial_\beta (\partial_\alpha A_\gamma).$$

В первом слагаемом подставим уравнения Лагранжа, во втором переставим частные производные $\partial_\beta \partial_\alpha = \partial_\alpha \partial_\beta$ и воспользуемся формулой производной произведения:

$$\partial_\beta \mathcal{L} = \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\gamma)} \right) \partial_\beta A_\gamma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\gamma)} \partial_\alpha (\partial_\beta A_\gamma) = \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\gamma)} \partial_\beta A_\gamma \right).$$

Выражение $\partial_\beta \mathcal{L}$, при помощи символа Кронекера, можно переписать в следующем виде: $\partial_\alpha (\delta_\beta^\alpha \mathcal{L})$. В результате получается уравнение:

$$\partial_\alpha T^\alpha{}_\beta = 0, \quad (7.31)$$

где введен *канонический тензор энергии-импульса* электромагнитного поля:

$$T^\alpha{}_\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\gamma)} \partial_\beta A_\gamma - \delta_\beta^\alpha \mathcal{L}. \quad (7.32)$$

При помощи метрического тензора $g^{\alpha\beta}$ можно поднять индекс β вверх, переписав канонический тензор энергии-импульса в эквивалентном виде:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\gamma)} \partial^\beta A_\gamma - g^{\alpha\beta} \mathcal{L}. \quad (7.33)$$

Разберёмся с уравнением (7.31), которому удовлетворяет $T^{\alpha\beta}$. По своей форме это уравнение непрерывности (стр. 277):

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = \frac{\partial T^{0\beta}}{\partial t} + \nabla_i T^{i\beta} = 0.$$

Для каждого из четырех значений индекса β мы имеем свой закон сохранения, аналогичный закону сохранения заряда. При этом $T^{0\beta}$ – имеет смысл чего-то сохраняющегося в объёме, если поток величин $T^{i\beta}$ через поверхность, окружающую объём равен нулю.

Для $\beta = 0$ введём плотность энергии $W = T^{00}$ и плотность импульса $\mathbf{P}^i = T^{i0}$ и запишем уравнение непрерывности в векторном виде:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \mathbf{P} = 0.$$

Это соотношение мы уже получали при рассмотрении энергии электромагнитного поля (теорема Пойнтинга, стр. 310).

• Найдём тензор энергии-импульса для лагранжиана электромагнитного поля в пустом пространстве ($j^\alpha = 0$)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi} \left\{ (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) \right\}.$$

Производная лагранжиана по $\partial_\alpha A_\gamma$ равна $-F^{\alpha\gamma}/4\pi$ ($\ll \text{H}_{94}$), поэтому:

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} F^{\alpha\gamma} \partial^\beta A_\gamma + \frac{1}{16\pi} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (7.34)$$

К тензору энергии-импульса можно прибавить производную $\partial_\gamma(F^{\gamma\alpha} A^\beta)$, так как она тождественно удовлетворяет уравнению непрерывности. Действительно, не зависимо от уравнений движения

$$\partial_\alpha \partial_\gamma (F^{\gamma\alpha} A^\beta) = 0,$$

так как тензор $\partial_\alpha \partial_\gamma$ – симметричен, а $F^{\gamma\alpha}$ – антисимметричен и их свёртка равна нулю (стр. 763). Таким образом, если $T^{\alpha\beta}$ удовлетворяет уравнению непрерывности, то ему будет удовлетворять также тензор

$$T^{\alpha\beta} \mapsto T^{\alpha\beta} - \frac{1}{4\pi} \partial_\gamma (F^{\gamma\alpha} A^\beta).$$

Учитывая уравнения движения (7.3), стр. 424 с $j^\alpha = 0$, напишем:

$$\partial_\gamma (F^{\gamma\alpha} A^\beta) = F^{\gamma\alpha} \partial_\gamma A^\beta = -F^{\alpha\gamma} \partial_\gamma A^\beta$$

и разделив на 4π , вычтем из тензора энергии-импульса. В результате:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\alpha\gamma} F_\gamma^\beta + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \quad (7.35)$$

Этот тензор симметричен по α, β и имеет нулевой след: $T^\alpha_\alpha = 0$ ($\ll \text{H}_{95}$).

Тензор энергии-импульса (7.34), полученный по формуле (7.33) называется каноническим. Этот тензор зависит как от напряженностей поля, так и от потенциалов. В отличие от него, симметричный тензор (7.35) от потенциалов не зависит. Говорят, что он является калибровочно инвариантным. Действительно, если сделать преобразование $A_\alpha \mapsto A_\alpha + \partial_\alpha \Lambda$, где Λ – произвольная функция координат, то тензор напряженностей $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ не изменится. Не поменяются также уравнения движения и симметричный тензор энергии-импульса. Так как физические результаты не должны зависеть от произвольной функции Λ , более предпочтительными являются калибровочно инвариантные выражения. Тем не менее произвол в выборе тензора энергии-импульса (добавление к нему выражения автоматически удовлетворяющего уравнению непрерывности) не сказывается на физических выводах. Мы вернёмся к этому вопросу чуть позже.

• Выше мы симметризовали тензор энергии-импульса, предполагая, что зарядов, создающих поле в пространстве нет (свободное электромагнитное поле). В общем случае, когда токи не равны нулю, в силу уравнения (7.30), будет сохраняться сумма тензора энергии-импульса поля (7.35) и частиц (7.29):

$$\partial_\alpha(T^{\alpha\beta} + \mathcal{T}^{\alpha\beta}) = 0. \quad (7.36)$$

Докажем это, вычислив 4-дивергенцию от (7.35):

$$4\pi \partial_\alpha T^\alpha_\beta = \underbrace{(\partial_\alpha F^{\alpha\gamma})}_{4\pi j^\gamma} F_{\gamma\beta} + \underbrace{F^{\alpha\gamma} \partial_\alpha F_{\gamma\beta}}_0 + \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \partial_\beta F_{\mu\nu}.$$

Первое слагаемое в правой части, благодаря ковариантному уравнению Максвелла, будет пропорционально 4-току. Сумма последних двух слагаемых равна нулю. Действительно, во втором слагаемом переобозначим немые (суммационные) индексы $\alpha \mapsto \mu$, $\gamma \mapsto \nu$, а в третьем слагаемом подставим второе ковариантное уравнение Максвелла (без источников) (7.4) стр. 425:

$$\partial_\beta F_{\mu\nu} = -\partial_\mu F_{\nu\beta} - \partial_\nu F_{\beta\mu}.$$

В результате сумма последних двух слагаемых, помеченных фигурной скобкой равна:

$$F^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu\beta} - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu\beta} - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \partial_\nu F_{\beta\mu} = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu\beta} - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \partial_\nu F_{\beta\mu}.$$

В последнем слагаемом переобозначим индексы $\mu \mapsto \nu$, $\nu \mapsto \mu$ и получим, в силу антисимметрии $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, ноль. Таким образом:

$$\partial_\alpha T^\alpha_\beta = -F_{\beta\gamma} j^\gamma.$$

С другой стороны, в соответствии с уравнением (7.30) для тензора энергии-импульса вещества имеем $\partial_\alpha \mathcal{T}^\alpha_\beta = F_{\beta\gamma} j^\gamma$. Поэтому 4-дивергенция суммы $T^{\alpha\beta} + \mathcal{T}^{\alpha\beta}$ будет равна нулю.

Обратим внимание, что в законе сохранения (7.36) поля и заряды входят равноправным образом. Этот закон будет выполняться, если одновременно используются уравнения Максвелла для полей, создаваемых зарядами и уравнения движения (сила Лоренца) для этих-же зарядов в создаваемых ими полях. Таким образом, не производится разделения на источники поля и пробные заряды (см. также стр. 311).

- В заключение выразим компоненты тензора энергии-импульса:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(g_{\mu\nu} F^{\alpha\mu} F^{\nu\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right)$$

через напряжённости поля. Для первого слагаемого в круглых скобках, имеем:

$$g_{\mu\nu} F^{0\mu} F^{\nu 0} = -F^{0i} F^{i0} = \mathbf{E}^2, \quad g_{\mu\nu} F^{0\mu} F^{\nu 1} = -F^{0i} F^{i1} = [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_x,$$

и т.д. Во втором слагаемом стоит инвариант $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)$. Поэтому компоненты тензора с нулевым индексом равны плотностям энергии и импульса (стр. 311):

$$T^{00} = W = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi}, \quad T^{0i} = T^{i0} = \mathbf{P}^i = \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]^i}{4\pi}. \quad (7.37)$$

Аналогично расписываются пространственные компоненты тензора. Это даёт тензор потока импульса (см. стр. 312):

$$T^{ij} = T_{ij} = \sigma_{ij} = \delta_{ij} W - \frac{E_i E_j + B_i B_j}{4\pi}. \quad (7.38)$$

Полученные в главе 5 законы сохранения энергии и импульса непосредственно следуют из уравнения непрерывности $\partial_\mu (T^{\mu\nu} + \mathcal{T}^{\mu\nu}) = 0$. Действительно, пусть заряды, находящиеся в объёме V , окруженной поверхностью S , эту поверхность не пересекают, оставаясь, внутри объёма. Запишем для этого случая интегральную форму уравнения непрерывности:

$$\frac{d}{dt} \int_V (T^{0\nu} + \mathcal{T}^{0\nu}) d^3\mathbf{r} + \int_S T^{i\nu} dS^i = 0.$$

При $\nu = 0$ плотность энергии среды системы точечных зарядов равна:

$$\mathcal{T}^{00}(t, \mathbf{r}) = \mu\gamma = \sum_k \frac{m_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t))}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_k^2(t)}}.$$

Интегрируя по $d^3\mathbf{r}$, получаем суммарную энергию движения зарядов. Выражение же для энергии-импульса поля дают закон сохранения энергии (5.58), стр. 311. Аналогично для закона сохранения импульса

Может возникнуть вопрос, почему нельзя ограничиться плотностями энергии и импульса и приходится рассматривать тензор? Дело в том, что в отличии, например, от плотности тока, четвёрка величин $\{W, \mathbf{P}\}$ не образует 4-вектора. В этом легко убедиться, подставив в них преобразования Лоренца для напряжённостей поля. Простыми трансформационными свойствами обладает именно тензор $T^{\alpha\beta}$, частью компонент которого являются плотности энергии и импульса.

7.4 Теорема Нётер

Законы сохранения тесно связаны со существованием различных симметрий. Наличие симметрии означает, что при определённых непрерывных преобразованиях действие (интеграл от лагранжиана) не меняется. Это приводит к тому, что не меняются и уравнения движения. С каждой подобной симметрией связан определённый закон сохранения (Эмми Нётер, 1918 г.)

Пусть существуют непрерывные преобразования координат и полей, зависящие от m вещественных параметров $\omega^a = (\omega^1, \dots, \omega^m)$:

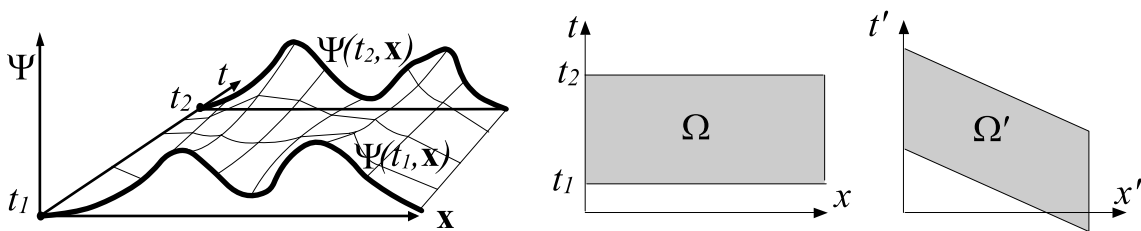
$$x^\mu \mapsto x'^\mu = f^\mu(x, \omega), \quad \Psi_k(x) \mapsto \Psi'_k(x') = F_k(\Psi(x), \omega), \quad (7.39)$$

которые оставляют инвариантным действие:

$$\int_{\Omega'} \mathcal{L}[\Psi'(x')] d^4x' = \int_{\Omega} \mathcal{L}[\Psi(x)] d^4x \quad (7.40)$$

(мы пока не конкретизируем трансформационные свойства поля $\Psi_k(\mathbf{x})$ и для краткости опускаем зависимость \mathcal{L} от производных $\partial_\mu \Psi_k$).

Например, “приличная” полевая теория должна быть инвариантна относительно преобразований Лоренца. В частности уравнения поля выглядят одинаковым образом для всех инерциальных наблюдателей. Обратим внимание, что в условии инвариантности (7.40), несмотря на множество штрихов, функция Лагранжа \mathcal{L} стоит одна и та же в левой и правой части (поэтому уравнения движения не меняются). При этом область интегрирования Ω для различных наблюдателей (до и после преобразования Лоренца) различная:



Выше на первом рисунке изображены функции поля в два момента времени $\Psi(t_1, \mathbf{x})$ и $\Psi(t_2, \mathbf{x})$. Значения этих функций задаются при выводе уравнений Лагранжа (стр.431). Область интегрирования Ω , ограниченная “трёхмерными пространствами” в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ приведена на втором рисунке. Эта же область в другой инерциальной системе будет ограничена наклонными к оси времени гиперплоскостями $\gamma(t' + vx') = t_{1,2}$. В общем случае область интегрирования Ω может быть ограничена двумя произвольно “изогнутыми” пространственно-подобными гиперповерхностями.

• Разберём подробнее закон преобразования $\Psi'_k(x') = F_k(\Psi(x), \omega)$. Пусть в качестве преобразования 4-координат выступают преобразования Лоренца с параметрами $\omega = (\mathbf{v}, \phi)$, где \mathbf{v} – скорость системы отсчёта, а ϕ – углы поворота её координатных осей. В этом случае $m = 6$.

Скалярным полем называют функцию, значение которой, по определению, одинаковое во всех системах отсчёта:

$$\Psi'(x') = \Psi(x).$$

Представим, например, что в различных точках пространства “стоят” наблюдатели системы отсчёта S с синхронизированными часами. Каждый из них “показывает” всем желающим циферблат своих часов. В результате, во всём пространстве системы S задана функция $\Psi(x) = t$. Она постоянна в данный момент времени для наблюдателей в S . Эти циферблаты могут видеть *соседние* к ним наблюдатели из другой системы S' , движущиеся со скоростью \mathbf{v} . В силу преобразований Лоренца $t = \gamma(t' + \mathbf{v} \mathbf{x}')$. Поэтому, эта же скалярная функция (показания часов в различных точках пространства) будет иметь в системе S' другую функциональную зависимость от координат и времени $\Psi'(x') = \gamma(t' + \mathbf{v} \mathbf{x}')$. Однако её значение (число в данной точке пространства и времени) в системе S' будет таким же, как и у $\Psi(x)$, так как это просто положение стрелки на часах системы S .

Векторное поле – набор из 4-х функций которые в данной точке 4-пространства имеют *различные значения* в различных системах отсчёта. Эти значения связаны при помощи преобразований Лоренца. Например, 4-потенциал $A^\nu(x) = \{\varphi, \mathbf{A}\}$ является векторным полем:

$$\varphi'(x') = \gamma(\varphi(x) - \mathbf{v} \mathbf{A}(x)), \quad \mathbf{A}'(x') = \mathbf{A}(x) - \gamma \mathbf{v} \varphi(x) + \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{v} \mathbf{A}(x)).$$

Обратим внимание, что в левой части преобразований аргументы у функций $x' = \{t', \mathbf{x}'\}$ имеют штрихи. Это означает, что поле в обеих системах сравнивается в одной точке пространства, в один и тот же момент времени (фиксированное *событие* 4-пространства). Хотя событие одно, его описание (координаты, время) для наблюдателей в различных системах отсчёта различно и также связано преобразованиями Лоренца.

Тензорное поле второго ранга – набор из 16 функций (два индекса). Их значения в данной точке пространства-времени для наблюдателей в двух системах отсчёта связаны как произведения двух векторных полей. Например, тензор электромагнитного поля является тензорным полем:

$$F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}(x).$$

Индексов у тензорного поля может быть естественно больше двух.

• Будем считать, что параметризация преобразований (7.39) выбрана таким образом, что, при нулевых параметрах получаются тождественные преобразования $f(x, 0) = x$ и $F(\Psi, 0) = \Psi$ (для краткости иногда будем опускать индексы у координат, полей и параметров, если это не приводит к неоднозначности). Разложим в ряд Тейлора по малым ω преобразование координат и полевых функций:

$$x'^{\mu} = f^{\mu}(x, \omega) \approx x^{\mu} + \delta x^{\mu}, \quad \Psi'_k(x') = F_k(\Psi(x), \omega) \approx \Psi_k(x) + \delta \Psi_k(x),$$

где отклонения от тождественных преобразований равны (по a сумма):

$$\delta x^{\mu} = \left. \frac{\partial f^{\mu}}{\partial \omega^a} \right|_{\omega=0} \cdot \omega^a = X_a^{\mu} \omega^a, \quad \delta \Psi_k(x) = \left. \frac{\partial F_k}{\partial \omega^a} \right|_{\omega=0} \cdot \omega^a = Y_{k,a} \omega^a.$$

При преобразованиях полей может изменяться как их значение (для векторных и тензорных), так и функциональная зависимость от координат и времени. Разделим эти два изменения и найдём связь между ними. Для этого разложим по малым δx полное изменение поля:

$$\Psi'_k(x') = \Psi'_k(x + \delta x) = \Psi'_k(x) + \delta x^{\mu} \partial_{\mu} \Psi_k(x)$$

(во втором равенстве штрих у Ψ в $\partial_{\mu} \Psi_k(x)$ опущен, так как мы ограничиваемся первым порядком малости по ω , а они уже присутствуют в δx^{μ}). С другой стороны $\Psi'_k(x') = \Psi_k(x) + \delta \Psi_k(x)$, поэтому изменение формы функции (без изменения координат) при малых параметрах ведёт себя следующим образом:

$$\Psi'_k(x) = \Psi_k(x) + \bar{\delta} \Psi_k(x), \quad \bar{\delta} \Psi_k(x) = \delta \Psi_k(x) - \delta x^{\mu} \partial_{\mu} \Psi_k(x).$$

Это функциональное изменение состоит из полного изменения $\delta \Psi(x)$ за вычетом трансформации, при изменении только аргументов функции. Обратим внимание на черту $\bar{\delta}$, помечающую изменение формы.

В качестве примера рассмотрим описанное ранее скалярное поле, дающее показания часов системы S . По определению, его значение не меняется при преобразованиях Лоренца (одинаково во всех системах отсчёта). Поэтому $\delta \Psi(x) = 0$. Однако функциональная форма поля $\Psi(x)$ различна в различных системах отсчёта. Так как $\Psi'(x') = \gamma(t' + \mathbf{v}\mathbf{x}')$, то опуская штрих у координат и времени и раскладывая по малому параметру преобразования $\omega^a = v^a$, имеем:

$$\Psi'(x) = t + \mathbf{v}\mathbf{x} = \Psi(x) + \mathbf{v}\mathbf{x}.$$

Поэтому малое функциональное изменение равно $\bar{\delta} \Psi(x) = \mathbf{v}\mathbf{x}$. В качестве упражнения предлагается найти (\llcorner Н₉₆) полное и функциональное изменения векторного 4-потенциала заряда, движущегося с постоянной скоростью $A^{\alpha}(x) = Q u^{\alpha} / \sqrt{a^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})^2 - x^2}$ (стр. 426).

• В условии инвариантности (7.40) переменная x' в левой части является обычной “немой” переменной интегрирования и может быть переобозначена любым символом. Поэтому опустим у неё штрих:

$$\int_{\Omega'} \mathcal{L}[\Psi'(x)] d^4x = \int_{\Omega} \mathcal{L}[\Psi(x)] d^4x \quad (7.41)$$

Так как это не замена переменной интегрирования, а только её переобозначение, область интегрирования Ω' не изменяется и штрих у неё остался. Мы рассматриваем разложение по параметрам преобразования при котором значения старых координат и новых отличаются незначительно: $x'^{\nu} = x^{\nu} + \delta x^{\nu}$. Соответственно незначительно отличаются и области интегрирования Ω и Ω' . Для произвольной функции координат $G(x)$ справедлива следующая формула:

$$\int_{\Omega'} G(x) d^4x \approx \int_{\Omega} \{G(x) + \partial_{\mu}(G(x) \delta x^{\mu})\} d^4x. \quad (7.42)$$

Для её доказательства поставим в левой части формулы у координат штрихи и сделаем преобразование координат в результате которого область интегрирования изменится. При замене переменных дополнительно появляется множитель якобиана преобразования:

$$\int_{\Omega'} G(x') d^4x' = \int_{\Omega} G(x + \delta x) \left| \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right| d^4x.$$

Для бесконечно малого преобразования якобиан (определитель производных старых координат по новым) вычисляется следующим образом:

$$\left| \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right| = \left| \frac{\partial(x^{\nu} + \delta x^{\nu})}{\partial x^{\mu}} \right| = |\delta_{\mu}^{\nu} + \partial_{\mu} \delta x^{\nu}| = \begin{vmatrix} 1 + \partial_0 \delta x^0 & \partial_0 \delta x^1 \\ \partial_1 \delta x^0 & 1 + \partial_1 \delta x^1 \end{vmatrix},$$

где для краткости записана матрица для 2-х измерений. Определитель с точностью до первого порядка по δx равен: $1 + \partial_0 \delta x^0 + \partial_1 \delta x^1$. Поэтому

$$\int_{\Omega'} G(x') d^4x' \approx \int_{\Omega} \{G(x) + \delta x^{\mu} \partial_{\mu} G(x)\} (1 + \partial_{\nu} x^{\nu}) d^4x.$$

В фигурных скобках проведено разложение функции $G(x + \delta x)$ в ряд Тейлора по δx^{ν} . Перемножая скобки, сохраняя первый порядок по δx , и учитывая формулу производной произведения, получаем (7.42). Штрих в левой части у переменной интегрирования можно опустить.

Таким образом, условие инвариантности действия (7.41) с одинаковыми областями интегрирования имеет вид:

$$\int_{\Omega} \{ \mathcal{L}[\Psi'(x)] + \partial_{\mu}(\mathcal{L}[\Psi(x)] \delta x^{\mu}) \} dx^4 = \int_{\Omega} \mathcal{L}[\Psi(x)] dx^4. \quad (7.43)$$

Во втором слагаемом в левой части штрих у Ψ снова опущен, так как мы удерживаем первый порядок малости по ω , а там уже стоит множитель δx^{μ} , содержащий ω . Разложим в ряд по ω первое слагаемое:

$$\mathcal{L}[\Psi'(x)] = \mathcal{L}[\Psi(x) + \bar{\delta}\Psi(x), \partial\Psi(x) + \partial\bar{\delta}\Psi]$$

в первом приближении по ω (по k сумма):

$$\mathcal{L}[\Psi'(x)] = \mathcal{L}[\Psi(x)] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_k} \bar{\delta}\Psi_k(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\Psi_k)} \partial_{\mu}\bar{\delta}\Psi_k(x).$$

Подставляя это разложение в (7.43) и заменяя производную $\partial\mathcal{L}/\partial\Psi_k$ при помощи уравнений Лагранжа (7.18), стр. 431, получаем:

$$\int_{\Omega} \left\{ \partial_{\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\Psi_k)} \right) \bar{\delta}\Psi_k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\Psi_k)} \partial_{\mu}\bar{\delta}\Psi_k + \partial_{\mu}(\mathcal{L} \delta x^{\mu}) \right\} dx^4 = 0.$$

Функциональное изменение $\bar{\delta}\Psi(x) = \Psi'(x) - \Psi(x)$ точно также выглядит и для производных полей $\bar{\delta}[\partial_{\mu}\Psi(x)] = \partial_{\mu}\Psi'(x) - \partial_{\mu}\Psi(x)$. Поэтому $\partial_{\mu}\bar{\delta}\Psi_k = \bar{\delta}\partial_{\mu}\Psi_k$, и в предыдущем соотношении первые два слагаемых сворачиваются в одно как производная произведения:

$$\int_{\Omega} \partial_{\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\Psi_k)} \bar{\delta}\Psi_k + \mathcal{L} \delta x^{\mu} \right) dx^4 = 0.$$

Подставим изменение функциональной формы поля $\bar{\delta}\Psi_k = \delta\Psi_k - \delta x^{\nu} \partial_{\nu}\Psi_k$, выраженное через полное изменение поля $\delta\Psi$. Изменение координат и поля запишем при помощи коэффициентов X_a^{μ} и $Y_{k,a}$ разложения по параметрам преобразований: $\delta x^{\nu} = X_a^{\nu} \omega^a$ и $\delta\Psi_k(x) = Y_{k,a} \omega^a$:

$$\int_{\Omega} \partial_{\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\Psi_k)} (Y_{k,a} - X_a^{\nu} \partial_{\nu}\Psi_k) + \mathcal{L} X_a^{\mu} \right) \omega^a dx^4 = 0.$$

Это выражение справедливо для любой области Ω и параметров ω^a , поэтому оно будет равно нулю только, если нулю равна подинтегральная функция.

Сформулируем *теорему Нётер*. Пусть действие (и следовательно уравнения движения) инвариантны относительно преобразований координат $x'^{\mu} = f^{\mu}(x, \omega)$ и полей $\Psi'_k(x') = F_k(\Psi(x), \omega)$, зависящих от m параметров $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^m)$. Тогда существует m сохраняющихся токов J_a^{μ} , которые нумеруются при помощи индекса $a = 1, \dots, m$:

$$J_a^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} \Psi_k)} Y_{k,a} - \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} \Psi_k)} \partial_{\nu} \Psi_k - \delta_{\nu}^{\mu} \mathcal{L} \right\} X_a^{\nu}. \quad (7.44)$$

Эти токи удовлетворяют уравнениям непрерывности:

$$\partial_{\mu} J_a^{\mu} = 0. \quad (7.45)$$

Коэффициенты X_a^{ν} и $Y_{k,a}$, зависящие от координат и полевых функций, являются частными производными преобразований по параметрам в окрестности тождественного преобразования:

$$X_a^{\mu} = \left. \frac{\partial f^{\mu}(x, \omega)}{\partial \omega^a} \right|_{\omega=0}, \quad Y_{k,a} = \left. \frac{\partial F_k(\Psi, \omega)}{\partial \omega^a} \right|_{\omega=0}. \quad (7.46)$$

Уравнение непрерывности, как обычно, означает существование сохраняющейся величины. Расписывая его в явном виде:

$$\partial_{\mu} J_a^{\mu} = \frac{\partial J_a^0}{\partial t} + \nabla_j J_a^j = 0$$

и интегрируя по некоторой области 3-мерного пространства, имеем:

$$\frac{dQ_a}{dt} = - \int_S J_a^j dS_j, \quad Q_a = \int_V J_a^0(t, \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x},$$

где применена теорема Гаусса для перехода от объёмного интеграла к поверхностному. Аналогично закону сохранения заряда, пространственные компоненты J_a^j сохраняющегося тока имеют смысл некоторого вектора потока, который меняет “заряды” Q_a в объёме V , при пересечении этим потоком поверхности S , окружающей объём.

