

Глава 4

Неинерциальные системы отсчёта

Эта глава посвящена неинерциальным системам отсчёта. Для их описания нам не потребуется выходить за рамки введенной в первой главе аксиоматики теории относительности.

Сначала мы подробно изучим жёсткую равноускоренную систему отсчёта и покажем, что время в ней течёт различным образом. Затем рассмотрим физику на вращающемся диске и проанализируем различные эффекты, связанные с вращением. Наиболее необычным свойством такой системы является невозможность синхронизации часов вдоль замкнутой кривой, несмотря на одинаковый на ней ход времени. На примере третьей, “нежесткой” системы будет дано общее определение системы отсчёта. Далее мы рассмотрим достаточно широкий класс неинерциальных систем. Чтобы в произвольных координатах делать определённые физические заключения, нам потребуется определить физические время и длину и разобраться как их можно измерить. Затем мы остановимся на понятии жесткости системы отсчёта в теории относительности и вопросах динамики. В заключение будут рассмотрены некоторые “парадоксы”, связанные с неинерциальными системами.

В главе 11 мы вернёмся к теме неинерциальных систем отсчёта с более общих математических позиций.

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ МИР

Сергей С. Степанов

Последняя версия находится на сайте <http://synset.com>. Все обнаруженные ошибки и замечания просьба присылать по почте: phys@synset.com. (с) 2009-2013. Печать: 27 августа 2014 г.

4.1 Равноускоренная система отсчёта

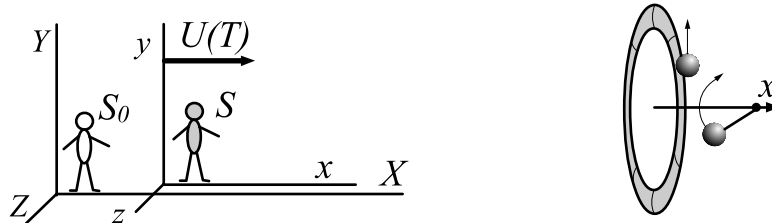
• Рассмотрим систему отсчёта $S : (t, x)$, точка с координатой $x = 0$ которой движется с постоянным *собственным ускорением* $a = \text{const}$ относительно инерциальной (лабораторной) системы $S_0 : (T, X)$. Будем считать, что оси x и X параллельны и направлены в одну сторону. Во второй главе (стр. 114) был найден закон движения релятивистски равноускоренной частицы, координата которой изменяется со временем следующим образом:

$$X(T) = \frac{1}{a} [\sqrt{1 + (aT)^2} - 1], \quad (4.1)$$

где в начальный момент времени $T = 0$ частица покоится, а далее движется с увеличивающейся скоростью и уменьшающимся ускорением:

$$U(T) = \frac{dX}{dT} = \frac{aT}{\sqrt{1 + (aT)^2}}, \quad W(T) = \frac{dU}{dT} = \frac{a}{(1 + (aT)^2)^{3/2}}. \quad (4.2)$$

Будем считать, что начало системы S (и наблюдатель находящийся в этой точке) движется в соответствии с уравнением (4.1) относительно системы S_0 :



Внутри неинерциальной системы S пространство неизотропно. Точнее, оно изотропно в плоскости (y, z) , перпендикулярной к ускорению, но неизотропно вдоль оси x . Подобное нарушение симметрии пространства приводит к тому, что свободные частицы уже не движутся равномерно и прямолинейно.

Пусть собственное ускорение a *невелико*, хотя, возможно, велика скорость U системы S относительно S_0 . Тогда наблюдатель, находящийся в начале системы S , по крайней мере локально, может пренебречь неизотропностью пространства в отношении эталонов длины. Это означает, что игнорируется их деформация или вводятся соответствующие поправки на упругость материала из которого сделаны линейки. В результате, их можно поворачивать, считая что они не изменяются при повороте из изотропной плоскости (y, z) в направлении ускорения. Аналогично мы, находясь на поверхности Земли и испытывая ускорение $g = 9.8 \text{ м/с}^2$, пользуемся “жесткими” линейками в своей непосредственной окрестности.

Кроме линеек наблюдателю необходимы часы. Чтобы не обсуждать влияние сил инерции на механизм часов, будем считать, что для измерения времени служат некоторые процессы, происходящие в изотропной плоскости (y, z) . Например, это может быть шарик, катящийся без трения по круговому желобу, расположенному перпендикулярно движению $\ll C_{10}$. Будем считать, что темп хода подобных часов совпадает с темпом хода часов в *сопутствующей* к наблюдателю инерциальной системе отсчета S'_0 , движущейся в данный момент времени относительно S_0 с той же скоростью, что и S . Говоря о системах S и S'_0 мы пока представляем только двух наблюдателей (неинерциального и инерциального), относительно неподвижных и совпадающих в пространстве в точке $x = 0$. Они имеют одинаковые часы и линейки. Таким образом, предполагаем, что:

темп времени движущихся часов относительно неподвижных часов зависит только от их скорости и *не зависит от ускорения*.

Поэтому для расчёта показаний часов t , движущихся в лабораторной системе со скоростью $U(T)$ можно использовать стандартную формулу замедления времени $dt = dT \sqrt{1 - U^2}$, стр. 81, в которой для переменной скорости $U = U(T)$ необходимо провести интегрирование:

$$t = \int_0^T \sqrt{1 - U^2(T)} dT. \quad (4.3)$$

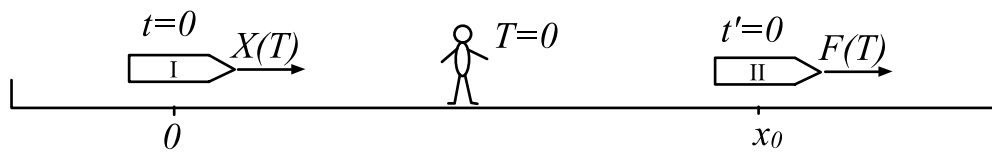
Это соотношение имеет надежное экспериментальное подтверждение. Например, время жизни мюонов в кольцевом ускорителе [57] в пределах относительной ошибки $2 \cdot 10^{-3}$ увеличивается в соответствии с (4.3). При этом скорость мюонов составляет $U = 0.9994$ и время замедляется в $1/\sqrt{1 - U^2} \approx 29$ раз. При радиусе кольца $R = 7$ метров, ускорение очень велико ($W = U^2/R \sim 10^{15} \cdot g$, где $g = 9.8 \text{ м/с}^2$), но время жизни мюонов зависит только от скорости, но не зависит от их ускорения.

Пусть в момент времени $T = t = 0$ начала систем S_0 и S совпадали и скорость S относительно S_0 была нулевой, а затем менялась в соответствии с (4.2). Тогда, вычисляя интеграл (4.3), получаем:

$$t = \frac{1}{a} \operatorname{ash}(aT) \quad \text{или} \quad aT = \operatorname{sh}(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}. \quad (4.4)$$

Обратим внимание, что t – это показания одних движущихся часов (находящихся в начале координат S), а T – время на множестве неподвижных, синхронизированных между собой часов, расставленных *вдоль траектории* движения в лабораторной системе S_0 (см. также стр. 116).

• Рассмотрим теперь в системе S двух наблюдателей, которых для наглядности будем представлять в виде космических кораблей. Пусть расстояние между кораблями до начала ускорения равнялось x_0 . Пока корабли стояли в космопортах, их экипажи синхронизовали свои часы друг с другом и остальными наблюдателями в системе S_0 . Время на часах первого корабля, стартовавшего из $X = 0$, обозначим через t , а второго, стартовавшего из $X = x_0$, через t' . В инерциальной системе отсчёта для всех наблюдателей существует единое время, равное T . При $T = t = t' = 0$ корабли начинают равноускоренное движение, постоянно увеличивая свою скорость:



Координата первого (левого) корабля, находящегося в начале системы S изменяется со временем в соответствии с (4.1):

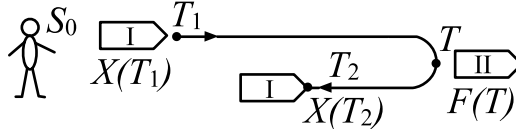
$$X(T) = \frac{1}{a} [\sqrt{1 + (aT)^2} - 1] = \frac{1}{a} [\text{ch}(at) - 1], \quad (4.5)$$

где во втором равенстве подставлено собственное время корабля (4.4).

Жёсткая система отсчёта – это множество неподвижных относительно друг друга наблюдателей. Мы задали траекторию $X(T)$ начала системы отсчёта S . Как должен двигаться второй космический корабль, чтобы расстояние между кораблями эскадры оставалось неизменным с *их точки зрения*? Ответ “так же” не является верным. События, одновременные в одной системе отсчёта, будут неодновременными в другой. Если корабли синхронно ускоряются с точки зрения системы S_0 , то это ускорение не будет синхронным в S , и наоборот. Это приводит к тому, что неизменность расстояния между точками системы отсчёта, вообще говоря, *относительное понятие*. Если наблюдатели в S “выдерживают” свою систему жёсткой, то, как мы увидим, наблюдатели в инерциальной системе S_0 будут регистрировать, её сжатие в направлении движения.

Как эскадра кораблей должна выдерживать неизменным расстояние? Будем считать, что для этого используется *радиолокационный метод*. Один корабль посылает световой сигнал в сторону второго корабля. Этот сигнал отражаясь, возвращается обратно. Время движения туда-обратно по *локальным часам* корабля не должно изменяться. Выясним, по какой траектории $F(T)$ должен двигаться второй корабль *относительно системы* S_0 , чтобы система отсчёта S для её наблюдателей была жесткой. Расчёты проведём в неподвижной системе S_0 .

Пусть первый корабль в момент времени T_1 отправляет вперёд световой сигнал, который в момент времени T отражается от второго корабля и возвращается обратно на первый корабль в момент времени T_2 . Расстояние, проходимое сигналом равно длительности его движения ($c = 1$):



$$\begin{cases} F(T) - X(T_1) = T - T_1, \\ F(T) - X(T_2) = T_2 - T. \end{cases} \quad (4.6)$$

Все времена измеряются по часам инерциальной системы отсчёта S_0 . Координата первого корабля равна $X(T)$, см. (4.5), второго $-F(T)$. Если от времени лабораторной системы $T = \text{sh}(at)/a$ перейти к собственному времени первого корабля t , то из (4.5) несложно получить ($\leq H_{26}$):

$$1 + aX(T) \pm aT = 1 + [\text{ch}(at) - 1] \pm \text{sh}(at) = e^{\pm at}.$$

Поэтому, из системы уравнений (4.6) имеем следующие соотношения:

$$1 + aF(T) - aT = e^{-at_1}, \quad 1 + aF(T) + aT = e^{at_2}, \quad (4.7)$$

где времена ухода t_1 и возвращения t_2 сигнала уже измеряются часами *первого корабля*. Если расстояние между кораблями неизменно, то время движения сигнала “туда и обратно” $\tau_0 = t_2 - t_1$ постоянно и не зависит от момента его получения t_2 . Вычитая уравнения (4.7), находим:

$$2aT = e^{at_2} - e^{-a(t_2 - \tau_0)} \quad \Rightarrow \quad e^{at_2} = aT + \sqrt{e^{a\tau_0} + (aT)^2}.$$

В качестве решения квадратного уравнения относительно e^{at_2} выбран положительный корень, подставляя который во второе уравнение (4.7), получаем искомую траекторию $F(T)$:

$$1 + aF(T) = \sqrt{e^{a\tau_0} + (aT)^2} = \sqrt{(1 + ax_0)^2 + (aT)^2}, \quad (4.8)$$

где в последнем равенстве учтено начальное условие $F(0) = x_0$ или $e^{a\tau_0/2} = 1 + ax_0$. Назовём *радиолокационным расстоянием* l_0 половину времени τ_0 движения сигнала в обе стороны:

$$l_0 = \frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{\tau_0}{2} = \frac{1}{a} \ln(1 + ax_0). \quad (4.9)$$

Скорость второго корабля относительно неподвижной системы отсчёта S_0 равна $U_2(T) = dF(T)/dT$, поэтому:

$$U_2(T) = \frac{a_2 T}{\sqrt{1 + (a_2 T)^2}}, \quad a_2 = \frac{a}{1 + ax_0}. \quad (4.10)$$

Таким образом, второй корабль также движется равноускоренно, но с меньшим собственным ускорением, равным a_2 .

• Скорости обоих кораблей известны, поэтому можно записать показания часов каждого из них в момент времени T системы S_0 :

$$T = \frac{1}{a} \operatorname{sh}(at), \quad T = \frac{1 + ax_0}{a} \operatorname{sh}\left(\frac{at'}{1 + ax_0}\right). \quad (4.11)$$

Запишем координату второго корабля (4.8) в системе S_0 через его собственное время из второго соотношения (4.11):

$$F(T) = \frac{1 + ax_0}{a} \operatorname{ch}\left(\frac{at'}{1 + ax_0}\right) - \frac{1}{a}. \quad (4.12)$$

При помощи (4.11), (4.12) и радиолокационного расстояния l_0 (4.9) можно ($\ll N_{27}$) выразить времена посылки и получения обратно сигнала на первом корабле:

$$t_1 = t' e^{-al_0} - l_0, \quad t_2 = t' e^{-al_0} + l_0, \quad \frac{t_1 + t_2}{2} = t' e^{-al_0}. \quad (4.13)$$

Обратим внимание, что $t' \neq (t_1 + t_2)/2$ и начальная синхронизация часов на кораблях разрушилась. Разберемся, почему это произошло.

Как связаны между собой времена на кораблях? В соотношениях (4.11) время t , прошедшее на первом корабле с момента старта и t' на втором корабле сравниваются с *различными* часами T , синхронизированными в системе S_0 . Чтобы найти связь t и t' нельзя приравнять T в (4.11) т.к. события одновременные в S_0 (одинаковое T) будут неодновременны в S .

Пусть второй корабль посылает “сигнал точного времени” на первый корабль. Он уходит в момент времени t'_1 и приходит к первому кораблю в момент t_2 . Используя второе соотношение (4.13) имеем:

$$\boxed{\text{I}} \xleftarrow{t_2} \xrightarrow{t'_1} \boxed{\text{II}} \quad t_2 = t'_1 e^{-al_0} + l_0. \quad (4.14)$$

Сигналы, отправленные через равные промежутки времени, по часам второго корабля будут также приходить через равные промежутки, однако с другой частотой $\nu = 1/\Delta t$:

$$\Delta t = \Delta t' e^{-al_0}, \quad \text{или} \quad \nu = \nu' e^{al_0} \approx \nu' (1 + al_0),$$

где приближенное равенство записано для $al_0 \ll 1$. Частота принятого сигнала ν от удалённого наблюдателя тем больше, чем дальше по ходу движения находится источник сигнала. Таким образом, если расстояние между наблюдателями в неинерциальной системе отсчета остаётся неизменным, то время у них течёт *различным образом*. Чем дальше по направлению ускорения находятся часы, тем быстрее на них идёт время с точки зрения наблюдателя в $x = 0$. В результате, первоначально синхронизированные часы, со временем рассинхронизируются.

• Наблюдатели в ускоренной системе отсчёта чувствуют себя подобно нам, находящимся на Земле в однородном поле силы тяжести. В частности все объекты, “выпущенные из рук”, *независимо от их массы* приобретают ускорение a .



Если, следуя Эйнштейну, считать, что физика в равноускоренной системе аналогична физике в однородном гравитационном поле, то полученная формула для частот должна выполняться и в земных условиях. В частности, приёмник, расположенный ниже источника эталонного излучения ν' , должен получать сигнал с большей частотой $\nu \approx \nu' (1 + gl_0/c^2)$, где $a = g = 9.8 \text{ м/с}^2$, а l_0 – высота источника над приёмником, и восстановлена ($g \mapsto g/c^2$) константа “ c ”. Это соотношение с хорошей точностью подтвердилось в эксперименте Паунда и Ребки (1960 г.). Их установка имела высоту $l_0 = 22.5 \text{ м}$, что соответствовало относительному изменению частоты $gl_0/c^2 = 2.5 \cdot 10^{-15}$, которое удалось измерить при помощи эффекта Мёссбауэра.

Эталоны длины и времени неинерциального наблюдателя совпадают с аналогичными эталонами в сопутствующей к нему инерциальной системе отсчёта. В частности, скорость света для него изотропна и одинакова при движении вдоль и против оси x . Поэтому половину времени $\tau_0/2$ радиолокационного эксперимента он может считать расстоянием ко второму кораблю $l_0 = \ln(1 + ax_0)/a$. С учётом времени на прохождение этого расстояния в (4.14), наблюдатели могут сравнить показания своих часов:

$$t = t' e^{-al_0}. \quad (4.15)$$

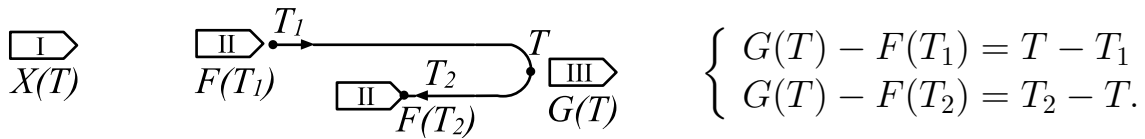
Событие, произошедшее на втором корабле в момент t' , наблюдатель на первом корабле *может считать одновременным* моменту его часов t , так как информация о нём достигнет первого корабля через время, равное расстоянию l_0 .