Если поля на бесконечности убывают, поверхностный интеграл равен нулю и “заряд” Q_a во всём пространстве сохраняется:

$$\frac{dQ_a}{dt} = 0.$$

В общем случае существует m разновидностей таких сохраняющихся зарядов, по числу параметров преобразования ω .

7.5 Применения теоремы Нётер

• Рассмотрим *трансляционные преобразования* в пространстве и во времени без изменения полевых функций:

$$x^\nu \mapsto x'^\nu = x^\nu + \omega^\nu, \quad \Psi'_k(x') = \Psi_k(x). \quad (7.47)$$

Физически подобные преобразования можно реализовать следующим образом. Пусть есть две системы отсчёта S' и S , которые *неподвижны* относительно друг друга. Наблюдатели в S измеряют координаты и время относительно выбранного ими начала отсчёта. Начало отсчёта системы S' сдвинуто в 3-мерном пространстве относительно начала S на вектор $\boldsymbol{\omega} = \{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$. Отсчёт времени также сдвинут на ω^0 . Так как системы неподвижны, любая функция (неважно скалярная или векторная) будет иметь одно и то же значение в *данной* точке пространства, которая имеет *разные* координаты в обеих системах. Именно это и записано в (7.47).

Если лагранжиан не зависит явно от x^ν (только через полевые функции), то действие и уравнения движения будут инвариантны относительно трансляционных преобразований. В данном случае индекс a , нумерующий параметры, пробегает значения от 0 до 3 и является обычным индексом 4-мерного ковариантного формализма:

$$X^\nu_\mu = \left. \frac{\partial(x^\nu + \omega^\nu)}{\partial\omega^\mu} \right|_{\omega=0} = \delta^\nu_\mu, \quad Y_{k,\mu} = 0.$$

Поэтому сохраняющийся нётеровский ток (7.44) с обратным знаком равен *каноническому тензору энергии-импульса* (7.32), стр. 438:

$$-J^\mu_\nu = T^\mu_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi_k)} \partial_\nu\Psi_k - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}. \quad (7.48)$$

Таким образом, сохранение энергии и импульса поля связано с симметрией уравнений движения относительно сдвигов во времени $t' = t + \omega^0$ и трансляций (сдвигов на вектор $\boldsymbol{\omega}$) в 3-мерном пространстве $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}$.

Теорема Нётер при произвольных преобразованиях может быть записана в более компактной форме при помощи канонического тензора энергии импульса:

$$J^\mu_a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi_k)} Y_{k,a} - T^\mu_\nu X^\nu_a. \quad (7.49)$$

Следовательно, канонический тензор энергии-импульса будет входить в любой закон сохранения, связанный симметрией, которая затрагивает координаты (коэффициенты X^ν_a отличны от нуля).

• Уравнения движения и действие должны быть одинаковыми для различных инерциальных наблюдателей, связанных преобразованиями Лоренца. Мы запишем их в матричном виде (стр. 136):

$$x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} x^{\mu}.$$

Напомним, что преобразования Лоренца можно интерпретировать как повороты 4-пространства с координатами (t, x, y, z) . Они содержат в себе как чистое преобразование Лоренца (буст), описывающее относительное движение систем отсчёта со скоростью v , так и обычные 3-мерные вращения на угол ϕ вокруг одной из пространственных осей. Поэтому, преобразования Лоренца, в общем случае, зависят от 6 параметров $v_x, v_y, v_z, \phi_x, \phi_y, \phi_z$. Пусть эти параметры малы так, что матрицу Λ можно разложить в окрестности единичной матрицы:

$$\Lambda^{\nu}_{\mu} = \delta^{\nu}_{\mu} + \omega^{\nu}_{\mu} + \dots$$

Элементы матрицы ω^{ν}_{μ} являются малыми величинами, линейно зависящими от параметров преобразования Лоренца. Соответственно сами преобразования в этом приближении имеют вид:

$$x'^{\nu} = x^{\nu} + \omega^{\nu}_{\mu} x^{\mu}. \quad (7.50)$$

Запишем с точностью до первого порядка малости по ω^{ν}_{μ} условие инвариантности интервала:

$$x'^{\nu} x'_{\nu} = (x^{\nu} + \omega^{\nu}_{\mu} x^{\mu})(x_{\nu} + \omega_{\nu\lambda} x^{\lambda}) \approx x^{\nu} x_{\nu} + \omega^{\nu}_{\mu} x^{\mu} x_{\nu} + \omega_{\nu\lambda} x^{\lambda} x^{\nu} = x^{\nu} x_{\nu}.$$

Учитывая, что $A^{\alpha} B_{\alpha} = A_{\alpha} B^{\alpha}$ и переименовывая индексы можно записать $\omega^{\nu}_{\mu} x^{\mu} x_{\nu} = \omega_{\nu\mu} x^{\mu} x^{\nu} = \omega_{\nu\lambda} x^{\lambda} x^{\nu}$. Поэтому, чтобы интервал был инвариантен ($x'^2 = x^2$), должно выполняться соотношение:

$$\omega_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = 0.$$

Это выражение является свёрткой тензора $\omega_{\mu\nu}$ с симметричным тензором $x^{\mu} x^{\nu}$. Так как $\omega_{\mu\nu}$ от координат не зависит, ноль получится, только если коэффициенты $\omega_{\mu\nu}$ будут антисимметричными (стр. 763):

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}.$$

У антисимметричной матрицы $\omega_{\mu\nu}$ диагональные элементы равны нулю, а ненулевых независимых элементов будет 6. Эти 6 элементов и соответствуют 6 параметрам преобразований. Их можно выразить через относительную скорость инерциальных систем отсчёта и углы поворота их координатных осей (см. главу 8).

Так как параметры преобразования записаны в виде матрицы, индекс “ a ” в токе теоремы Нётер состоит из двух индексов $a = (\mu, \nu)$ и суммирование по нему эквивалентно двойной сумме. Найдём коэффициенты варьирования координат:

$$X_a^\nu \equiv X_{\alpha\beta}^\nu = \frac{\partial(x^\nu + \omega^{\nu\mu}x_\mu)}{\partial\omega^{\alpha\beta}} = \delta_\alpha^\nu x_\beta - \delta_\beta^\nu x_\alpha.$$

Поясним взятие производной. Пусть индексы имеют конкретное значение, например $\alpha = 1, \beta = 2$. Ненулевая производная $\omega^{\nu\mu}x_\mu$ по ω^{12} получится от слагаемых $\omega^{12}x_2$ и $\omega^{21}x_1 = -\omega^{12}x_1$. Первое из них соответствует $\nu = \alpha = 1$, а второе $\nu = \beta = 2$. Поэтому либо $(\nu = \alpha) \cdot x_\beta$ либо $(\nu = \beta) \cdot (-x_\alpha)$. В остальных случаях имеем ноль.

Подставляя $X_{\alpha\beta}^\nu$ в сохраняющийся ток (7.49) и опуская индекс μ вниз, получаем:

$$J_{\mu,\alpha\beta} = -T_{\mu\nu} (\delta_\alpha^\nu x_\beta - \delta_\beta^\nu x_\alpha) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Psi_k)} Y_{k,\alpha\beta}.$$

Сворачивая с символами Кронекера, окончательно получаем:

$$J_{\mu,\alpha\beta} = L_{\mu,\alpha\beta} + S_{\mu,\alpha\beta}, \quad (7.51)$$

где первое слагаемое принято называть *угловым моментом* вращения поля, а второе слагаемое – *спиновым моментом* поля:

$$L_{\mu,\alpha\beta} = x_\alpha T_{\mu\beta} - x_\beta T_{\mu\alpha}, \quad S_{\mu,\alpha\beta} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\Psi_k)} Y_{k,\alpha\beta}.$$

Угловой момент определяется каноническим тензором энергии-импульса. Спиновый момент зависит от трансформационных свойств поля относительно преобразований Лоренца (коэффициенты $Y_{k,\alpha\beta}$). Оба эти тензора являются антисимметричными по индексам α и β .

Подчеркнём, что названия “угловой” и “спиновый” моменты достаточно условны. Ранее (стр. 184) мы определили спин, как полный момент в системе отсчёта, где суммарный импульс равен нулю. В этой системе интегральный угловой момент не обязательно равен нулю:

$$L_{\alpha\beta} = \int (x_\alpha T_{0\beta} - x_\beta T_{0\alpha}) d^3x \neq 0, \quad P_\alpha = \int T_{0\alpha} d^3x = 0.$$

Название “спин” для тензора $S_{\mu,\alpha\beta}$ связано лишь с тем, что в его определение не входят явно координаты x_α . В тоже время их наличие в $L_{\mu,\alpha\beta}$ подобно тому, как они входят в момент импульса точечной частицы: $x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha$.

Спиновый момент $S_{\mu,\alpha\beta}$ зависит от трансформационных свойств поля. Например, для векторного электромагнитного поля $\Psi_\nu = A_\nu$ закон преобразования $A'^\nu(x') = \Lambda^\nu_\mu A^\mu(x)$ точно такой же, как и закон преобразования для координат. Только вместо координат в производных по $\omega^{\alpha\beta}$ будут стоять полевые функции. Поэтому:

$$Y_{\nu,\alpha\beta} = g_{\nu\alpha} A_\beta - g_{\nu\beta} A_\alpha.$$

Вместо символов Кронекера записаны коэффициенты метрического тензора, так как индекс ν опущен вниз. В результате, спиновый момент равен:

$$S_{\mu,\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\alpha)} A_\beta - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\beta)} A_\alpha.$$

где индекс μ опущен вниз.

Для лагранжиана электромагнитного поля

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{8\pi} \left((\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\alpha A^\beta) - (\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\beta A^\alpha) \right)$$

производная лагранжиана по $\partial^\mu A^\alpha$ равна $-F_{\mu\alpha}/4\pi$, поэтому:

$$S_{\mu,\alpha\beta} = \frac{A_\alpha F_{\mu\beta} - A_\beta F_{\mu\alpha}}{4\pi}.$$

Выразим компоненты $S_{0,\alpha\beta}$ через напряжённости поля. По индексам α, β тензор антисимметричен. Его пространственные компоненты образуют 3-вектор $\mathbf{S} = \{S^{0,23}, S^{0,31}, S^{0,12}\}$, а временные $\mathbf{G} = \{S^{0,10}, S^{0,20}, S^{0,30}\}$. Учитывая что $\mathbf{E} = -\{F^{01}, F^{02}, F^{03}\}$ (стр. 423), получаем:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{A}}{4\pi}, \quad \mathbf{G} = \frac{\varphi \mathbf{E}}{4\pi}.$$

Как мы видим, результат получается калибровочно зависимым. Т.е. если произвести замены $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla f$, $\varphi \mapsto \varphi - \partial f / \partial t$, где f – произвольная функция, напряжённости поля не изменятся. Однако векторы \mathbf{S} и \mathbf{G} при этом поменяются. Аналогично изменится канонический тензор энергии-импульса (стр. 439), который также зависит не только от напряжённости поля (тензора $F^{\alpha\beta}$), но и от потенциалов.

Заметим, что до сих пор мы рассматриваем поле не взаимодействующее с его источниками (зарядами). Экспериментально измеримым, однако, будет суммарный закон сохранения поля и зарядов, так как непосредственно наблюдаем мы именно заряды.

• Бывают также симметрии которые не затрагивают преобразования координат. Рассмотрим два скалярных поля $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ динамика которых описывается следующим лагранжианом (m – константа):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\{(\partial_\mu\Phi_1)^2 + (\partial_\mu\Phi_2)^2\} - \frac{m^2}{2}\{\Phi_1^2 + \Phi_2^2\}. \quad (7.52)$$

Уравнения движения имеют вид (\llcorner Н₉₇):

$$(\partial^2 + m^2)\Phi_1 = 0, \quad (\partial^2 + m^2)\Phi_2 = 0, \quad (7.53)$$

где $\partial^2 = \partial_\mu\partial^\mu$ – оператор Д’Аламбера. Если бы $m = 0$, то эти уравнения совпадали с волновыми уравнениями для напряжённостей или потенциалов электромагнитного поля. Отличная от нуля константа m приводит к тому, что волны полей Φ_i всегда распространяются со скоростью меньшей фундаментальной скорости (которая равна скорости света).

Лагранжиан двухкомпонентного скалярного поля, дополнительно к симметриям трансляции и лоренц-преобразований, инвариантен относительно поворотов в пространстве компонент поля:

$$\begin{cases} \Phi'_1 = \Phi_1 \cos \omega - \Phi_2 \sin \omega, \\ \Phi'_2 = \Phi_1 \sin \omega + \Phi_2 \cos \omega. \end{cases} \quad (7.54)$$

Так как это преобразование не затрагивает координат, величины $X_a^\nu = 0$. Параметр один, поэтому индекс a опустим, и считая поле Ψ_k в теореме Нётер двухкомпонентным $\Psi_k = \{\Phi_1, \Phi_2\}$, запишем:

$$Y_1 = \left. \frac{\partial\Phi'_1}{\partial\omega} \right|_{\omega=0} = -\Phi_2, \quad Y_2 = \left. \frac{\partial\Phi'_2}{\partial\omega} \right|_{\omega=0} = \Phi_1.$$

Поэтому сохраняющийся ток имеет вид:

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_1)} (-\Phi_2) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi_2)} \Phi_1, \quad (7.55)$$

или, учитывая явный вид лагранжиана:

$$J^\mu = \Phi_1 \partial_\mu\Phi_2 - \Phi_2 \partial_\mu\Phi_1. \quad (7.56)$$

Проверим выполнимость уравнения непрерывности:

$$\partial_\mu J^\mu = \Phi_1 (\partial^2\Phi_2) + (\partial_\mu\Phi_1)(\partial^\mu\Phi_2) - (\partial^2\Phi_1)\Phi_2 - (\partial_\mu\Phi_1)(\partial^\mu\Phi_2) = 0,$$

где ноль получается после подстановки уравнений движения (7.53). Заметим, что если бы в (7.53) параметр m у каждого поля был бы свой, ноль в уравнении непрерывности не получился бы. Однако в этом случае отсутствовала бы и симметрия лагранжиана.

• От действительных полей можно переходить к комплексным. Например, рассмотренное выше двухкомпонентное скалярное поле может быть переформулировано в терминах однокомпонентного комплексного поля. Его действительной и мнимой частью выступают два действительных поля:

$$\Psi = \frac{\Phi_1 + i\Phi_2}{\sqrt{2}}. \quad (7.57)$$

Несложно проверить, что лагранжиан, эквивалентный (7.52) имеет вид:

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \Psi^*)(\partial_\mu \Psi) - m^2 \Psi^* \Psi, \quad (7.58)$$

где звёздочка – это комплексное сопряжение. Внешне функция стала одна. Однако она по-прежнему двухкомпонентна, поэтому все вычисления (получение уравнений движения, законов сохранения и т.д.) должны проводится так, как будто Ψ и Ψ^* – это два независимых поля. Например, уравнения Лагранжа дают:

$$(\partial^2 + m^2)\Psi = 0, \quad (\partial^2 + m^2)\Psi^* = 0.$$

Симметрия лагранжиана (7.54) записывается в более компактном виде:

$$\Psi \mapsto \Psi' = e^{i\omega} \Psi, \quad \Psi^* \mapsto \Psi'^* = e^{-i\omega} \Psi^*.$$

Поэтому два коэффициента Y равны:

$$Y = \left. \frac{\partial(e^{i\omega} \Psi)}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} = i\Psi, \quad Y^* = \left. \frac{\partial(e^{-i\omega} \Psi^*)}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} = -i\Psi^*.$$

Суммируя в теореме Нётер Y и его комплексное сопряжение, получаем:

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi^*)} (-i\Psi^*) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} (i\Psi).$$

Используя лагранжиан (7.58), выражение для тока в явном виде можно записать следующим образом:

$$J^\mu = i(\Psi \partial^\mu \Psi^* - \Psi^* \partial^\mu \Psi). \quad (7.59)$$

Подставляя (7.57) несложно проверить, что этот ток эквивалентен (7.56).

В физике элементарных частиц многие поля имеют более компактное представление в комплексных обозначениях. Связано это с разнообразными симметриями, которые приводят к законам сохранения различных зарядов.

7.6 Неоднозначность и ковариантность

• Запишем ещё раз выражения для канонического тензора энергии-импульса (симметрия относительно трансляций в 4-пространстве):

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_k)} \partial^\nu \Psi_k - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

и тензора полного момента импульса поля (симметрия относительно вращения в 4-пространстве): $J^{\mu,\alpha\beta} = L^{\mu,\alpha\beta} + S^{\mu,\alpha\beta}$, где угловая и спиновая компоненты полного момента импульса равны:

$$L^{\mu,\alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha}, \quad S^{\mu,\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_k)} Y_k^{\alpha\beta}.$$

По первому индексу энергия-импульс и момент удовлетворяют уравнениям непрерывности $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ и $\partial_\mu J^{\mu,\alpha\beta} = 0$. Тензор момента по последним двум индексам антисимметричен (т.к. антисимметричны параметры поворота $\omega^{\alpha\beta}$). Канонический тензор энергии-импульса, в общем случае, несимметричен по индексам. Если же он оказывается симметричным $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, то угловой и спиновый моменты сохраняются (удовлетворяют уравнениям непрерывности) независимо. Действительно:

$$\partial_\mu L^{\mu,\alpha\beta} = \partial_\mu (x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha}) = \delta_\mu^\alpha T^{\mu\beta} - \delta_\mu^\beta T^{\mu\alpha} = T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha} = 0, \quad (7.60)$$

где сразу учтено, что $\partial_\mu T^{\mu\alpha} = 0$. Если сохраняется угловой момент $L^{\mu,\alpha\beta}$, то, в силу сохранения полного момента $J^{\mu,\alpha\beta}$, будет сохраняться и спиновая компонента момента $S^{\mu,\alpha\beta}$. В качестве упражнения (\llcorner Н₉₈) стоит проверить, что для лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi} (\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\alpha A^\beta)$$

канонический тензор энергии-импульса симметричен, а тензор спина не равен нулю и сохраняется сам по себе.

К любому сохраняющемуся току J^μ можно прибавить некоторую комбинацию полей, которая, в свою очередь, удовлетворяет уравнению непрерывности. Понятно, что подобный модифицированный ток также будет сохраняться. Пусть $\Phi^{\mu\nu}$ – антисимметричный тензор: $\Phi^{\mu\nu} = -\Phi^{\nu\mu}$. Тогда

$$\partial_\mu (J^\mu + \partial_\nu \Phi^{\mu\nu}) = 0,$$

так как в силу перестановочности производных $\partial_\nu \partial_\mu = \partial_\mu \partial_\nu$ и антисимметричности $\Phi^{\mu\nu}$, имеем $\partial_\mu \partial_\nu \Phi^{\mu\nu} = 0$ (стр. 763). Поэтому добавление к току величины $\partial_\nu \Phi^{\mu\nu}$ не нарушит закона сохранения. Возможны и более замысловатые изменения канонических величин.

Так, от канонических тензоров энергии-импульса и спина перейдём к новым тензорам энергии-импульса и спина при помощи тензора $\Phi^{\mu,\alpha\beta}$, который антисимметричен по последним двум индексам: ($\Phi^{\mu,\alpha\beta} = -\Phi^{\mu,\beta\alpha}$):

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\gamma (\Phi^{\gamma,\mu\nu} - \Phi^{\mu,\gamma\nu} - \Phi^{\nu,\gamma\mu}), \quad \tilde{S}^{\mu,\alpha\beta} = S^{\mu,\alpha\beta} - \Phi^{\mu,\alpha\beta}. \quad (7.61)$$

Тензор $\tilde{T}^{\mu\nu}$ по-прежнему удовлетворяет уравнению непрерывности:

$$\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\gamma (\Phi^{\gamma,\mu\nu} - \Phi^{\mu,\gamma\nu}) - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\gamma \Phi^{\nu,\gamma\mu} = 0.$$

Первое слагаемое (член в круглых скобках) равен нулю, в силу явной антисимметрии по индексам μ и γ . Последний член равен нулю, так как тензор $\Phi^{\nu,\gamma\mu}$ антисимметричен по последним двум индексам.

Используя тензоры $\tilde{T}^{\mu\nu}$ и $\tilde{S}^{\mu,\alpha\beta}$ можно записать новый полный момент:

$$\tilde{J}^{\mu,\alpha\beta} = x^\alpha \tilde{T}^{\mu\beta} - x^\beta \tilde{T}^{\mu\alpha} + \tilde{S}^{\mu,\alpha\beta}.$$

Он как и канонический момент сохраняется. Действительно $\tilde{J}^{\mu,\alpha\beta}$ равен:

$$J^{\mu,\alpha\beta} + \frac{x^\alpha}{2} \partial_\gamma (\Phi^{\gamma,\mu\beta} - \Phi^{\mu,\gamma\beta} - \Phi^{\beta,\gamma\mu}) - \frac{x^\beta}{2} \partial_\gamma (\Phi^{\gamma,\mu\alpha} - \Phi^{\mu,\gamma\alpha} - \Phi^{\alpha,\gamma\mu}) - \Phi^{\mu,\alpha\beta}.$$

Беря производные по ∂_μ и учитывая, что $\partial_\mu J^{\mu,\alpha\beta} = 0$, получаем:

$$\partial_\mu \tilde{J}^{\mu,\alpha\beta} = \frac{1}{2} \partial_\gamma (\Phi^{\gamma,\alpha\beta} - \Phi^{\alpha,\gamma\beta} - \Phi^{\beta,\gamma\alpha}) - \frac{1}{2} \partial_\gamma (\Phi^{\gamma,\beta\alpha} - \Phi^{\beta,\gamma\alpha} - \Phi^{\alpha,\gamma\beta}) - \partial_\mu \Phi^{\mu,\alpha\beta},$$

где опущены производные от круглых скобок, равные, как мы видели при вычислении $\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu}$, нулю. Кроме этого проведены свёртки с $\partial_\mu x^\alpha = \delta_\mu^\alpha$ и $\partial_\mu x^\beta = \delta_\mu^\beta$. Приводя подобные слагаемые, получаем

$$\partial_\mu \tilde{J}^{\mu,\alpha\beta} = 0. \quad (7.62)$$

Неоднозначность в определении сохраняющихся величин можно использовать для придания им тех или иных свойств. Например, если выше выбрать $\Phi^{\mu,\alpha\beta} = S^{\mu,\alpha\beta}$, где $S^{\mu,\alpha\beta}$ – канонический спин (получаемый из теоремы Нётер), то новый тензор спина $\tilde{S}^{\mu,\alpha\beta}$ становится равным нулю ($\tilde{S}^{\mu,\alpha\beta} = 0$), а тензор энергии-импульса симметричным:

$$\tilde{J}^{\mu,\alpha\beta} = x^\alpha \tilde{T}^{\mu\beta} - x^\beta \tilde{T}^{\mu\alpha}, \quad \tilde{T}^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\nu\mu}. \quad (7.63)$$

Симметричность $\tilde{T}^{\mu\nu}$ следует из того, что $\tilde{J}^{\mu,\alpha\beta}$ удовлетворяет уравнению непрерывности, поэтому справедливы вычисления подобные (7.60).

“Упрятывание” спиновой компоненты полного момента импульса поля в угловой момент с одновременной симметризацией тензора энергии-импульса называется *процедурой Белифанте*. Стоит проверить, что “угаданная” дивергенция для симметризации тензора энергии-импульса на стр. 439 может быть получена при помощи этой процедуры.

• Неоднозначность в выборе тензоров энергии-импульса и спина, естественно, не приводит к физической неоднозначности. Рассмотрим, например, сохранение энергии в объёме V , окруженном поверхностью S (стр. 311):

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_V W dV + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_k \right\} + \oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} = 0. \quad (7.64)$$

Это интегральное уравнение непосредственно следует из теоремы Пойнтинга $\partial W/\partial t + \mathbf{E}\mathbf{j} + \nabla\mathbf{P} = 0$ и силы Лоренца. В ковариантном виде теорема Пойнтинга имеет вид $\partial_\mu(T^{\mu\nu} + \mathcal{T}^{\mu\nu}) = 0$, где тензоры поля $T^{\mu\nu}$ и вещества $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ являются симметричными. Пусть к сумме этих двух тензоров прибавляют некоторый тензор $G^{\mu\nu}$, автоматически удовлетворяющий уравнению $\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0$. Его добавление скажется следующим образом на интегральной версии закона сохранения:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_V (W + G^{00}) dV + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_k \right\} + \oint_S (P^i + G^{0i}) dS^i = 0. \quad (7.65)$$

В силу уравнения непрерывности $\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0$, независимо от (7.64) выполняется соотношение:

$$\frac{d}{dt} \int_V G^{00} dV + \oint_S G^{0i} dS^i = 0. \quad (7.66)$$

Пусть мы интересуемся, что происходит с суммарной энергией зарядов \mathbb{E}_k при изменении напряженностей полей. Понятно, что совместное использование законов сохранения (7.65) и (7.66) приведёт к тем же физическим следствиям, что и использование (7.64). Поэтому неоднозначность в выборе плотности энергии и импульса поля (произвол в тензоре $G^{\mu\nu}$) не влияет на однозначность в описании поведения зарядов.

Определённые сложности с однозначностью иногда возникают при рассмотрении потока энергии через некоторую площадку (незамкнутую поверхность). С таким потоком мы имеем дело когда измеряем энергию излучения, проходящую в единицу времени через единицу поверхности. Этот поток приводит к давлению, нагреву и другим “неполевым” следствиям, которые можно независимо измерить. В тоже время, вектор плотности импульса поля $\mathbf{P} = [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]/4\pi$, характеризующий эти эффекты, с точки зрения теоремы Пойнтинга, определён неоднозначно. Например, в силу уравнения Максвелла $\nabla\mathbf{B} = 0$, его можно заменить на $\mathbf{P} \mapsto \mathbf{P} + \mathbf{B}$ (в ковариантной формулировке это соответствует выбору тензора $G^{\mu\nu} = {}^*F^{\mu\nu}$). Куда в этом случае направлено давление света?

На самом деле, даже при рассмотрении потока через площадку, необходимо последовательно применять интегральный закон сохранения для *замкнутого* объёма. Тогда проблем с неоднозначностью не будет. Например, пусть нас интересует какой импульс передан пластинке, поглотившей падающий на неё свет. В конечном счёте, этот импульс передан зарядам, находящимся в пластинке. Поэтому необходимо рассматривать пластинку в виде, например, параллелепипеда, имеющего малую, но конечную толщину. Внутри этого параллелепипеда находятся заряды. Для вычисления поглощённого импульса поля возьмём *суммарный* закон сохранения импульса поля и зарядов (стр. 312):

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \mathbf{P} dV + \sum_{k=1}^n \mathbf{p}_k \right)_i + \int_S \sigma_{ij} dS^j = 0$$

Какой бы тензор $G^{\mu\nu}$ мы не добавили к $T^{\mu\nu} + \mathcal{T}^{\mu\nu}$, он фактически не меняет этого уравнения, сокращаясь в силу собственного закона сохранения типа (7.66). Вычислим поверхностный интеграл от тензора напряжений σ_{ij} (см. стр. 441). Рассмотрим, для простоты плоскую, линейно поляризованную электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль оси z с амплитудой $f = f(z - t)$:

$$\mathbf{E} = \{f, 0, 0\}, \quad \mathbf{B} = \{0, f, 0\}, \quad \mathbf{P} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi} = \{0, 0, f^2/4\pi\},$$

Пусть плоскость параллелепипеда (пластинка) перпендикулярна оси z . Тогда $\sigma_{ij} dS^j$ является вектором с компонентами:

$$\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} d\mathbf{S} - \frac{\mathbf{E}(\mathbf{E}d\mathbf{S}) + \mathbf{B}(\mathbf{B}d\mathbf{S})}{4\pi} = \frac{f^2}{4\pi} \{0, 0, dS_z\}.$$

Вектор $d\mathbf{S}$ перпендикулярен поверхности, выходя наружу из объёма. Поэтому на верхней стороне пластины dS_z направлен вдоль оси z , а на нижней – против. В результате, поверхностный интеграл от σ_{ij} равен нулю. Закон сохранения импульса при поглощении электромагнитного поля пластинкой можно теперь записать следующим образом:

$$\left(\int_V \mathbf{P} dV + \sum_{k=1}^n \mathbf{p}_k \right)_{t_1} = \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{p}_k \right)_{t_2},$$

где левая часть относится к ситуации до поглощения, а правая – после. Изменение импульса пластинки равно полученному ею импульсу поля.

Заметим, что в некотором смысле симметричный тензор энергии импульса является выделенным, т.к. не требует дополнительных вычислений по выявлению тривиально сокращающихся слагаемых в законах сохранения.

• Рассматривая законы сохранения в теории поля, мы строим тензорные поля (тензоры, зависящие от координат и времени), которые удовлетворяют уравнению непрерывности. Во времени сохраняется интеграл по 3-мерному пространству от нулевой компоненты таких тензоров. Например, интеграл от нулевой компоненты 4-тока J^μ является сохраняющимся зарядом Q . Этот заряд инвариантен относительно преобразований Лоренца и имеет одинаковое значение для всех инерциальных наблюдателей. Аналогично, для тензора энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ вычисляется интеграл по $d^3\mathbf{x}$ от $T^{0\nu}$. Его значение является суммарной энергией-импульсом поля P^ν , которая преобразуется как 4-вектор.

Подчеркнём, что 4-вектор J^μ и 4-тензор $T^{\mu\nu}$, по определению и по сути своего построения, являются локально ковариантными величинами. Например, 4-ток преобразуется как 4-вектор: $J'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu J^\nu(x)$. При этом аргументы векторного поля $J^\mu(x)$, измеряемого в двух системах отсчёта, относятся к одной и той же точке пространства-времени. В этой точке “находятся” 2 наблюдателя из 2-х систем отсчёта, каждый из которых измеряет собственное время. Поэтому в левой части преобразований аргументы 4-вектора имеют штрих, а в правой стоят уже без штриха.

Когда мы переходим к интегральным величинам, суммируя тензорное поле по всему пространству, вступает в игру *относительность одновременности*. Забудем пока, что 4-ток удовлетворяет уравнению непрерывности и вычислим для произвольного поля J^μ интеграл:

$$Q(t) = \int J^0(t, \mathbf{x}) d^3\mathbf{x}. \quad (7.67)$$

При интегрировании мы суммируем значения функции $J^0(t, \mathbf{x})$, измеренные наблюдателями во всём пространстве в *данный* момент времени t в *данной* “нештрихованной” системе отсчёта. Аналогичное выражение со штрихами соответствует интегральной величине, измеренной наблюдателями в другой инерциальной системе в момент времени t' . Как известно (стр. 80), в теории относительности мы не можем ввести синхронизированное во всём пространстве время, одновременно в *двух* различных инерциальных системах отсчёта. Когда в преобразовании $J'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu J^\nu(x)$ стоят времена t и t' это не вызывает затруднения, т.к. понятно к каким наблюдателям они относятся. Время же в интегральном соотношении типа (7.67) связано с совокупностью всех наблюдателей данной системы отсчёта. Оно не может быть непосредственно сравнено с аналогичным “интегральным” временем t' в другой системе отсчёта. Сравнить между собой заряды $Q(t)$ и $Q'(t')$ можно только, если они сохраняются и от времён не зависят.

Приведём простой пример. Пусть пространство Минковского 2-мерно (t, x) . Рассмотрим ток $J^\nu(t, x) = x^\nu e^{x \cdot x}$, не удовлетворяющий уравнению непрерывности. Для него заряд равен:

$$Q(t) = t \int_{-\infty}^{\infty} e^{t^2 - x^2} dx = \sqrt{\pi} t e^{t^2}.$$

Очевидно, что эта функция времени не является инвариантом. На самом деле применить к ней преобразования Лоренца и нельзя, так как величина Q не относится к одной точке в пространстве, поэтому не ясно какие x' и x использовать в этих преобразованиях.

Сохраняющийся же заряд от времени не зависит и оказывается инвариантом. Приведём пример для этого случая. Пусть V^α – постоянный единичный вектор ($V^\alpha V_\alpha = 1$). Введём 4-вектор η^α , ортогональный к V^α : $\eta^\alpha = x^\alpha - V^\alpha(V \cdot x)$, $\eta \cdot V = 0$, $\eta^2 = x^2 - (V \cdot x)^2$, $\partial_\alpha \eta^2 = 2\eta_\alpha$.

Аналогичный 4-вектор мы ввели при ковариантном описании потенциала и тензора напряженности точечного заряда (стр. 426). Так как 4-вектор V^α единичный, его компоненты можно представить аналогично компонентами 4-скорости $V^\alpha = \{\gamma, \gamma v\}$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$. Рассмотрим сохраняющийся ток $J^\nu = V^\nu e^{\eta^2}$. Соответствующий ему заряд равен:

$$Q = \gamma e^{-\gamma^2 v^2 t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 x^2 + 2\gamma^2 v t x} dx = \sqrt{\pi}.$$

Очевидно, что это же значение получают наблюдатели в “штрихованной” системе отчёта.

Аналогичные 4-току рассуждения справедливы и для тензорных уравнений $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ или $\partial_\mu J^{\mu, \alpha\beta} = 0$. Соответствующие интегралы

$$P^\nu = \int T^{0\nu} d^3\mathbf{x}, \quad J^{\alpha\beta} = \int J^{0, \alpha\beta} d^3\mathbf{x}$$

будут тензорными выражениями так как P^ν и $J^{\alpha\beta}$ не зависят от времени. Если же уравнения непрерывности не выполняются, то тензорные выражения после интегрирования, в общем случае, не возникнут. В частности, интегралы от угловой и спиновой компонент момента импульса не являются тензорами, если по-отдельности не удовлетворяют уравнениям непрерывности. Аналогично, в электродинамике сохраняется суммарный тензор частиц и полей: $\partial_\gamma(\mathcal{T}^{\gamma\alpha} + T^{\gamma\alpha}) = 0$. По-отдельности эти тензоры, вообще говоря, не сохраняются. Поэтому, суммарный 4-импульс только лишь частиц будет зависеть от времени и не является 4-вектором (см. также стр. 194).

• Докажем более строго, что интеграл по всему пространству от нулевой компоненты сохраняющегося 4-тока J^μ , является скаляром относительно преобразований Лоренца [12]. Рассмотрим, например, некоторый ток $J^\mu(x)$, удовлетворяющий уравнению непрерывности:

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial J^0}{\partial t} + \nabla \mathbf{J} = 0.$$

Пусть поле достаточно быстро убывает на бесконечности в 3-мерном пространстве \mathbf{x} . Точнее, убывание должно быть быстрее чем $1/\mathbf{x}^2$, чтобы поверхностный интеграл от пространственной компоненты 4-тока \mathbf{J} на бесконечности равнялся нулю.

Запишем в значение заряда в данный момент времени \bar{t} . Для этого сначала, при помощи δ -функции Дирака, перейдём от интегрирования по 3-мерному пространству $d^3\mathbf{x}$, к интегрированию по всему пространству-времени $d^4\mathbf{x} = dt d^3\mathbf{x}$:

$$Q = \int J^0(\mathbf{x}, \bar{t}) d^3\mathbf{x} = \int J^0(\mathbf{x}, t) \delta(t - \bar{t}) d^4\mathbf{x}.$$

Введём функцию ступеньки Хевисайда:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (7.68)$$

Производная от неё равна δ -функции: $\theta'(t) = \delta(t)$, что проверяется проведением интегрирования по частям с произвольной функцией (стр. 787). При помощи функции Хевисайда выражение для заряда можно переписать в следующем виде:

$$Q = \int J^0(\mathbf{x}, t) \partial_0 \theta(t - \bar{t}) d^4\mathbf{x} = \int J^\mu(\mathbf{x}, t) \partial_\mu \theta(t - \bar{t}) d^4\mathbf{x}.$$

По повторяющемуся индексу μ , как обычно, проводится суммирование от 0 до 3. Переход от производной по t к ковариантной производной ∂_μ во втором равенстве возможен, так как функция Хевисайда зависит только от времени (производные по координатам будут равны нулю). Учитывая уравнение непрерывности $\partial_\mu J^\mu = 0$, ток можно внести под производную:

$$Q = \int \partial_\mu [J^\mu(\mathbf{x}) \theta(t - \bar{t})] d^4\mathbf{x} = \int J^\mu(\mathbf{x}) \theta(t - \bar{t}) dS_\mu, \quad (7.69)$$

где второе равенство записано при помощи интегральной теоремы Гаусса в 4-мерном пространстве (переход от объёмного интеграла $d^4\mathbf{x}$, к интегралу по поверхности dS_μ , окружающей этот объём).

Запишем теперь значение заряда в другой инерциальной системе отсчёта, движущейся относительно первой вдоль оси x со скоростью v . В этой системе всем величинам добавляются штрихи:

$$Q' = \int \partial'_\mu [J'^\mu(\mathbf{x}')\theta(t' - \bar{t}')] d^4\mathbf{x}'.$$

Сделаем замену переменных интегрирования, совпадающих с преобразованиями Лоренца: $x' = \gamma(x - vt)$, $t' = \gamma(t - vx)$. Якобиан такого преобразования равен единице ($\leq N_{44}$), поэтому $d^4\mathbf{x}' = d^4\mathbf{x}$. Производная ∂'_μ преобразуется аналогично ковектору при преобразованиях Лоренца. Так как при этом $\partial'_\mu J'^\mu = \partial_\mu J^\mu$ штрих у J^μ можно убрать. Поэтому:

$$Q' = \int \partial_\mu [J^\mu(\mathbf{x})\theta(\gamma(t - vx) - \bar{t}')] d^4\mathbf{x}, \quad (7.70)$$

Используя теорему Гаусса в 4-мерном пространстве и вычитая (7.70) и (7.69), имеем:

$$Q' - Q = \int dS_\mu J^\mu(\mathbf{x}) \{ \theta(\gamma(t - vx) - \bar{t}') - \theta(t - \bar{t}) \},$$

Представим гиперповерхность dS_μ , охватывающую всё 4-пространство, как цилиндр, осью которого является ось времени t . Поверхностный интеграл на боковых сторонах этого цилиндра равен нулю, так как $J^\alpha = 0$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. На основаниях цилиндра при любых *конечных* x , \bar{t} , \bar{t}' при $t \rightarrow \pm\infty$ разница функций Хевисайда равна нулю. Действительно, если x , \bar{t}' и \bar{t} константы, то в силу определения (7.68), имеем:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(\gamma(t - vx) - \bar{t}') \approx \theta(\gamma t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t - \bar{t}) \approx \theta(t) = 1.$$

Аналогично, обе функции Хевисайда стремятся к нулю при $t \rightarrow -\infty$. Если же вместе с t к бесконечности стремится x , то ноль возникает, так как стремится к нулю значение 4-тока. Таким образом, мы доказали, что $Q = Q'$. При помощи этого же метода несложно показать, что, при выполнении уравнения $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, интеграл от $T^{0\nu}$ будет 4-вектором.

Заметим, что иногда поля в течении всего времени локализованы в компактной области пространства (перемещающейся вдоль некоторой траектории). В этом случае могут существовать квазисохраняющиеся токи. Это означает, что уравнение непрерывности не выполняется, но заряд является инвариантом, если пренебречь размерами области. Например, пусть в пределе при котором соответствующая область стремиться к нулю, возникает функция Дирака $J^0(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t))$. Если при этом $f(t, \mathbf{x}_0(t))$ не зависит от времени, то и интеграл от $J^0(t, \mathbf{x})$ будет постоянным. Другими словами, отклонения от тензорного характера интегральных величин иногда могут быть и небольшими.

7.7 Спин

На протяжении этой книги понятие спина вводилось несколько раз. Напомним (стр. 188, 402), что при помощи 4-тензора полного момента импульса системы $J^{\alpha\beta}$, можно определить следующий 4-вектор:

$$S_\nu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} J^{\alpha\beta} U^\gamma, \quad (7.71)$$

где $U^\alpha = P^\alpha/M$ – 4-скорость, P^α – полный 4-импульс и $M^2 = P^\alpha P_\alpha$. Подчеркнем, что величины P^α и $J^{\alpha\beta}$ являются интегральными. В случае системы точечных частиц они получаются при суммировании импульса и момента импульса по частицам, а в теории поля – это интегралы от соответствующих тензорных плотностей. В системе, в которой $\mathbf{P} = 0$, компоненты $S^\nu = \{S^0, \mathbf{S}\}$ равны $\{0, J^{23}, J^{31}, J^{12}\}$. Поэтому в этой системе 3-вектор спина \mathbf{S} совпадает с полным моментом импульса (пространственные компоненты $J^{\mu\nu}$). В произвольной же системе он пропорционален (стр. 188) разности полного момента и момента импульса центра энергии. На этом основании величина S_ν имеет смысл собственного момента вращения системы (без учета перемещения её как целого). В силу антисимметричности $\varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma}$, 4-вектор спина ортогонален 4-скорости системы (или полному 4-импульсу):

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{U} = S_\nu U^\nu = 0. \quad (7.72)$$

Тензор суммарного момента импульса поля равен (стр. 7.51):

$$J^{\mu\nu} = \int (x^\mu T^{0\nu} - x^\nu T^{0\mu} + S^{0,\mu\nu}) d^3x, \quad (7.73)$$

где компонента $S^{0,\mu\nu}$ зависит от 4-координат только через полевые функции, а $T^{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса. Подынтегральная функция инвариантна относительно трансляционных преобразований $x^\nu \mapsto x^\nu + a^\nu$. Если перейти в другую, “сдвинутую” систему отсчета, то поля не поменяются (лагранжиан явно от координат не зависит), но наличие x^μ под интегралом приведет к тому, что полный момент изменится:

$$J^{\mu\nu} \mapsto J^{\mu\nu} + a^\mu P^\nu - a^\nu P^\mu, \quad P^\mu = \int T^{0\mu} d^3x, \quad (7.74)$$

где P^μ – суммарный 4-импульс. Собственный момент импульса (спин) не должен меняться при таком преобразовании. Этому требованию удовлетворяет 4-вектор спина (7.71). Кроме этого, если $J^{\alpha\beta}$, P^γ сохраняются, то будет сохраняться и S_ν (в отличие от интеграла от $S^{0,\alpha\beta}$).

• При помощи 4-вектора спина можно определить антисимметричный 4-тензор спина:

$$S^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} U_\mu S_\nu. \quad (7.75)$$

Очевидно, что он также как и S^ν не изменяется при трансляционных преобразованиях и, в силу антисимметрии $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$, ортогонален 4-спину и 4-скорости:

$$S^{\alpha\beta} S_\beta = S^{\alpha\beta} U_\beta = 0.$$

Дуальный к $S^{\alpha\beta}$ тензор равен:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} S^{\mu\nu} = S_\alpha U_\beta - S_\beta U_\alpha. \quad (7.76)$$

Сворачивая это соотношение с U^β и учитывая, что $U^2 = 1$, а $S \cdot U = 0$, имеем:

$$S_\nu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} S^{\alpha\beta} U^\gamma. \quad (7.77)$$

Таким образом, 4-вектор спина выражается через 4-тензор спина так же как и через полный момент импульса (7.71).

Подставляя (7.71) в (7.75) и проводя свёртку символов Леви-Чевиты, можно выразить тензор спина через тензор полного момента импульса:

$$S^{\alpha\beta} = J^{\alpha\beta} - (J^{\alpha\gamma} U^\beta - J^{\beta\gamma} U^\alpha) U_\gamma. \quad (7.78)$$

Сворачивая (7.71) или (7.77) с символом Леви-Чевиты, получаем ещё одно соотношение между введенными величинами:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} S^\nu = J_{\alpha\beta} U_\gamma + J_{\gamma\alpha} U_\beta + J_{\beta\gamma} U_\alpha = S_{\alpha\beta} U_\gamma + S_{\gamma\alpha} U_\beta + S_{\beta\gamma} U_\alpha, \quad (7.79)$$

Заметим, что в (7.79) по индексам α, β, γ проводится циклическая перестановка. Компоненты антисимметричного 4-тензора выражается через два 3-вектора с проекциями:

$$\mathbf{g} = \{S^{10}, S^{20}, S^{30}\} = \mathbf{U} \times \mathbf{S}, \quad \mathbf{s} = \{S^{23}, S^{31}, S^{12}\} = U^0 \mathbf{S} - S^0 \mathbf{U}. \quad (7.80)$$

В системе покоя $\mathbf{P} = \mathbf{U} = 0$ первый вектор равен нулю, а второй совпадает с вектором спина \mathbf{S} (или полного момента \mathbf{J}). Напомним, что в векторных обозначениях компоненты 4-вектора спина равны (стр. 189):

$$S^0 = \mathbf{J}\mathbf{U} = \mathbf{S}\mathbf{U}/U^0, \quad \mathbf{S} = \mathbf{J}U^0 - \mathbf{G} \times \mathbf{U},$$

где $\mathbf{J} = \{J^{23}, J^{31}, J^{12}\}$, $\mathbf{G} = \{J^{10}, J^{20}, J^{30}\}$ и $\mathbf{U} = \{U^0, \mathbf{U}\}$. В системе покоя отличны от нуля только пространственные компоненты \mathbf{S} .

Таким образом, описывать собственный момент импульса системы можно при помощи двух величин: 4-вектора спина S^ν и 4-тензора спина $S^{\mu\nu}$. Ненулевые компоненты обеих величин в системе покоя совпадают друг с другом и с полным моментом системы.

• Представим тензор спина в ещё одном виде. Соотношение (7.78) можно переписать следующим образом:

$$S^{\alpha\beta} = J^{\alpha\beta} - (X^\alpha P^\beta - X^\beta P^\alpha), \quad (7.81)$$

где

$$X^\alpha = \lambda U^\alpha + \frac{1}{M} J^{\alpha\gamma} U_\gamma, \quad (7.82)$$

а λ – некоторый скаляр. Второе слагаемое непосредственно входит в (7.78), а первое слагаемое сокращается при произвольном λ .

Пусть система имеет компактные размеры и движется в пространстве вдоль некоторой траектории. Вектор X^α можно интерпретировать как эффективный центр на этой траектории, относительно которого определяется собственный момент вращения (тензор спина):

$$S^{\alpha\beta} = \int [(x^\alpha - X^\alpha)T^{0\beta} - (x^\beta - X^\beta)T^{0\alpha}] d^3x,$$

где предполагается, что “спиновая” составляющая $S^{0,\alpha\beta}$ плотности полного момента “упрятана” при помощи процедуры Белифанте в симметричный тензор энергии импульса $T^{\alpha\beta}$. Так как величины X^α не зависят от координат \mathbf{x} , то их можно вынести за интеграл и получается (7.81).

В качестве эффективной траектории системы, напрашивается выбрать её центр энергии:

$$\mathbf{R} = \frac{\int \mathbf{x}T^{00} d^3x}{\int T^{00} d^3x}.$$

Если система является замкнутой, то полный момент импульса $J^{\alpha\beta}$ и импульс P^α сохраняются и являются ковариантными величинами. В этом случае центр энергии движется равномерно и прямолинейно. Действительно, так как $dJ^{\alpha\beta}/dt = 0$, имеем:

$$J^{i0} = \int (x^i T^{00} - t T^{0i}) d^3x = P^0 R^i - t P^i = const,$$

откуда следует, что положение центра энергии линейно зависит от времени $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{u}t$, где $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}(0)$, а $\mathbf{u} = \mathbf{P}/P^0$ – скорость центра энергии, определяемая через её полный импульс и энергию.

Если же система не замкнута (рассматривается только её часть), момент импульса $J^{\alpha\beta}$ такой части не только не будет сохраняться, но и не будет 4-тензором относительно преобразований Лоренца (см.стр. 458).

Для описания равномерного движения центра энергии введём 4-вектор $\mathbf{R} = \{t, \mathbf{R}\}$ ($\ll \text{H}_{99}$). Покажем, что если система вращается (её спин отличен от нуля), то эффективная траектория X^α оказывается сдвинутой относительно центра энергии системы. Тензор полного момента импульса $J^{\alpha\beta}$ определяется двумя 3-векторами $\mathbf{G} = P^0\mathbf{R} - \mathbf{P}t = \{J^{10}, J^{20}, J^{30}\}$ и $\mathbf{J} = \{J^{23}, J^{31}, J^{12}\}$. Для фиксирования значения λ в (7.82) потребуем, чтобы нулевая компонента 4-вектора X^α была временем:

$$X^0 = \lambda\gamma + \frac{\gamma}{M} \mathbf{G}\mathbf{u} = \lambda\gamma + \gamma^2 (\mathbf{R}\mathbf{u}) - \gamma^2 \mathbf{u}^2 t = t, \quad (7.83)$$

где учтено, что $U^\alpha = \{\gamma, \gamma\mathbf{u}\}$. Поэтому $\lambda = \gamma t - \gamma \mathbf{R}\mathbf{u} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ и 4-вектор эффективной траектории имеет вид:

$$X^\alpha = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) U^\alpha + \frac{1}{M} J^{\alpha\beta} U_\beta. \quad (7.84)$$

Заметим, что в силу антисимметричности тензора полного момента $J^{\alpha\beta}$ и единичности 4-скорости $U^2 = 1$ имеет место равенство проекций 4-векторов \mathbf{R} и \mathbf{X} на 4-скорость: $\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{U}$. Пространственные компоненты вектора $\mathbf{X} = \{t, \mathbf{X}\}$ образуют модифицированный центр инерции:

$$\mathbf{X} = \mathbf{R} - \frac{\gamma}{M} \mathbf{u} \times (\mathbf{J} - \mathbf{R} \times \mathbf{P}).$$

Учитывая, что пространственные компонент 4-вектора спина (7.71) равны $\mathbf{S} = \gamma(\mathbf{J} - \mathbf{R} \times \mathbf{P})$, эффективную траекторию можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{X} = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{S}}{M} = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{s}}{P^0}, \quad (7.85)$$

где проекции вектора $\mathbf{s} = \{S^{23}, S^{31}, S^{12}\}$ являются пространственными компонентами тензора спина (7.80). Таким образом, \mathbf{X} сдвинут относительно \mathbf{R} тем сильнее, чем быстрее движется и вращается система. Кинематически этот эффект связан со сжатием плотности энергии в нижней части системы относительно плоскости в которой лежат векторы спина и скорости (см.стр. 198).

Если рассматривается вращающаяся система, которая движется во внешнем поле, то суммарный момент импульса и спин должны быть разбиты на две части (системы и поля). В этом случае спин системы не будет сохраняться, а движение центра энергии не будет прямолинейным и равномерным. Заметим также, что величина $\mathbf{R} = \{t, \mathbf{R}\}$ при этом не является 4-вектором, как, впрочем, не будут ковариантными остальные интегральные величины. Тем не менее, считая эффекты нековариантности малыми, можно описать динамику спина во внешнем поле исходя из достаточно общих соображений, что мы сейчас и сделаем.

• Рассмотрим частицу (или компактную систему зарядов), обладающую спином и магнитным моментом. Найдём релятивистское уравнение которое описывает движение такой частицы во внешнем электромагнитном поле. В системе покоя частицы, находящейся в магнитном поле, спин испытывает ларморовскую прецессию (5.42),(5.43), стр. 293:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{gQ}{2m} \mathbf{S} \times \mathbf{B}, \quad (7.86)$$

где Q , m – заряд и масса частицы, а g – гиромагнитный фактор (для электрона $Q = -e$, $g \approx 2$). Запишем ковариантную версию этого уравнения, справедливую в любой системе отсчета.