Напомним, что расстояние между кораблями до старта равнялось x_0 . Как только появилось ускорение, пространство стало неизотропным и расстояние до второго корабля *уменьшилось* ($x_0 \mapsto l_0$), и в дальнейшем уже не менялось. На самом деле, скачок расстояния наблюдатели обнаружат после старта спустя некоторое время, необходимое для проведения его радиолокационного измерения. В момент отключения двигателей неинерциальная система отсчёта превращается в инерциальную, и пространство снова становится изотропным.

• Использовать радиолокационный метод для измерения расстояний может любой наблюдатель в неинерциальной системе. Рассмотрим такой эксперимент, проводимый наблюдателем на втором корабле в направлении третьего, движущегося впереди него. Если в начальный момент времени в системе S_0 координаты этих кораблей были x_0 и x_1 , то в дальнейшем их траектории $F(T)$ и $G(T)$ имеют вид:

$$1+aF(T) = \sqrt{(1+ax_0)^2 + (aT)^2}, \quad 1+aG(T) = \sqrt{(1+ax_1)^2 + (aT)^2}.$$

Сигнал в лабораторной системе S_0 излучается в момент T_1 , отражается от третьего корабля в момент T и возвращается на второй в момент T_2 :



Из этих двух уравнений следует:

$$(1+aF(T_1) - aT_1)(1+aF(T_2) + aT_2) = (1+aG(T) - aT)(1+aG(T) + aT).$$

Подставляя в левой части времена $aT_i = (1+ax_0) \operatorname{sh}(at'_i/(1+ax_0))$:

$$1+aF(T) \pm aT = (1+ax_0) \exp(\pm at'/(1+ax_0)),$$

а в правой $(1+aG)^2 - (aT)^2$ явный вид траектории $G = G(T)$, получаем:

$$l'_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{2} = \frac{1+ax_0}{a} \ln \left(\frac{1+ax_1}{1+ax_0} \right) = e^{al_0} (l_1 - l_0), \quad (4.16)$$

где в последнем равенстве записаны радиолокационные расстояния ко второму l_0 и третьему l_1 кораблям с точки зрения наблюдателя на первом корабле, находящемся в начале неинерциальной системы отсчета.

Если повторить расчёт посылке периодических сигналов (стр. 208), но теперь от третьего корабля ко второму, то получится соотношение:

$$t'_2 = l'_1 + \frac{1+ax_0}{1+ax_1} t''_1 = l'_1 + t''_1 e^{-a(l_1-l_0)} = l'_1 + t''_1 e^{-a_2 l'_1}, \quad (4.17)$$

где l'_1 – расстояние (4.16) между кораблями и $a_2 = a/(1+ax_0)$.

В неинерциальной системе мы не только не можем говорить о едином времени, но и расстояния между точками системы измеряются конкретными наблюдателями. Результаты этих измерений различны, так как в радиолокационном методе используются часы. Если время для различных наблюдателей течёт по-разному, то и результаты радиолокации будут различными. Например, расстояние к первому кораблю, измеренное со второго корабля, равно $l'_0 = l_0 e^{al_0}$, что в e^{al_0} раз больше, чем аналогичное расстояние, измеренное с первого корабля.

• При движении расстояние между кораблями в равноускоренной системе отчёта выдерживается неизменным. Для неподвижных наблюдателей в системе S_0 , расстояние между кораблями уменьшается. С точки зрения стандартного сокращения Лоренца в этом нет ни чего удивительного, так как скорость кораблей всё время растёт. Представим “линейку”, соединяющую первый и второй корабли. Её длина в системе S_0 равна разности координат кораблей:

$$L_0 = F(T) - X(T) = \frac{1}{a} \sqrt{e^{2al_0} + (aT)^2} - \frac{1}{a} \sqrt{(1 + (aT)^2)}.$$

Наблюдатель системы S , находящийся на первом корабле, считает, что длина линейки (расстояние между кораблями) равна $l_0 = \ln(1 + ax_0)/a$. Если ввести скорость первого корабля относительно неподвижной инерциальной системы S_0 и соответствующий этой скорости фактор Лоренца:

$$U(T) = \frac{dX}{dT} = \frac{aT}{\sqrt{1 + (aT)^2}}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - U^2(T)}} = \sqrt{1 + (aT)^2},$$

то выражение для длины можно переписать следующим образом:

$$L_0 = \frac{\sqrt{e^{2al_0} + \gamma^2 - 1} - \gamma}{a} \approx \frac{l_0}{\gamma} \left(1 + (1 + U^2) \frac{al_0}{2} + \dots \right), \quad (4.18)$$

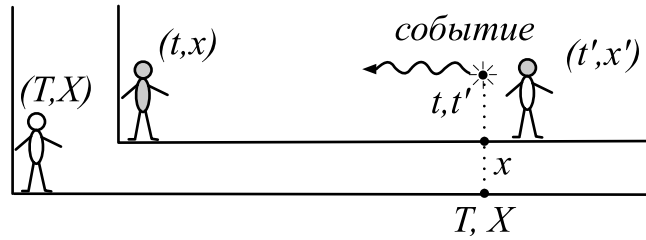
где приближенное равенство записано как ряд по al_0 (что проверяется возведением в квадрат после перенесения γ/a вправо). Это приближение справедливо при $al_0 \ll 1$ или, восстанавливая фундаментальную скорость $a \ll a_0 = c^2/l_0$. Для метрового стержня имеем $a_0 \sim 10^{16} g$, где $g = 9.8 \text{ м/с}^2$, что является очень большим значением. Если же расстояние между кораблями равно одному световому году (стр. 117), то $a_0 \sim g$ и отклонение от лоренцевской формулы $L_0 = l_0/\gamma$ становится заметным.

Таким образом, если произведение собственного ускорения a на длину линейки l_0 мало, то отношение длин линейки, в системах S и S_0 соответствует лоренцевскому сокращению: $L_0 = l_0 \sqrt{1 - U^2}$. В общем же случае, сокращение “линейки” отличается от лоренцевского. Однако, когда корабли перестанут ускоряться, то сокращение окажется в точности равным лоренцевскому (см. “парадокс остановки”, стр. 264).

Подчеркнём, что *большие* значения l_0 неинерциальные наблюдатели получают в результате радиолокационного измерения, а не реальным прикладыванием линейки, при помощи которой они измеряют скорости в своей непосредственной окрестности. В соответствии с (4.9) оно отличается от начального расстояния между кораблями x_0 и различно для наблюдателя на первом и втором кораблях. Выше, в качестве собственной длины линейки, было выбрано радиолокационное расстояние, измеренное наблюдателем на первом корабле.

4.2 Преобразования координат

• Найдём преобразования координат и времени некоторого события, наблюдаемого в инерциальной $S_0 : (T, X)$ и неинерциальной $S : (t, x)$ системах отсчёта. Будем считать, что (t, x) – это результаты измерений наблюдателя, находящегося в точке $x = 0$ системы S (первый корабль). Пусть событие происходит в удалении от него, например, возле второго корабля, расстояние $l_0 = \ln(1 + ax_0)/a$ до которого известно из радиолокационных измерений. Это расстояние может быть принято им за *координату события* $x = l_0$ в S . Предположим, что, как только произошло событие в момент времени t' (по часам второго корабля), на первый корабль посылается световой сигнал:



С учётом корректировки на время распространения сигнала (4.15), время события по часам первого корабля равно $t = t'e^{-ax}$. С другой стороны, время t' второго корабля связано со временем события T в инерциальной системе отсчёта (часы T в окрестности события) следующим образом:

$$T = \frac{1 + ax_0}{a} \operatorname{sh} \left(\frac{at'}{1 + ax_0} \right) = \frac{e^{ax}}{a} \operatorname{sh}(at),$$

где во втором равенстве подставлено $t' = te^{ax}$ и $1 + ax_0 = e^{ax}$. Координата X события в системе S_0 совпадает с координатой второго корабля (4.8):

$$aX = F(T) = (1 + ax_0) \operatorname{ch} \left(\frac{at'}{1 + ax_0} \right) - 1 = \operatorname{ch}(at)e^{ax} - 1.$$

В результате, преобразования между инерциальной и неинерциальной системами отсчёта можно записать в следующем виде:

$$aT = \operatorname{sh}(at) e^{ax}, \quad 1 + aX = \operatorname{ch}(at) e^{ax}. \quad (4.19)$$

Эти преобразования получил Мёллер [13], рассматривая последовательность инерциальных систем сопутствующих неинерциальной. При этом использовалась другая параметризация координаты $e^{ax} = 1 + a\tilde{x}$ или:

$$aT = \operatorname{sh}(at) (1 + a\tilde{x}), \quad 1 + aX = \operatorname{ch}(at) (1 + a\tilde{x}). \quad (4.20)$$

Фактически это лишь иной способ нумерации точек пространства в неинерциальной системе S , при котором координатой второго корабля считается его положение в лабораторной системе отсчёта в момент старта.

• Преобразования (4.19) имеют немного иной смысл по сравнению с преобразованиями между двумя инерциальными системами. У наблюдателей в данной инерциальной системе существует *единое* синхронизированное время и преобразования Лоренца одинаковы для всех таких наблюдателей. В силу этого, обычно, в каждой инерциальной системе отсчёта представляют по одному наблюдателю, которые “размазаны” по всему пространству. В неинерциальной системе каждый наблюдатель обладает своим собственным временем. Об удалённых событиях он может судить только получая некоторую информацию от наблюдателя, который реально регистрирует событие, находясь в точке где оно произошло. Поэтому

преобразования (4.19) относятся к *конкретному* неинерциальному наблюдателю и *произвольному* инерциальному.

Преобразования (4.19) несложно обратить:

$$t = \frac{1}{2a} \ln \left[\frac{1 + aX + aT}{1 + aX - aT} \right], \quad x = \frac{1}{2a} \ln [(1 + aX)^2 - (aT)^2]. \quad (4.21)$$

В качестве упражнения ($\leq N_{28}$) предлагается найти скорость точки $X = 0$ (начало системы S_0) в системе S и убедиться, что она совпадает со скоростью точки $x = 0$ относительно системы S_0 .

Прямые и обратные преобразования имеют различную функциональную форму. Это отражает неравноправность инерциального и неинерциального наблюдателей.

Запишем интервал между событиями в координатах неинерциального наблюдателя. Подставляя (4.19) в $ds^2 = dT^2 - dX^2$, имеем:

$$ds^2 = e^{2ax} (dt^2 - dx^2). \quad (4.22)$$

Распространение света соответствует нулевому интервалу: $ds = 0$ (стр. 38). Если свет движется вдоль оси x , то его траектория в координатах (t, x) является линейной функцией. Именно это и закладывалось в определение радиолокационного расстояния $x = l_0$. Если использовать координату \tilde{x} (4.20) то получится *интервал Мёллера*:

$$ds^2 = (1 + a\tilde{x})^2 dt^2 - d\tilde{x}^2. \quad (4.23)$$

Отличие интервалов (4.22) и (4.23) состоит в различном способе “нумерации” точек неинерциальной системы отсчёта. В обоих случаях время t является собственным временем наблюдателя в начале неинерциальной системы отсчёта. Координата x имеет смысл физического расстояния от начала координат до события, в отличие от координаты \tilde{x} , которая “менее физична”, но также однозначно характеризует событие.

• Преобразования (4.21) между инерциальной и неинерциальной системами отсчёта имеют смысл только при

$$(1 + aX)^2 > (aT)^2. \quad (4.24)$$

Это неравенство не зависит от того, какую параметризацию координаты события x или \tilde{x} использует неинерциальный наблюдатель. Например, для координаты Мёллера \tilde{x} из (4.20) имеем:

$$(1 + a\tilde{x})^2 = (1 + aX)^2 - (aT)^2 > 0.$$

Таким образом, в преобразовании (4.21) могут участвовать не все события, регистрируемые в инерциальной системе, а только часть, координаты и времена которых удовлетворяют неравенству (4.24). Причина подобного ограничения имеет простую физическую природу.

Прежде всего отметим, что из второго соотношения (4.21) следует, что для наблюдателя в $x = 0$ события, расположенные по ходу движения (с координатами $x > 0$), соответствуют в системе S_0 области

$$1 + aX > \sqrt{1 + (aT)^2}$$

и положительные координаты $X > 0$ события могут быть сколь угодно велики. События же в обратном направлении ($x < 0$) видны только, если $X > T - 1/a$. Действительно, событие будет видимым, если вспышка света, произошедшая в точке 4-пространства (T, X) , “догонит” наблюдателя на первом корабле в некоторый конечный момент времени T_1 . Это происходит, когда уравнение:

$$\begin{array}{c} T, X \\ \text{✱} \longrightarrow \boxed{} \end{array} \quad T_1, X(T_1) \quad \frac{1}{a} \left(\sqrt{1 + (aT_1)^2} - 1 \right) - X = T_1 - T$$

имеет решение относительно времени прихода T_1 . Оставляя в левой части квадратный корень и возводя обе части в квадрат, имеем:

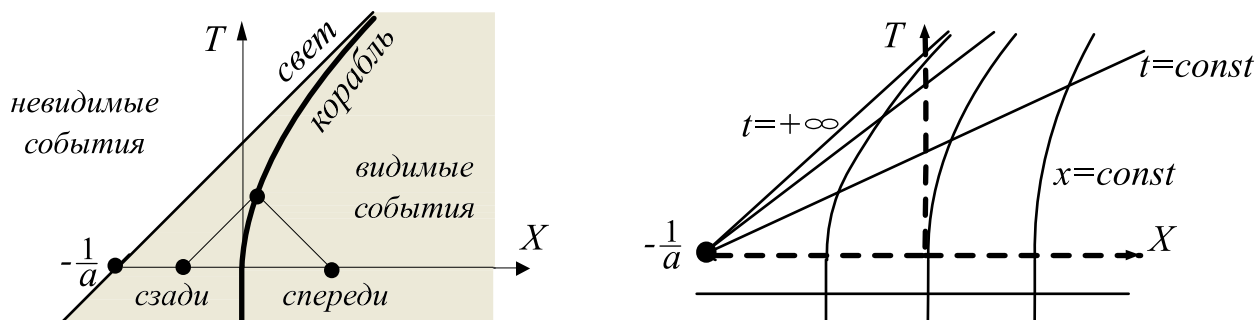
$$a(T_1 - T) = \frac{1 - (1 + aX)^2 + (aT)^2}{2(1 + aX - aT)} = \frac{1 - e^{ax}}{2(1 + aX - aT)},$$

где во втором равенстве подставлено (4.19). Событие происходит сзади корабля, поэтому $x < 0$ и числитель положителен. Время движения сигнала $T_1 - T$ при $X = T - 1/a$ обращается в бесконечность как для наблюдателя в инерциальной, так и в неинерциальной системах отсчёта. Сигналы от всех событий, находящихся левее координаты $T - 1/a$ инерциальной системы никогда не достигнут наблюдателя на первом корабле (который находится в начале неинерциальной системы отсчёта). Обратим внимание, что именно для этого наблюдателя записаны преобразования (4.19), (4.21), сингулярность которых мы анализируем.

Таким образом, при равноускоренном движении наблюдатели могут “убегать” от происходящих событий, так как постоянно увеличивают свою скорость (хотя она всё время остаётся меньше единицы). После старта корабля, его наблюдатель видит, что сзади него распространяется “волна” постепенного покраснения частоты излучения источников света (стр. 208) на кораблях его эскадры (по мере достижения от них “изображения” об их старте). Это покраснение тем сильнее, чем дальше от него находятся корабли. О существовании границы видимости $X = T - 1/a$ наблюдатель никогда не узнает, т.к. волна покраснения достигнет её только при $t = \infty$.

Определим *горизонт событий*, как линию (поверхность), ограничивающую в пространстве событий $S_0 : (T, X)$ область видимых событий *данным* наблюдателем системы отсчета $S : (t, x)$. Для описания горизонта событий требуется две системы отсчёта – S_0 , имеющая более широкое множество событий, чем события, видимые во второй системе S .

Ниже на левом рисунке заштрихованная область изображает все видимые наблюдателем в $x = 0$ события в координатах инерциального наблюдателя (T, X) . Линии с наклоном 45 градусов ($c = 1$) – это мировые линии световых сигналов. Когда они пересекают траекторию корабля (жирная изогнутая линия) – это означает, что наблюдатель их получает. Понятно, что не все световые сигналы, излученные позади корабля пересекутся с его траекторией:



На плоскости (T, X) можно нарисовать сетку линий, соответствующих постоянным значениям t (одновременные в S события) и постоянным значениям x (выше второй рисунок). Их уравнения имеют вид:

$$aT = \text{th}(at) (1 + aX), \quad (1 + aX)^2 - (aT)^2 = e^{2ax}. \quad (4.25)$$

Из (4.21) следует, что предельная видимая точка $X = T - 1/a$ сзади от корабля имеет в системе S координату $x = -\infty$.