В ковариантном уравнении вектор спина должен замениться на 4-вектор спина, а производная по времени, на производную по инвариантному собственному времени частицы $d\tau = dt\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$. Вместо магнитного поля должен появиться 4-тензор $F_{\mu\nu}$. Так как в 3-мерном уравнении Лармора производная *линейна* по спину и магнитному полю, будем считать, что и в ковариантном уравнении она будет линейна по тензору электромагнитного поля $F \equiv F^{\alpha\beta}$ и спину $S \equiv S^\alpha$. Кроме этих двух величин есть ещё 4-вектор скорости $U = \{\gamma, \mathbf{u}\gamma\}$ от которого также может зависеть прецессия спина (в (7.86) её нет, так это система покоя частицы). В таких предположениях, наиболее общее ковариантное уравнение имеет вид:

$$\frac{dS}{d\tau} = \alpha_1 S + \alpha_2 U + \alpha_3 F \cdot S + \alpha_4 F \cdot U + \alpha_5 (S \cdot F \cdot U) U, \quad (7.87)$$

где α_i – некоторые константы. Будем считать, что магнитное поле *однородно* (см.стр. 292) и на частицу действует только сила Лоренца:

$$A = \frac{dU}{d\tau} = \frac{Q}{m} F \cdot U. \quad (7.88)$$

Производная условия ортогональности (7.72) 4-спина и 4-скорости:

$$S \cdot U = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{d\tau} \cdot U = -S \cdot A$$

с учётом уравнений (7.87), (7.88) даёт $\alpha_2 = 0$, $\alpha_5 = \alpha_3 - Q/m$. Уравнение Лармора (7.86) при $U = \{1, \mathbf{0}\}$ позволяет найти оставшиеся коэффициенты: $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_3 = gQ/2m$. В результате получается *уравнение Баргмана-Мишеля-Телегди* (ВМТ) [26]:

$$\frac{dS}{d\tau} = \frac{gQ}{2m} F \cdot S - \left(1 - \frac{g}{2}\right) (A \cdot S) U, \quad (7.89)$$

где 4-ускорение A определяется силой Лоренца (7.88).

Компоненты 4-вектора, получающегося при свертке $F^{\mu\nu}$ и S_μ равны $\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} = \{\mathbf{E}\mathbf{S}, S^0\mathbf{E} + \mathbf{S} \times \mathbf{B}\}$, где \mathbf{E} и \mathbf{B} – электрическое и магнитное поле. Поэтому в 3-мерных обозначениях ВМТ уравнение имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{gQ}{2m\gamma} \left((\mathbf{u}\mathbf{S}) \mathbf{E} + \mathbf{S} \times \mathbf{B} \right) + \left(1 - \frac{g}{2} \right) \gamma^2 (\mathbf{a}\mathbf{S}) \mathbf{u}. \quad (7.90)$$

Если магнитный момент у частицы со спином отсутствует ($g = 0$), то прецессия спина имеет чисто кинематическую природу, и из (7.90) следует уравнение (3.43), стр. 191. На самом деле частицы, с зарядом и спином, но без магнитного момента, нам неизвестны. Однако, например, для ядра урана ${}_{92}^{235}\text{U}$ g -фактор равен $g = -0.26$, что в 11 раз меньше, чем у протона и в 8, чем у электрона, при том, что спин в 7 раз больше ($7\hbar/2$). Для такого объекта кинематический эффект преобладает над динамическим.

При движении в однородном магнитном поле ($\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} = \text{const}$) модуль скорости частицы постоянен и 3-вектор ускорения равен (стр. 166):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{Q}{m\gamma} [\mathbf{u} \times \mathbf{B}] = \omega [\mathbf{n} \times \mathbf{u}], \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \omega [\mathbf{n} \times \mathbf{a}] = -\omega^2 \mathbf{u}, \quad (7.91)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор в направлении магнитного поля, а циклотронная частота $\omega = -QB/m\gamma$, в зависимости от знака заряда частицы может быть как положительной, так и отрицательной. Уравнение для спина (7.90) принимает вид:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{g}{2} \omega [\mathbf{n} \times \mathbf{S}] + \left(1 - \frac{g}{2} \right) \gamma^2 (\mathbf{a}\mathbf{S}) \mathbf{u}, \quad (7.92)$$

откуда, используя (7.91) несложно получить:

$$\frac{d(\mathbf{u}\mathbf{S})}{dt} = \gamma^2 \left(1 - \frac{g}{2} \right) (\mathbf{a}\mathbf{S}), \quad \frac{d(\mathbf{a}\mathbf{S})}{dt} = -\omega^2 \left(1 - \frac{g}{2} \right) (\mathbf{u}\mathbf{S}). \quad (7.93)$$

Эти уравнения приводят к уравнениям осцилляторного типа:

$$\frac{d^2(\mathbf{u}\mathbf{S})}{dt^2} + \bar{\omega}^2 (\mathbf{u}\mathbf{S}) = 0, \quad \frac{d^2(\mathbf{a}\mathbf{S})}{dt^2} + \bar{\omega}^2 (\mathbf{a}\mathbf{S}) = 0, \quad (7.94)$$

где $\bar{\omega} = \gamma\omega(1 - g/2)$. Потому проекции спина на скорость и ускорение совершают гармонические колебания с частотой, не зависящей от величины скорости:

$$\omega_a = \frac{2-g}{2} \gamma\omega = \frac{2-g}{2} \frac{QB}{m}. \quad (7.95)$$

Для электрона $g \approx 2$ и динамическая ларморовская прецессия практически полностью компенсирует кинематическую прецессию. Небольшое изменение поляризации электрона $\mathbf{u}\mathbf{S}$ связано с отклонением g -фактора от двойки, что позволяет измерять аномальные магнитные моменты [27].

7.8 Электромагнитная масса

• Вычислим полную энергию и импульс поля, создаваемого равномерно движущимся точечным зарядом. Так как мы столкнёмся с расходимостью интегралов, сделаем регуляризацию возникающей сингулярности. Будем считать, что на малых расстояниях закон Кулона модифицируется так, как это было записано в начале четвёртой главы (5.2), стр. 264. Кроме этого предположим, что параметр регуляризации a является “фундаментальной константой” которая не меняется при преобразованиях Лоренца. Тогда электрическое и магнитное поля движущегося заряда (стр. 271) будут выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{E} = \frac{Q \gamma \mathbf{r}}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2 + a^2)^{3/2}}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{v} \times \mathbf{E}].$$

Нас интересуют полная энергия и импульс электромагнитного поля:

$$w = \int W d^3\mathbf{r} = \int \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} d^3\mathbf{r}, \quad \mathbf{p} = \int \mathbf{P} d^3\mathbf{r} = \int \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi} d^3\mathbf{r}.$$

Подставляя напряжённости, найдём соответствующие плотности:

$$W = \frac{Q^2 \gamma^2}{8\pi} \frac{r^2 + v^2 r^2 - (\mathbf{v}\mathbf{r})^2}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2 + a^2)^3}, \quad \mathbf{P} = \frac{Q^2 \gamma^2}{4\pi} \frac{\mathbf{v} r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{r})}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2 + a^2)^3}.$$

Направим ось z вдоль скорости заряда: $\mathbf{v} = \{0, 0, v\}$. Учитывая, что $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и $\mathbf{v}\mathbf{r} = vz$, перепишем знаменатель в следующем виде:

$$r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2 + a^2 = x^2 + y^2 + \frac{z^2}{1 - v^2} + a^2.$$

Сделаем замену переменной интегрирования $z \mapsto \sqrt{1 - v^2} z = z/\gamma$ и для объёма $d^3\mathbf{r} = dx dy dz \mapsto d^3\mathbf{r}/\gamma$. В результате скорость остаётся только в числителе подинтегральной функции. Для полной энергии имеем:

$$w = \frac{Q^2 \gamma}{8\pi} \int \frac{(1 + v^2)r^2 - 2v^2 z^2}{(r^2 + a^2)^3} d^3\mathbf{r}.$$

Введём следующее обозначение:

$$\mu = \frac{2}{3} Q^2 \int_0^\infty \frac{r^4 dr}{(r^2 + a^2)^3} = \frac{\pi}{8} \frac{Q^2}{a}. \quad (7.96)$$

Этот интеграл может быть вычислен двойным дифференцированием по параметру a определённого интеграла с функцией $1/(\alpha r^2 + 1)$.

Окончательное вычисление полной энергии проведём в сферических координатах $d^3\mathbf{r} = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$, в которых $z = r \cos\theta$. Интегрирование по полярному углу ϕ (от которого подынтегральная функция не зависит) даст множитель 2π . Интегрирование по $r^2 dr$ приводит к μ . Осталось вычислить элементарный интеграл по θ , при помощи “внесения” синуса под дифференциал: $\sin\theta d\theta = -d(\cos\theta)$:

$$w = \frac{3\mu\gamma}{8} \int_0^\pi (1 + v^2 - 2v^2 \cos^2\theta) \sin\theta d\theta = \mu\gamma \frac{3 + v^2}{4}.$$

Аналогично вычисляется интеграл для импульса поля. После интегрирования по всему пространству, единственный вектор от которого может зависеть вектор импульса поля – это скорость \mathbf{v} . Поэтому он пропорционален \mathbf{v} и при выбранном направлении скорости достаточно вычислить z -компоненту импульса:

$$\mathbf{p}_z = v \frac{Q^2\gamma}{4\pi} \int \frac{r^2 - z^2}{(r^2 + a^2)^3} d^3\mathbf{r} = \frac{3}{4} \mu v \gamma \int_0^\pi (1 - \cos^2\theta) \sin\theta d\theta = \mu\gamma v.$$

Таким образом, энергия и импульс электромагнитного поля заряда, движущегося с постоянной скоростью \mathbf{v} равны:

$$w = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} - \frac{\mu}{4} \sqrt{1 - \mathbf{v}^2}, \quad \mathbf{p} = \frac{\mu\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}. \quad (7.97)$$

Импульс поля имеет такую же зависимость от скорости как и у любой релятивистской частицы с массой μ . А вот у энергии появилась неприятная добавка, и зависимость от скорости отличается от релятивистской. При $v \mapsto 0$, имеем $w = 3\mu/4$, $\mathbf{p} = \mu\mathbf{v}$. Считая, что “масса” поля определяется по энергии покоя, мы получим неправильный множитель у массы при импульсе: $w = t$, $\mathbf{p} = 4t\mathbf{v}/3$. Или наоборот, определяя массу как коэффициент пропорциональности нерелятивистского импульса и скорости, мы получим энергию покоя, которой не достаёт $1/4$ массы, так как она равна $3/4$. Поэтому часто этот эффект называют “проблемой $3/4$ ” (или “проблемой $4/3$ ” в зависимости от того, как определяют массу).

На заре возникновения теории относительности строились модели, в которых заряд электрона был равномерно “размазан” по поверхности сферы. В зависимости от поведения этой сферы при движении электрона, получалась та или иная зависимость от скорости энергии и импульса поля. Макс Абрахам высказал замечательную мысль, что механическую массу электрона можно определить, вычисляя энергию-импульс создаваемого электроном поля.

Сам Абрахам (1902 г.) предполагал, что "сфера электрона" при движении не деформируется. Была также построена модель Альфреда Бачерера (1904 г.), в которой сфера сжималась в направлении движения, сохраняя свой объём. В рамках электронной теории Хендрика Лоренца, предполагалось, что сфера сжимается в соответствии с релятивистским фактором $\sqrt{1 - v^2}$, в результате чего получалась верная зависимость импульса поля от скорости [52]. Однако во всех этих теориях творилось некое безобразие с энергией поля. Анри Пуанкаре предложил следующее объяснение проблемы. Заряды, расположенные на поверхности сферы, отталкиваются друг от друга. Так как электрон стабилен – некие силы обязаны удерживать заряды. Именно эти силы, названные *натяжениями Пуанкаре*, и должны обеспечить недостающую $1/4$ массы.

С высоты 100-летнего развития квантовой теории элементарных частиц, классические модели электрона выглядят достаточно наивными. Однако это не означает отсутствия проблемы. Бесконечности возникают и в квантовой теории поля. Поэтому, в любом случае, с силой Кулона необходимо что-то делать, так как она равна бесконечности при $r = 0$. Или электрон не должен быть точечным, или должна быть изменена сила. Сферические модели электрона шли по первому пути и пытались, не меняя закона Кулона, сделать электрон неточечным. Можно пойти вторым путём и считать, что на малых расстояниях должен модифицироваться сам закон Кулона. Например, выше мы ввели фундаментальную константу a , устраняющую "нефизичную" бесконечность. После этого можно построить теорию электромагнетизма и в результате всё равно получится неверная зависимость энергии поля от скорости, даже в пределе $a \rightarrow 0$, хотя ни каких "натяжений Пуанкаре" уже нет.

Было предпринято множество хитрых модификаций классической электродинамики для устранения неправильной зависимости энергии от скорости [51]. По-видимому наиболее простое решение проблемы электромагнитной массы принадлежит Джулиану Швингеру (1982) [53].

Основная идея Швингера состоит в том, что при вычислении энергии и импульса электромагнитного поля необходимо учитывать не только выражения для W и \mathbf{P} но и член \mathbf{Ej} , возникший при выводе закона сохранения (теорема Пойнтинга, стр. 310):

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathbf{Ej} + \nabla \mathbf{P} = 0. \quad (7.98)$$

Сохраняется суммарная энергия поля и частицы, а не только поля. Использование только части полной энергии и приводит к проблеме $3/4$.

Продемонстрируем это, проделав соответствующие вычисления в ковариантном виде. Ранее (стр. 426) мы записывали выражения для 4-потенциала A^α и тензора напряженностей поля $F_{\alpha\beta}$ точечного заряда:

$$A^\alpha = \frac{Q v^\alpha}{(a^2 - \eta^2)^{1/2}}, \quad F_{\alpha\beta} = Q \frac{\eta_\alpha v_\beta - \eta_\beta v_\alpha}{(a^2 - \eta^2)^{3/2}}, \quad (7.99)$$

где a – параметр регуляризации и при помощи 4-скорости заряда $v \equiv v^\alpha$ и его координат $x \equiv x^\alpha$ определен следующий 4-вектор (стр. 427):

$$\eta = x - (v \cdot x) v.$$

Этот вектор ортогонален 4-скорости ($\eta \cdot v = 0$) и для него справедливы следующие производные:

$$\partial_\alpha \eta^\beta = \delta_\alpha^\beta - v_\alpha v^\beta, \quad \partial_\alpha \eta^2 = 2\eta_\alpha, \quad \partial_\alpha \eta^\alpha = 3. \quad (7.100)$$

Его квадрат равен $\eta^2 = x^2 - (x \cdot v)^2$ или $-\eta^2 = \mathbf{x}^2 + \gamma^2 (\mathbf{xv})^2$ в момент времени $t = 0$, где γ – стандартный лоренцевский фактор.

Используя выражения (7.99), запишем симметричный тензор энергии-импульса (7.35), стр. 439:

$$T^{\mu\nu} = \frac{Q^2/4\pi}{(a^2 - \eta^2)^3} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \eta^2 - \eta^\mu \eta^\nu - v^\mu v^\nu \eta^2 \right).$$

Как известно, сохраняется суммарный тензор поля и частиц. Сам по себе $T^{\mu\nu}$ не сохраняется:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -\frac{3Q^2}{4\pi} \frac{\eta^\nu a^2}{(a^2 - \eta^2)^4}$$

поэтому энергия и импульс поля (интегралы от $T^{0\nu}$) не являются компонентами 4-вектора (стр. 458). В этом и состоит корень проблемы 3/4.

Запишем тензор энергии-импульса в следующем виде:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \eta^2 - \eta^\mu \eta^\nu - v^\mu v^\nu \eta^2 \right) f_0,$$

где $f_0 = Q^2/(a^2 - \eta^2)^3$. Для различных способов регуляризации закона Кулона будут получаться различные функции f_0 . Дивергенция этого выражения равна:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{\eta^\nu}{4\pi} (\eta^2 f_0' - 3f_0),$$

где штрих – производная функции $f_0 = f_0(a^2 - \eta^2)$ по её аргументу.

Чтобы скомпенсировать ненулевую дивергенцию, необходимо добавить тензор $\mathcal{T}^{\mu\nu}$, так чтобы выполнялось уравнение непрерывности:

$$\partial_\mu(T^{\mu\nu} + \mathcal{T}^{\mu\nu}) = 0. \quad (7.101)$$

При помощи величин η^μ , v^μ , $g^{\mu\nu}$ можно записать следующий симметричный тензор:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \eta^2 f_1 + \eta^\mu \eta^\nu f_2 + v^\mu v^\nu \eta^2 f_3 \right),$$

где $f_i = f_i(a^2 - \eta^2)$ – некоторые скалярные функции. Дивергенция этого выражения равна:

$$\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{\eta^\nu}{4\pi} (\eta^2 f_1' - f_1 + 2\eta^2 f_2' - 4f_2).$$

Заметим, что f_3 в это выражение не попало и тензор $v^\mu v^\nu f_3$ тождественно удовлетворяет уравнению непрерывности. В определение $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ можно было бы добавить симметричную комбинацию $(\eta^\mu v^\nu + \eta^\nu v^\mu) f_4$. Однако, её дивергенция пропорциональна v^ν , а не η^ν . Чтобы (7.101) было справедливым, должно выполняться следующее соотношение:

$$\eta^2 f_0' - 3f_0 = f_1 - \eta^2 f_1' + 4f_2 - 2\eta^2 f_2'. \quad (7.102)$$

Для дальнейшего нам потребуются интегралы:

$$\int f(\eta^2) d^3\mathbf{r} = \frac{4\pi}{\gamma} \int_0^\infty f(-r^2) r^2 dr, \quad (7.103)$$

$$\int (\eta^0)^2 f(\eta^2) d^3\mathbf{r} = \frac{4\pi}{3} \gamma v^2 \int_0^\infty f(-r^2) r^4 dr, \quad (7.104)$$

$$\int \eta^0 \boldsymbol{\eta} f(\eta^2) d^3\mathbf{r} = \frac{4\pi}{3} \gamma \mathbf{v} \int_0^\infty f(-r^2) r^4 dr. \quad (7.105)$$

Они вычисляются также, как и в начале раздела (переходим к цилиндрическим координатам, делаем замену $z \mapsto z/\gamma$ и окончательное интегрирование проводим в сферических координатах). Кроме этого, определим следующие четыре ($i = 0, \dots, 3$) константы:

$$m_i = \int_0^\infty f_i(a^2 + r^2) r^4 dr.$$

В случае $f_0 = Q^2/(a^2 + r^2)^3$ имеем $m_0 = 3\pi Q^2/16a = 3\mu/2$.

Между константами m_i существует определенная связь. Чтобы её найти, умножим соотношение (7.102) на η^2 и проинтегрируем по всему пространству. Затем воспользуемся следующим тождеством:

$$\int_0^{\infty} f'(a^2 + r^2) r^6 dr = -\frac{5}{2} \int_0^{\infty} f(a^2 + r^2) r^4 dr.$$

Для его доказательства необходимо правую часть проинтегрировать по частям ($5r^4 dr = dr^5$). В результате, уравнение непрерывности для суммарного тензора $T^{\mu\nu} + \mathcal{T}^{\mu\nu}$ выполняется, если:

$$m_0 = 3m_1 + 2m_2. \quad (7.106)$$

Вычислим теперь энергию и импульс поля при помощи тензора $T^{\mu\nu}$:

$$\int T^{00} d^3\mathbf{r} = \left(\frac{1}{2} + \frac{v^2}{6}\right) m_0 \gamma, \quad \int T^{0i} d^3\mathbf{r} = \frac{2}{3} m_0 \mathbf{v}^i \gamma.$$

При $m_0 = 3\mu/2$ снова получаются соотношения (7.97). Аналогично вычисляются энергия и импульс для тензора $\mathcal{T}^{\mu\nu}$:

$$\int \mathcal{T}^{00} d^3\mathbf{r} = \frac{m_1}{2\gamma} - \frac{\gamma v^2}{3} m_2 + m_3 \gamma, \quad \int \mathcal{T}^{0i} d^3\mathbf{r} = m_3 \gamma \mathbf{v}^i - \frac{m_2}{3} \gamma \mathbf{v}^i.$$

Окончательно, учитывая (7.106), для суммарной энергии и импульса получаем:

$$\int (T^{00} + \mathcal{T}^{00}) d^3\mathbf{r} = m \gamma, \quad \int (T^{0i} + \mathcal{T}^{0i}) d^3\mathbf{r} = m \gamma \mathbf{v}^i,$$

где масса системы, равна:

$$m = 2m_1 + m_2 + m_3. \quad (7.107)$$

Таким образом, энергия и импульс, полученные по тензору $T^{\mu\nu} + \mathcal{T}^{\mu\nu}$ имеют правильную зависимость от скорости и являются компонентами 4-вектора. Так и должно быть для интеграла от тензора, который удовлетворяет уравнению непрерывности. Обратим внимание, что в энергию и импульс от $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ член пропорциональный m_3 сразу входит с верной зависимостью от скорости. Связано это с тем, что часть тензора $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ которая дала m_3 удовлетворяет уравнению непрерывности сама по себе при любой функции f_3 .

Результат вычислений не зависит от выбора функций f_i и единственным ограничением на них является уравнение (7.102). Швингер рассмотрел частный случай с $f_2 = 0$ и два варианта с $f_3 = 0$ и $f_3 = -f_1/2$.

Обсудим физический смысл введенных выше масс. Масса m_0 связана с полем заряда и имеет чисто электромагнитное происхождение. Масса m_3 может быть проинтерпретирована как механическая масса заряда. Напомним (стр. 437), что тензор энергии-импульса, связанный с распределенной в пространстве материей имеет вид: $\mathcal{T}^{\alpha\beta} = \mu(\mathbf{r}, t) (ds/dt) v^\alpha v^\beta$. Поэтому $\mu(\mathbf{r}, t) = -\eta^2 \gamma f_3 / 4\pi$ (обратим внимание, что при $t = 0$ мы имеем $\eta^2 < 0$, поэтому η – пространственно-подобный вектор). В теории классического электрона, масса которого полностью обусловлена полевыми эффектами можно положить $m_3 = 0$.

Запишем компоненты тензора электромагнитного поля $T^{\mu\nu}$ в системе покоя электрона в которой $v^\nu = \{1, 0\}$ и $\eta^\nu = \{0, \mathbf{x}\}$:

$$T_{00} = \frac{Q^2}{8\pi} \frac{r^2}{(r^2 + a^2)^3}, \quad T_{ij} = \frac{Q^2/8\pi}{(r^2 + a^2)^3} (\delta_{ij} r^2 - 2x_i x_j).$$

Компоненты “компенсирующего” тензора $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ равны:

$$\mathcal{T}_{00} = \frac{r^2}{8\pi} (f_1 + 2f_3), \quad \mathcal{T}_{ij} = -\frac{1}{8\pi} (\delta_{ij} r^2 f_1 + 2x_i x_j f_2)$$

и $T_{0i} = \mathcal{T}_{0i} = 0$. Пространственные компоненты тензоров T_{ij} и \mathcal{T}_{ij} при сложении дадут ноль, если $f_2 = -f_1 = -f_0$. В этом случае $m_2 = -m_1 = -m_0$ и, следовательно, для полной массы электрона имеем:

$$m = m_0 + m_3 = \frac{3\pi}{16} \frac{Q^2}{a} + m_3,$$

где подставлено значение интеграла для m_0 .

Множитель при Q^2/a зависит от способа регуляризации (поведения закона Кулона на малых расстояниях или распределения заряда “в электроне”). Поэтому для $Q = e$, $\mu = m_e$, $m_3 = 0$ в качестве характерного размера a принято использовать отношение:

$$a = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.8 \cdot 10^{-13} \text{ см},$$

где восстановлена скорость света ($Q \mapsto Q/c$). Эта характерная длина называется *классическим радиусом электрона*. Для сравнения, “размер” атома водорода (боровский радиус) порядка $5.3 \cdot 10^{-9}$ см, а типичный размер протона равен $0.88 \cdot 10^{-13}$ см.

Выше мы не вводили модели распределения заряда электрона, считая параметр a некоторым способом регуляризации бесконечностей. Цель вычислений состояла в демонстрации релятивистской ковариантности интегральных выражений для энергии и импульса, при условии, что они следуют из тензора, удовлетворяющего уравнению непрерывности. Получив ковариантный результат, можно устремить a к нулю. Выражения останутся ковариантными, хотя масса окажется бесконечной.

Можно стать на классическую точку зрения, считая, что заряд электрона “размазан” в пространстве и найти плотность заряда, соответствующую регуляризованным выражениям для напряженности поля. Так, из уравнений Максвелла для тензора $F_{\mu\nu}$ (7.99) следует регуляризованное выражение для тока (7.13), стр. 427. В системе покоя электрона ему соответствует распределение заряда:

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi} \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}}. \quad (7.108)$$

Чтобы удержать заряды для такого распределения необходимы дополнительные силы неэлектромагнитного происхождения. Именно эти силы (натяжения Пуанкаре) приводят к дополнительному тензору $\mathcal{T}^{\mu\nu}$.

Условие $T^{ij} + \mathcal{T}^{ij} = 0$ в этом случае означает отсутствие сил, действующих на каждый элемент распределённого в пространстве заряда. Действительно, для энергии-импульса электромагнитного поля справедливо уравнение $\partial_\mu T^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu} j_\nu$. В системе покоя $j^\nu = \{\rho, 0\}$ и в отсутствии зависимости от времени, интегрируя это уравнение по бесконечно малому объёму, окружающему элемент заряда $q = \rho dV$, получаем:

$$\int \partial_i T^{ij} dV = \int dS_i T^{ij} = - \int F^{0j} \rho dV = -q E^j,$$

где во втором равенстве по теореме Гаусса, мы перешли к интегралу по поверхности dS_i , окружающий заряд, а в последнем, для бесконечно малого объёма, заменили ρdV на q . На заряд q со стороны остальных зарядов “размазанного в пространстве электрона” действует сила $q E^j$. Если $T^{ij} + \mathcal{T}^{ij} = 0$ – суммарная сила со стороны поля и удерживающих от разлетаия сил равна нулю и конфигурация (7.108) стабильна.

В теории относительности подобные силы необходимо реализовывать при помощи введения нового поля. Такой способ объяснения природы массы становится уже не столь привлекательным как исходная идея Абрахама. Хотя наличие электромагнитной составляющей в массе заряженной частицы сомнения не вызывает. По всей видимости, для объяснения природы массы необходимы другие идеи. Одно из возможных направлений будет рассмотрено в последних двух разделах главы.

7.9 Взаимодействие зарядов без поля

В классической механике информация о том, что некоторый объект (заряд) изменяет своё положение может попасть к другим объектам мгновенно. Поэтому в концепции поля необходимости нет и уравнения движения зарядов зависят только от их положений и, возможно, скоростей. В теории относительности это не так. Тем не менее, если скорости зарядов и расстояния между ними невелики, поле можно исключить и получить поправки к уравнениям классической механики.