Заметим, что мы не рисуем криволинейную координатную сетку при $T < 0$, так как рассматриваем неинерциальную систему, которая является таковой только при $T > 0$ (ускорение началось в $T = t = 0$).

• До сих пор мы рассматривали преобразования между инерциальной и неинерциальной системами отсчёта когда в момент “включения” ускорения точки неинерциальной системы были в инерциальной неподвижны. Найдём теперь преобразования в ситуации, когда равноускоренная система начала ускоряться, уже имея некоторую скорость U_0 . Введём три системы отсчёта: “неподвижную” $S_0 : (T, X)$, инерциальную $S'_0 : (T', X')$, движущуюся равномерно со скоростью U_0 относительно S_0 и $S : (t, x)$, которая начинает двигаться равноускоренно относительно S'_0 с нулевой начальной скоростью так, как это было описано выше. Имеем два последовательных преобразования координат и времени:

$$\begin{cases} aT' = \text{sh}(at) e^{ax}, \\ aX' = \text{ch}(at) e^{ax} - 1, \end{cases} \quad \begin{cases} T = \gamma_0 (T' + U_0 X'), \\ X = \gamma_0 (X' + U_0 T'), \end{cases}$$

где $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - U_0^2}$, и в момент времени $T = T' = t = 0$ начала систем $X = X' = x = 0$ совпадали. Исключая (T', X') , получаем:

$$\begin{cases} aT = [\text{sh}(at) \text{ch}(\alpha_0) + \text{ch}(at) \text{sh}(\alpha_0)] e^{ax} - \text{sh} \alpha_0, \\ aX = [\text{sh}(at) \text{sh}(\alpha_0) + \text{ch}(at) \text{ch}(\alpha_0)] e^{ax} - \text{ch} \alpha_0, \end{cases}$$

где вместо скорости введен параметр быстроты:

$$\alpha_0 = \text{ath}(U_0), \quad \gamma_0 = \text{ch}(\alpha_0), \quad U_0 \gamma_0 = \text{sh}(\alpha_0). \quad (4.26)$$

Используя формулы для суммы углов гиперболических функций, эти преобразования можно переписать в более компактном виде:

$$\begin{cases} aT = \text{sh}(at + \alpha_0) e^{ax} - \text{sh} \alpha_0, \\ aX = \text{ch}(at + \alpha_0) e^{ax} - \text{ch} \alpha_0. \end{cases} \quad (4.27)$$

В качестве упражнения (\llcorner Н₂₉) стоит найти нерелятивистское приближение к (4.27).

Можно также записать преобразования между двумя неинерциальными системами отсчёта, одна из которых (t, x) в начальный момент времени имела нулевую скорость относительно лабораторной системы, а вторая с координатами (t', x') – отличную от нуля скорость:

$$\begin{cases} \text{sh}(at) e^{ax} = \text{sh}(at' + \alpha_0) e^{ax'} - \text{sh} \alpha_0, \\ \text{ch}(at) e^{ax} = \text{ch}(at' + \alpha_0) e^{ax'} - \text{ch} \alpha_0. \end{cases} \quad (4.28)$$

Несложно проверить, что при $a \rightarrow 0$ эти преобразования переходят в обычные преобразования Лоренца. При $a \neq 0$ они образуют группу (стр. 418), т.е. последовательность таких преобразований с различными параметрами α_0 имеет такую же функциональную зависимость от координат и времени, как и (4.28).

▷ Несложно проверить, что преобразования (4.27) снова приводят к интервалу (4.22). Таким образом, все равноускоренные системы отсчета, независимо от их начальной скорости U_0 , имеют один и тот же интервал. В общем случае, по определению (далее, (4.55), стр. 230 мы уточним его):

системы отсчета являются *равноправными*, если они имеют одинаковую функциональную форму интервала.

Естественно в это определение “равноправности” попадает и вся совокупность инерциальных систем отсчета, так как преобразования Лоренца оставляют *форминвариантным* интервал $ds^2 = dT^2 - dX^2$ (т.е. не изменяют его функциональной формы). Равноускоренная и инерциальные системы не равноправны, так как интервалы между событиями в этих системах отсчета различны.

Подчеркнём, что в определении “равноправности” речь идёт о неизменности функциональной зависимости коэффициентов метрического тензора (определяющего интервал ds) от координат и времени. Численное значение ds между двумя бесконечно близкими событиями одинаково во всех системах отсчёта, независимо от того равноправны они или нет.

▷ Запишем также трансляционные преобразования внутри равноускоренной системы отсчета. В координатах Мёллера между вторым (\tilde{x}') и первым кораблем (\tilde{x}) они имеют вид:

$$\tilde{x} = \tilde{x}' + x_0, \quad t = \frac{t'}{1 + ax_0}. \quad (4.29)$$

Подставляя их в интервал (4.23), получаем:

$$ds^2 = (1 + a_2\tilde{x}')^2 dt'^2 - d\tilde{x}'^2,$$

где $a_2 = a/(1 + ax_0)$. Этот результат вполне ожидаем. Собственное ускорение второго корабля равно a_2 , поэтому и интервал в координатах (t' , x') наблюдателя на втором корабле должен зависеть именно от a_2 , вместо a для интервала (4.23) в координатах (t , x) первого корабля.

Ещё раз обратим внимание, что когда идёт речь о неинерциальных системах, преобразования записываются для конкретных наблюдателей, а не в целом для систем отсчёта. В частности, преобразование между инерциальной системой и наблюдателем на втором корабле имеют вид:

$$a_2 T = \text{sh}(a_2 t') e^{a_2 x'}, \quad a_2 X = \text{ch}(a_2 t') e^{a_2 x'} - \frac{a_2}{a}, \quad (4.30)$$

где x_0 в $a_2 = a/(1 + ax_0)$ – является *константой*, характеризующей положение наблюдателя в момент включения ускорения, а (t' , x') – время и координата регистрируемого *им* события и $e^{a_2 x'} = 1 + a_2 \tilde{x}'$.

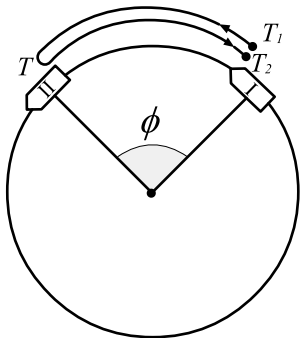
4.3 Вращающаяся система отсчёта

• Рассмотрим теперь два космических корабля, вращающихся с одинаковой угловой скоростью ω по орбите радиуса r в лабораторной системе отсчета $S_0 : (T, X)$. Будем считать, что угловое расстояние между ними равно $\phi < \pi$. Скорости кораблей равны $\omega r < 1$, поэтому относительно лабораторной системы время на кораблях одинаковым образом замедляется и показания их часов равны:

$$t = T\sqrt{1 - (\omega r)^2}, \quad t' = \tau + T\sqrt{1 - (\omega r)^2}, \quad (4.31)$$

где t – это время первого корабля, а t' – второго корабля, находящегося по ходу вращения относительно первого. Время T лабораторной системы S_0 в обеих формулах относится к *различным* синхронизированным часам, расположенным вдоль траектории движения кораблей. Синхронизация часов на кораблях требует проведения определённых измерений, задающих параметр τ . Понятно, что $\tau = \tau(\phi)$ является функцией угла. Если он отсчитывается от первого корабля, то $\tau(0) = 0$.

Пусть наблюдатель на первом корабле для измерения расстояния ко второму кораблю использует радиолокацию. Для упрощения будем сначала считать, что световой сигнал движется по окружности. Такое движение можно реализовать при помощи набора зеркал расставленных вдоль окружности и вращающихся с той же угловой скоростью ω . Эквивалентно для этого можно использовать кольцевой световод. В лабораторной системе S_0 сигнал испускается в момент времени T_1 и достигает второго корабля в момент времени T . За время $T - T_1$ этот корабль смещается вдоль окружности на угол $\omega(T - T_1)$. Поэтому свет проходит угловое расстояние $\phi + \omega(T - T_1)$. Затем сигнал отражается и возвращается к первому кораблю в момент времени T_2 . Этот обратный сигнал проходит меньшее угловое расстояние $\phi - \omega(T_2 - T)$:



$$\begin{cases} r(\phi + \omega(T - T_1)) = T - T_1, \\ r(\phi - \omega(T_2 - T)) = T_2 - T, \end{cases}$$

$$T - T_1 = \frac{r\phi}{1 - \omega r}, \quad T_2 - T = \frac{r\phi}{1 + \omega r}.$$

Как и раньше, мы приравниваем длину пути сигнала (в лабораторной системе) ко времени его движения ($c = 1$).

Складывая и вычитая последние две формулы, имеем:

$$\frac{T_2 - T_1}{2} = \frac{r\phi}{1 - (\omega r)^2}, \quad T = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{\omega r^2 \phi}{1 - (\omega r)^2}. \quad (4.32)$$

Аналогичные соотношения получатся, если такой же радиолокационный эксперимент проведёт наблюдатель на втором корабле. Однако при этом во всех формулах необходимо произвести замену $\omega \rightarrow -\omega$. Такая же замена возникает, если первый корабль проводит измерение расстояния по более длинному пути $\phi \mapsto 2\pi - \phi$ (против вращения).

Чтобы перейти ко времени первого корабля необходимо воспользоваться первым соотношением (4.31). В результате, радиолокационное расстояние между кораблями будет равно:

$$l = \frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{r\phi}{\sqrt{1 - (\omega r)^2}}. \quad (4.33)$$

Расстояние l больше на лоренцевский фактор $1/\sqrt{1 - (\omega r)^2}$ (ωr – линейная скорость кораблей), чем длина дуги $r\phi$ между кораблями в лабораторной системе. Этот результат не зависит от того, наблюдатель какого корабля проводит измерение расстояния (оно не меняется при замене $\omega \mapsto -\omega$).

Подставляя во второе соотношение (4.32) времена (4.31), получаем время отражения сигнала (по часам второго корабля):

$$t' = \frac{t_1 + t_2}{2} + \omega r l + \tau. \quad (4.34)$$

Найдем теперь функцию $\tau = \tau(\phi)$. Возможны различные способы синхронизации часов на кораблях. Рассмотрим сначала следующий вариант. Пусть в центре орбиты происходит вспышка света. В лабораторной системе она достигнет каждого корабля одновременно. Кажется естественным в этот момент выбрать начало отсчета времени на кораблях, положив $\tau = 0$. Однако, это не так. В силу относительности одновременности, информация о вспышке достигнет кораблей *неодновременно*. Действительно, устремим r к бесконечности, а ω к нулю так, чтобы скорость ωr оставалась меньше единицы. В этом случае корабли будут двигаться практически по прямой. Если угловое расстояние ϕ между ними мало, связанная с кораблями система не отличается от сопутствующей к ним инерциальной системы отсчета, движущейся относительно лабораторной со скоростью ωr . В этой системе информация о вспышке попадет на второй корабль позже, чем на первый (см. стр. 80).

Другой, более физичный способ (с точки зрения сопутствующей инерциальной системы), состоит в таком выборе τ , при котором:

$$t' = \frac{t_1 + t_2}{2}. \quad (4.35)$$

Для инерциальных систем отсчёта это правило является вполне естественным (см. стр. 21). Оно основано на равенстве скорости света во всех направлениях, что следует из изотропности пространства (напомним, что свет для синхронизации использовать не обязательно и для этого подходит частица движущаяся с любой постоянной скоростью). В неинерциальной системе мы можем принять это правило, т.к. физическая скорость света для наблюдателя в этой системе также не зависит от направления. Действительно, эталоны длины и времени неинерциального наблюдателя совпадают с аналогичными эталонами инерциального наблюдателя из сопутствующей системы отчёта. Поэтому и скорость света во всех направлениях (*в его окрестности*) также будет одинакова.

Используя правило синхронизации (4.35), из соотношения (4.34) имеем:

$$\tau = \tau(\phi) = -\omega r l. \quad (4.36)$$

При таком выборе τ времена распространения сигнала туда и обратно, измеренные при помощи *двух* часов, будут равны друг другу:

$$t' - t_1 = t_2 - t' = l.$$

Такая *эффективная скорость света* равна единице и не зависит от направления распространения. Прилагательное “эффективная” применено, чтобы подчеркнуть, что для измерения скорости в одну сторону используются двое часов, находящиеся у различных наблюдателей.

Независимо от выбора функции $\tau(\phi)$, темп течения времени на обоих кораблях совпадает. Действительно, пусть первый корабль посылает на второй корабль сигналы с периодом Δt_1 . Из (4.33), (4.34) следует, что

$$t' - t_1 = l(1 + \omega r) + \tau = \text{const}.$$

Поэтому интервал времени между сигналами, принимаемыми на втором корабле, будет иметь такое же значение $\Delta t' = \Delta t_1$. Аналогична ситуация при посылке периодических сигналов со второго корабля. Для источника света и датчика, расположенных на вращающемся кольце, не будет регистрироваться изменения частоты сигнала, так как они неподвижны друг относительно друга (напомним, впрочем, что в жесткой равноускоренной системе эффект изменения частоты возникает даже для относительно неподвижных приборов).

Таким образом, в результате выбора (4.36), мы получаем достаточно ожидаемые физические результаты. Однако, не всё так просто и не смотря на одинаковый темп хода часов

глобальная синхронизация времени всех часов, вращающихся по окружности невозможна.

Функция $\tau(\phi)$ в (4.36) линейно зависит от угла ϕ (см. (4.33)). Точки $\phi = 0$ и $\phi = 2\pi$ соответствуют одному и тому же кораблю (первому). Попытка синхронизировать часы сами с собой при помощи посылки сигнала вдоль всей окружности приведет к $\tau \neq 0$, хотя на первом корабле, по определению, выбрано $\tau(0) = 0$.

В частности, если первый корабль проводит синхронизацию со вторым кораблём по более длинному пути $\phi \mapsto 2\pi - \phi$, то

$$t' = \frac{t_1 + t_2}{2} - \omega r l + \tau \quad (4.37)$$

и необходимо выбирать другое значение начального отсчета времени τ . При этом процедура синхронизации симметрична и если её проводит наблюдатель на втором корабле, посылая сигнал по кратчайшему пути к первому кораблю, он снова получит (4.36), а по более длинному пути $\tau = \omega r l$.

В результате, наблюдатель на первом корабле, может однозначным образом синхронизовать свои часы со всеми кораблями, находящимися от него не далее чем на $|\phi| < \pi$. Такую процедуру все эти корабли могут выполнить последовательно друг с другом. Однако, когда такая “цепочка синхронизаций” доберется до корабля, удаленного более чем на π , прямая синхронизация с ним первого корабля по кратчайшему пути выявит рассинхронизацию часов.

Например, для двух диаметрально противоположных часов ($\phi = \pi$) радиолокационное расстояние одинаково и не зависит от того по направлению вращения или против оно измеряется. Однако, процедура синхронизации таких двух часов будет зависеть от направления посылки сигнала, при помощи которого она проводится. Разница двух значений τ при этом равна:

$$\Delta\tau = 2\omega r l = \frac{2\pi\omega r^2}{\sqrt{1 - (\omega r)^2}}.$$

Подобная особенность вращающейся системы отсчета выглядит очень необычно. Однако, эта “необычность” не намного более странная, чем остальные “привычные” релятивистские эффекты, такие как относительность одновременности или замедление темпа течения времени.

• Можно попытаться синхронизировать часы путём “медленного” переноса копии часов данного наблюдателя в другие точки системы отсчёта. Проанализируем, как будет выглядеть такая процедура. Пусть наблюдатель отправляет две копии своих часов по окружности в различных направлениях. Он должен так подобрать их скорости, чтобы они вернулись к нему одновременно. Рассмотрим это движение из лабораторной системы отсчёта, где угловая скорость часов, движущихся в направлении вращения равна $\omega + \Delta\omega_1$, а часов движущихся в обратном направлении: $\omega - \Delta\omega_2$. Так как предполагается, что $\Delta\omega_i$ малы, к моменту их встречи с базовыми часами через время T , последние n раз обернутся по окружности, дополнительно сместившись на некоторый угол ϕ_0 :

$$\omega T = 2\pi n + \phi_0. \quad (4.38)$$

Часы, движущиеся по вращению должны проделать один дополнительный оборот, а вторые часы, наоборот, один оборот экономят:

$$(\omega + \Delta\omega_1) T = 2\pi(n + 1) + \phi_0, \quad (\omega - \Delta\omega_2) T = 2\pi(n - 1) + \phi_0.$$

Подставляя ωT из (4.38) получаем, что $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = \Delta\omega$ и $T = 2\pi/\Delta\omega$. Собственное время перемещаемых часов τ_1 и τ_2 равны:

$$\tau_{1,2} = T \sqrt{1 - (\omega \pm \Delta\omega)^2 r^2} \approx T \sqrt{1 - (\omega r)^2 \mp 2\omega \Delta\omega r^2},$$

где в приближенном равенстве раскрыт квадрат с точностью до первого порядка малости по $\Delta\omega$. Вынося $1 - (\omega r)^2$ за корень и раскладывая его в ряд, получаем:

$$\tau_{1,2} \approx T \sqrt{1 - (\omega r)^2} \mp \frac{2\pi r^2 \omega}{\sqrt{1 - (\omega r)^2}},$$

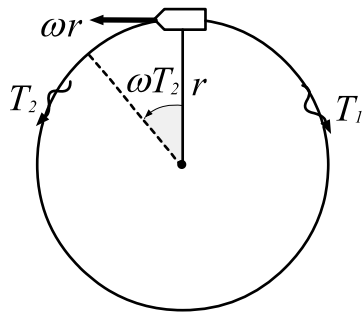
где во втором слагаемом подставлено $T = 2\pi/\Delta\omega$. Первое слагаемое является собственным временем базовых часов. Таким образом, часы движущиеся по вращению отстанут от базовых часов, а часы движущиеся с меньшей скоростью (в лабораторной системе), наоборот, уйдут вперёд. Разность хода копий часов равна:

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 \approx \frac{4\pi r^2 \omega}{\sqrt{1 - (\omega r)^2}} \quad (4.39)$$

и не зависит от $\Delta\omega$. Хотя в лабораторной системе отсчёта линейные скорости копий часов различны $(\omega \pm \Delta\omega)r$, в сопутствующей к базовым часам инерциальной системе отсчёта их скорости по модулю одинаковы (в первом порядке по $\Delta\omega r$), что естественно, для наблюдателя, связанного с базовыми часами, если он, отправляя копии, планирует их одновременное возвращение.

В лабораторной системе отсчёта в момент времени $T = \pi/\Delta\omega$ часы встретятся первый раз в точке на окружности диаметрально противоположной к базовым часам. В этот момент времени их показания также будут различными. Следовательно, провести однозначную синхронизацию при помощи медленного переноса часов во вращающейся системе отсчёта также невозможно. Такая синхронизация возможна только между часами, расположенными на любой незамкнутой дуге окружности. В этом случае медленный перенос копии базовых часов приведёт к такому же результату, как и посылка светового сигнала с последующим пересчетом времени по формуле (4.35).

▷ В связи с проблемой синхронизации, рассмотрим эксперимент, в котором наблюдатель на корабле посылает два световых сигнала, распространяющихся вдоль окружности в противоположных направлениях. Найдем времена распространения каждого сигнала в лабораторной системе отсчета S_0 . Сигнал, движущийся в направлении вращения корабля возвращается к кораблю через время T_2 . Он проходит расстояние $2\pi r$, увеличенное на дугу $r\omega T_2$, вдоль которой сместился корабль в течении времени T_2 . Второй световой сигнал, движущийся на встречу кораблю проходит за время T_1 меньшее расстояние:



$$\begin{cases} r(2\pi + \omega T_2) = T_2, \\ r(2\pi - \omega T_1) = T_1, \end{cases}$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{4\pi r^2 \omega}{1 - (\omega r)^2}.$$

Разность этих времен по часам корабля $\Delta t = \Delta T \sqrt{1 - (\omega r)^2}$ равна:

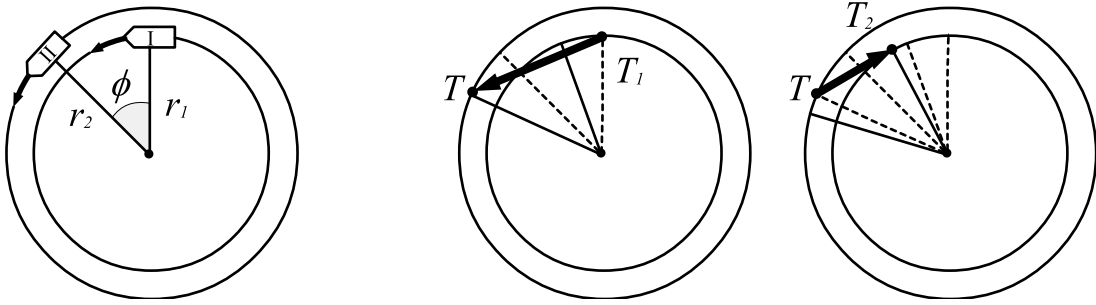
$$\Delta t = \frac{4\pi r^2 \omega}{\sqrt{1 - (\omega r)^2}}, \quad (4.40)$$

что совпадает с (4.39). Этот эффект обнаружил в 1913 Жорж Саньяк при помощи вращающегося кольцевого интерферометра. При этом измерялась не разница времен, а интерференция сигналов, связанная с относительным сдвигом фаз световых волн. Точность эксперимента позволила измерить только ведущее приближение $\Delta t \approx \Delta T \approx 4S\omega$ к (4.40), где $S = \pi r^2$ – площадь, ограниченная траекторией сигналов в лабораторной системе отсчёта. Напомним, что корень в знаменателе (4.40) связан с эффектом замедления времени при движении часов со скоростью ωr . Это замедление имеет второй порядок малости по скорости.

• До сих пор мы рассматривали подмножество точек вращающейся системы отсчёта равноудаленных от центра. Пусть теперь два космических корабля в лабораторной системе вращаются с одинаковой угловой скоростью ω , но при этом находятся на различных расстояниях r_1 и r_2 от центра. Их скорости равны ωr_1 и ωr_2 , поэтому связь корабельных часов с часами лабораторной системы имеет вид:

$$t = T\sqrt{1 - (\omega r_1)^2}, \quad t' = \tau + T\sqrt{1 - (\omega r_2)^2}. \quad (4.41)$$

Проанализируем радиолокационный эксперимент, который проводит наблюдатель на первом корабле с радиусом орбиты r_1 . Теперь будем рассматривать прямолинейное (в лабораторной системе) распространение светового сигнала.



За время $T - T_1$ движения сигнала в одну сторону, второй корабль смещается на угловое расстояние $\omega(T - T_1)$. Поэтому длина пути сигнала находится по теореме косинусов с углом $\phi + \omega(T - T_1)$, где ϕ – угол между прямыми, проведенными из центра по направлению к кораблям. После отражения сигнала, он движется на встречу первому кораблю и для вычисления длины траектории возвращения сигнала за время $T_2 - T$ в теореме косинусов необходимо взять угол $\phi - \omega(T_2 - T)$. В результате квадраты расстояний, пройденных светом, связаны с квадратами времён его движения следующим образом:

$$\begin{cases} r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos[\phi + \omega(T - T_1)] = (T - T_1)^2, \\ r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos[\phi - \omega(T_2 - T)] = (T_2 - T)^2. \end{cases} \quad (4.42)$$

Запишем решения этих трансцендентных уравнений относительно времён в следующем виде:

$$T - T_1 = g(\omega), \quad T_2 - T = g(-\omega),$$

где $g(\omega)$ – функция угловой скорости ω , а также радиусов r_1 , r_2 и угла ϕ , зависимость от которых будем опускать.

Исключая T и переходя ко времени первого корабля (4.41), имеем:

$$l = \frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - (\omega r_1)^2} [g(\omega) + g(-\omega)]. \quad (4.43)$$

Правая часть не зависит от времени. Поэтому радиолокационный эксперимент приведет наблюдателя к выводу, что расстояние между кораблями неизменно. Таким образом, совокупность наблюдателей, вращающихся вокруг центра с постоянной угловой скоростью ω относительно S_0 образуют жесткую неинерциальную систему отсчета S .

Формула радиолокационного расстояния (4.43) упрощается для находящихся рядом кораблей. Заменим угол ϕ на бесконечно малый $d\phi$ и положим $r_1 = r$, $r_2 = r + dr$. Раскладывая в (4.42) косинус $\cos(\alpha) \approx 1 - \alpha^2/2$ и решая квадратное уравнение, несложно получить:

$$T - T_1 = \frac{r^2 \omega d\phi + \sqrt{[1 - (\omega r)^2] dr^2 + r^2 d\phi^2}}{1 - (\omega r)^2}.$$

Выражение для $T_2 - T$ аналогично за исключением замены ω на $-\omega$. Поэтому квадрат радиолокационного расстояния между двумя бесконечно близкими точками вращающейся системы отсчета равен:

$$dl^2 = \left(\frac{t_2 - t_1}{2} \right)^2 = dr^2 + \frac{r^2 d\phi^2}{1 - (\omega r)^2}. \quad (4.44)$$

Это выражение отличается знаменателем во втором слагаемом от евклидоваго расстояния в полярных координатах $dr^2 + r^2 d\phi^2$. Поэтому геометрия трёхмерного пространства, основанная на радиолокационном определении длины, отличается от евклидовой. Так, длина окружности радиуса r с центром на оси вращения ($dr = 0$, $0 \leq \phi < 2\pi$) равняется $2\pi r / \sqrt{1 - \omega^2 r^2}$, что больше, чем евклидово значение $2\pi r$. Более подробный анализ такой неевклидовости мы проведем в главе 11.

Если расстояния кораблей от центра различны, то они испытывают различное замедление своих часов. Если второй корабль шлет сигнал в момент времени t'_1 , то на первом он будет получен в момент t_2 :

$$\frac{t_2}{\sqrt{1 - (\omega r_1)^2}} = \frac{t'_1 - \tau}{\sqrt{1 - (\omega r_2)^2}} + g(-\omega).$$

Если эти сигналы посылаются с периодом $\Delta t'_1$, то принимаются они на первом корабле с периодом:

$$\Delta t_2 = \Delta t'_1 \sqrt{\frac{1 - (\omega r_1)^2}{1 - (\omega r_2)^2}}.$$

Наблюдатели могут провести синхронизацию часов, однако в дальнейшем соотношение $t' = (t_1 + t_2)/2$ нарушится.

4.4 Нежёсткая равноускоренная система отсчёта

Хорошо известно, что в обычном 3-мерном евклидовом пространстве мы должны различать геометрические и координатные величины. Точки пространства – это геометрические сущности, которые мы можем “нумеровать” при помощи различных координат (декартовой: (x, y, z) , полярной (r, ϕ, z) , и т.д.). К геометрическим объектам относятся также расстояние между двумя точками и угол между прямыми. От выбора системы координат геометрические объекты не зависят.

При описании физики в псевдоевклидовом пространстве-времени Минковского ситуация полностью аналогична. Точки этого пространства (события) можно нумеровать при помощи произвольно выбранной четверки чисел (x^0, x^1, x^2, x^3) , в которой число x^0 необязательно имеет смысл физического времени события в данной системе отсчета.

В этой главе нас интересуют неинерциальные системы отсчета и их связь с инерциальными. Для нумерации событий в инерциальной системе мы по-прежнему будем использовать физическое время T и декартовы координаты X, Y, Z . Четвёрку чисел (T, X, Y, Z) будем называть *лоренцевыми координатами*. Интервал между двумя бесконечно близкими событиями в этих координатах имеет вид:

$$ds^2 = dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2. \quad (4.45)$$

В неинерциальной системе отсчёта (НИСО) эти же события нумеруются при помощи четырех чисел (x^0, x^1, x^2, x^3) . Будем считать, что (x^1, x^2, x^3) – это номер *фиксированной* точки в 3-пространстве неинерциальной системы отсчета. Фиксированность не означает жесткости системы отсчета. Так, туча пчёл, разлетающихся по своим делам от улья образует систему отсчёта. С любой пчелой связан номер, состоящий из трех чисел (x^1, x^2, x^3) . Сами по себе эти числа могут и не иметь простого геометрического смысла. Но главное, что они задают *неизменный* номер в системе пчел и однозначно характеризует данную пчелу (точку 3-пространства неинерциальной системы отсчета). В пространстве может быть множество наблюдателей, движущихся с различными скоростями относительно друг друга. Любое их подмножество можно назвать системой отсчёта. При такой общей точки зрения на системы отсчёта, выбор наблюдателей, которые связаны с данной системой достаточно произволен. Таким образом, мы будем считать, что:

система отсчета – это множество наблюдателей непрерывно заполняющих пространство, умеющих измерять время и расстояние в своей непосредственной окрестности.

Удобно определять неинерциальную систему отсчета, задавая траектории движения всех её точек относительно инерциальной (лабораторной) системы. Рассмотрим, например, *нежесткую* равноускоренную систему отсчета, которая имеет одинаковые траектории движения каждой своей точки относительно лабораторной системы. Соответствующее координатное преобразование можно записать следующим образом:

$$X = x + \frac{1}{a} \left[\sqrt{1 + (aT)^2} - 1 \right], \quad (4.46)$$

где x – координата (номер) фиксированной точки НИСО, а (T, X) – время и координата этой же точки в лабораторной системе. Обратим внимание, что в (4.46) параметр x является константой, которая находится из начального условия $X(0) = x$. Значение константы определяет фиксированную точку НИСО. Рассматривая все точки НИСО, мы уже считаем x переменной величиной, а (4.46) становится координатным преобразованием между двумя системами отсчета. Величины (T, X) имеют ясный физический смысл, тогда как смысл координаты x ещё необходимо установить. Последнее означает, что число x требуется связать с определёнными измерительными процедурами, проводимыми *конкретным* наблюдателем. Этот наблюдатель, например, может находиться в начале НИСО, имея координату $x = 0$. Важно помнить, что такой наблюдатель не “размазан” по всему пространству, а находится в фиксированной точке НИСО. Он измеряет время, расстояние и скорость в своей непосредственной окрестности. Информацию об удаленном событии, произошедшем в точке с координатой $x \neq 0$ он может получать только при помощи некоторых сигналов (например, световых).

Для дальнейших построений нам необходимо иметь явный вид интервала в координатах неинерциального наблюдателя. Для этого, кроме координатного преобразования (4.46), потребуется связь времен событий. Аналогично пространственным координатам, для нумерации времени события можно использовать достаточно произвольные числа t . Будем предполагать, что они упорядочены так, что меньшим значениям t соответствуют более ранние события. В качестве такого времени можно выбрать, например, собственное время t часов, движущихся по траектории (4.46) и оказавшихся в момент времени t в окрестности события:

$$aT = \text{sh}(at). \quad (4.47)$$

Это соотношение связывает время t , прошедшее у наблюдателя после начала его ускорения (см. стр. 205). Оно сравнивается с временем T , которое показывают синхронизированные часы, расставленные вдоль траектории движения в инерциальной системе отсчета.

Таким образом, преобразования от лоренцевых координат инерциальной системы отсчета (T, X, Y, Z) к координатам нежёсткой равноускоренной системы отсчета (t, x, y, z) имеют вид:

$$T = \frac{1}{a} \operatorname{sh}(at), \quad X = x + \frac{1}{a} [\operatorname{ch}(at) - 1], \quad Y = y, \quad Z = z. \quad (4.48)$$

Подставляя их в интервал (4.45), получаем [9]:

$$ds^2 = dt^2 - 2 \operatorname{sh}(at) dt dx - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (4.49)$$

В инерциальной системе отсчета интервал физического времени dT , измеряемый *одними* часами равен интервалу ds между событиями, происходящими в одной точке пространства системы $dX = dY = dZ = 0$. Аналогично, в произвольной системе отсчета *собственным физическим временем* $d\tau_0$ данной точки системы назовем интервал ds между событиями, происходящими в этой точке $dx = dy = dz = 0$. Для метрики (4.49) физическое время $d\tau_0$ совпадает с координатным dt , так как в (4.48) в качестве t выбрано собственное время наблюдателя t (4.47).

Подчеркнем, что $d\tau_0$ это “тик” на часах, расположенных в фиксированной точке (x, y, z) . Эти часы находятся у наблюдателя *в этой* точке и именно он непосредственно измеряет этот тик. Как может узнать время на этих часах (а, следовательно, время события в их окрестности) наблюдатель находящийся, например, в начале координат? Только при помощи получения светового (или иного) сигнала от удаленных часов с последующей корректировкой на время распространения сигнала. Как в инерциальных, так и в неинерциальных системах отсчета, события, связанные с распространением света, имеют нулевой интервал $ds = 0 \leq C_{11}$. Это условие для метрики (4.49) приводит к дифференциальному уравнению, определяющему траекторию светового импульса распространяющегося параллельно оси x (мимо наблюдателей НИСО с $y, z = \text{const}$):

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2 \operatorname{sh}(at) \frac{dx}{dt} - 1 = 0.$$

Выделяя полный квадрат, несложно получить:

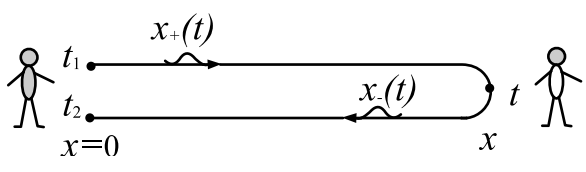
$$\frac{dx}{dt} = \pm \operatorname{ch}(at) - \operatorname{sh}(at) = \pm e^{\mp at}. \quad (4.50)$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$x(t) = \text{const} - \frac{e^{\mp at}}{a}, \quad (4.51)$$

где const – константа интегрирования, а знаки соответствуют направлению движения импульса (минус – координата x увеличивается при движении ($dx/dt > 0$), а плюс – уменьшается).