Запишем потенциалы, создаваемые системой зарядов (стр. 323):

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}, t - R)}{R} d^3\mathbf{r}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t - R)}{R} d^3\mathbf{r}, \quad (7.109)$$

где \mathbf{x} – координаты точки измерения поля и $R = |\mathbf{x} - \mathbf{r}|$ – расстояние от неё до заряда в объеме $d^3\mathbf{r}$, находящегося в \mathbf{r} . Сдвиг в прошлое на величину R равен времени запаздывания информации обо всех изменениях. Если система зарядов достаточно компактна и их скорости невелики, запаздыванием можно пренебречь. Будем считать R малым ($\ll C_{11}$) и разложим по нему в ряд Тейлора плотности, входящие в интегралы (7.109). Так, для плотности заряда имеем:

$$\rho(\mathbf{r}, t - R) = \rho(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} R + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} R^2 - \dots$$

Подставляя его в выражение для скалярного потенциала, имеем:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{R} d^3\mathbf{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho(\mathbf{r}, t) R d^3\mathbf{r} - \dots,$$

где второе слагаемое в разложении $\varphi(\mathbf{r}, t - R)$ равно нулю, так как оно является производной по времени полного заряда системы, который сохраняется. Аналогичное разложение справедливо и для векторного потенциала. Однако, так как он содержит скорость зарядов (в плотности тока), которые малы, в первом приближении можно ограничиться ведущим приближением (не учитывающем запаздывания):

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\mathbf{v}(t)\rho(\mathbf{r}, t)}{R} d^3\mathbf{r} + \dots$$

Найдем интегралы для точечного заряда $\rho(\mathbf{r}, t) = Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}_0(t))$:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) \approx \frac{Q}{R} + \frac{Q}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \approx \frac{Q\mathbf{v}(t)}{R}, \quad (7.110)$$

где $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)|$ – расстояние от точки \mathbf{x} в которой вычисляются потенциалы к изменяющемуся положению заряда $\mathbf{x}_0(t)$.

Проведем калибровочное преобразование, чтобы убрать вторую производную (ускорение) в скалярном потенциале. Напомним (стр. 319), что напряженности поля не изменятся, если перейти к новым потенциалам:

$$\varphi \mapsto \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla f,$$

где $f = f(\mathbf{x}, t)$ – произвольная функция. Выберем:

$$f = \frac{Q}{2} \frac{\partial R}{\partial t}.$$

Тогда скалярный потенциал станет кулоновским $\varphi = Q/R$. Вычислим ($\ll H_{100}$) градиент f , который добавляется к векторному потенциалу:

$$\nabla f = \frac{Q}{2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla R = \frac{Q}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) = \frac{Q}{2} \left\{ -\frac{\mathbf{v}}{R} + \frac{(\mathbf{v}\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^3} \right\},$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)$ и скорость заряда равна $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_0(t)/dt$ (градиент берется по \mathbf{x} или эквивалентно по \mathbf{R} , а $\mathbf{x}_0(t)$ – функция времени, которая от координат не зависит). Отметим, что $\partial\mathbf{R}/\partial t = -\mathbf{v}$ и $\partial R/\partial t = -\mathbf{v}\mathbf{R}/R$.

Таким образом, приближенные выражения для скалярного и векторного потенциалов принимают вид:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) \approx \frac{Q}{R}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \approx \frac{Q}{2} \left\{ \frac{\mathbf{v}}{R} + \frac{(\mathbf{v}\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^3} \right\}. \quad (7.111)$$

Зная потенциалы, можно найти напряженности поля. Магнитное поле $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ выглядит ($\ll H_{101}$) очень просто:

$$\mathbf{B} \approx Q \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (7.112)$$

и совпадает с ведущим по скорости выражением для равномерно движущегося заряда (5.17), стр. 271. Выражение для напряженности электрического поля $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ более сложное:

$$\mathbf{E} \approx Q \frac{\mathbf{R}}{R^3} \left(1 + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) - \frac{3Q}{2} \frac{(\mathbf{v}\mathbf{R})^2\mathbf{R}}{R^5} - \frac{Q}{2} \left\{ \frac{\mathbf{a}}{R} + \frac{(\mathbf{a}\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^3} \right\} \quad (7.113)$$

и зависит уже от ускорения заряда $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$. При этом первые два члена совпадают с разложением по \mathbf{v} выражения (5.17), стр. 271, а третий является специфическим для ускоренно движущегося заряда. Естественно, такие же выражения для напряженностей получаются при использовании потенциалов (7.110). Однако, для построения функции Лагранжа, зависящей от скоростей частиц (но не от их ускорений), более подходящими являются потенциалы (7.111).

• Лагранжиан заряда Q_a , находящегося во *внешнем* поле другого заряда Q_b , был записан на странице 432:

$$L = -m\sqrt{1 - \mathbf{v}_a^2} - Q_a \varphi_b + Q_a \mathbf{v}_a \mathbf{A}_b,$$

где индекс “ b ” у потенциалов означает, что они создаются зарядом Q_b . Первое слагаемое – это лагранжиан свободной частицы, а вторые два связаны со взаимодействием заряда с внешним полем. Для потенциалов (7.111), вычисленных в точке \mathbf{x}_a , где находится заряд Q_a , имеем:

$$-Q_a \varphi_b(\mathbf{x}_a, t) + Q_a \mathbf{v}_a \mathbf{A}_b(\mathbf{x}_a, t) = -\frac{Q_a Q_b}{R} \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b + (\mathbf{N} \mathbf{v}_a)(\mathbf{N} \mathbf{v}_b)] \right\},$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$ – радиус вектор в направлении от b -того заряда к a -тому, а $\mathbf{N} = \mathbf{R}/R$ – единичный вектор в направлении \mathbf{R} . Это выражение симметрично относительно обоих зарядов. Считая, что в системе все заряды *равноправны*, можно записать общую функцию Лагранжа в следующем виде:

$$L = -\sum_a m_a \sqrt{1 - \mathbf{v}_a^2} - \sum_{a,b}^{a < b} \frac{Q_a Q_b}{R} \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b + (\mathbf{N} \mathbf{v}_a)(\mathbf{N} \mathbf{v}_b)] \right\}. \quad (7.114)$$

Сумма с пометкой $a < b$ предполагает двойное суммирование по a и b при котором первый индекс все время остается меньше второго. Эта сумма равна половине двойной суммы по всем *неравным* значениям a и b . Например, если выражение под суммой обозначить как V_{ab} , то для трех зарядов, при $V_{ab} = V_{ba}$, имеем:

$$\sum_{a,b}^{a < b} V_{ab} = V_{12} + V_{13} + V_{23} = \frac{1}{2} \sum_{a,b}^{a \neq b} V_{ab} = \frac{1}{2} (V_{12} + V_{13} + V_{21} + V_{23} + V_{31} + V_{32}),$$

Таким образом, сумма в (7.114) содержит все *парные взаимодействия*.

Кинетический член в лагранжиане необходимо, вообще говоря, разложить в ряд по скорости $\sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \approx 1 - \mathbf{v}^2/2 - (\mathbf{v}^2)^2/8$, чтобы оставаться в том-же приближении, в котором были получены потенциалы (для восстановления фундаментальной скорости делаем замены $Q \mapsto Q/c$, $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}/c$ и получаем, что член взаимодействия пропорционален $1/c^4$). Тем не менее, для компактности мы оставим его в свернутом виде, помня о необходимости такого разложения.

Обратим внимание, что полученный лагранжиан зависит от положения зарядов и их скоростей, но не зависит от ускорений (уравнения движения являются дифференциальными уравнениями второго порядка). Калибровочное преобразование, сделанное выше, и было необходимо, чтобы добиться исключения из потенциалов ускорения частиц.

- Запишем явный вид уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_a}. \quad (7.115)$$

Для лагранжиана (7.114) производная по скорости a -той частицы равна:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{m_a \mathbf{v}_a}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_a^2}} + \frac{1}{2} \sum_b^{b \neq a} \frac{Q_a Q_b}{R} \{ \mathbf{v}_b + \mathbf{N} (\mathbf{N} \mathbf{v}_b) \}. \quad (7.116)$$

Подставляя это выражение в уравнения Лагранжа (7.115), после нескольких утомительных вычислений ($\ll \text{H}_{102}$), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = & \sum_b^{b \neq a} \frac{Q_a Q_b}{R^2} \left\{ \mathbf{N} \left(1 + \frac{\mathbf{v}_b^2}{2} \right) - \frac{3}{2} \mathbf{N} (\mathbf{N} \mathbf{v}_b)^2 + \mathbf{v}_a \times [\mathbf{v}_b \times \mathbf{N}] \right\} \\ & - \frac{1}{2} \sum_b^{b \neq a} \frac{Q_a Q_b}{R} \{ \mathbf{a}_b + \mathbf{N} (\mathbf{N} \mathbf{a}_b) \}, \end{aligned}$$

где \mathbf{p}_a – импульс a -той частицы, который надо записать в четвертом порядке малости по скорости. На самом деле, для нахождения этих уравнений можно было сразу воспользоваться выражениями для электрического (7.113) и магнитного поля (7.112), записав силу Лоренца:

$$\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = \sum_b^{b \neq a} \{ Q_a \mathbf{E}_b + Q_a [\mathbf{v}_a \times \mathbf{B}_b] \}. \quad (7.117)$$

Несмотря на сложный вид уравнений движения, они допускают ряд простых точных решений. Рассмотрим, например, две частицы массой m с зарядами $Q_a = -Q_b = Q$. Пусть они двигаются по окружности радиуса $r = R/2$ с одинаковыми по модулю скоростями $\mathbf{v}_a = -\mathbf{v}_b$, находясь на диаметрально противоположных точках окружности. Проверим, что такая система удовлетворяет уравнениям движения. В этом случае ускорение равно $|\mathbf{a}_a| = v^2/r$, где $v = |\mathbf{v}_a| = \text{const}$, поэтому, используя для импульса приближенное выражение $\mathbf{p} = m\mathbf{v} (1 + \mathbf{v}^2/2)$, получаем ($\ll \text{H}_{103}$):

$$\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = m\mathbf{a} (1 + \mathbf{v}^2/2) = -\frac{Q^2}{R^2} \mathbf{N} (1 - \mathbf{v}^2/2).$$

или, деля обе части на $1 - \mathbf{v}^2/2$ в квадратичном по скорости приближении, имеем следующую связь скорости и диаметра $R = 2r$ окружности:

$$v^2 (1 + v^2) = \frac{Q^2/R}{2m}. \quad (7.118)$$

Это выражение отличается выражением в круглых скобках от аналогичного значения, следующего из классической механики.

• Так как лагранжиан не зависит от времени, то должна сохраняться *полная энергия* системы (7.24), стр. 436:

$$\mathcal{E} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \mathbf{v}_a - L. \quad (7.119)$$

Учитывая (7.116), можно записать явный вид энергии:

$$\mathcal{E} = \sum_a \frac{m_a}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} + \frac{1}{2} \sum_{a,b}^{a \neq b} \frac{Q_a Q_b}{R_{ab}} + \frac{1}{4} \sum_{a,b}^{a \neq b} \frac{Q_a Q_b}{R_{ab}} [\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a \mathbf{N})(\mathbf{v}_b \mathbf{N})]. \quad (7.120)$$

Первые два члена в этом выражении – это энергия движения частиц и кулоновская электростатическая энергия их взаимодействия (см. стр. 314). Последний член – специфическая энергия взаимодействия, зависящая от скоростей частиц. Её происхождение связано с релятивистскими поправками, учитывающими конечность скорости распространения взаимодействия. Стоит найти энергию системы, состоящей из двух одинаковых частиц, движущихся по окружности и сравнить её с классическим значением и релятивистским, без учета запаздывания.

• Ещё один интеграл движения – это *полный импульс* системы. Он связан с трансляционной инвариантностью лагранжиана. Действительно, сдвинем в лагранжиане все координаты частиц на постоянный вектор \mathbf{c} : $\mathbf{x}_a \mapsto \mathbf{x}_a + \mathbf{c}$. Так как координаты входят в виде комбинаций $\mathbf{R}_{ab} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$, лагранжиан не изменится и производная ($\ll H_{104}$) от него по \mathbf{c} при $\mathbf{c} = 0$ должна быть равна нулю:

$$0 = \left. \frac{\partial L(\mathbf{v}_a, \mathbf{x}_a + \mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}} \right|_{\mathbf{c}=0} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_a} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right\},$$

где в последнем равенстве использованы уравнения Лагранжа (7.115). Таким образом, должен сохраняться полный импульс:

$$\mathbf{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}. \quad (7.121)$$

Учитывая (7.116), получаем:

$$\mathbf{P} = \sum_a \frac{m_a \mathbf{v}_a}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_a^2}} + \sum_{a,b}^{b \neq a} \frac{Q_a Q_b}{2R_{ab}} [\mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_b \mathbf{N}) \mathbf{N}]. \quad (7.122)$$

Как и в случае с энергией системы, полный импульс состоит из двух частей: суммарного импульса движения частиц и “остатка” от импульса поля, проявляющегося как мгновенное взаимодействие, зависящее от скоростей частиц.

• В лагранжиан (7.114) все векторы входят в виде скалярных произведений. Поэтому он не зависит от ориентации системы координат. Эта симметрия приводит к закону сохранения момента импульса. Компоненты любого вектора \mathbf{r} при бесконечно малом повороте вокруг оси \mathbf{n} изменяются следующим образом: $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\phi}$, где $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{n}\phi$, см. стр. 385. Так меняются как координаты частиц, так и компоненты их скорости. При этом лагранжиан не изменяется, поэтому ($\leq H_{105}$):

$$0 = \left. \frac{\partial L(\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_a \times \boldsymbol{\phi}, \mathbf{x}_a + \mathbf{x}_a \times \boldsymbol{\phi})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \right|_{\boldsymbol{\phi}=0} = \sum_a \left\{ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \times \mathbf{v}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_a} \times \mathbf{x}_a \right\}.$$

Меняя местами сомножители в векторных произведениях и подставляя во втором члене уравнения Лагранжа, а в первом определение скорости, получаем закон сохранения в виде:

$$0 = \sum_a \left\{ \frac{d\mathbf{x}_a}{dt} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} + \mathbf{x}_a \times \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right) \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_a \mathbf{x}_a \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right\}.$$

Таким образом сохраняется полный момент импульса системы:

$$\mathbf{L} = \sum_a \mathbf{x}_a \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}. \quad (7.123)$$

Подставляя (7.116), получаем для него явное выражение:

$$\mathbf{L} = \sum_a \frac{m_a [\mathbf{x}_a \times \mathbf{v}_a]}{\sqrt{1 - v_a^2}} + \sum_{a,b}^{b \neq a} \frac{Q_a Q_b}{2R_{ab}} \left\{ [\mathbf{x}_a \times \mathbf{v}_b] - (\mathbf{v}_b \mathbf{N}) \frac{[\mathbf{x}_a \times \mathbf{x}_b]}{R_{ab}} \right\},$$

где учтено, что $\mathbf{N} = (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b)/R_{ab}$, поэтому $\mathbf{x}_a \times \mathbf{N} = -[\mathbf{x}_a \times \mathbf{x}_b]/R_{ab}$.

Для двух частиц равной массы и противоположными зарядами, при движении по окружности радиуса $r = R/2$ со скоростями v , момент импульса будет перпендикулярен плоскости движения и по модулю равен:

$$|\mathbf{L}| = \frac{2mrv}{\sqrt{1 - v^2}} + \frac{Q^2 v}{2}.$$

Полный момент импульса отклоняется от обычного механического момента тем сильнее, чем больше заряд частиц и их скорость. Относительное отклонение в ведущем приближении по скорости равно:

$$\frac{|\Delta \mathbf{L}|}{|\mathbf{L}|} \sim \frac{Q^2/R}{2mc^2} \sim \frac{v^2}{c^2}, \quad (7.124)$$

где восстановлена фундаментальная скорость c . Отношение кулоновской потенциальной энергии к энергии покоя масс частиц (дефект массы) для большинства систем невелико.

7.10 Самодействие электрона

Ускоренно движущийся заряд излучает электромагнитные волны, а, следовательно, теряет энергию. В результате, чтобы ускорить заряженную частицу необходимо приложить большую силу, чем для ускорения незаряженной частицы с такой же массой. Этот эффект называют *торможение излучением*. Соответствующая сила, которую надо дополнительно преодолевать называется *силой трения Лоренца*.

Запишем потенциалы, создаваемые системой зарядов (стр. 323):

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}, t - R)}{R} d^3\mathbf{r}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t - R)}{R} d^3\mathbf{r},$$

Аналогично построению лагранжиана с исключенным электромагнитным полем (стр. 476) разложим скалярный и векторный потенциалы в *бесконечный* ряд по времени запаздывания $R = |\mathbf{x} - \mathbf{r}|$ и найдем электрическое поле $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left\{ -\nabla \left[\int \rho R^{n-1} d^3\mathbf{r} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left[\int \mathbf{j} R^{n-1} d^3\mathbf{r} \right] \right\}.$$

В первом интеграле возьмем градиент $\nabla R^{n-1} = (n-1)R^{n-3}\mathbf{R}$ и подставим плотность заряда $\rho(\mathbf{r}, t) = Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}_0(t))$ и тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(t)\rho(\mathbf{r}, t)$ для точечного заряда Q :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left\{ (n-1)R^{n-3}\mathbf{R} + \frac{\partial(\mathbf{v} R^{n-1})}{\partial t} \right\},$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)$ – радиус-вектор от заряда, движущегося со скоростью $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_0/dt$ по траектории $\mathbf{x}_0(t)$ в точку \mathbf{x} измерения поля. Перегруппируем слагаемые в сумме так, чтобы каждому n соответствовало выражение одного порядка по степеням фундаментальной скорости c . Второй член в фигурных скобках пропорционален $1/c^2$ ($\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}/c$, $t \mapsto ct$). Первой член имеет нулевой порядок по c . Оба они умножаются на $1/c^n$, благодаря n -й производной по времени. Поэтому, в сумме для первого члена в фигурных скобках выделим первые два слагаемых (второе равно нулю), а для остального ряда (начинающегося с $n = 2$) сдвинем индекс суммирования $n \mapsto n + 2$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{Q}{R^3} \mathbf{R} + Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \left\{ \frac{1}{n+2} \frac{\partial(R^{n-1}\mathbf{R})}{\partial t} + \mathbf{v} R^{n-1} \right\},$$

где выполнено элементарное разложение $(n+2)! = (n+2)(n+1)n!$.

Осталось вычислить производную:

$$\frac{\partial(R^{n-1}\mathbf{R})}{\partial t} = -R^{n-1}\mathbf{v} - (n-1)R^{n-3}(\mathbf{R}\mathbf{v})\mathbf{R},$$

где знаки минус появляются, так как $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)$ и $\partial\mathbf{R}/\partial t = -\mathbf{v}$. Таким образом:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{R^3}\mathbf{R} + Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)n!} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \{(n+1)\mathbf{v} - (n-1)(\mathbf{v}\mathbf{N})\mathbf{N}\} R^{n-1},$$

где $\mathbf{N} = \mathbf{R}/R$ и производная действует на всё, что стоит справа от неё. От времени зависит как скорость заряда, так и радиус-вектор \mathbf{R} . Поэтому $(n+1)$ -я производная под знаком суммы выглядит достаточно громоздкой. Выражение для электрического поля упрощается в сопутствующей к заряду системе отсчета в которой $\mathbf{v} = 0$. В такой системе ненулевыми оказываются только ведущие производные по скорости (которые не умножаются на \mathbf{v}). В результате, при $\mathbf{v} = 0$ имеем:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{R^3}\mathbf{R} + Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)n!} \left\{ (n+1)\mathbf{a}^{(n)} - (n-1)(\mathbf{a}^{(n)}\mathbf{N})\mathbf{N} \right\} R^{n-1},$$

где $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ – ускорение заряда и $\mathbf{a}^{(n)} = d^n\mathbf{a}/dt^n$. Выпишем первые три слагаемых, получившегося выражения:

$$\mathbf{E} \approx Q \frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{Q}{2} \left\{ \frac{\mathbf{a}}{R} + \frac{(\mathbf{a}\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^3} \right\} + \frac{2}{3} Q \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \dots \quad (7.125)$$

Первые два слагаемых (при малой но ненулевой скорости \mathbf{v}) были найдены ранее: см. (7.113), стр. 477. Третье слагаемое не зависит от расстояния, а следующие пропорциональны R^n , поэтому полученный ряд имеет смысл только на небольших от заряда расстояниях.

В 5-й главе большинство задач электродинамики сводилось к двум классам: 1) нахождение напряженностей поля при *заданном* распределении зарядов и токов; 2) определение траектории движения *пробных* зарядов во внешних (заданных) полях. Тем не менее, в лагранжевом формализме поля и частицы описываются единым образом. Поэтому, варьируя траектории частиц и поля независимым образом, мы получим равноправные уравнения частиц и поля, которые необходимо решать совместно. Напомним, также, что при выводе закона сохранения (теоремы Пойнтинга), стр. 310 мы также считали поля и частицы равноправными, в том смысле, что суммарное поле, создаваемое всеми зарядами, в свою очередь, воздействует на эти заряды. Поэтому будем считать, что (7.125) действует на сам источник поля.

Непосредственно применить это выражение напряженности к точечному заряду нельзя. Для этого необходимо положить $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ или $R = 0$. В результате, первые члены разложения окажутся бесконечными. Для первого “кулоновского” выражения это не так страшно. Хотя модуль силы в центре источника оказывается бесконечным, в силу сферической симметрии, это не приводит к силовому вектору, который мог бы перемещать *точечный* заряд. Однако члены в фигурных скобках, зависящие от ускорения, не являются сферически симметричными.

Для устранения бесконечностей можно рассмотреть некоторое компактное, но несингулярное распределение заряда “в электроде”. В этом случае отдельные “части” электрона, взаимодействуя с другими, приводят к суммарной силе, действующей на электрон в целом. Такую модель рассмотрели в своё время Абрахам (1903 г.) и Лоренц (1904 г.). В их модели электрон считается *жестким*. Это означает, что сферически симметричное распределение заряда $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$ движется *как целое* по траектории $\mathbf{x}_0(t)$. В сопутствующей заряду системе отсчета $\mathbf{v} = 0$, поэтому магнитной составляющей силы нет и суммарная сила, действующая на заряд определяется электрическим полем:

$$\mathbf{f} = \int \rho(r) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r},$$

где для $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ в свою очередь надо записать интеграл по всем зарядам, заменяя Q на $dQ = \rho(r') d^3\mathbf{r}'$. Член в фигурных скобках в (7.125) приводит к силе, зависящей от ускорения:

$$\mathbf{f}_1 = -\frac{1}{2} \int \rho(r) \rho(r') \left\{ \frac{\mathbf{a}}{R} + \frac{(\mathbf{a}\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^3} \right\} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}',$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Этот интеграл является вектором, а так как единственный вектор, который в него входит – это ускорение \mathbf{a} , то интеграл пропорционален \mathbf{a} . Чтобы найти коэффициент пропорциональности, нужно умножить \mathbf{f}_1 на \mathbf{a} . Вводя единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{a}/a$, получим:

$$\mathbf{f}_1 = -\frac{\mathbf{a}}{2} \int \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{R} \left\{ 1 + \frac{(\mathbf{n}\mathbf{R})^2}{R^2} \right\} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' = -\frac{2}{3} \mathbf{a} \int \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{R} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}'.$$

Второе равенство следует из того, что все направления вектора \mathbf{R} являются равноправными и выражение $(\mathbf{n}\mathbf{R})^2/R^2$ можно ($\ll N_{106}$) заменить на $1/3$. Замечая, что получившийся интеграл с коэффициентом $1/2$ равен электростатической энергии U распределения зарядов $\rho(r)$ (или энергии поля, см. стр. 314), окончательно получаем: $\mathbf{f}_1 = -\frac{4}{3} U \mathbf{a}$.

Аналогично вычисляются интегралы для остальных членов ряда:

$$\mathbf{f} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} G_n \frac{d^n \mathbf{a}}{dt^n}, \quad (7.126)$$

где *форм-факторы* G_n зависят от модели распределения заряда:

$$G_n = \int \rho(r)\rho(r') |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{n-1} d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{r}'. \quad (7.127)$$

Несложно видеть, что бесконечный ряд (7.126) можно свернуть, записав силу в следующем изящном виде:

$$\mathbf{f} = -\frac{2}{3} \int \frac{\rho(r)\rho(r')}{R} \mathbf{a}(t - R) d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{r}'. \quad (7.128)$$

При $n = 1$ форм-фактор равен квадрату суммарного заряда: $G_1 = Q^2$. При $n > 1$, для компактного распределения заряда размером r_0 имеем $G_n \sim Q^2 r_0^{n-1}$. Если $r_0 \rightarrow 0$, то эти величины являются малыми и ими можно пренебречь. В результате, получается следующее выражение для силы, действующей на электрон в сопутствующей системе отсчета:

$$m_0 \mathbf{a} = \mathbf{f}_{ext} - \frac{4}{3} U \mathbf{a} + \frac{2}{3} Q^2 \frac{d\mathbf{a}}{dt},$$

где \mathbf{f}_{ext} – внешняя сила, сообщающая заряду ускорение. Член пропорциональный ускорению можно перенести в левую часть уравнения, переопределив массу $m = m_0 + 4U/3$. Поэтому, окончательно, *уравнение движения*, справедливое при малых скоростях, заряда имеет вид:

$$m \mathbf{a} = \mathbf{f}_{ext} + \frac{2}{3} Q^2 \frac{d\mathbf{a}}{dt}. \quad (7.129)$$

Масса m содержит в себе механическую массу m_0 и массу электромагнитного поля. То что она равна не U , а $(4/3)U$ можно объяснить наличием натяжений Пуанкаре. Чтобы жесткий электрон с распределением заряда $\rho(r)$ был стабилен, требуются дополнительные силы, удерживающие его от “разлетания”. Энергию этих сил также необходимо учитывать в динамическом уравнении. При этом, скорее всего, *ускоренно* движущийся электрон не может быть жестким, и должен испытывать некие деформации, а удерживающие силы, в свою очередь, должны терять энергию на излучение. Структура электрона нам неизвестна, поэтому что либо конкретное сказать обо всех этих эффектах мы не можем и обычно предполагается, что они пренебрежимо малы. По всей видимости, стоит считать, что уравнение (7.129) является некоторым приближением, справедливым, до тех пор, пока сила трения Лоренца мала.