Рассмотрим в координатах (t, x) радиолокационный эксперимент, проводимый наблюдателем, находящимся в точке с координатой $x = 0$. В момент времени t_1 он отправляет световой импульс, который достигает в момент времени t точку с координатой $x > 0$, где отражается и возвращается обратно в момент времени t_2 . Для определения константы в траектории (4.51) при движении импульса от наблюдателя мы выберем начальное условие $x(t_1) = 0$, а при движении в обратную сторону $x(t_2) = 0$:



$$x_+(t) = \frac{1}{a} (e^{-at_1} - e^{-at}),$$

$$x_-(t) = \frac{1}{a} (e^{+at_2} - e^{+at}).$$

В точке отражения $x_+(t) = x_-(t) = x$, поэтому:

$$e^{-at_1} - e^{-at} = ax, \quad e^{at_2} - e^{at} = ax, \quad (4.52)$$

Исключая t , находим радиолокационное расстояние:

$$l = \frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{1}{2a} \ln \left[1 + ax \frac{2 \operatorname{ch}(at_1) - ax}{1 - ax e^{at_1}} \right] \approx x \operatorname{ch}(at_1), \quad (4.53)$$

где приближенное равенство записано для малых $ax \ll 1$. Зная t_1 и t_2 наблюдатель в начале системы может определить координату точки отражения сигнала x . Из (4.53) следует, что радиолокационное расстояние к фиксированной точке такой равноускоренной системы меняется со временем (зависит от t_1). Поэтому систему (4.49) мы и называем *нежесткой равноускоренной системой*. Физика в этой системе отличается от физики в жесткой равноускоренной системе, рассмотренной в первом разделе.

Аналогично находится частота сигнала, получаемого от удаленного источника. Дифференцируя второе уравнение (4.52) и исключая e^{at} , имеем:

$$dt_2 = dt (1 - ax e^{-at_2}).$$

Интервалы времени dt и dt_2 – это периоды излучения и приема сигналов по *различным* часам наблюдателей, находящихся в точках $x > 0$ и $x = 0$. Отношение этих периодов зависит от координаты x и меняется со временем приёма сигнала t_2 .

Обратим внимание, что функция $x(t)$ в (4.51) подразумевает, что вдоль траектории движения светового импульса находятся наблюдатели НИ-СО. У каждого из них есть часы, измеряющие собственное время t с нулевым отсчетом в момент начала ускорения. Однако координата x , вообще говоря, не является физическим расстоянием, поэтому *координатная скорость света* (4.50) отлична от единицы.

4.5 Произвольные неинерциальные системы

Подведём некоторые итоги. Систему отсчёта $S : \{t, x, y, z\}$ можно определять, задавая законы движения каждой её точки относительно лабораторной системы $S_0 : \{T, X, Y, Z\}$. Пусть $x^i = \{x, y, z\}$ – координаты, однозначно фиксирующие данную точку системы S . Эта точка движется относительно лабораторной системы S_0 по траектории:

$$X^i(T) = F^i(T, x, y, z). \quad (4.54)$$

В общем случае различные точки могут двигаться по различным траекториям. Естественно, предполагается, что функции $F^i(T, x, y, z)$ являются гладкими (дифференцируемыми по каждому аргументу).

Время t неинерциальной системы, можно определить любым удобным способом, при помощи произвольной функции $T = T(t, x, y, z)$. Предполагается только, что более ранние события в S соответствуют меньшим значениям t , чем более поздние. Такое время является координатным и, вообще говоря, не совпадает с физическим временем часов, связанных с точкой x^i . На первый взгляд, подобный произвол в определении времени выглядит странным. Однако далее мы увидим, что для любого конкретного выбора функции $T(t, x, y, z)$ можно указать правило вычисления физического времени и физической длины в неинерциальной системе отсчёта.

Заменяя в траектории (4.54) время T на $T(t, x, y, z)$, мы получаем преобразования от системы S к лабораторной системе S_0 :

$$T = T(t, x, y, z), \quad X^i = X^i(t, x, y, z).$$

Подстановка этих преобразований в (4.45) даёт интервал между событиями в неинерциальной системе отсчёта:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Метрические коэффициенты $g_{\alpha\beta}$ являются функциями 4-координат события $x^i = \{t, x^1, x^2, x^3\}$ и полностью определяют свойства системы отсчёта.

В рамках данной системы отсчёта (*не меняя её*) всегда можно перейти к другому способу нумерации событий:

$$t' = t'(t, x, y, z), \quad x'^i = x'^i(x, y, z). \quad (4.55)$$

Первое преобразование определяет новое координатное время, а оставшиеся – другой способ нумерации пространственных точек системы. Важно, что последние не зависят от времени t , т.к., в противном случае мы бы получили другую систему отсчёта. Рассмотрим несколько примеров.

- Пусть точка неинерциальной системы движется по траектории:

$$X = \frac{1}{a} \left[\sqrt{(1+ax)^2 + (aT)^2} - 1 \right], \quad Y = y, \quad Z = z$$

В этих функциях x , y и z – это фиксированные числа, характеризующие данную точку. Они соответствуют её положению в лабораторной системе при $T = 0$. Преобразование для времени выберем в следующем виде: $aT = (1+ax) \operatorname{sh}(at)$. Такой выбор диктуется только соображениями простоты. Если aT подставить в траекторию точки, то получится простое выражение для преобразования координат:

$$aT = (1+ax) \operatorname{sh}(at), \quad aX = (1+ax) \operatorname{ch}(at) - 1, \quad Y = y, \quad Z = z. \quad (4.56)$$

Дифференциалы этих преобразований равны:

$$dT = (1+ax) \operatorname{ch}(at) dt + \operatorname{sh}(at) dx, \quad dX = (1+ax) \operatorname{sh}(at) dt + \operatorname{ch}(at) dx$$

и $dY = dy$, $dZ = dz$. Подставляя их в интервал между событиями лабораторной системы отсчёта $ds^2 = dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2$, получаем этот же интервал в жесткой равноускоренной неинерциальной системе:

$$ds^2 = (1+ax)^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (4.57)$$

в которой ненулевые метрические коэффициенты равны $g_{00} = (1+ax)^2$ и $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$. Для фиксированной точки ($dx = dy = dz = 0$) интервал равен её собственному времени: $ds = d\tau_0 = (1+ax) dt$. Чтобы выяснить, как такие часы идут по отношению к часам в лабораторной системе, надо записать связь dT и dt из преобразований между системами (при фиксированных координатах):

$$dT = (1+ax) \operatorname{ch}(at) dt = \operatorname{ch}(at) d\tau_0 = \frac{d\tau_0}{\sqrt{1-U^2}},$$

где в последнем равенстве U – это скорость точки в лабораторной системе, равная $U = dX/dT = \operatorname{th}(at)$, что снова получается из выражений для дифференциалов. Таким образом, собственное время часов неинерциальной системы связано со временем лабораторной при помощи стандартной релятивистской формулы (2.2), стр. 81.

Можно изменить способ нумерации точек неинерциальной системы при помощи преобразований координат:

$$t = t', \quad 1+ax = e^{ax'}, \quad y = y', \quad z = z',$$

что приводит к интервалу

$$ds^2 = e^{2ax'} (dt'^2 - dx'^2) - dy'^2 - dz'^2.$$

Естественно, система отсчёта при этом не меняется.

• В случае вращения, интервал лабораторной системы (4.45) запишем в цилиндрических координатах $X = R \cos \Phi$, $Y = R \sin \Phi$:

$$ds^2 = dT^2 - dR^2 - R^2 d\Phi^2 - dZ^2, \quad (4.58)$$

где Φ – полярный угол, а R – расстояние от оси вращения.

Будем нумеровать точки вращающейся системы при помощи трёх чисел (r, ϕ, z) . Представим диск, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω в плоскости $Z = 0$. Траектория любой его точки (r, ϕ) может быть задана следующими уравнениями:

$$R = r, \quad \Phi = \phi + \omega T.$$

При данном значении ϕ и r угловая координата точки Φ меняется со временем T с постоянной скоростью ω . Преобразование времени выберем максимально простым способом: $T = t$. В результате, преобразования между вращающейся и лабораторной системами отсчёта имеют вид:

$$T = t, \quad R = r, \quad \Phi = \phi + \omega t, \quad Z = z, \quad (4.59)$$

где координаты (t, r, ϕ, z) называются *координатами Борна*. Подставляя дифференциалы этих преобразований

$$dT = dt, \quad dR = dr, \quad d\Phi = d\phi + \omega dt, \quad dZ = dz$$

в интервал (4.58), получаем:

$$ds^2 = (1 - \omega^2 r^2) dt^2 - 2\omega r^2 dt d\phi - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2. \quad (4.60)$$

Собственное время $d\tau_0 = ds$ фиксированной точки ($dr = d\phi = dz = 0$) равно:

$$d\tau_0 = dt \sqrt{1 - \omega^2 r^2} = dT \sqrt{1 - \omega^2 r^2}.$$

Так как ωr – это скорость точки в лабораторной системе отсчёта, мы снова имеем стандартную формулу замедления времени.

Равенство нулю интервала ($ds^2 = 0$) приводит к уравнению для траектории светового импульса. Например, если при помощи зеркал или световода организовано его движение по окружности $r = \text{const}$, то это уравнение имеет вид:

$$\frac{d\phi}{dt} = \pm \frac{1}{r} - \omega.$$

Из него следует, что угловая координата светового импульса линейно зависит от координатного времени t .

• В общем случае преобразование от неинерциальной системы отсчета $x^\mu = (t, x, y, z)$ к инерциальной системе $X^\mu = (T, X, Y, Z)$ имеет вид:

$$X^\mu = X^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (4.61)$$

где $\mu = 0, \dots, 3$. Распишем дифференциал $dX^\mu = \partial_\nu X^\mu dx^\nu$:

$$dT = \partial_0 X^0 dt + \partial_i X^0 dx^i, \quad dX^k = \partial_0 X^k dt + \partial_i X^k dx^i, \quad (4.62)$$

где $\partial_i = \partial/\partial x^i$ и по повторяющимся индексам проводится суммирование. Подставляя dT, dX^k в интервал $ds^2 = dT^2 - dX^k dX^k$, получаем:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.63)$$

где коэффициенты метрического тензора равны (по k сумма от 1 до 3):

$$\begin{aligned} g_{00} &= \partial_0 X^0 \partial_0 X^0 - \partial_0 X^k \partial_0 X^k, \\ g_{0i} &= \partial_0 X^0 \partial_i X^0 - \partial_0 X^k \partial_i X^k, \\ g_{ij} &= \partial_i X^0 \partial_j X^0 - \partial_i X^k \partial_j X^k. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Из (4.62) следует, что компоненты скорости фиксированной точки неинерциальной системы отсчёта ($dx^k = 0$) равны:

$$U^k = \frac{dX^k}{dT} = \frac{\partial_0 X^k}{\partial_0 X^0}. \quad (4.65)$$

Поэтому коэффициент g_{00} можно переписать в следующем виде:

$$g_{00} = (\partial_0 X^0)^2 (1 - \mathbf{U}^2), \quad (4.66)$$

где $\mathbf{U}^2 = (U^1)^2 + (U^2)^2 + (U^3)^2$. Определяя собственное время часов при помощи интервала ds в котором $dx^i = 0$, имеем:

$$d\tau_0 = \sqrt{g_{00}} dt = \sqrt{1 - \mathbf{U}^2} \partial_0 X^0 dt = \sqrt{1 - \mathbf{U}^2} dT,$$

где в последнем равенстве подставлено dT (4.62) при $dx^i = 0$. Таким образом, и в общем случае мы имеем релятивистское замедление времени.

Иногда удобнее использовать частный случай преобразований:

$$T = t, \quad \mathbf{X} = \mathbf{R}(t, x^1, x^2, x^3), \quad (4.67)$$

где функция $\mathbf{R}(t, x^i)$ задает траекторию $\mathbf{X}(T) = \mathbf{R}(T, x^i)$ движения данной точки ($x^i = const$) неинерциальной системы относительно лабораторной. Соответствующий им интервал равен:

$$ds^2 = (1 - \mathbf{U}^2) dt^2 - 2(\mathbf{U} \partial_i \mathbf{R}) dt dx^i - (\partial_i \mathbf{R} \partial_j \mathbf{R}) dx^i dx^j, \quad (4.68)$$

где $\mathbf{U} = \partial_0 \mathbf{R} = \partial \mathbf{R} / \partial t = \partial \mathbf{R} / \partial T$ – скорость точки неинерциальной системы отсчёта в лабораторной системе.

• Рассмотрим ещё один специальный, но важный класс неинерциальных систем отсчёта (НИСО), в которых интервал между двумя событиями имеет простой вид. Пусть начало НИСО движется вдоль оси X лабораторной системы с переменной скоростью. Запишем линейные по координате x преобразования [13]:

$$T = \gamma v x + \int_0^t \gamma dt, \quad X = \gamma x + \int_0^t \gamma v dt, \quad Y = y, \quad Z = z, \quad (4.69)$$

где $v = v(t)$ произвольная функция времени и $\gamma = \gamma(t) = 1/\sqrt{1-v^2}$. Если скорость v постоянна, то (4.69) приводят к преобразованиям Лоренца. В общем же случае имеем:

$$dT = \gamma(dt + v dx) + \gamma^3 \dot{v} x dt, \quad dX = \gamma(dx + v dt) + \gamma^3 v \dot{v} x dt,$$

где учтено, что

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 v \dot{v}, \quad \frac{d(\gamma v)}{dt} = \gamma^3 \dot{v}$$

и точка – производная по t . Подставляя эти дифференциалы в интервал лабораторной системы $ds^2 = dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2$, получаем:

$$ds^2 = (1 + \gamma^2 \dot{v} x)^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (4.70)$$

Таким образом, в этой системе нетривиальное значение имеет только g_{00} . При $\gamma^2 \dot{v} = a = \text{const}$, мы возвращаемся к жесткой равноускоренной системе отсчета в координатах Меллера, для которой:

$$v(t) = \text{th}(at), \quad \gamma(t) = \text{ch}(at). \quad (4.71)$$

Подстановка этой скорости в (4.69), дает (4.56).

В общем случае произвольная фиксированная ($dx = 0$) точка системы с координатой x движется относительно лабораторной системы отсчета со скоростью:

$$U(T) = \frac{dX}{dT} = v(t),$$

где в функции $v(t)$ необходимо перейти от координатного времени t к лоренцевому времени T лабораторной системы, которое находится из первого преобразования (4.69) и, вообще говоря, зависит от x .

Жесткая равноускоренная система (4.56) из всего класса поступательно движущихся НИСО (4.69) выделяется тем, что она имеет не только евклидовый вид у пространственной части интервала $dx^2 + dy^2 + dz^2$, но и постоянное собственное время (g_{00} зависит от координаты x , но не зависит от времени t).

• К преобразованиям (4.69) можно прийти рассматривая сопутствующую к НИСО инерциальную систему отсчета (ИСО). Такая система в данный момент времени имеет такую же скорость относительно лабораторной системы как и скорость наблюдателя расположенного в начале НИСО. Два относительно неподвижных наблюдателя в НИСО и ИСО находящиеся рядом имеют одинаковые эталоны времени и длины.

Пусть начало НИСО в лабораторной системе отсчета $S_0 : (T, X)$ имеет скорость $U(T)$. К моменту времени T_0 его координата равна

$$X_0 = \int_0^{T_0} U(T) dT = \int_0^{\tau} \gamma(\tau) U(\tau) d\tau,$$

где во втором равенстве совершен переход к собственному времени начала $d\tau = \sqrt{1 - U^2(T)} dT$ или $dT = \gamma(\tau) d\tau$ и, как обычно, $\gamma = 1/\sqrt{1 - U^2}$. Момент времени T_0 также выражается через интеграл по собственному времени:

$$T_0 = \int_0^{T_0} dT = \int_0^{\tau} \gamma(\tau) d\tau.$$

Если в момент времени T_0 часы сопутствующей системы отсчета $S'_0 : (T', X')$ в точке $X' = 0$ показывают время $T' = 0$, то преобразования между S'_0 и S_0 можно записать следующим образом:

$$T = \int_0^{\tau} \gamma d\tau + \gamma (T' + UX'), \quad X = \int_0^{\tau} \gamma U d\tau + \gamma (X' + UT').$$

Преобразования (4.69) получаются, если при $T' = 0$ координаты точек НИСО совпадают с координатами сопутствующей ИСО, а координатное время НИСО равно собственному времени: $T' = 0$, $X' = x$, $t = \tau$.

В случае произвольного движения $\mathbf{v}(t)$ начала неинерциальной системы в пространстве можно написать более общее преобразование Лоренца-Мёллера-Нельсона:

$$T = \gamma \mathbf{vr} + \int_0^t \gamma dt, \quad \mathbf{X} = \mathbf{r} + \frac{\gamma - 1}{v^2} (\mathbf{vr}) \mathbf{v} + \int_0^t \gamma \mathbf{v} dt, \quad (4.72)$$

интервал которого в координатах (t, \mathbf{r}) предлагается найти в качестве упражнения ($\ll H_{30}$). Анализ физики в такой системе можно найти в работе [20].

4.6 Криволинейный базис

• В инерциальных системах отсчета для нумерации событий удобно использовать *лоренцевы координаты* $X^\alpha = \{T, \mathbf{R}\} = \{T, X, Y, Z\}$, где T – физическое время, а $\mathbf{R} = \{X, Y, Z\}$ – декартовы координаты события. В лоренцевых координатах интервал между двумя бесконечно близкими событиями равен $ds^2 = dT^2 - d\mathbf{R}^2 = \eta_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta$, где $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ – диагональный метрический тензор. Данное событие можно наблюдать и из неинерциальной системы отсчета, координаты-время которой будем обозначать маленьким шрифтом x^α и называть *криволинейными координатами*. Интервал между событиями в этих координатах выражается, в общем случае, через недиагональный метрический тензор $g_{\alpha\beta}$:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Напомним, что 4-вектор A (обозначаем прямым шрифтом) является *физическим объектом* и не зависит от выбора системы координат (это “стрелочка” в 4-пространстве). Однако, его компоненты A^α зависят от конкретного координатного описания пространства (системы отсчета). Чтобы это явным образом выразить, введем в каждой точке пространства событий, нумерующихся лоренцевыми координатами, четыре 4-вектора: n_0, n_1, n_2, n_3 (индекс – это номер вектора!), которые назовем *базисом*. Произведение этих векторов равно метрическому тензору $\eta_{\alpha\beta}$ и по ним можно разложить любой 4-вектор (см. стр. 133):

$$n_\alpha \cdot n_\beta = \eta_{\alpha\beta}, \quad A = A^\alpha n_\alpha, \quad A \cdot n_\alpha = \eta_{\alpha\beta} A^\beta = A_\alpha.$$

Аналогично в криволинейных координатах вводится *криволинейный базис*:

$$e_\alpha \cdot e_\beta = g_{\alpha\beta}, \quad A = a^\alpha e_\alpha, \quad a_\alpha = g_{\alpha\beta} a^\beta = A \cdot e_\alpha.$$

Таким образом, 4-вектор A в лоренцевом базисе имеет компоненты (проекции на базис) равные A^α . В криволинейном базисе *этот же* вектор имеет уже другие компоненты a^α . Ситуация полностью аналогична обычному трёхмерному пространству в котором можно вводить различные базисы и раскладывать по ним 3-вектор [1].

В общем случае векторы базиса e_α неортогональны. Поэтому удобно ввести дополнительную четверку векторов e^0, e^1, e^2, e^3 которые будут им ортогональны:

$$e^\alpha \cdot e_\beta = \delta_\beta^\alpha, \quad e^\alpha \cdot e^\beta = g^{\alpha\beta}, \quad e^\alpha = g^{\alpha\beta} e_\beta, \quad A = a_\alpha e^\alpha.$$

Эти векторы образуют *взаимный базис*, коэффициенты разложения по которому являются ковариантными компонентами 4-вектора a_α .

• Рассмотрим 4-вектор dX бесконечно малого смещения в пространстве событий, связывающий два близких события. Его можно разложить по любому базису и его компонентами будут дифференциалы координат:

$$dX = n_\beta dX^\beta = e_\alpha dx^\alpha. \quad (4.73)$$

Квадрат этого вектора равен интервалу между событиями:

$$ds^2 = dX \cdot dX = (e_\alpha \cdot e_\beta) dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Фиксируя в (4.73) все координаты x^α кроме одной, получаем связь:

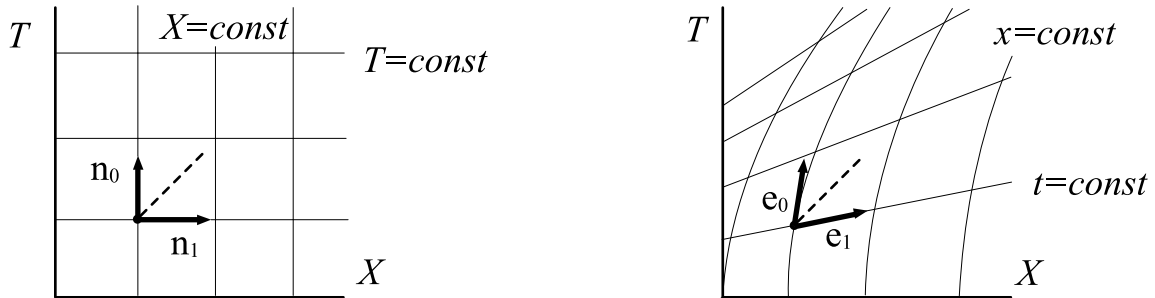
$$e_\alpha = \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\alpha} n_\beta \equiv \partial_\alpha X^\beta n_\beta.$$

Так, для жесткой равноускоренной системы отсчета: $aT = \text{sh}(at) e^{ax}$, $aX = \text{ch}(at) e^{ax} - 1$, имеем:

$$\begin{cases} e_t \equiv e_0 = \frac{\partial T}{\partial t} n_0 + \frac{\partial X}{\partial t} n_1 = [n_0 \text{ch}(at) + n_1 \text{sh}(at)] e^{ax}, \\ e_x \equiv e_1 = \frac{\partial T}{\partial x} n_0 + \frac{\partial X}{\partial x} n_1 = [n_0 \text{sh}(at) + n_1 \text{ch}(at)] e^{ax}. \end{cases} \quad (4.74)$$

Из $n_0^2 = -n_1^2 = 1$ и $n_0 \cdot n_1 = 0$ следует: $e_t^2 = -e_x^2 = e^{2ax}$, $e_t \cdot e_x = 0$, что даёт интервал в этой системе: $ds^2 = e^{2ax} (dt^2 - dx^2)$.

Векторам базиса можно придать наглядный смысл на псевдоевклидовой плоскости. Для этого введем на ней координатные сетки, на линиях которых данная координата постоянна (см. стр. 215). В лоренцевых координатах (T, X) эта сетка прямоугольна. На этих же осях (T, X) сетка $t = \text{const}$ и $x = \text{const}$ будет изображаться кривыми линиями:



Базисные векторы касательны к соответствующим координатным линиям, что следует из определения $dX = e_\alpha dx^\alpha$ (e_0 пропорционален dX при изменении x^0 , и т.д.). Они зависят от точки в 4-пространстве и имеют различную ориентацию и длину для различных точек (в отличие от n_0, n_1). Визуальная неортогональность e_0 и e_1 связана со сложностью отображения псевдоевклидового пространства на евклидовой бумаге (см. стр. 127). Компоненты двух ортогональных векторов $a \cdot b = 0$ связаны следующим образом: $a^0 b^0 = a^1 b^1$. Поэтому медиана, проведенная между ортогональными векторами образует с осью T угол 45° , т.е является траекторией светового сигнала (пунктир на рисунках).

• Разберемся теперь с законами преобразований различных величин при изменении системы криволинейных координат. Рассмотрим две такие системы отсчёта и разложим вектор смещения в пространстве событий по базисам каждой из них:

$$dX = e_\alpha dx^\alpha = e'_\alpha dx'^\alpha.$$

Из этого соотношения следует следующая связь между базисами:

$$e'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} e_\beta, \quad e_\alpha = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} e'_\beta. \quad (4.75)$$

По правилу вычисления сложной производной имеем:

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^\beta} = \delta_\beta^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\beta}, \quad \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\beta}, \quad (4.76)$$

где δ_β^α – символы Кронекера, а по индексу γ проводится суммирование. Поэтому $\partial x^\alpha / \partial x'^\beta$ – матрица, обратная к $\partial x'^\alpha / \partial x^\beta$.

Преобразования векторов взаимного базиса имеют вид:

$$e'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} e^\beta, \quad e^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} e'^\beta. \quad (4.77)$$

Эти соотношения соответствуют определению $e^\alpha \cdot e_\beta = \delta_\beta^\alpha$ и условиям (4.76) на матрицы преобразований. Умножая их на e_γ и e'_γ , соответственно, получаем следующее представление для матриц преобразования:

$$e'^\alpha \cdot e_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}, \quad e^\alpha \cdot e'_\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta}. \quad (4.78)$$

Произвольный 4-вектор A является физическим объектом, который может быть разложен по каждому базису:

$$A = e_\alpha A^\alpha = e'_\alpha A'^\alpha.$$

Умножим обе части на e'^β или e^β . При помощи (4.78) получается закон преобразования контравариантных компонент вектора:

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta, \quad A^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} A'^\beta. \quad (4.79)$$

Аналогично находятся преобразования ковариантных компонент:

$$A'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} A_\beta, \quad A_\alpha = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} A'_\beta. \quad (4.80)$$

В них стоят обратные матрицы, по сравнению с преобразованиями контравариантных компонент.

Для запоминания выражений (4.79), (4.80) отметим, что контравариантные компоненты вектора A^α преобразуются также как дифференциал координат dx^α , а ковариантные компоненты A_α , как частная производная ∂_α . Обратим внимание, что соотношения (4.75) имеют смысл линейного разложения *вектора* базиса по векторам другого базиса. Похожие на них соотношения (4.79), (4.80) – это разложение не векторов, в *компонент* вектора.

Как и должно быть, произведение двух 4-векторов является инвариантом преобразований (4.79):

$$A \cdot B = A'^\alpha B'_\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} A^\beta B_\gamma = \delta_\beta^\gamma A^\beta B_\gamma = A^\beta B_\beta.$$

Естественно, все полученные соотношения справедливы и для лоренцевых координат в различных инерциальных системах отсчета. Эти системы связаны между собой линейными преобразованиями Лоренца:

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta,$$

где коэффициенты Λ^α_β являются функциями относительной скорости и углов поворота декартовых осей. Для такой матрицы, не зависящей от координат, имеем:

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = \Lambda^\alpha_\beta.$$

Аналогично компонентам 4-векторов, определяются законы преобразования тензоров при переходе в другую систему отсчета. Тензор может иметь произвольное число верхних и нижних индексов. По каждому из них он преобразуется как компоненты контравариантного или ковариантного вектора. Например:

$$F'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} F^{\alpha\beta}.$$

Также записываются преобразования для $F_{\mu\nu} \sim A_\mu B_\nu$, $F^\mu_\nu \sim A^\mu B_\nu$ (тензоры второго ранга) и тензоров более высокого ранга, где тильда означает фразу “преобразуются как”. В частности, метрический тензор является тензорной величиной ($A \cdot B = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta$ – инвариант). Например, преобразования от лоренцевых координат X^α к криволинейным x^α имеют вид:

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\beta} \eta_{\mu\nu}.$$

Это же соотношение, расписанное по компонентам (4.64) мы получили на стр. 233.

4.7 Физические длина и время

Запишем при помощи метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ общее выражение для бесконечно малого расстояния в пространстве-времени:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{00} dt^2 + 2g_{0i} dt dx^i + g_{ij} dx^i dx^j,$$

где греческие индексы α, β изменяются от 0 до 3, а латинские i, j от 1 до 3, $dx^\alpha = \{dt, dx^i\}$ и учтено, что $g_{0i} = g_{i0}$. Выделим в этом выражении полный квадрат для членов, зависящих от дифференциала по координатному времени:

$$ds^2 = \left(\sqrt{g_{00}} dt + \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}} dx^i \right)^2 - \left(\frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij} \right) dx^i dx^j. \quad (4.81)$$

Этот интервал формально имеет вид расстояния в псевдоевклидовом пространстве:

$$ds^2 = \delta\tau^2 - \delta l^2,$$

где бесконечно малые величины

$$\delta\tau = \sqrt{g_{00}} dt + \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}} dx^i, \quad \delta l^2 = \left(\frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij} \right) dx^i dx^j \quad (4.82)$$

будем называть *физическим временем* и квадратом *физического расстояния*. Для записи квадрата физического расстояния δl удобно ввести трёхмерный тензор

$$\gamma_{ij} = \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}, \quad \delta l^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (4.83)$$

Обратим внимание, что для обозначения бесконечно малых используется значок “ δ ”, а не “ d ”. Дело в том, что, как мы увидим ниже, величины $\delta\tau$ и δl в общем случае не являются дифференциалами.

Кроме $\delta\tau$ и δl введем понятие *собственного времени* $\delta\tau_0$ часов, находящихся в *фиксированной* точке пространства системы отсчёта. Это время равно интервалу ds между событиями для которых $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ или $\delta l = 0$:

$$\delta\tau_0 = \sqrt{g_{00}} dt. \quad (4.84)$$

Понятно, что $\delta\tau = \delta\tau_0$ при $dx^k = 0$. Как и раньше, будем считать собственное время физическим временем данных часов неинерциальной системы отсчета. Эти часы движутся относительно инерциальной системы с переменной скоростью и время на них замедляется в соответствии со стандартной релятивистской формулой.

• Для выяснения смысла δl , рассмотрим измерение радиолокационного расстояния, проводимого наблюдателем, расположенным в точке $A : (x^1, x^2, x^3)$. Расстояние он измеряет до близкой к нему точке $B : (x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$. Интервал между событиями при движении светового импульса равен нулю $ds = 0$. Поэтому из (4.81) имеем:

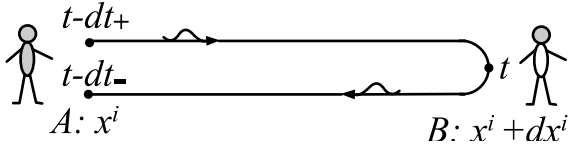
$$\sqrt{g_{00}} dt_{\pm} = -\frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}} dx^i \pm \sqrt{\delta l^2}. \quad (4.85)$$

Значение $dt_+ > 0$ соответствует движению импульса в сторону увеличения координат, а $dt_- < 0$ – в противоположную. *Координатная скорость света*, например, вдоль координаты x^1 равна ($dx^1 > 0, dx^2 = dx^3 = 0$):

$$\frac{dx^1}{dt} = \frac{g_{00}}{\pm \sqrt{g_{00}\gamma_{11}} - g_{01}}. \quad (4.86)$$

Она положительна для верхнего знака и отрицательна для нижнего (проверьте это на примере вращающейся системы отсчета).

Пусть сигнал отражается от точки B в момент времени t (по часам наблюдателя в A). Тогда он отправляется из A в $t_1 = t - dt_+ < t$ и возвращается обратно в $t_2 = t - dt_- > t$. Половина интервала собственного времени $\sqrt{g_{00}}(t_2 - t_1)/2$ между этими двумя событиями равна:



$$\frac{\sqrt{g_{00}}(dt_+ - dt_-)}{2} = \sqrt{\delta l^2}.$$

Таким образом, физическое расстояние δl имеет смысл *радиолокационного расстояния* которое измеряется наблюдателем в точке (x^1, x^2, x^3) в его непосредственной окрестности.

Смысл величины δl можно прояснить и при помощи следующих рассуждений. Пусть в данный момент времени в окрестности фиксированной точки НИСО находится сопутствующая к ней ИСО. Относительно неё *эта* точка НИСО имеет нулевую скорость $U^k = 0$ и из (4.65), стр. 233 следует, что $\partial_0 X^k = 0$. Эта производная равна нулю при заданных значениях (t, x^i) , для которых имеем следующий метрический тензор (4.64):

$$g_{00} = (\partial_0 X^0)^2, \quad g_{0i} = \partial_0 X^0 \partial_i X^0, \quad g_{ij} = \partial_i X^0 \partial_j X^0 - \partial_i X^k \partial_j X^k,$$

откуда: $\partial_i X^k \partial_j X^k = \gamma_{ij}$. С другой стороны, расстояние в ИСО равно

$$\delta l^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dX^k dX^k = \partial_i X^k \partial_j X^k dx^i dx^j = \gamma_{ij} dx^i dx^j.$$

Использование *одинаковых линеек* наблюдателем в НИСО и в сопутствующей ему ИСО приводит к одинаковому расстоянию. В отличие от ИСО величины γ_{ij} являются функциями (t, x^k) и меняются от точки к точке (в которых надо использовать *другие* сопутствующие ИСО).

• Физическое время $\delta\tau$ при $dx^i \neq 0$ соответствует разнице собственных времен между двумя бесконечно близкими, но *различными* синхронизированными часами. Действительно, рассмотрим стандартную процедуру синхронизации. Пусть сигнал отправляется в момент времени $t_1 = t - dt_+$ из точки $A = (x^1, x^2, x^3)$, в точку $B = (x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$. Её он достигает в момент времени t и возвращается обратно к A в момент $t_2 = t - dt_-$. Все эти времена являются координатными. Они связаны с собственным временем часов τ_A и τ_B , находящихся в точках A и B . По определению, часы идут синхронно, если выполняется соотношение:

$$\tau_B(t) = \frac{\tau_A(t_1) + \tau_A(t_2)}{2}. \quad (4.87)$$

При бесконечно малом изменении координатного времени, для физического собственного времени часов, находящихся в точке A , в соответствии с (4.84), имеем:

$$\tau_A(t + dt) = \tau_A(t) + \delta\tau_A = \tau_A(t) + \sqrt{g_{00}} dt.$$

Учитывая значения dt_{\pm} , найденные при проведении радиолокационного измерения, из (4.87) получаем:

$$\tau_B(t) = \tau_A(t) + \frac{g_{0i} dx^i}{\sqrt{g_{00}}}. \quad (4.88)$$

Это соотношение устанавливает правило синхронизации отсчета времени между двумя бесконечно близкими часами, как функцию координатного времени t наблюдателя в точке A .