• Как было установлено в 5-й главе, заряд, движущийся с ускорением \mathbf{a} , излучает электромагнитные волны, теряя энергию в соответствии с формулой Лармора (5.92), стр. 339:

$$I = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3} Q^2 \mathbf{a}^2. \quad (7.130)$$

С другой стороны, производная энергии по времени равна произведению силы на скорость (3.11), стр. 159. Найдем работу, совершаемую против сил трения Лоренца за время $t_2 - t_1$, воспользовавшись уравнением (7.129) и соотношением $\mathbf{v}d\mathbf{a}/dt = d(\mathbf{v}\mathbf{a})/dt - \mathbf{a}^2$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}\mathbf{v} dt = \frac{2}{3} Q^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{a}}{dt} \mathbf{v} dt = \frac{2}{3} Q^2 (\mathbf{v}\mathbf{a}) \Big|_{t_1}^{t_2} - \frac{2}{3} Q^2 \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a}^2 dt.$$

Величина $(\mathbf{a}\mathbf{v}) \Big|_{t_1}^{t_2}$ будет равна нулю в среднем при периодическом движении или в пределе малой скорости (для которого получена сила трения) и большого ускорения. Пренебрегая этим членом, получаем выражение для формулы Лармора (7.130). Таким образом, сила трения Лоренца, действительно, связана с излучением электромагнитных волн.

Проведенное вычисление не применимо при равноускоренном движении $\mathbf{a} = \text{const}$. В этом случае сила трения равна нулю, а эффект излучения проявляется только в появлении электромагнитной массы в левой части уравнения (7.129). Заряд становится тяжелее и его труднее становится ускорить.

Выясним когда эффект трения существенен. Пусть заряд из состояния покоя с ускорением a за время T приобретает скорость aT . Его энергия (в нерелятивистском пределе) изменяется на $\Delta\mathcal{E} = m(aT)^2/2$. Эффект трения излучения будет существенен, если эта энергия сравнима с потерей энергии на излучения (7.130) за это же время:

$$m \frac{(aT)^2}{2} \sim \frac{2}{3} Q^2 a^2 T.$$

Откуда, опуская числовые множители и восстанавливая фундаментальную скорость, получаем характерное время:

$$T_0 \sim \frac{Q^2}{mc^3} = \frac{r_0}{c} = 9.3 \cdot 10^{-24} \text{ sec}, \quad (7.131)$$

где $r_0 = 2.8 \cdot 10^{-13}$ см – классический радиус электрона. Таким образом, если сила в течении времени $T < T_0$ существенно меняет скорость частицы, то на её динамику влияют эффекты излучения. При более плавном (медленном) ускорении $T \gg T_0$, эффект трения мал и может рассматриваться как поправка к динамическому уравнению $m\mathbf{a} = \mathbf{f}_{ext}$.

• Исходя из проделанных оценок и замечаний, сделанных в конце страницы 485, следует, что решение уравнение (7.129) необходимо получать при помощи теории возмущений. Для этого траектория частицы, её скорость и ускорение раскладываются в ряд:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots$$

которые подставляются в (7.129): В качестве нулевого приближения берется уравнение без силы трения:

$$m\mathbf{a}_0 = \mathbf{f}_{ext}.$$

При помощи его решения находятся следующие поправки:

$$m\mathbf{a}_1 = \frac{2}{3} Q^2 \frac{d\mathbf{a}_0}{dt}, \quad m\mathbf{a}_2 = \frac{2}{3} Q^2 \frac{d\mathbf{a}_1}{dt},$$

и т.д. Такой метод в частности исключает появление самоускоряющегося решения при отсутствии внешней силы. Действительно, если $\mathbf{f}_{ext} = 0$, формально уравнение $\mathbf{a} = (2Q^2/3m)d\mathbf{a}/dt$, кроме физически осмысленного (в отсутствии внешних воздействий) решения $\mathbf{a} = 0$, имеет ускоряющееся решение $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 e^{(2Q^2/3m)t}$. В соответствии с таким решением, электрон, например, пролетев ускоряющее поле в конденсаторе, после выхода из него (имея $\mathbf{a}(0) = \mathbf{a}_0 \neq 0$), должен был бы продолжать неограниченно ускоряться. При решении уравнения по теории возмущения такого нефизичного решения не возникает.

Уравнение (7.129) позволяет разобраться с ответом на вопрос “оказывает ли внешняя электромагнитная волна давление на заряд?”. С одной стороны – “конечно – да!” (опыты Лебедева по световому давлению тому явное подтверждение). С другой стороны, решение уравнений движения пробной частицы в поле плоской волны приводит к парадоксальному заключению об отсутствии ускоренного движения вдоль волнового вектора (по которому направлено) давление. Чтобы получить наблюдаемый на эксперименте эффект светового давления необходимо решить уравнение движения с учетом самодействия:

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \frac{2}{3} e^2 \ddot{\mathbf{v}}, \quad (7.132)$$

где \mathbf{E} , \mathbf{B} – напряженности поля плоской волны, поляризованной, например, по кругу:

$$E_x = E_0 \cos(t - z), \quad E_y = E_0 \sin(t - z), \quad B_x = -E_y, \quad B_y = E_x$$

и распространяющейся вдоль оси z ($E_z = B_z = 0$).

• При помощи преобразований Лоренца для силы и ускорения уравнение (7.129) можно записать в произвольной системе отсчета. Впрочем, ковариантное выражение для силы можно получить сразу из общих соображений. Напомним, что 4-ускорение (2.45), стр. 135:

$$a^\nu = \frac{du^\nu}{ds} = \left\{ \frac{\mathbf{v}\mathbf{a}}{(1-\mathbf{v}^2)^2}, \frac{\mathbf{a} + [\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{a}]]}{(1-\mathbf{v}^2)^2} \right\}, \quad (7.133)$$

определяется при помощи 4-скорости $u^\nu = \{\gamma, \gamma\mathbf{v}\}$ и интервала (собственного времени) $ds = \sqrt{1-\mathbf{v}^2}dt$, вычисленного вдоль траектории частицы. 4-силой называется 4-вектор $f^\nu = ma^\nu$, где m – масса частицы.

В системе в которой частица покоится, векторная часть силы трения, в соответствии с (7.129) должна равняться $(2/3)Q^2 d\mathbf{a}/dt$. Если $\mathbf{v} = 0$ из (7.133) имеем $da/ds = \{0, d\mathbf{a}/dt\}$. Поэтому:

$$\mathbf{f}|_{\mathbf{v}=0} = \frac{2}{3}Q^2 \frac{d\mathbf{a}}{ds}.$$

Силу трения Лоренца можно ($\ll C_{12}$) разложить по двум 4-векторам:

$$\mathbf{f} = \alpha\mathbf{u} + \beta \frac{d\mathbf{a}}{ds},$$

где α и β – некоторые скаляры. Воспользуемся тем, что 4-скорость и сила ортогональны друг другу:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0$$

или $\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = 0$. Это условие приводит к соотношению $\alpha = a^2\beta$, где учтено тождество, связывающее скалярное произведение производной 4-ускорения и 4-скорости. Оно получается ещё одним дифференцированием по s условия ортогональности:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{a}}{ds} \cdot \mathbf{u} = -a^2.$$

При $\mathbf{v} = 0$ имеем $\beta = (2/3)Q^2$. В результате, в произвольной системе отсчета ковариантное уравнение движения имеет вид:

$$m \frac{d\mathbf{u}}{ds} = \mathbf{f}_{ext} + \frac{2}{3}Q^2 \left\{ \frac{d^2\mathbf{u}}{ds^2} + \left(\frac{d\mathbf{u}}{ds} \right)^2 \mathbf{u} \right\}. \quad (7.134)$$

Это же уравнение можно переписать в 3-мерных обозначениях:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} \right) = \mathbf{f}_{ext} + \frac{2}{3}Q^2 \left\{ \frac{\dot{\mathbf{a}} + [\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{a}}]]}{(1-\mathbf{v}^2)^2} + 3(\mathbf{v}\mathbf{a}) \frac{\mathbf{a} + [\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{a}]]}{(1-\mathbf{v}^2)^4} \right\},$$

где $\dot{\mathbf{a}} = d\mathbf{a}/dt$. Если $\mathbf{v} = 0$ мы снова возвращаемся к уравнению (7.129).

• Если в качестве ускоряющей частицы силы используется *внешнее* электромагнитное поле $F_{\mu\nu} = (\mathbf{E}, -\mathbf{B})$, уравнения движения имеют вид:

$$m \frac{d\mathbf{u}}{ds} = Q \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \frac{2}{3} Q^2 \left\{ \frac{d^2\mathbf{u}}{ds^2} + \left(\frac{d\mathbf{u}}{ds} \right)^2 \mathbf{u} \right\}, \quad (7.135)$$

где в безиндексных обозначениях (прямой шрифт!) 4-вектор $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{u})^\mu = F^{\mu\nu} u_\nu$. Применим к этому уравнению теорию возмущений. Для этого ряд

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots$$

подставим в уравнение движения (штрих – производная по s):

$$m (\mathbf{u}'_0 + \mathbf{u}'_1 + \dots) = Q \mathbf{F} \cdot (\mathbf{u}_0 + \dots) + \frac{2}{3} Q^2 \left\{ \mathbf{u}''_0 + \dots + (\mathbf{u}'_0{}^2 + 2\mathbf{u}'_0 \mathbf{u}'_1) (\mathbf{u}_0 + \dots) \right\}.$$

Приравнявая одинаковые порядки малости, получаем цепочку уравнений:

$$\begin{aligned} m \mathbf{u}'_0 &= Q \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0, \\ m \mathbf{u}'_1 &= Q \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_1 + \frac{2}{3} Q^2 (\mathbf{u}''_0 + \mathbf{u}_0{}^2 \mathbf{u}_0), \end{aligned}$$

и т.д. Решая их последовательно, можно найти динамику движения заряда в произвольном внешнем поле с учетом силы трения.

При движении в постоянном электрическом поле \mathbf{E} мы имеем равноускоренное движение. Если в начальный момент времени частица покоилась, то $\mathbf{u} = \{c h \omega s, \mathbf{e} \operatorname{sh} \omega s\}$, где $\mathbf{e} = \mathbf{E}/|\mathbf{E}|$, см. стр. 856. Несложно видеть, что релятивистская сила трения (как и нерелятивистская) в этом случае равна нулю. Это же справедливо при равноускоренном движении *вдоль прямой* с ненулевой начальной скоростью ($\ll H_{107}$).

В общем случае релятивистски равноускоренное движение можно определить как движение, при котором квадрат 4-ускорения (или 4-силы) остаётся постоянным $a^2 = f^2/m^2 = \text{const} < 0$. Действительно, компоненты 4-силы f^μ можно записать следующим образом (см. стр. 163):

$$f^\mu = \{\gamma \mathbf{F} \mathbf{v}, \gamma \mathbf{F}\} = \frac{1}{m} \{\mathbf{F} \mathbf{p}, \mathcal{E} \mathbf{F}\},$$

где \mathbf{F} – *постоянная* (при равноускоренном движении) 3-сила, \mathcal{E} – энергия и \mathbf{p} – импульс заряда. Поэтому $m^2 f^2 = (\mathbf{F} \mathbf{p})^2 - \mathcal{E}^2 \mathbf{F}^2$. Дифференцируя по лабораторному времени (или собственному времени заряда), имеем:

$$\frac{d(m^2 f^2)}{dt} = 2(\mathbf{F} \mathbf{p}) \mathbf{F}^2 - 2\mathcal{E}(\mathbf{v} \mathbf{F}) \mathbf{F}^2 = 2(\mathbf{F} \mathbf{p}) \mathbf{F}^2 - 2(\mathbf{F} \mathbf{p}) \mathbf{F}^2 = 0,$$

где учтено, что $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$, $d\mathcal{E}/dt = \mathbf{v} \mathbf{F}$ и $\mathbf{p} = \mathbf{v} \mathcal{E}$. Чтобы убедиться в том, что квадрат 4-ускорения отрицателен, достаточно вычислить его в системе отсчета, где частица покоится.

7.11 Нелинейная электродинамика *

Одним из основных принципов, который мы использовали для построения электродинамики, был принцип суперпозиции. Если он выполняется, то уравнения электромагнитного поля должны быть линейными, а лагранжиан квадратичен по полям. Линейность уравнений, в свою очередь, приводит к сингулярной кулоновской силе для точечного заряда. Если отказаться от линейности, то можно построить теорию электромагнетизма в которой на малых расстояниях от заряда сингулярности не будет. Было предложено достаточно много подобных теорий. Основным стимулом к их развитию было желание построить теорию *конечной* электромагнитной массы электрона.

Как только мы допускаем нелинейность уравнений поля, возникает существенный произвол в выборе лагранжиана. Единственными ограничивающими принципами остаются релятивистская и калибровочная инвариантность теории. Для калибровочно инвариантных напряженностей $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, существует два скаляра от которых может зависеть лагранжиан: $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)$ и $*F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 4\mathbf{E}\mathbf{B}$, где $*F$ – дуальный тензор к F , см. (7.2), стр. 423. Так как теория Максвелла имеет многочисленные экспериментальные подтверждения, нелинейная теория должна зависеть от некоторой фундаментальной константы, малые значения которой соответствуют линейным уравнениям обычной электродинамики.

Первая нелинейная теория была построена Густавом Ми в 1912 г. Её лагранжиан зависел от потенциалов (был калибровочно неинвариантен). Калибровочно инвариантную теорию предложил Макс Борн (1934 г.):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi\lambda^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}} \right) \approx -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (7.136)$$

где λ фундаментальная постоянная, и приближенное равенство, совпадающее с лагранжианом (7.22), стр. 435, записано в пределе $\lambda \rightarrow 0$.

Наличие в лагранжиане корня от полей вида $\sqrt{1 - \lambda^2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)}$ приводит к тому, что, например, в случае электростатики ($\mathbf{B} = 0$) электрическое поле $|\mathbf{E}| < \lambda$, что, как мы увидим, снимает сингулярность поля точечного заряда. Возможной мотивацией в выборе такой нелинейности может быть аналогия с лагранжианом свободной частицы $m\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$, где в качестве скорости выступает $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$. Аналогичное ограничение на магнитное поле возникает в нелинейной теории Шрёдингера с лагранжианом $\mathcal{L} = \ln(1 - \lambda^2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2))/8\pi\lambda^2$.

Еще один вариант, использующий оба инварианта, был рассмотрен Борном и Инфельдом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi\lambda^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda^4}{16} (*F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2} \right). \quad (7.137)$$

Выбор такой комбинации инвариантов связан со значением ($\ll H_{108}$) определителя матрицы $g_{\mu\nu} + \lambda F_{\mu\nu}$, который называют “объемом” тензора $F_{\mu\nu}$:

$$\det(g_{\mu\nu} + \lambda F_{\mu\nu}) = -1 - \lambda^2 (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) + \lambda^4 (\mathbf{E}\mathbf{B})^2.$$

Поэтому лагранжиан (7.137) можно записать в следующем изящном виде:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi\lambda^2} \left(1 - \sqrt{-\det(g + \lambda F)} \right).$$

Рассмотрим случай электростатики с $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ при наличии точечного заряда. Если считать, что взаимодействие токов с потенциалами остается линейным, то к лагранжиану необходимо добавить член $-A_\mu j^\mu$ (см. стр. 435). В итоге, для теорий (7.136) и (7.137) имеем:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi\lambda^2} \left(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 (\nabla\varphi)^2} \right) - \varphi Q \delta(\mathbf{r}),$$

где предполагается, что плотность точечного заряда Q описывается дельта-функцией Дирака. Так как производная по времени равна нулю (статика), уравнения Лагранжа имеют вид:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}.$$

Беря производные лагранжиана, получаем уравнение:

$$\nabla \left[\frac{\nabla \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 (\nabla \varphi)^2}} \right] = -4\pi Q \delta(\mathbf{r}). \quad (7.138)$$

Если обозначить выражение в квадратных скобках через $-\mathbf{D}$, то получается уравнение Гаусса $\nabla \mathbf{D} = 4\pi \delta(\mathbf{r})$ с решением $\mathbf{D} = Q\mathbf{r}/r^3$, поэтому:

$$\frac{\mathbf{E}}{\sqrt{1 - \lambda^2 \mathbf{E}^2}} = \frac{Q\mathbf{r}}{r^3}.$$

Возводя в квадрат и находя \mathbf{E}^2 , окончательно получаем:

$$\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{n}}{\sqrt{r^4 + a^4}}, \quad (7.139)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ – единичный вектор и $a = \sqrt{\lambda Q}$. Модуль напряженности электрического поля \mathbf{E} остается конечным при $r = 0$, а при $\lambda = 0$ получается кулоновское выражение.

• Так как лагранжиан свободного поля (7.137) отличается от лагранжиана теории Максвелла, то, естественно, изменятся и выражения для плотности энергии и импульса электромагнитного поля. Найдем тензор энергии-импульса в нелинейной электродинамике. Для этого удобно [18], дополнительно к $F_{\mu\nu}$, ввести еще один антисимметричный тензор:

$$G^{\mu\nu} = -4\pi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)}.$$

Его антисимметричность следует из того, что лагранжиан \mathcal{L} зависит от инвариантов, производные от которых по $\partial_\mu A_\nu$ антисимметричны:

$$\frac{1}{4} \frac{\partial (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = F^{\mu\nu}, \quad \frac{1}{4} \frac{\partial (*F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = *F^{\mu\nu}.$$

При помощи тензора $G^{\mu\nu}$ уравнения Лагранжа для $\mathcal{L} \sim -A_\mu j^\mu$ записываются также как и в линейной электродинамике:

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu,$$

а канонический тензор энергии импульса (7.33), стр. 438 имеет вид:

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} G^{\alpha\gamma} \partial^\beta A_\gamma - g^{\alpha\beta} \mathcal{L}.$$

Для электродинамики Максвелла $G_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$. В нелинейной теории связь между тензорами более сложная. Для симметризации тензора энергии-импульса свободного поля, из него необходимо вычесть производную $\partial_\gamma (G^{\gamma\alpha} A^\beta) / 4\pi$, которая тождественно удовлетворяет уравнению непрерывности. Учитывая уравнения движения с $j^\nu = 0$, имеем (см. стр. 439) $\partial_\gamma (G^{\gamma\alpha} A^\beta) = -G^{\alpha\gamma} \partial_\gamma A^\beta$ и, следовательно, симметричный, калибровочно инвариантный тензор энергии-импульса равен:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} G^{\alpha\gamma} F_\gamma{}^\beta - g^{\alpha\beta} \mathcal{L}. \quad (7.140)$$

В частности, плотности энергии и импульса равны:

$$T^{00} = \frac{\mathbf{D}\mathbf{E}}{4\pi} - \mathcal{L}, \quad T^{0i} = \frac{\mathbf{D} \times \mathbf{B}}{4\pi},$$

где компоненты тензора $G^{\mu\nu}$ определяются двумя 3-векторами:

$$\mathbf{D} = \{G^{10}, G^{20}, G^{30}\}, \quad \mathbf{H} = \{G^{32}, G^{13}, G^{21}\},$$

которые являются аналогами электрического и магнитного поля.

- В случае электростатики ($\mathbf{B} = \mathbf{H} = 0$) имеем:

$$T^{00} = \frac{\mathbf{D}\mathbf{E}}{4\pi} - \frac{1}{4\pi\lambda^2} \left(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \mathbf{E}^2}\right).$$

Выше мы нашли, что для точечного заряда электрическое поле \mathbf{E} и вектор \mathbf{D} [см. (7.139)] равны:

$$\mathbf{D} = \frac{Q\mathbf{n}}{r^2}, \quad \mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{n}}{\sqrt{r^4 + a^4}}. \quad (7.141)$$

Подставляя эти выражения в плотность энергии, получаем:

$$T^{00} = \frac{1}{4\pi\lambda^2} \left[\sqrt{1 + \frac{a^4}{r^4}} - 1 \right].$$

Интеграл этого выражения по всему объему в сферических координатах $dV = 4\pi r^2 dr$, дает полную энергию поля (массу):

$$w = m = \int T^{00} dV = \frac{Q^2}{a} \int_0^\infty \left[\sqrt{1 + x^4} - x^2 \right] dx = \frac{Q^2}{a} I_0,$$

где сделана замена $x = r/a$. Получившийся интеграл удобно записать в виде разницы $I_0 = I_1 - I_2$ двух интегралов:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}, \quad I_2 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^4}}\right) x^2 dx. \quad (7.142)$$

Второй интеграл равен $I_2 = I_1/3$. Чтобы это доказать, необходимо I_2 дважды проинтегрировать по частям. Первый раз вносим x^2 под дифференциал: $x^2 dx = d(x^3)/3$, а второй раз вносим $1/\sqrt{1 + x^4}$:

$$I_2 = \frac{2}{3} \int_0^\infty \frac{x^4 dx}{(1 + x^4)^{3/2}} = -\frac{1}{3} \int_0^\infty x d\left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^4}}\right) = \frac{1}{3} I_1.$$

Интеграл I_1 выражается через гамма-функцию и имеет приближенное значение $I_1 \approx 1.8540746773$. Соответственно $I_0 = 2I_1/3 \approx 1.23605$. Параметр $a = \sqrt{\lambda Q}$ — это характерное расстояние, определяющее масштаб на котором начинают сказываться эффекты теории. На расстояниях $r \gg a$ от заряда справедлив закон Кулона и линейная теория Максвелла. При $r < a$ закон Кулона модифицируется и существенными становятся нелинейные эффекты. Этот же параметр определяет величину энергии поля точечного заряда. Если вся масса электрона имеет электромагнитное происхождение, то a соответствует классическому радиусу электрона (с точностью до множителя 1.23605...).

• Снятие сингулярности электрического поля приводит к тому, что тензор энергии-импульса поля движущегося заряда сохраняется сам по себе и, следовательно, в нелинейной теории не возникает “проблемы 3/4”. Проведем соответствующие вычисления.

Ковариантное обобщение полученных выше тензоров напряженностей электромагнитного поля для точечного заряда имеет следующий вид:

$$G_{\alpha\beta} = Q \frac{\eta_\alpha v_\beta - \eta_\beta v_\alpha}{(-\eta^2)^{3/2}}, \quad F_{\alpha\beta} = Q \frac{\eta_\alpha v_\beta - \eta_\beta v_\alpha}{\sqrt{-\eta^2}(\eta^4 + a^4)},$$

где обозначения соответствуют странице 471 и для краткости пишем $\eta^4 = (\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta})^2$ (обратим внимание на то, что так как $\eta^2 < 0$, то $\sqrt{\eta^4} = -\eta^2$). Действительно, тензор $G_{\alpha\beta}$ удовлетворяет обычному линейному уравнению Максвелла $\partial_\alpha G^{\alpha\beta} = 4\pi j^\beta$ и совпадает с выражением (7.99), стр. 471, в котором регуляризацию делать уже не нужно. Сравнивая \mathbf{D} и \mathbf{E} из (7.141), несложно по аналогии записать и выражение для $F_{\alpha\beta}$ (можно проделать его вывод строго, переходя при помощи преобразований Лоренца (5.50), (5.51), стр. 299 от $\mathbf{E}' = Q\mathbf{r}'/r'\sqrt{r'^4 + a^4}$ и $\mathbf{B}' = 0$ в “штрихованной” системе отсчета, связанной с зарядом, к системе в которой заряд движется со скоростью \mathbf{v} , см. стр. 270).

Инварианты, от которых зависит лагранжиан равны:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{2Q^2}{\eta^4 + a^2}, \quad {}^*F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0.$$

Второе соотношение возникает в силу свертки антисимметричного тензора $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ в определении *F с симметричными комбинациями типа $\eta_\alpha\eta_\mu$. Поэтому для одиночного заряда, движущегося с постоянной скоростью лагранжианы (7.136) и (7.137) совпадают. Теперь несложно записать тензор энергии-импульса (7.140):

$$4\pi\lambda^2 T^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \frac{\eta^2}{\sqrt{\eta^4 + a^4}} - a^4 \frac{\eta^\mu\eta^\nu + \eta^2 v^\mu v^\nu}{\eta^4 \sqrt{\eta^4 + a^4}}.$$

Прямым вычислением, используя соотношения (7.100), стр. 471, можно проверить, что $T^{\mu\nu}$ сохраняется:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

и, следовательно, полученные с его помощью энергия и импульс поля (интегральные величины) будут правильно зависеть от скорости и связаны обычным релятивистским соотношением.

Запишем плотность энергии:

$$W = T^{00} = -\frac{1}{4\pi\lambda^2} \left(1 + \frac{\eta^2}{\sqrt{\eta^4 + a^4}} \right) - \frac{a^4}{4\pi\lambda^2} \frac{(\eta^0)^2 + \gamma^2\eta^2}{\eta^4\sqrt{\eta^4 + a^4}}.$$

Обратим внимание на выражение в круглых скобках. При интегрировании каждое слагаемое в скобках по отдельности расходится и только их сумма дает конечный интеграл. Поэтому, замены, производимые при вычислении интеграла (7.103), стр. 472, должны выполняться для всего выражения в скобках (это даст общий множитель $1/\gamma$). В результате интегрирования, получаем полную энергию поля:

$$w = \frac{a^4\gamma}{\lambda^2} \int_0^\infty \frac{dr}{\sqrt{r^4 + a^4}} \left(1 - \frac{v^2}{3} \right) - \frac{\gamma}{\lambda^2} \int_0^\infty dr \left(r^2 - \frac{r^4}{\sqrt{r^4 + a^4}} \right) (1 - v^2).$$

Делая замену $x = r/a$ и вводя интегралы (7.142), находим электромагнитную массу поля:

$$m = \frac{w}{\gamma} = \frac{Q^2}{a} (I_1 - I_2) - \frac{Q^2}{a} v^2 \left(\frac{1}{3} I_1 - I_2 \right).$$

Так как $I_2 = I_1/3$, масса постоянна и равна $m = 1.23605 Q^2/a$. Аналогично, компоненты T^{0i} дают вектор плотности импульса:

$$\mathbf{P} = -\frac{a^4}{4\pi\lambda^2} \frac{\eta^0\boldsymbol{\eta} + \eta^2\gamma^2\mathbf{v}}{\eta^4\sqrt{\eta^4 + a^4}},$$

интеграл от которой приводит к релятивистскому выражению $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$.