Когда часы синхронизированы можно говорить о разности времени между событиями, произошедшими в различных точках. Так, пусть из точки A в момент координатного времени t посылается световой сигнал в точку B , который туда приходит в момент $t + dt$. Разница собственных времен часов в точках B и A будет равна физическому времени из (4.82):

$$\begin{array}{c} t \\ x^i \end{array} \textcircled{A} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} t+dt \\ x^i+dx^i \end{array} \textcircled{B} \quad \delta\tau = \tau_B - \tau_A = \sqrt{g_{00}} dt + \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}} dx^i.$$

С помощью двух синхронизированных часов можно определить скорость света при его распространении от A к B . Она равна $\delta l / \delta\tau = 1$, где учтено, что для света $ds^2 = \delta\tau^2 - \delta l^2 = 0$. Таким образом определенная *физическая скорость света* всегда равна единице (или “ c ” при восстановлении фундаментальной константы скорости). При этом *координатная скорость* dx^i / dt светового импульса (4.86), вообще говоря, отличается от единицы и может быть сколь угодно большой.

• При помощи процедуры (4.88) можно ввести функцию $\tau(t, x^k)$, позволяющую по координатам события измеренных данным наблюдателем A определить текущее значение собственного времени другого наблюдателя, находящегося рядом с событием. Так, выше в (4.88) $\tau_A(t) = \tau(t, x^i)$ и $\tau_B(t) = \tau(t, x^i + dx^i)$. Когда введение такой функции возможно?

Дифференциал функции $\tau = \tau(t, x^i)$ нескольких переменных равен:

$$d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial t} dt + \frac{\partial \tau}{\partial x^i} dx^i.$$

Поэтому $\delta\tau$ (4.82) будет дифференциалом, если:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \sqrt{g_{00}}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x^i} = \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}. \quad (4.89)$$

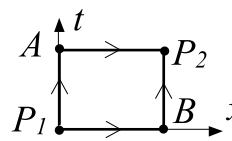
Частные производные должны быть перестановочны. Возьмем в (4.89) производную от $\partial\tau/\partial t$ по x^i , а от $\partial\tau/\partial x^i$ по t и приравняем их. Аналогично с производными по x^i и x^j :

$$\frac{\partial \sqrt{g_{00}}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{g_{0j}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}. \quad (4.90)$$

Если (4.90) не выполняются, то физическое время $\delta\tau$ не является полным дифференциалом. В этом случае интеграл между двумя событиями P_1 и P_2 в 4-пространстве

$$\tau = \int_{P_1}^{P_2} \delta\tau = \int_{P_1}^{P_2} \left[\sqrt{g_{00}} dt + \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}} dx^i \right]$$

зависит от пути интегрирования. Так, в жесткой равноускоренной системе отсчета (4.57), стр. 231 имеем следующий криволинейный интеграл:



$$\tau = \int_{P_1}^{P_2} [e^{ax} dt + 0 \cdot dx].$$

Если его вычислить между $P_1 = (0, 0)$ и $P_2 = (t, x)$ сначала по линии $P_1 A P_2$, то получится $\tau = t$. Интеграл же по пути $P_1 B P_2$ даёт другое значение $\tau = e^{ax} t$. Поэтому часы с различными координатами x синхронизированы быть не могут. Физически это связано с различным ходом времени в равноускоренной системе. Начальная синхронизация часов стоящих в космопортах кораблей со временем “разрушается” и соотношение (4.88) не может выполняться всё время.

• Условия периодичности для координат x^i могут накладывать дополнительные ограничения на возможность синхронизации часов. Запишем физическое время для вращающейся системы отсчета (4.60):

$$\delta\tau = \sqrt{1 - (\omega r)^2} dt - \frac{\omega r^2 d\phi}{\sqrt{1 - (\omega r)^2}}.$$

Для часов (наблюдателей), находящихся на одинаковом расстоянии от центра ($r = \text{const}$), это выражение является дифференциалом:

$$\tau = \sqrt{1 - (\omega r)^2} t - \frac{\omega r^2 \phi}{\sqrt{1 - (\omega r)^2}}.$$

Такое выражение для физического времени мы получили при выборе условия синхронизации часов в форме (4.36), стр. 220 (на стр. 220 физическое время обозначалось как t , а T – было временем инерциальной системы отсчета, которое в координатах Борна совпадает с координатным временем t этого раздела).

Не смотря на то, что мы имеем полный дифференциал, функция $\tau = \tau(t, \phi)$ не является однозначной в силу эквивалентности точек $\phi = 0$ и $\phi = 2\pi$. Поэтому провести синхронизацию всех часов, вращающихся по окружности, не представляется возможным. Если r не считать константой, то $\delta\tau$ не будет полным дифференциалом. Причина аналогична ситуации в жесткой равноускоренной системе: течение собственного времени точек, находящихся на разном расстоянии от центра, различно.

Физическая длина для вращающейся системы имеет вид:

$$\delta l^2 = \frac{\omega^2 r^4 d\phi^2}{1 - \omega^2 r^2} + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 = dr^2 + \frac{r^2 d\phi^2}{1 - \omega^2 r^2} + dz^2. \quad (4.91)$$

Этот результат мы получили на стр. 225, рассматривая радиолокационный эксперимент, проводимый наблюдателями на вращающихся вокруг общего центра кораблях.

Обратим внимание, что физическая длина не зависит от времени. Это означает, что наблюдатель в точке (r, ϕ, z) , измеряя радиолокационное расстояние в соседнюю с ним точку, будет получать неизменное значение. Такая система отсчета является *локально жесткой*. В общем случае, система отсчета, получающаяся из инерциальной преобразованиями $T = t$, $\mathbf{X} = \mathbf{R}(t, x^1, x^2, x^3)$, $\mathbf{V} = \partial_0 \mathbf{R}$, будет локально жесткой, если тензор

$$\gamma_{ij} = \frac{(\mathbf{V} \partial_i \mathbf{R})(\mathbf{V} \partial_j \mathbf{R})}{1 - \mathbf{V}^2} + \partial_i \mathbf{R} \partial_j \mathbf{R}, \quad (4.92)$$

не зависит от времени. Поступательно ускоренные системы (4.69) при любой функции $v(t)$ являются локально жесткими.

• Невозможность синхронизации часов типична для неинерциальных систем отсчёта. Эта проблема, как мы знаем, отсутствует в инерциальных системах. Рассмотрим в качестве примера вывод преобразований Лоренца при помощи координатных преобразований Галилея [9]:

$$T = t, \quad X = x + vt. \quad (4.93)$$

Величины T и X будем считать физическим временем и координатой события в системе $S_0 : (T, X)$. Точки системы $S : (t, x)$ движутся относительно S_0 со скоростью v . Это учтено в преобразовании $X = x + vt$, из которого (в силу $t = T$) следует, что в инерциальной системе S_0 траектория точки с координатой x имеет вид $X = x + vT$. Подобное преобразование является примером общего случая (4.67), стр. 233.

Преобразования (4.93) являются достаточно произвольными, поэтому числа (t, x) – это координатные величины. Чтобы установить их связь с физическими величинами, запишем интервал $ds^2 = dT^2 - dX^2$ в новых координатах:

$$ds^2 = (1 - v^2) dt^2 - 2v dt dx - dx^2, \quad (4.94)$$

откуда, используя общие формулы или сразу выделяя полный квадрат по dt , имеем:

$$\delta\tau = \sqrt{1 - v^2} dt - \frac{v dx}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \delta l = \frac{dx}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Коэффициенты у дифференциалов dt и dx в $\delta\tau$ являются константами, поэтому условия возможности синхронизации часов (4.90) выполняются и $\delta\tau$, δl можно проинтегрировать:

$$\tau = t \sqrt{1 - v^2} - \frac{vx}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad l = \frac{x}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Выражая (t, x) через (τ, l) и подставляя их в (4.93), получаем преобразования Лоренца:

$$T = \frac{\tau + vl}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad X = \frac{x + v\tau}{\sqrt{1 - v^2}},$$

связывающие уже не координатные величины, а физические. Координатная скорость света получается из условия $ds = 0$:

$$\frac{dx}{dt} = \pm 1 - v.$$

Такая скорость при движении против оси x (знак минус) по модулю больше единицы. При этом, конечно, физическая скорость света $\delta l / \delta\tau$ по-прежнему равна единице.

• Переход к новому координатному времени и другому способу нумерации точек 3-пространства

$$x'^0 = x'^0(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad x'^i = x'^i(x^1, x^2, x^3) \quad (4.95)$$

не меняет системы отсчета. Поэтому физические время и длина не должны измениться. Продемонстрируем это. Прежде всего запишем изменение физического времени в следующем виде:

$$\delta\tau = dx \cdot e_0 / |e_0|. \quad (4.96)$$

Действительно, так как $dx = dx^\alpha e_\alpha$ и $e_\alpha e_\beta = g_{\alpha\beta}$, имеем:

$$dx \cdot e_0 = dx^\alpha e_\alpha \cdot e_0 = g_{0\alpha} dx^\alpha = g_{00} dt + g_{0i} dx^i.$$

Разделив на $|e_0| = \sqrt{e_0 \cdot e_0} = \sqrt{g_{00}}$, получаем $d\tau$, равное проекции вектора смещения dx в 4-пространстве на единичный 4-вектор в направлении базисного вектора e_0 .

При преобразованиях (4.95), базисный вектор e_0 не меняет своей ориентации, так как из (4.75), стр. 238 следует, что:

$$e_0 = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^0} e'_\beta = \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} e'_0.$$

В других координатах базисные векторы некоторым образом изменяются. Однако, если преобразования не меняют системы отсчёта, не меняется и единичный вектор $e_0/|e_0|$. Поэтому при преобразованиях (4.95) не меняется и $\delta\tau$ (4.96). Соответственно, в силу инвариантности интервала $ds^2 = \delta\tau^2 - \delta l^2$, не меняется и физическая длина δl . При этом, определяющий её тензор γ_{ij} , изменяется. Записывая преобразования метрического тензора

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu x'^\alpha \partial_\nu x'^\beta g'_{\alpha\beta}$$

и выделяя в нём временной и пространственные индексы (отбрасывая члены с $\partial_0 x'^i = 0$) несложно (\llcorner Н₃₁) получить:

$$\gamma_{ij} = \partial_i x'^p \partial_j x'^q \gamma'_{pq}, \quad (4.97)$$

где γ'_{ij} выражается через $g'_{\mu\nu}$ так же, как и γ_{ij} через $g_{\mu\nu}$. Таким образом, γ_{ij} – тензор относительно пространственных преобразований (4.95).

Единичный вектор $e_0/|e_0|$ имеет смысл 4-вектора скорости данной точки неинерциальной системы отсчёта. Действительно, записывая преобразование из лоренцевых координат в криволинейные (стр. 237), имеем:

$$\mathbf{u} = \frac{e_0}{|e_0|} = \frac{\partial_0 X^\beta n_\beta}{\sqrt{e_0 e_0}} = \frac{\partial_0 X^0 n_0 + \partial_0 X^i n_i}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{n_0}{\sqrt{1 - \mathbf{U}^2}} + \frac{U^i n_i}{\sqrt{1 - \mathbf{U}^2}},$$

где в последнем равенстве учтены соотношения (4.65), (4.66), стр. 233.

• Рассмотрим некоторые свойства величин γ_{ij} (4.83), определяющих физическую длину δl в неинерциальной системе отсчета.

Прежде всего матрица γ_{ij} является обратной к пространственным компонентам метрического тензора с верхними индексами g^{ij} :

$$\gamma_{jk} \gamma^{ki} = \delta_j^i, \quad \gamma^{ij} = -g^{ij}. \quad (4.98)$$

Действительно, распишем условие ортогональности метрических тензоров с верхними и нижними индексами $g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha$ для $\alpha = i, \beta = 0$:

$$g^{i0} g_{00} + g^{ik} g_{k0} = 0 \quad \Rightarrow \quad g^{i0} = -\frac{g^{ik} g_{k0}}{g_{00}}. \quad (4.99)$$

Если же $\alpha = i, \beta = j$ то, подставляя выражение для g^{i0} , получаем:

$$\delta_j^i = g^{i0} g_{0j} + g^{ik} g_{kj} = -g^{ik} \left(\frac{g_{k0} g_{0j}}{g_{00}} - g_{kj} \right) = -g^{ik} \gamma_{kj}.$$

Иногда удобно вводить 3-вектор γ , компоненты которого с верхними и нижними индексами определяются следующим образом:

$$\gamma_i = -\frac{g_{0i}}{g_{00}}, \quad \gamma^i = -g^{0i}. \quad (4.100)$$

В соответствии с (4.99) и (4.98) эти компоненты связаны друг с другом при помощи 3-мерной метрики γ_{ij} так, что $\gamma_i = \gamma_{ij} \gamma^j$ и $\gamma^i = \gamma^{ij} \gamma_j$. В рамках данной системы отсчёта координатные преобразования вида $x'^0 = x^0, x'^i = x^i(x^1, x^2, x^3)$ не меняют их свёртку:

$$\gamma^2 = \gamma_i \gamma^i = \gamma_{ij} \gamma^i \gamma^j = \gamma^{ij} \gamma_i \gamma_j = \frac{1}{g_{00}} - g^{00}, \quad (4.101)$$

где последнее равенство доказывается расписыванием условия ортогональности $g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha$ для $\alpha = \beta = 0$.

Прямым вычислением определителей можно также проверить следующее соотношение:

$$g = -g_{00} \gamma, \quad (4.102)$$

где $g = \det(g_{\alpha\beta})$ и $\gamma = \det(\gamma_{ij})$, т.е. слева стоит определитель матрицы 4x4, составленной из коэффициентов $g_{\alpha\beta}$ а справа определитель матрицы 3x3 из коэффициентов γ_{ij} . Их отношение равно $-g_{00}$.

Отметим естественное требование *допустимости* координат $g_{00} > 0$, связанное с положительностью подкоренного выражения $\sqrt{g_{00}}$ в собственном времени (4.84). Расстояние также должно быть положительным, поэтому положительно определена форма: $\gamma_{ij} dx^i dx^j > 0$. Это приводит к положительности определителя $\gamma = \det(\gamma_{ij})$ и, в силу (4.102), к отрицательному значению определителя метрических коэффициентов $g = \det(g_{\alpha\beta})$. В частности, несложно видеть, что в лоренцевых координатах (T, X, Y, Z) мы имеем $g = -1$.

4.8 Жёсткие системы отсчёта

Жесткость (как бы мы её не определяли), как и многие другие эффекты релятивистской теории – это понятие относительное. Нежёсткая равноускоренная система (стр. 227) является хорошей иллюстрацией к этому утверждению. Относительно лабораторной системы её точки движутся по траекториям:

$$X = x + \frac{1}{a} \left[\sqrt{1 + (aT)^2} - 1 \right]. \quad (4.103)$$

При этом точки с различной координатой x имеют одинаковое собственное ускорение. Расстояние между ними в лабораторной системе отсчёта остаётся неизменным ($\Delta X = \Delta x$ не зависит от времени T). Однако, как мы видели (стр. 229), радиолокационное расстояние между двумя точками зависит от времени. Поэтому наблюдатели, связанные с такой системой отсчёта, не считают её жесткой.

Аналогично, в жесткой равноускоренной системе отсчёта из первого раздела (стр. 204), расстояние между наблюдателями не меняется со временем. Однако в лабораторной системе эти наблюдатели движутся с различными скоростями по траекториям

$$X = \frac{1}{a} \left[\sqrt{(1 + ax)^2 + (aT)^2} - 1 \right]. \quad (4.104)$$

Для неподвижных наблюдателей такая “жесткая” равноускоренная система отсчёта не выглядит жесткой (ΔX является убывающей функцией времени и расстояние между точками неинерциальной системы отсчёта уменьшается).

Обсуждая далее жесткость системы отсчёта, мы будем подразумевать, что она выполняется для наблюдателей, связанных с этой системой. Аналогично собственному времени, будем называть её *собственной жесткостью* системы отсчёта.

Отметим также, что обсуждая жесткость, мы имеем ввиду *кинематическую жесткость* системы отсчёта и связанных с ней тел. Это означает, что эффекты деформации и соответствующих сил, действующих внутри “твёрдого тела” выходят за рамки нашего рассмотрения. Жёсткая система отсчёта, представляется как совокупность точек, расстояние между которыми при движении системы в том или ином смысле остаётся неизменным. С каждой точкой мысленно связан наблюдатель, имеющий часы и линейку. Равные им эталоны времени и длины находятся у сопутствующего к нему наблюдателя в инерциальной системе. В различных точках неинерциальной системы в общем случае необходимо рассматривать различные сопутствующие инерциальные системы отсчёта.

Возможны по крайней мере три определения собственной жесткости:

- I. *Сопутствующая жесткость*: все точки системы отсчёта имеют нулевую скорость в сопутствующей к одной из точек инерциальной системе отсчёта.
- II. *Локальная жесткость*: тензор $\gamma_{ij} = -g_{ij} + g_{0i}g_{0j}/g_{00}$, определяющий элемент бесконечно малой физической длины, не зависит от времени.
- III. *Глобальная жесткость*: радиолокационное расстояние между любыми двумя точками системы отсчёта не меняется со временем.