Таким образом, нелинейная электродинамика с лагранжианом Борна-Инфельда имеет ряд привлекательных особенностей. В ней автоматически отсутствует сингулярность в законе Кулона, что приводит к конечной массе электромагнитного поля точечного заряда и верным выражениям для энергии и импульса поля (нет необходимости в компенсирующем тензоре энергии-импульса, который реализует натяжения Пуанкаре).

Тем не мене, не все так здорово. Во-первых лагранжиан выбран достаточно произвольно. Во-вторых рассмотренная выше теория, по всей видимости, противоречит опыту. Столкновения электронов с высокой энергией подтверждает справедливость закона Кулона на расстояниях существенно меньших классического радиуса a . Это можно было бы объяснить наличием отрицательной неэлектромагнитной составляющей в массе электрона (для уменьшения параметра a). Однако это уже слишком большая плата за сохранение теории. Кроме этого точечность заряда электрона, сохраненная в теории, не выглядит вполне физической.

7.12 Солитоны *

Рассматривая электродинамику, мы различали поля и частицы. Частицы мыслились как некоторые компактные (возможно точечные) образования, которые взаимодействовали при помощи электромагнитного поля. Таким образом, основное различие между полем и частицами состоит в том, что энергия последних локализована в малой области пространства, тогда как энергия поля существенно более нелокальная.

Оказывается, что в рамках *нелинейных* полевых теорий можно получать решения, которые обладают локализованной энергией, движущейся в пространстве. Такие сгустки энергии могут взаимодействовать друг с другом, сохраняя после взаимодействия свою форму, образовывать связанные состояния и т.д. Подобные решения, называемые *солитонами*, могут служить *полевой моделью частиц*.

Рассмотрим простейший пример теории действительного скалярного поля с лагранжианом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - V(\phi).$$

Уравнения Лагранжа

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

приводят к следующим уравнениям движения:

$$\partial^2 \phi + V'(\phi) = 0. \quad (7.143)$$

Тензор энергии-импульса находится по общей формуле (7.48), стр. 448, которая в случае скалярного поля имеет вид:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

Подставляя лагранжиан, получаем симметричный тензор:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

Плотность энергии поля $W = T^{00}$ имеет вид:

$$W = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + V(\phi), \quad (7.144)$$

а плотность импульса $P^i = T^{0i}$:

$$\mathbf{P} = -\dot{\phi} \nabla\phi, \quad (7.145)$$

где точка над функцией поля – это производная по времени.

Солитонное решение для скалярного поля существует, например, в одномерном случае $x^\nu = \{t, x\}$ для:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 = -\frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 + \frac{m^4}{4\lambda},$$

где m и λ – некоторые константы. Такой лагранжиан называют *моделью Хиггса*. Для него уравнения движения (7.143) имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = m^2 \phi - \lambda \phi^3. \quad (7.146)$$

Обратим внимание, что знак перед квадратичным членом отличается от массивного линейного поля, которое рассматривалось на стр. 452. Без потери общности можно положить $m = \lambda = 1$. Действительно, заменами $x^\nu \mapsto x^\nu/m$ и $\phi \mapsto \sqrt{\lambda}/m$ уравнение (7.146) можно привести к форме с $m = \lambda = 1$. Обратные замены – восстанавливают эти константы.

Мы планируем получить сгусток энергии скалярного поля, который движется с постоянной скоростью u по траектории $x = x_0 + ut$. Если вместе с ним с той же скоростью будет двигаться наблюдатель, он увидит статическую конфигурацию поля, не зависящую от времени. Подставляя $\phi(t, x) = f(x - ut)$ в уравнения движения (7.146), получаем:

$$-\frac{1}{\gamma^2} f'' = f - f^3,$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2}$. Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Умножая обе части на f' и интегрируя, имеем:

$$-\frac{(f')^2}{2\gamma^2} = \frac{f^2}{2} - \frac{f^4}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} (1 - f^2)^2,$$

где константа интегрирования выбрана равной $1/4$. Извлекая корень, разделяя переменные и интегрируя это уравнение еще раз

$$\frac{\gamma}{\sqrt{2}} (x - vt - x_0) = \pm \int \frac{df}{1 - f^2} = \pm \operatorname{ath} f,$$

получаем решение:

$$\phi(t, x) = \pm \operatorname{th} \left\{ \frac{\gamma}{\sqrt{2}} (x - ut - x_0) \right\}, \quad (7.147)$$

где x_0 – еще одна константа интегрирования (начальное положение фазы солитона при $t = 0$). Для восстановления размерных констант аргумент гиперболического тангенса нужно умножить на m , а сам тангенс на $m/\sqrt{\lambda}$.

Плотность энергии поля (7.144) для решения (7.147) равна:

$$W = \frac{\gamma^2}{2} \operatorname{ch}^{-4} \left\{ \frac{\gamma}{\sqrt{2}} (x - ut - x_0) \right\}.$$

Плотность импульса связана с плотностью энергии обычным образом: $P = uW$. Интегрирование по всему пространству дает полную энергию:

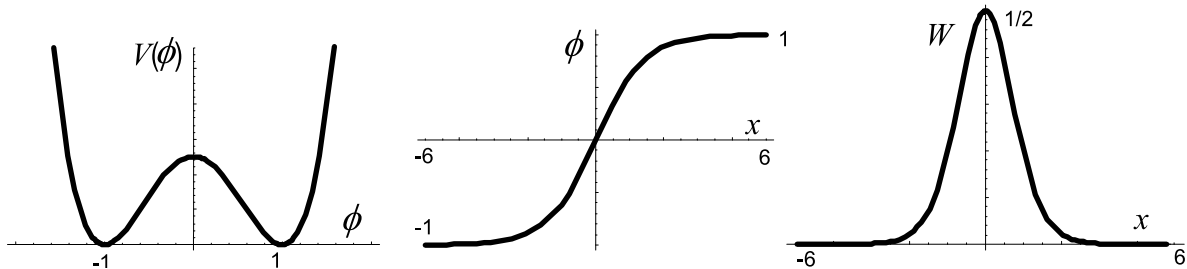
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, t) dx = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2}},$$

где константу (в которой восстановлены параметры m и λ)

$$m_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m^3}{\lambda}$$

можно интерпретировать как массу солитона.

Типичный размер области с отличной от нуля энергией поля пропорционален m^{-1} . Чем больше параметр m тем компактнее получается солитон и тем больше будет его масса. Параметр λ влияет на высоту солитона и чем он меньше, тем выше будет плотность энергии.



В 3-мерном пространстве получается аналогичное решение, но его энергия локализована только в направлении движения. В перпендикулярных направлениях убывания плотности энергии нет. Существенным в этой модели является также наличие нелинейности. Линейное уравнение Клейна-Гордона с $V(\phi) = m^2\phi^2/2$ решений вида $\phi = f(x - ut)$ с локализованной в пространстве плотностью энергии не имеет.

В общем случае, энергия солитона (интеграл от (7.144)) будет конечной, если на бесконечности поле стремится к значению ϕ_0 для которого $V(\phi_0) = 0$. Такое значение поля называют *классическим вакуумом*. Лагранжиан, рассмотренный выше, имеет два таких вакуума: $\phi_0 = \pm 1$. Они соответствуют двум минимумам $V(\phi)$ (см. выше первый рисунок). Справа от солитона поле стремится к одному из этих вакуумов, а слева – ко второму. В результате, хотя само поле не убывает на бесконечности, плотность энергии оказывается локализованной в пространстве, а суммарная энергия – конечной.

- Еще одна модель, допускающее солитонное решение с нелинейностью

$$V(\phi) = 1 - \cos \phi$$

приводит к уравнению синус-Гордона:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sin \phi = 0. \tag{7.148}$$

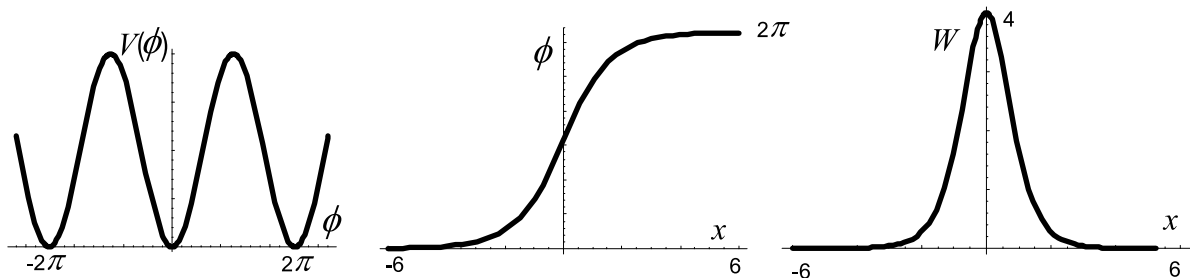
Повторяя вычисления ($\ll N_{109}$), аналогичные предыдущей модели, получаем решение в виде движущегося солитона:

$$\phi(t, x) = 4 \operatorname{arctg} e^{\pm \gamma(x - ut - x_0)} \tag{7.149}$$

с локализованной плотностью энергии:

$$W = 4\gamma^2 \operatorname{ch}^{-2}\{\gamma(x - ut - x_0)\}$$

и импульсом $P = uW$. Масса такого солитона равна $m_0 = 8$. Форма нелинейной функции $V(\phi)$, решение и плотность энергии в системе покоя солитона ($u = 0$) приведены на рисунках ниже:



В обеих моделях локализованной оказалась плотность энергии, но не поле. В модели Хиггса поле изменяется от -1 до 1 . В синус-Гордоне от 0 до 2π . Оба значения являются классическими вакуумами модели. Такие солитоны называются *кинками* (kink – изгиб). В модели Хиггса классических вакуумов только 2 в модели синус-Гордона их бесконечно много, причем существует обычный вакуум нулевого поля $\phi_0 = 0$.

Решения подобные кинкам часто называют *топологическими*. Это название связано с перечислением способов отождествления двух предельных точек $x = \pm\infty$ и классических вакуумов системы. Такие отождествления можно представить в виде линий, соединяющих предельные точки и вакуумы. Переплетение таких линий обладает определенной топологией (имеет ряд свойств, не зависящих от расстояний и других геометрических свойств). Для одномерного скалярного поля топология достаточно тривиальна, однако в более сложных моделях она может оказаться уже не такой простой.

• Солитоны достаточно устойчивые образования и небольшие внешние возмущения их не разрушают. Рассмотрим соответствующее условие устойчивости [19]. Пусть поле равно $\phi(t, x) = \phi_0(t, x) + \psi(t, x)$, где $\phi_0(t, x)$ – солитонное решение, а $\psi(t, x)$ – небольшое возмущение. Подставим эту сумму в уравнение движения и разложим в ряд по ψ :

$$\partial^2(\phi_0 + \psi) + V'(\phi_0 + \psi) = \partial^2(\phi_0 + \psi) + V'(\phi_0) + V''(\phi_0)\psi + \dots = 0.$$

Так как солитон ϕ_0 удовлетворяет уравнению $\partial^2\phi_0 + V'(\phi_0) = 0$, возмущение в системе отсчета, где солитон неподвижен ($u = 0$) должно удовлетворять линейному уравнению:

$$\partial^2\psi + V''(\phi_0(x))\psi = 0.$$

Будем искать его решение в виде $\psi(t, x) = e^{-\omega t}\psi(x)$. Тогда $\psi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка:

$$-\psi''(x) + U(x)\psi(x) = \omega^2\psi(x), \quad (7.150)$$

где $U(x) = V''(\phi_0(x))$. Потребуем, чтобы функция $\psi(x)$ на бесконечности убывала (возмущение только в окрестности максимума плотности энергии солитона). Подобная задача с *граничными условиями* $\psi(\pm\infty) = 0$ называется *задачей Штурма – Ливилля*. В квантовой механике ей соответствует стационарное уравнение Шредингера с потенциалом $U(x)$ и энергией $E = \omega^2$. Граничные условия приводят к тому, что значения частот ω ограничены снизу и могут принимать дискретные значения. Если $\omega^2 \geq 0$ (ω – действительно), то возмущения не растут со временем. Если же существует хотя бы одно отрицательное $\omega^2 = -E < 0$, то $\psi(t, x) = e^{\pm Et}\psi(x)$ и с течением времени солитонное решение ϕ_0 будет разрушаться экспоненциально растущим во времени возмущением.

Для модели Хиггса (H) и синус-Гордона (SG), получаются следующие “потенциалы”:

$$U_H(x) = 3 \operatorname{th}^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - 1, \quad U_{SG}(x) = 1 - 2 \operatorname{ch}^{-2}(x).$$

Их собственные значения неотрицательны, поэтому соответствующие солитоны устойчивы. Заметим, что минимальная частота в обоих случаях равна нулю. Действительно, в системе покоя ϕ_0 удовлетворяет уравнению $\phi_0'' = V'(\phi_0)$. Дифференцируя его по x , получаем (7.150) с $\omega = 0$ и $\psi = \phi_0'$.

Аналогичным образом анализируется устойчивость в более сложных моделях. Подобная устойчивость решения в математике называется *устойчивостью по Ляпунову*.

• Полученный критерий устойчивости ($\omega^2 \geq 0$) работает только при малых возмущениях. Однако оказывается, что в ряде случаев солитоны сохраняют свою форму и после достаточно сильных потрясений. Эволюцию произвольного решения нелинейного уравнения удобно анализировать численно при помощи компьютера. Для этого необходимо задать начальные условия $\phi(0, x)$ и $\partial\phi(0, x)/\partial t$ и затем, аппроксимируя производные при помощи конечных разностей, находить решение в произвольный момент времени. Для этого непрерывное 2-мерное пространство (t, x) заменяют дискретной сеткой с малым шагом Δt по оси времени и Δx – по оси координат. Соответственно поле ϕ является массивом $\phi_{i,j} = \phi(t_i, x_j)$. Частные производные заменяются разностями:

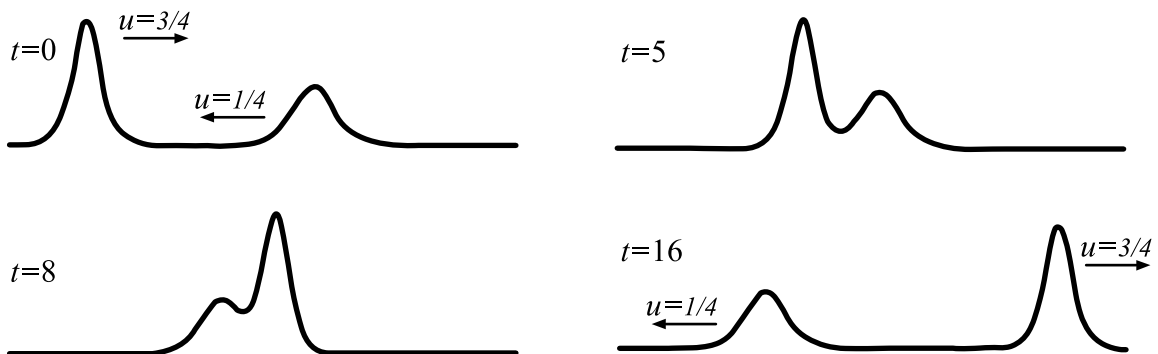
$$\frac{\partial^2 \phi_{0,0}}{\partial t^2} = \frac{\phi_{1,0} - 2\phi_{0,0} + \phi_{-1,0}}{\Delta t^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi_{0,0}}{\partial x^2} = \frac{\phi_{0,1} - 2\phi_{0,0} + \phi_{0,-1}}{\Delta x^2}.$$

Подставляя их в уравнение движения (7.143), получаем:

$$\phi_{1,0} = 2\phi_{0,0} - \phi_{-1,0} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}(\phi_{0,1} - 2\phi_{0,0} + \phi_{0,-1}) - V'(\phi_{0,0}) \Delta t^2.$$

Задав начальные условия $\phi_{-1,j} = \phi(0, x_j)$ и $\phi_{0,j} = \phi_{-1,j} + \Delta t \partial\phi(0, x_j)/\partial t$ при помощи этого соотношения для каждой координаты x_j получаются $\phi_{1,j}$. Аналогично, двигаясь по оси t находим поле в произвольный момент времени. Естественно, это простейший метод и он может быть улучшен при помощи самых различных приемов [22].

Рассмотрим в качестве примера столкновение кинка и антикинка в модели синус-Гордона. *Кинк* соответствует знаку плюс в решении (7.149), а *антикинк* – минусу. Несмотря на нелинейность уравнения сложим эти два решения и воспользуемся полученной функцией в качестве начальных условий $\phi(0, x)$ и $\partial\phi(0, x)/\partial t$. Численное моделирование приводит к следующим четырем кадрам столкновения двух солитонов, движущихся навстречу со скоростями $3/4$ и $1/4$ (изображена плотность энергии системы W):



Видно, что после столкновения солитоны восстанавливают свою форму и продолжают двигаться с теми же скоростями, что и до столкновения.

• Выше мы искали решения нелинейных полевых уравнений в виде $\phi = f(x - ut)$. В системе покоя ($u = 0$) это решение является статическим (не зависит от t). Оказывается, что существуют динамические солитонные решения, которые в системе покоя испытывают периодические колебания. Такие решения называют *бризерами* (от английского breathe - дышать). Будем искать решение уравнения синус-Гордона (7.148) в виде

$$\phi(t, x) = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{f(t)}{g(x)} \right\}.$$

Подставляя в $\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin(\phi) = 0$, где индексы – соответствующие производные по t и x , получаем:

$$\frac{g^2 f_{tt}}{f} + \frac{f^2 g_{xx}}{g} = (2f_t^2 - f f_{tt} + f^2) + (2g_x^2 - g g_{xx} - g^2). \quad (7.151)$$

В правой части первый член в круглых скобках зависит только от t , а второй – только от x . Поэтому беря производную по t , а затем по x мы от них избавляемся. В результате получается уравнение:

$$\frac{f_{ttt}}{f^2 f_t} - \frac{f_{tt}}{f^3} = - \left(\frac{g_{xxx}}{g^2 g_x} - \frac{g_{xx}}{g^3} \right).$$

Левая часть уравнения зависит только от времени, а правая только от координаты. Это возможно, если обе части уравнения равны некоторой константе. Обозначим её через 4λ . В результате получаем два обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, для $f = f(t)$:

$$\frac{f_{ttt}}{f^2 f_t} - \frac{f_{tt}}{f^3} = \frac{(f_{tt}/f)_t}{f f_t} = 4\lambda.$$

Умножая обе части на $f f_t$ и интегрируя, имеем:

$$f_{tt} = 2\lambda f^3 + \tau_1 f,$$

где τ_1 – константа интегрирования. Умножая обе части на f_t и интегрируя еще раз, имеем (уравнение для g выглядит также, но с заменой знака у λ и другими константами интегрирования σ_1 и σ_2):

$$f_t^2 = \lambda f^4 + \tau_1 f^2 + \tau_2, \quad g_x^2 = -\lambda g^4 + \sigma_1 g^2 + \sigma_2.$$

Разделение переменных (константа λ) мы провели для уравнения третьего порядка, тогда как исходное уравнение имеет второй порядок. Поэтому константы интегрирования не являются независимыми. Подставим найденные производные f_{tt} , g_{xx} , f_t , g_t в исходное уравнение (7.151). Оно будет выполняться, если $\sigma_1 = 1 + \tau_1$ и $\sigma_2 = -\tau_2$. Поэтому:

$$f_t^2 = \lambda f^4 + \tau_1 f^2 + \tau_2, \quad g_x^2 = -\lambda g^4 + (1 + \tau_1) g^2 - \tau_2. \quad (7.152)$$

Дальнейшее интегрирование приводит к эллиптическим интегралам.

Рассмотрим частные случаи. Если $\lambda = 0, \tau_2 = 0, \tau_1 = u^2/(1-u^2)$ имеем $f = e^{\pm\gamma ut}$ и $g = e^{\pm\gamma x}$, что приводит к решению в виде движущегося со скоростью u кинка или антикинка (7.149).

Если $\lambda = 0, \tau_2 = 1, \tau_1 = -\omega^2$, после интегрирования, получаем [23]:

$$\phi(t, x) = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega} \frac{\sin(\omega t)}{\operatorname{ch}(\sqrt{1-\omega^2} x)} \right\}. \quad (7.153)$$

Это типичный бризер. Его амплитуда периодически изменяется со временем с частотой $\omega < 1$. В отличие от кинка, поле бризера убывает на бесконечности в обе стороны от максимума. При этом максимум неподвижен, т.е. мы получили решение в системе покоя бризера. Так как уравнения ковариантны, всегда можно заставить бризер двигаться, подставив в решение преобразования Лоренца $t \mapsto t_0 + \gamma(t - ux)$ и $x \mapsto x_0 + \gamma(x - ut)$.

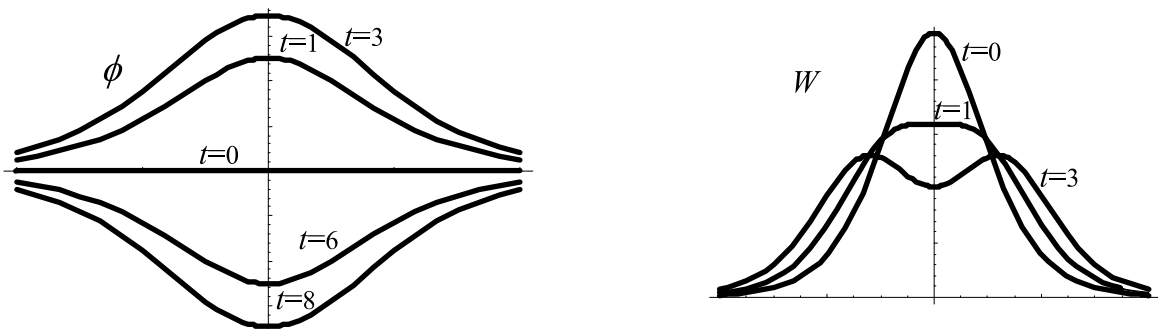
Плотность энергии бризера равна:

$$W = \frac{8f^2g^2}{(f^2 + g^2)^2} \left[\frac{f_t^2}{f^2} + \frac{g_x^2}{g^2} + 1 \right]$$

и в случае решения (7.153) принимает вид:

$$W = \frac{8\omega^2(1-\omega^2)}{(\omega^2c^2 + (1-\omega^2)s^2)^2} (\omega^2c^2 - (1-\omega^2)s^2 + 2(1-\omega^2)c^2s^2),$$

где $c = \operatorname{ch}(\sqrt{1-\omega^2}x)$ и $s = \sin(\omega t)$. Ниже на рисунке приведены графики поля (слева) и плотности энергии (справа) бризера в различные моменты времени при $\omega = 0.628$:



Плотность энергии меняется со временем, однако полная энергия сохраняется, и масса бризера равна:

$$m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} W(t, x) dx = 16\sqrt{1-\omega^2}.$$

Таким образом, чем меньше частота колебаний бризера, тем больше будет его масса и тем уже и выше он будет.

VII Теория поля

- **H₇₉** Тензор $*F^{\alpha\beta}$ (стр. 423)

Например, расписывая сумму и опуская одинаковые индексы для которых символ Леви-Чевиты равен нулю, имеем:

$$*F_{01} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{0123} F^{23} + \varepsilon_{0132} F^{32}) = \varepsilon_{0123} F^{23} = -B_x,$$

$$*F_{12} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{1203} F^{03} + \varepsilon_{1230} F^{30}) = \varepsilon_{1203} F^{03} = -E_z,$$

где $\varepsilon_{0132} F^{32} = \varepsilon_{0123} F^{23}$, и т.д., так как ε_{0132} и F^{32} одновременно антисимметричны по индексам 3, 2. Для вычисления ε_{1203} индекс 0 в символе Леви-Чевиты необходимо перенести в начало: $\varepsilon_{1203} = -\varepsilon_{1023} = \varepsilon_{0123} = 1$.

- **H₈₀** Уравнение $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 4\pi j^\beta$ для $\beta = 1$ (стр. 424)

Опуская сразу $F^{11} = 0$, имеем:

$$\partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = -\partial_t E_x + \partial_y B_z - \partial_z B_y = 4\pi j^1 = 4\pi j_x,$$

или

$$[\nabla \times \mathbf{B}]_x = 4\pi j_x + \frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

Остальные уравнения получаются при $\beta = 2, 3$.

- **H₈₁** $\partial_\alpha *F^{\alpha\beta} = 0$ в компонентах (стр. 424)

Для $\beta = 0$ имеем закон Гаусса для магнитного поля:

$$\partial_\alpha *F^{\alpha 0} = \partial_1 *F^{10} + \partial_2 *F^{20} + \partial_3 *F^{30} = -\nabla \mathbf{B} = 0.$$

Аналогично при $\beta = 1$ получаем проекцию на ось x закона Фарадея:

$$\partial_\alpha *F^{\alpha 1} = \partial_0 *F^{01} + \partial_2 *F^{21} + \partial_3 *F^{31} = \partial_t B_x + \partial_y E_z - \partial_z E_y = 0.$$

- **H₈₂** Уравнения Максвелла без источников из $F_{\mu\nu}$ (стр. 425)

Подставляя определение $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ в уравнение

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0,$$

имеем

$$\partial_\alpha (\partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma A_\beta) + \partial_\beta (\partial_\gamma A_\alpha - \partial_\alpha A_\gamma) + \partial_\gamma (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = 0.$$

Учитывая перестановочность частных производных ($\partial_\alpha \partial_\beta = \partial_\beta \partial_\alpha$), приводя подобные, получаем тождественно ноль при любой функции A_ν .

- **Н₈₃** $\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$ (стр. 425)

Свернём уравнение $\partial_\mu^* F^{\mu\lambda}$ с символом Леви-Чевиты по λ :

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda} \partial_\mu^* F^{\mu\lambda} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda} \varepsilon^{\mu\lambda\nu\sigma} \partial_\mu F_{\nu\sigma} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} \partial_\mu F_{\nu\sigma} = 0$$

При использовании тождества (7.5), стр. 7.5, учитываем, что в силу антисимметрии $\varepsilon_{\alpha\beta}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2F_{\alpha\beta}$.

- **Н₈₄** *Ток точечного заряда в ковариантных обозначениях* (стр. 427)

Учитывая, что $\partial_\alpha \eta^\beta = \delta_\alpha^\beta - v_\alpha v^\beta$, имеем:

$$j^\beta = \frac{1}{4\pi} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{Q}{4\pi} \partial_\alpha \frac{\eta_\alpha v_\beta - \eta_\beta v_\alpha}{(a^2 - \eta^2)^{3/2}}.$$

Возьмём производную по ∂_α :

$$j^\beta = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{3v_\beta - v_\beta + v_\beta v^\alpha v_\alpha}{(a^2 - \eta^2)^{3/2}} + \frac{3}{2} \frac{(\eta_\alpha v_\beta - \eta_\beta v_\alpha) 2\eta_\alpha}{(a^2 - \eta^2)^{5/2}} \right].$$

Для 4-скорости $v^\alpha v_\alpha = 1$. Приводя к общему знаменателю, получаем выражение для тока:

- **Н₈₅** *Нулевой интеграл в выводе уравнений Лагранжа* (стр. 430)

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \varphi^k \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} d \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \varphi^k \right) = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \varphi^k \right) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0,$$

где учтено, что $\varphi^k(t_1) = 0$, $\varphi^k(t_2) = 0$.

- **Н₈₆** *Лагранжиан в 3-мерных обозначениях* (стр. 432)

Обозначая скорость как $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$, распишем дифференциал интервала: $ds = \sqrt{dt^2 - d\mathbf{r}^2} = \sqrt{1 - \mathbf{u}^2} dt$. Аналогично расписывается свёртка 4-потенциала и dx^α : $A_\alpha dx^\alpha = \varphi dt - \mathbf{A} d\mathbf{r} = (\varphi - \mathbf{A} \mathbf{u}) dt$.

- **Н₈₇** *Полный дифференциал векторного потенциала* (стр. 432)

Каждая компонента векторного потенциала является некоторой функцией координат и времени. Обозначим эту функцию как F . Её дифференциал, по определению равен:

$$dF(t, \mathbf{r}) = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial F}{\partial t} dt + (d\mathbf{r} \nabla) F.$$

Так как нас интересуют координаты вдоль траектории частицы, движущейся со скоростью $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$, подставляем $d\mathbf{r} = \mathbf{u}(t) dt$.

• **Н₈₈** *Движение в постоянном электрическом поле* (стр. 425)

Найдем зависимость 4-вектора скорости $u^\mu = \{u^0, \mathbf{u}\} = \{\gamma, \gamma \mathbf{v}\}$ от собственного времени частицы s . Обратим внимание, что \mathbf{u} – это пространственные компоненты 4-вектора скорости. Обычной же 3-скоростью является $\mathbf{v} = \mathbf{u}/\sqrt{1 + \mathbf{u}^2}$. Уравнения движения имеют вид:

$$m \frac{du_0}{ds} = q\mathbf{E}\mathbf{u}, \quad m \frac{d\mathbf{u}}{ds} = qu_0\mathbf{E}.$$

Продифференцируем обе части первого уравнения и подставим в результат второе уравнение:

$$u_0'' = \frac{q}{m} \mathbf{E}\mathbf{u}' = \frac{q^2}{m^2} \mathbf{E}^2 u_0,$$

где штрих – производная по s . Частные решения уравнения $u_0'' - \omega^2 u_0 = 0$ с параметром $\omega = q|\mathbf{E}|/m$ ищутся, как обычно, в виде $u_0(s) = e^{\lambda s}$. В результате, общее решение можно записать при помощи гиперболических косинуса и синуса:

$$u_0(s) = A \operatorname{ch}(\omega s) + B \operatorname{sh}(\omega s),$$

где A и B – константы интегрирования. Подставляя $u_0(s)$ во второе уравнение движения и интегрируя, находим пространственные компоненты 4-скорости:

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{e} [A \operatorname{sh}(\omega s) + B \operatorname{ch}(\omega s)] + \mathbf{C},$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{E}/|\mathbf{E}|$ – единичный вектор в направлении электрического поля и \mathbf{C} – векторная константа интегрирования. Константы находятся из начальных условий и уравнения движения для u_0 при $s = 0$:

$$A = u_0(0) = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2(0)}}, \quad B = \mathbf{e}\mathbf{u}(0), \quad \mathbf{C} = \mathbf{u}(0) - \mathbf{e}B.$$

Обратим внимание, что $\mathbf{e}\mathbf{C} = 0$, константа A равна начальной энергии заряда, деленной на его массу, а B – проекция начального импульса (также деленного на массу) в направлении электрического поля.

Пусть при $s = t = 0$ частица покоилась: $u_0(0) = 1$, $\mathbf{u}(0) = 0$. Тогда:

$$u^\mu(s) = \{\operatorname{ch}(\omega s), \mathbf{e} \operatorname{sh}(\omega s)\}.$$

Интегрируя $dx^\mu/ds = u^\mu$, находим связь лабораторного времени t с собственным временем s и координатами заряда:

$$t = \frac{\operatorname{sh}(\omega s)}{\omega}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{e}}{\omega} (\operatorname{ch}(\omega s) - 1).$$

3-скорость зависит от собственного времени как функция гиперболического тангенса: $\mathbf{v} = \mathbf{e} \operatorname{th}(\omega s)$. Получившиеся решения совпадают с 3-скоростью и координатами как функциями от времени t , см. стр. 164.

• **Н₈₉** Производные от лагранжиана (стр. 434)

Аккуратное вычисление частных производных можно проводить при помощи символа Кронекера. Например, найдём производную по $\partial_\lambda A_\sigma$ от

$$\mathcal{L} = (\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\alpha A^\beta) = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} (\partial_\alpha A_\beta)(\partial_\mu A_\nu).$$

Заметим, что в выражении \mathcal{L} , при помощи метрического тензора, опущены все индексы вниз, а производная берётся по тензору с индексами, отличающимися от суммационных индексов в \mathcal{L} . Воспользуемся следующим соотношением:

$$\frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}{\partial(\partial_\lambda A_\sigma)} = \delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\sigma.$$

Действительно, если все индексы совпадают то производная равна единице (аналогично $\partial x/\partial x = 1$). Если хотя бы одна пара индексов различна, то мы имеем производную типа $\partial x/\partial y$, которая равна нулю.

Обратим внимание, что в левой части индексы λ и σ находятся внизу, но под дробью. В результате взятия производной, они как бы перепрыгивают вверх над дробью и получается тензор с верхними индексами. Однако это замечание является лишь мнемоническим правилом.

Теперь можно взять производную \mathcal{L} , как производную произведения:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda A_\sigma)} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\sigma (\partial_\mu A_\nu) + g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} (\partial_\alpha A_\beta) \delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\sigma.$$

Проводя суммирование с символами Кронекера, получаем:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda A_\sigma)} = g^{\lambda\mu} g^{\sigma\nu} (\partial_\mu A_\nu) + g^{\alpha\lambda} g^{\beta\sigma} (\partial_\alpha A_\beta) = \partial^\lambda A^\sigma + \partial^\lambda A^\sigma = 2\partial^\lambda A^\sigma.$$

Обычно такие педантичные выкладки не делают. В частности, можно не опускать при помощи $g^{\alpha\beta}$ индексы вниз, временно игнорируя ковариантный порядок суммирования (один индекс внизу, а другой сверху). В финальном выражении, индексы можно расставить по своим местам. Поэтому, например, для производной от $\mathcal{L} = (\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\alpha A^\beta)$ можно написать так:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda A_\sigma)} = \delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\sigma (\partial^\alpha A^\beta) + (\partial_\alpha A_\beta) \delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\sigma = 2\partial^\lambda A^\sigma.$$

После некоторого навыка, можно даже не использовать символы Кронекера, проводя “в уме” при дифференцировании сразу подстановку правильных индексов.

- **H₉₀** *Запись лагранжиана через тензор $F^{\alpha\beta}$* (стр. 435)

”Возведение в квадрат” тензора $F^{\alpha\beta}$ проводится обычным алгебраическим образом:

$$F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha).$$

Перемножая скобки, получаем:

$$F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta \partial_\alpha A_\beta - \partial^\alpha A^\beta \partial_\beta A_\alpha - \partial^\beta A^\alpha \partial_\alpha A_\beta + \partial^\beta A^\alpha \partial_\beta A_\alpha.$$

Все индексы в этом выражении являются суммационными, поэтому могут быть обозначены любой буквой. Переобозначим их в последнем и предпоследнем слагаемых (меняя местами α и β):

$$\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = (\partial^\alpha A^\beta)(\partial_\alpha A_\beta) - (\partial^\alpha A^\beta)(\partial_\beta A_\alpha).$$

- **H₉₁** *Массивное векторное поле* (стр. 435)

Рассмотрим массивное векторное поле, наложив на него сразу лоренцевскую калибровку $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ (положив в лагранжиане константу $b = 0$) и введём массовый член с константой μ :

$$\mathcal{L} = -A_\alpha j^\alpha - \frac{1}{8\pi}(\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\alpha A^\beta) + \frac{\mu^2}{8\pi}A^\alpha A_\alpha.$$

Запишем производные для уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} = -j^\beta + \frac{\mu^2}{4\pi}A^\beta, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = -\frac{1}{4\pi}\partial^\alpha A^\beta.$$

Подставляя их в уравнения Лагранжа, получаем уравнение для поля:

$$\partial^2 A^\alpha + \mu^2 A^\alpha = 4\pi j^\alpha.$$

Если лагранжиан пробной частицы остаётся неизменным, то не изменится и сила Лоренца со стандартной связью напряжённостей полей и потенциалов. Однако уравнения Максвелла для напряжённостей начинают зависеть также от потенциалов (помним о калибровочном условии $\partial A = \partial_0 \varphi + \nabla \mathbf{A} = 0$):

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho - \mu^2 \varphi, \quad \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu^2 \mathbf{A}.$$

Например $\nabla \mathbf{E} = \nabla(-\nabla \varphi - \partial_0 \mathbf{A}) = -\Delta \varphi + \partial_0^2 \varphi = \partial^2 \varphi$. Пара уравнений без источников остаётся без изменений. Не меняется и уравнение непрерывности.

• **Н₉₂** *Электростатика массивного векторного поля* (стр. 435)

Пусть все поля не зависят от времени и векторный потенциал равен нулю. В этом случае для скалярного потенциала имеем уравнение:

$$\Delta\varphi - \mu^2\varphi = -4\pi\rho.$$

Решим его для пустого пространства $\rho = 0$, предполагая сферическую симметрию $\varphi = \varphi(r)$. Так как $r = \sqrt{\mathbf{r}^2}$, имеем:

$$\nabla\varphi = \varphi' \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \Delta\varphi = \nabla(\nabla\varphi) = \varphi'' + \varphi' \frac{2}{r} = \frac{1}{r^2} (r^2 \varphi')',$$

где штрих – производная по аргументу функции $\varphi(r)$. Таким образом:

$$\frac{1}{r^2} (r^2 \varphi')' = \mu^2\varphi.$$

Делая замену $\varphi = u(r)/r$, это уравнение несложно решить, получив *потенциал Юкавы*:

$$\varphi = Q \frac{e^{-\mu r}}{r}.$$

Константа Q соответствует точечному заряду, если $\rho = Q\delta(\mathbf{r})$ (сингулярность $1/r$, которая остаётся, приводит к дельта-функции). Имеет смысл строго доказать правильность выбора константы, проинтегрировав уравнение по сфере радиуса r и воспользовавшись для $\Delta\varphi = \nabla(\nabla\varphi)$ интегральной теоремой Гаусса.

• **Н₉₃** *Массивная электромагнитная волна* (стр. 435)

Одним из частных решений волнового уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi + \mu^2\varphi = 0$$

является следующая разновидность плоской волны

$$\varphi = \phi_0 e^{-\mu(\mathbf{n}\mathbf{r} - ut)/\sqrt{1-u^2}},$$

где \mathbf{n} – единичный постоянный вектор в направлении распространения волны, а $u < 1$ – константа имеющая смысл скорости распространения. В отличие от обычной электродинамики плоская волна вида $\varphi(\mathbf{n}\mathbf{r} - ut)$ при $\mu \neq 0$ не может быть произвольной формы, а только такая, как приведено выше. Естественно волновое уравнение допускает и другие, более физические решения. При фурье-разложении потенциала получается следующий закон дисперсии $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}$. Это соотношение, эквивалентное формуле связи энергии импульса и массы, собственно и дало название “массы поля” для константы μ .

• **Н₉₄** *Производная лагранжиана электромагнитного поля* (стр. 439)
 Распишем взятие производной подробно (\llcorner Н₈₉). При помощи двух метрических тензоров опускаем все индексы вниз и берём производную

$$-\frac{g^{\mu\lambda}g^{\nu\tau}}{8\pi} \frac{\partial\{(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\lambda A_\tau) - (\partial_\mu A_\nu)(\partial_\tau A_\lambda)\}}{\partial(\partial_\alpha A_\gamma)}$$

как производную произведения:

$$-\frac{g^{\mu\lambda}g^{\nu\tau}}{8\pi} (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\gamma \partial_\lambda A_\tau + \partial_\mu A_\nu \delta_\lambda^\alpha \delta_\tau^\gamma - \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\gamma \partial^\tau A^\lambda - \partial_\mu A_\nu \delta_\tau^\alpha \delta_\lambda^\gamma).$$

Сворачивая с символами Кронекера:

$$-\frac{1}{8\pi} (g^{\alpha\lambda}g^{\gamma\tau} \partial_\lambda A_\tau + g^{\mu\alpha}g^{\nu\gamma} \partial_\mu A_\nu - g^{\alpha\lambda}g^{\gamma\tau} \partial^\tau A^\lambda - g^{\mu\gamma}g^{\nu\alpha} \partial_\mu A_\nu),$$

а затем с метрическими тензорами, окончательно имеем:

$$-\frac{1}{8\pi} (\partial^\alpha A^\gamma + \partial^\alpha A^\gamma - \partial^\gamma A^\alpha - \partial^\gamma A^\alpha) = -\frac{1}{4\pi} (\partial^\alpha A^\gamma - \partial^\gamma A^\alpha) = -\frac{1}{4\pi} F^{\alpha\gamma}.$$

• **Н₉₅** *Равенство нулю следа тензора энергии-импульса* (стр. 439)

$$T^\alpha_\alpha = \frac{1}{4\pi} \left[F^{\alpha\gamma} F_{\gamma\alpha} + \frac{1}{4} \delta_\alpha^\alpha F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] = \frac{1}{4\pi} [-F^{\alpha\gamma} F_{\alpha\gamma} + F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] = 0.$$

• **Н₉₆** *Функциональное и полное изменения потенциала* (стр. 444)

Зависимость 4-потенциала от координат входит в виде инварианта $a^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})^2 - \mathbf{x}^2$, поэтому $\bar{\delta}A^\alpha = 0$. Полное изменение δA^α соответствует преобразованиям Лоренца, которые “обеспечивает” 4-вектор u^α :

$$A'^\alpha(\mathbf{x}') = \Lambda^\alpha_\beta A^\beta(\mathbf{x}), \quad u'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta u^\beta.$$

• **Н₉₇** *Уравнения движения для скалярного поля* (стр. 452)

Берём производные лагранжиана по первому полю:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_1)} = \partial^\mu \Phi_1, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_1} = m^2 \Phi_1.$$

Учитывая уравнения Лагранжа (7.18), стр.7.18, получаем:

$$(\partial^2 + m^2) \Phi_1 = 0.$$

Абсолютно аналогично для поля Φ_2 .

- **H₉₈** Тензор энергии-импульса и спина (стр. 454)

Производная от лагранжиана равна:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi} (\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\alpha A^\beta) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4\pi} \partial^\mu A^\nu.$$

Поэтому канонический тензор энергии-импульса имеет вид:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\gamma)} \partial^\beta A_\gamma - g^{\alpha\beta} \mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi} \partial^\alpha A^\gamma \partial^\beta A_\gamma + \frac{g^{\alpha\beta}}{8\pi} (\partial_\mu A_\nu)^2.$$

Тензор спина:

$$S_{\mu,\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\alpha)} A_\beta - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\beta)} A_\alpha = \frac{1}{4\pi} (A_\alpha \partial_\mu A_\beta - A_\beta \partial_\mu A_\alpha).$$

Убедимся, что тензор спина удовлетворяет уравнению непрерывности сам по себе:

$$\partial^\mu S_{\mu,\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} (\partial^\mu A_\alpha \partial_\mu A_\beta + A_\alpha \partial^2 A_\beta - \partial^\mu A_\beta \partial_\mu A_\alpha - A_\beta \partial^2 A_\alpha).$$

Свободное электромагнитное поле соответствующее лагранжиану \mathcal{L} удовлетворяет уравнениям движения $\partial^2 A_\alpha = 0$. Поэтому $\partial^\mu S_{\mu,\alpha\beta} = 0$.

- **H₉₉** $\mathbf{R} = \{t, \mathbf{R}\}$ – это 4-вектор (стр. 465)

Если полный момент импульса сохраняется, то сохраняется

$$\mathbf{G} = P^0 \mathbf{R} - \mathbf{P}t,$$

а, следовательно, центр энергии \mathbf{R} движется равномерно: $\mathbf{R} = \mathbf{u}t$, где $\mathbf{u} = \mathbf{P}/P^0$. Так как $\{P^0, \mathbf{P}\}$ образуют 4-вектор, то \mathbf{u} должна преобразовываться как 3-скорость, что несложно проверить, записав преобразования Лоренца для $\mathbf{R} = \{t, \mathbf{u}t\}$.

- **H₁₀₀** Градиент в калибровочном преобразовании (стр. 477)

Градиент от радиус-вектора берется обычным образом:

$$\nabla R = \nabla \sqrt{\mathbf{R}^2} = \frac{2\mathbf{R}}{2R} = \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

Аналогично при взятии производной по времени:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial \sqrt{\mathbf{R}^2}}{\partial t} = \frac{2\mathbf{R}(\partial \mathbf{R}/\partial t)}{2R} = -\frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{R},$$

так как $\partial \mathbf{R}/\partial t = \partial(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t))/\partial t = -\mathbf{v}$.

- **H₁₀₁** *Приближенное выражение для \mathbf{V}* (стр. 477)

Ротор берется с учетом того, что:

$$\nabla \times \frac{\mathbf{v}}{R} = -\mathbf{v} \times \frac{1}{R} = \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{R}}{R^3}, \quad \nabla \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} = 0.$$

- **H₁₀₂** *Уравнения движения системы зарядов* (стр. 479)

Учитывая значения производных

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b, \quad \frac{dR}{dt} = \mathbf{N}\mathbf{V}, \quad \frac{d\mathbf{N}}{dt} = \frac{\mathbf{N} \times [\mathbf{V} \times \mathbf{N}]}{R},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}_a} = \mathbf{N}, \quad \frac{\partial N^i}{\partial x_a^j} = \frac{\delta^{ij} - N^i N^j}{R},$$

где верхние индексы – компоненты векторов, а нижние – номера частиц, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right) &= \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} + \frac{1}{2} \sum_b^{b \neq a} \frac{Q_a Q_b}{R} \{ \mathbf{a}_b + \mathbf{N} (\mathbf{N} \mathbf{a}_b) \} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_b^{b \neq a} \frac{Q_a Q_b}{R^2} \{ \mathbf{N} \times [\mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_b] + \mathbf{N} (\mathbf{V} \mathbf{v}_b) - 3\mathbf{N} (\mathbf{N} \mathbf{V}) (\mathbf{N} \mathbf{v}_b) \}, \end{aligned}$$

Правая часть уравнений Лагранжа равна:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_a} = \sum_b^{b \neq a} \frac{Q_a Q_b}{R^2} \left[\mathbf{N} + \frac{\mathbf{v}_a (\mathbf{N} \mathbf{v}_b) + (\mathbf{N} \mathbf{v}_a) \mathbf{v}_b - \mathbf{N} (\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b) - 3\mathbf{N} (\mathbf{N} \mathbf{v}_a) (\mathbf{N} \mathbf{v}_b)}{2} \right]$$

Приравнивая эти два выражения, получаем уравнения движения

- **H₁₀₃** *Движение зарядов по окружности* (стр. 479)

Единичный вектор \mathbf{N} ортогонален скоростям $\mathbf{N} \mathbf{v}_a = \mathbf{N} \mathbf{v}_b = 0$ и направлен от заряда b к заряду a . Поэтому в выражение для силы подставляем соотношения:

$$\mathbf{v}_a \times [\mathbf{v}_b \times \mathbf{N}] = \mathbf{v}_b (\mathbf{v}_a \mathbf{N}) - \mathbf{N} (\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b) = \mathbf{N} v^2, \quad \mathbf{a}_b = \mathbf{N} \frac{v^2}{R/2}.$$

- **Н₁₀₄** Производная лагранжиана по вектору \mathbf{c} (стр. 480)

Записывая производную лагранжиана по вектору, мы используем безиндексные обозначения. Стоит их переписать при помощи индексов. Номера проекций векторов будем писать сверху, а номера частиц, по-прежнему снизу:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}_a + \mathbf{c})}{\partial c^k} \Big|_{\mathbf{c}=0} = \sum_a \frac{\partial L(\mathbf{x}_a + \mathbf{c})}{\partial (\mathbf{x}_a + \mathbf{c})^j} \frac{\partial (\mathbf{x}_a + \mathbf{c})^j}{\partial c^k} \Big|_{\mathbf{c}=0} = \sum_a \frac{\partial L(\mathbf{x}_a)}{\partial \mathbf{x}_a^j} \delta^{jk}.$$

Сворачивая с символом Кронекера, получаем $\sum \partial L / \partial \mathbf{x}_a$.

- **Н₁₀₅** Производная лагранжиана по углу ϕ (стр. 481)

Возьмем производную для одной частицы, используя индексы:

$$\frac{L(\mathbf{r} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\phi})}{\partial \phi_i} \Big|_{\boldsymbol{\phi}=0} = \frac{\partial L}{\partial r_j} \frac{\partial (r_j + \varepsilon_{jkl} r_k \phi_l)}{\partial \phi_i} \Big|_{\boldsymbol{\phi}=0} = \frac{\partial L}{\partial r_j} \varepsilon_{jki} r_k = \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{r} \right)_i.$$

- **Н₁₀₆** Фактор $1/3$ при вычислении интеграла (стр. 484)

Сделаем замену $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}$:

$$\int \frac{\rho(r)\rho(r')}{R^3} (\mathbf{nR})^2 d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' = - \int \frac{\rho(r)\rho(|\mathbf{r} - \mathbf{R}|)}{R^3} (\mathbf{nR})^2 d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{R}.$$

Перейдем в сферические координаты $\mathbf{r} = \{r, \alpha, \phi_1\}$ и $\mathbf{R} = \{R, \theta, \phi_2\}$, где α – угол между \mathbf{r} и \mathbf{R} , а θ – угол между \mathbf{R} и \mathbf{n} . Выражение $|\mathbf{r} - \mathbf{R}| = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \alpha}$ не зависит от угла θ . Интеграл по α даст некоторую функцию от r и R . Интегрируя затем по θ , имеем:

$$\int_0^\pi (\mathbf{nR})^2 \sin \theta d\theta = \int_0^\pi R^2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = R^2 \int_{-1}^1 z^2 dz = \frac{2}{3} R^2.$$

С другой стороны, если бы множителя $(\mathbf{nR})^2$ не было, мы бы получили $2R^2$. Поэтому $(\mathbf{nR})^2$ под интегралом можно заменить на $R^2/3$.

- **Н₁₀₇** *Сила трения произвольного равноускоренного движения* (стр. 489)

При движении в постоянном электрическом поле (см. стр. 856) компоненты 4-скорости, как функции собственного времени s , равны:

$$u_0(s) = A \operatorname{ch}(\omega s) + B \operatorname{sh}(\omega s), \quad \mathbf{u}(s) = \mathbf{e} [A \operatorname{sh}(\omega s) + B \operatorname{ch}(\omega s)] + \mathbf{C},$$

где $A = \mathcal{E}_0/m$ и $B = \mathbf{e}\mathbf{p}_0/m$, $m\mathbf{C} = \mathbf{p}_0 - \mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{p}_0)$. Поэтому:

$$\begin{aligned} u_0'' + (u_0')^2 u_0 &= -\omega^2 [A^2 - B^2 - 1] u_0 \\ \mathbf{u}'' + (u_0')^2 \mathbf{u} &= -\omega^2 [A^2 - B^2 - 1] \mathbf{u} - \omega^2 \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Ноль получается, если $\mathbf{C} = 0$ и $A^2 - B^2 = 1$, т.е. только тогда, когда начальный импульс \mathbf{p}_0 параллелен электрическому полю $\mathbf{e} = \mathbf{E}/|\mathbf{E}|$.

- **Н₁₀₈** *Объем тензора $F_{\mu\nu}$* (стр. 491)

Прямым вычислением детерминанта, получаем:

$$\det(g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}) = \det \begin{pmatrix} 1 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & -1 & -E_z & E_y \\ B_y & E_z & -1 & -E_x \\ B_z & -E_y & E_x & -1 \end{pmatrix} = -1 - \mathbf{B}^2 + \mathbf{E}^2 + (\mathbf{E}\mathbf{B})^2.$$

Если компоненты напряженностей умножаются на константу, то она появится в квадрате при $-\mathbf{B}^2 + \mathbf{E}^2$ и в четвертой степени при $(\mathbf{E}\mathbf{B})^2$.

- **Н₁₀₉** *Модель синус-Гордона* (стр. 499)

Подставляя в уравнение поля $\phi(t, x) = f(x - ut)$, получаем:

$$\frac{1}{\gamma^2} f'' = \sin f.$$

Умножая обе части на f' и интегрируя имеем:

$$\frac{f'^2}{2\gamma^2} = 1 - \cos f = 2 \sin^2(f/2),$$

где константа интегрирования в правой части выбрана равной 1. Извлекая корень, проводим еще одно интегрирование, которое приводит к искомому решению. При вычислении плотности энергии, учитываем, что $\sin(\operatorname{arctg} z) = z/\sqrt{1+z^2}$, $\cos(\operatorname{arctg} z) = 1/\sqrt{1+z^2}$ и применяя дважды формулу синуса и косинуса двойного угла имеем:

$$\cos(4 \operatorname{arctg} z) = 1 - \frac{8z^2}{(1+z^2)^2}, \quad \sin(4 \operatorname{arctg} z) = \frac{4z}{(1+z^2)^2}.$$

При взятии производных используем $(\operatorname{arctg} z)' = 1/(1+z^2)$.