Эти три определения не эквивалентны друг другу. Особенно неожиданным это может показаться по отношению к последним двум определениям. В основе процедуры, дающей γ_{ij} лежит радиолокационное измерение расстояния между двумя бесконечно близкими точками. Однако, оказывается, что из его постоянства, вообще говоря, не следует глобальной жесткости системы отсчёта. То есть, бесконечно малые радиолокационные расстояния могут быть постоянными, и при этом расстояние между удалёнными точками системы отсчёта изменяться со временем. Мы продемонстрируем это ниже на примере неинерциальной системы, движущейся поступательно с произвольной скоростью.

В жесткой равноускоренной системе отсчёта все три критерия выполняются. Постоянство радиолокационного расстояния в первом разделе было использовано для определения траекторий движения такой системы. Её метрика в координатах Мёллера

$$ds^2 = (1 + ax)^2 dt^2 - dx^2 - dy^2$$

приводит евклидовой физической длине

$$\delta l^2 = dx^2 + dy^2,$$

которая не зависит от времени. Поэтому критерий локальной жесткости также выполняется. Ниже мы увидим, что эта система является жесткой и в сопутствующем смысле. В этом отношении она выделяется из всего разнообразия неинерциальных систем отсчёта.

Вращающаяся система жестка и в локальном (см. (4.91), стр. 244) и в глобальном смысле (см. стр. 225). Однако, для неё не выполняется критерий сопутствующей жесткости. В движущейся с подходящей скоростью инерциальной системе, нулевую скорость будет иметь только одна точка вращающегося диска. Это, очевидно, справедливо как в теории относительности, так и в классической механике.

• Получим при помощи критерия *сопутствующей жесткости* закон движения точек жесткой равноускоренной системы отсчёта. Пусть произвольная точка x системы движется по траектории:

$$X = x + \frac{1}{a_x} \left[\sqrt{1 + (a_x T)^2} - 1 \right], \quad (4.105)$$

где a_x – константы, зависящие от начального положения точки $x = X(0)$. Избавимся в траектории от корня, переписав её в следующем виде:

$$(1 - a_x x)^2 + 2a_x (1 - a_x x) X = 1 + a_x^2 (T^2 - X^2). \quad (4.106)$$

Подставим в это уравнение преобразования Лоренца между лабораторной системой S_0 и инерциальной системой $S'_0 : \{T', X'\}$, движущейся относительно S_0 с постоянной скоростью U_0 :

$$\begin{cases} T = \gamma_0 (T' + U_0 X') \\ X = \gamma_0 (X' + U_0 T') \end{cases},$$

где $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - U_0^2}$. В правой части (4.106) стоит инвариант, поэтому:

$$(1 - a_x x)^2 + 2a_x (1 - a_x x) \gamma_0 (X' + U_0 T') = 1 + a_x^2 (T'^2 - X'^2).$$

Для данной точки ($x = const$) возьмём производную левой и правой части по T' , положив

$$U' = \frac{dX'}{dT'} = 0$$

(в сопутствующей инерциальной системе скорость точки x равна нулю). В результате, получаем:

$$T' = \frac{1 - a_x x}{a_x} \gamma_0 U_0. \quad (4.107)$$

Такое время должно быть одинаковым для любых координат x (все точки S в S'_0 неподвижны). Это возможно, если в (4.107) множитель при $\gamma_0 U_0$ не зависит от x :

$$a_x = \frac{a}{1 + ax}, \quad (4.108)$$

где $a = const$ – собственное ускорение точки $x = 0$. Подставляя a_x в (4.105), получаем (4.104) Такая система точек обладает сопутствующей жесткостью и образует жесткую равноускоренную систему, рассмотренную в первых двух разделах главы.

• Рассмотрим теперь систему, движущуюся с произвольной скоростью вдоль оси X (стр. 234). Её интервал в пространстве-времени имеет вид $ds^2 = [1 + w(t)x]^2 dt^2 - dx^2 - dy^2$ и приводит к евклидовой физической длине, следовательно, такая система отсчёта является *локально жёсткой*. Разберёмся, однако, выполняется ли для неё критерий *глобальной жёсткости*. Равенство нулю интервала $ds^2 = 0$ даёт следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = \pm(1 + wx). \quad (4.109)$$

Пусть световой сигнал отправляется в момент времени t_1 из начала системы отсчёта $x = 0$. В момент времени t_2 он туда возвращается, отразившись от точки с координатой $x > 0$. Рассмотрим движение в сторону возрастания координаты (знак плюс). Так как $x(t_1) = 0$, из (4.109) следует, что в момент времени $t = t_1$:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_1} = 1, \quad \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=t_1} = \left(\frac{dw}{dt} x + \frac{dx}{dt} w \right)_{t=t_1} = w(t_1),$$

где вторая производная получена дифференцированием (4.109). Поэтому траектория удаляющегося сигнала имеет вид:

$$x_+(t) \approx (t - t_1) + w(t_1) \frac{(t - t_1)^2}{2} + \dots$$

Аналогично находится траектория приближающегося к началу отсчёта сигнала $x(t_2) = 0$, соответствующая в (4.109) знаку минус:

$$x_-(t) \approx (t_2 - t) + w(t_2) \frac{(t_2 - t)^2}{2} + \dots$$

При отражении эти две траектории совпадают: $x_+(t) = x_-(t) = x$. Решая квадратные уравнения относительно $t - t_1 > 0$ и $t_2 - t > 0$ и складывая решения, получаем:

$$t_2 - t_1 \approx \frac{\sqrt{1 + 2w_1 x} - 1}{w_1} + \frac{\sqrt{1 + 2w_2 x} - 1}{w_2},$$

где $w_1 = w(t_1)$ и $w_2 = w(t_2)$. При малом интервале времени $t_2 - t_1$ координата точки отражения является величиной того же порядка малости. Поэтому разложим корень до малых x^2 включительно:

$$l = \frac{t_2 - t_1}{2} \approx x - \frac{w_1}{2} x^2, \quad (4.110)$$

где член $(w_1 + w_2)x^2$ с точностью до второго порядка малости заменен на $2w_1x^2$. Так как для наблюдателя в начале системы отсчёта $x = 0$ собственное время совпадает с координатным, полученное выражение является радиолокационным расстоянием к точке с координатой x .

В первом порядке малости это расстояние постоянно, что отражено в постоянстве физической длины $\delta l^2 = dx^2 + dy^2$. Однако уже следующее приближение по x оказывается зависящим от времени посылки сигнала, если только величина $w(t)$ не является константой. Поэтому постоянство бесконечно малого радиолокационного расстояния $\delta l^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j$, вообще говоря, не гарантирует, что конечное радиолокационное расстояние между двумя точками будет постоянным (локальная жёсткость не влечёт за собой глобальной жёсткости). Это свойство неинерциальных систем отсчёта тесно связано с другой особенностью. В жесткой равноускоренной системе в координатах Мёллера радиолокационное расстояние равно $l = \ln(1 + ax)/a$. В то же время $\delta l^2 = dx^2 + dy^2$ и при движении вдоль оси x мы, на первый взгляд, должны были бы иметь $l = x$.

Причина этих расхождений кроется в измерительном смысле физической длины $\delta l^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j$. Её получает наблюдатель, измеряя *время* распространения светового сигнала в обе стороны к бесконечно близкой к нему точке. Суммирование малых элементов δl вдоль некоторой кривой, подразумевает, что вдоль этой кривой расположено множество таких наблюдателей, каждый из которых получает своё значение δl . Однако, время для разных наблюдателей в неинерциальной системе отсчёта, в общем случае, течёт различным образом. Поэтому, сумма измерений радиолокационных расстояний в которых используются часы, расположенные в различных точках, отличается от единственного измерения такого же расстояния, проведенного одним наблюдателем по одним часам.

▷ Хорошей иллюстрацией этого утверждения является вращающаяся система отсчёта. Длину можно измерять вдоль любой линии по которой распространяется свет. Для наблюдателей, находящихся на одинаковом расстоянии от центра, темп хода часов одинаков. Пусть сигнал движется по окружности ($r = const$) от точки $\phi = 0$, до точки $\phi > 0$ и обратно. Равенство нулю интервала (4.60) приводит к уравнению:

$$\frac{d\phi}{dt} = \pm \frac{1}{r} - \omega.$$

Повторяя рассуждения на предыдущей странице, имеем:

$$l = \sqrt{g_{00}} \frac{t_2 - t_1}{2} = \frac{r\phi}{\sqrt{1 - (\omega r)^2}},$$

где множитель $\sqrt{g_{00}}$ введен, чтобы получилось физическое время. Такое же расстояние мы получим, интегрируя выражение для физической длины (4.91), стр. 244 во вращающейся системе при $r = const$.

Иная ситуация будет при движении светового сигнала вдоль радиуса ($\phi = const$). В этом случае уравнение его движения

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{1 - (\omega r)^2}$$

приводит к следующему радиолокационному расстоянию для наблюдателя, расположенного в центре вращения:

$$l = \frac{1}{\omega} \arcsin(\omega r).$$

Это выражение уже отличается от $l = r$, которое следует при интегрировании (4.91) вдоль линии $\phi = const$. Напомним, что точки вращающейся системы отсчёта, находящиеся на разном расстоянии r от оси вращения, имеют различную скорость ωr и различное замедление собственного времени.

▷ Таким образом, одинаковый темп течения времени вдоль траектории светового сигнала приводит к совпадению результата единичного радиолокационного измерения расстояния и суммы измерений бесконечно малых расстояний. Если же темп течения времени вдоль траектории различен, то результаты измерений будут отличаться.

В связи с этим отметим ещё один момент. Отклонение физической длины $\delta l^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j$ от евклидова выражения, обычно интерпретируется как неевклидовость 3-пространства в неинерциальной системе отсчёта. Этому вопросу будет посвящена глава 11. Сейчас отметим только, что подобная неевклидовость существенно отличается от неевклидовости обычных искривлённых пространств. В геометрии нет времени. Длина линии должна равняться сумме длин её бесконечно малых элементов. Однако оба эти утверждения не выполняются в неинерциальных системах отсчёта. Поэтому, рассмотрение геометрических свойств пространства, например, с метрикой (4.91) несколько формально. К примеру, физическая длина в жесткой равноускоренной системе евклидова: $\delta l^2 = dx^2 + dy^2$. Эта длина получена в результате анализа распространения света на бесконечно малое расстояние. Однако, в таком евклидовом пространстве тот же свет, распространяясь на конечные расстояния, движется не по прямым, а по искривлённым линиям.

За геометрическими свойствами метрики γ_{ij} необходимо видеть множество наблюдателей, использующих различные часы для измерения радиолокационных расстояний в своих непосредственных окрестностях. Геометрия 3-пространства неинерциальной системы, основанная на γ_{ij} , является геометрией, объединяющей такие бесконечно малые локальные измерения.

• Исторически первым понятие жёсткости в теории относительности ввёл в 1909г. Макс Борн [21]. Он рассматривал некоторое тело, каждая точка которого однозначно характеризуется (нумеруется) тремя координатами $x^i = \{x, y, z\}$ и в лабораторной системе отсчёта движется по траектории $X^\alpha = X^\alpha(\tau, x^i)$, где τ – собственное время часов, связанных с точкой. В классической механике тело считается жестким, если расстояние между двумя его точками, измеренное в данный момент времени, в дальнейшем не меняется (ниже первый рисунок). Такое определение не является релятивистски инвариантным и в любой другой системе отсчёта будет нарушено (одновременность относительна). Поэтому Борн потребовал для жесткого тела неизменности бесконечно малого расстояния в 4-пространстве в гиперплоскости, ортогональной траекториям двух соседних точек (ниже второй рисунок):



Обратим внимание, что ортогональность 4-векторов ($a^0b^0 = a^1b^1$) на евклидовой плоскости изображается перпендикулярными линиями.

Вместо жёсткой неинерциальной системы, следуя Борну, будем говорить о жёстком теле. Запишем траекторию произвольной точки такого тела относительно лабораторной системы $S_0 : \{T, X, Y, Z\}$:

$$X^\alpha = X^\alpha(\tau, x^1, x^2, x^3). \quad (4.111)$$

При этом, x^i – это координаты, однозначно определяющие фиксированную точку тела, а τ – её собственное время и, как обычно, $X^\alpha = \{T, \mathbf{X}\}$. Ниже мы используем безындексную запись в которой прямым шрифтом будут обозначаться 4-векторы (скалярное произведение $A^\alpha B_\alpha$ в такой записи имеет вид $A \cdot B$ и т.д.).

Интервал вдоль траектории движения точки совпадает с изменением её собственного времени:

$$d\tau^2 = dX^\alpha dX_\alpha = (\partial_0 X^\alpha)(\partial_0 X_\alpha) d\tau^2 \equiv (\partial_0 X)^2 d\tau^2,$$

где подставлены дифференциалы $dX^\alpha = \partial_0 X^\alpha d\tau$, записанные при постоянстве координат x^i и $\partial_0 = \partial/\partial\tau$ – производная по собственному времени. Таким образом:

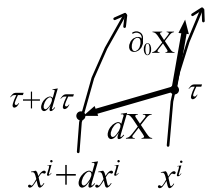
$$(\partial_0 X)^2 = 1. \quad (4.112)$$

Обратим внимание, что такое лаконичное уравнение на самом деле является краткой записью уравнения $(\partial_0 T)^2 - (\partial_0 \mathbf{X})^2 = 1$.

Рассмотрим две соседние точки с координатами x^i и $x^i + dx^i$. Положение первой точки соответствует моменту собственного времени τ , а второй: $\tau + d\tau$. Расстояние между этими точками в пространстве Минковского определяется 4-вектором:

$$dX = \partial_0 X d\tau + \partial_i X dx^i, \quad (4.113)$$

где $\partial_i = \partial/\partial x^i$. Это обычный дифференциал функции 4-х переменных τ, x^1, x^2, x^3 . Для определения значения $d\tau$, потребуем, чтобы вектор dX был ортогонален к 4-вектору $\partial_0 X$, касательному к траектории при изменении собственного времени:



$$dX \cdot \partial_0 X = 0. \quad (4.114)$$

При таком выборе тело, по определению Борна, считается *жестким*, если длина вектора dX не меняется со временем:

$$(dX)^2 = const. \quad (4.115)$$

Из соотношения ортогональности и (4.113), (4.112) получаем

$$d\tau = -(\partial_0 X \cdot \partial_i X) dx^i.$$

Подставляя это значение в квадрат расстояния (4.113) между точками

$$(dX)^2 = d\tau^2 + 2(\partial_0 X \cdot \partial_i X) d\tau dx^i + (\partial_i X \cdot \partial_j X) dx^i dx^j,$$

имеем:

$$(dX)^2 = \{ \partial_i X \cdot \partial_j X - (\partial_0 X \cdot \partial_i X)(\partial_0 X \cdot \partial_j X) \} dx^i dx^j.$$

Первое слагаемое в фигурных скобках – это g_{ij} , а второе – произведение $g_{0i}g_{0j}$. Действительно, интервал равен:

$$ds^2 = (dX)^2 = (\partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X) dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

поэтому, метрические коэффициенты $g_{\alpha\beta}$ неинерциальной системы, связанной с телом равны $\partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X$. При этом, так как в преобразованиях (4.111) τ – собственное время, то $g_{00} = (\partial_0 X)^2 = 1$, см. так же стр. 233.

Таким образом, критерий жесткости Борна эквивалентен постоянству тензора γ_{ij} , определяющего физическую длину. Заметим, что Борн сформулировал свой критерий жесткости для частного случая преобразований в которых координатное время t является собственным временем τ точки неинерциальной системы отсчёта. Если мы откажемся от условия (4.112), то получится общее выражение (4.83), стр. 240.

4.9 Движение частиц и света

Пространство в неинерциальной системе отсчёта не является одновременно изотропным и однородным, как это было в инерциальных системах. Это приводит к тому, что свободные частицы уже не движутся равномерно и прямолинейно. В классической механике мы говорим, что на частицы действуют силы инерции которые искривляют их траектории. Зная метрические коэффициенты $g_{\alpha\beta}$, можно записать дифференциальное уравнение, решением которого является траектория движения свободной частицы в неинерциальной системе отсчёта. Это уравнение мы получим в главе 11, а сейчас приведём несколько примеров расчёта таких траекторий элементарными методами.

Рассмотрим сначала жёсткую равноускоренную систему отсчёта в координатах Мёллера. Запишем траекторию свободной частицы в лоренцевых координатах в лабораторной системе отсчёта в плоскости (X, Y) :

$$X = X_0 + V_{0x}T, \quad Y = Y_0 + V_{0y}T,$$

где (V_{0x}, V_{0y}) – постоянные компоненты скорости, а (X_0, Y_0) – начальное положение частицы. Чтобы найти эту же траекторию в неинерциальной системе необходимо воспользоваться преобразованиями (4.56), стр. 231:

$$aT = (1 + ax) \operatorname{sh}(at), \quad 1 + aX = (1 + ax) \operatorname{ch}(at), \quad Y = y.$$

Подставляя их в траекторию, имеем:

$$1 + ax = \frac{1 + aX_0}{\operatorname{ch}(at) - V_{0x} \operatorname{sh}(at)}, \quad a(y - Y_0) = V_{0y} \frac{(1 + aX_0) \operatorname{sh}(at)}{\operatorname{ch}(at) - V_{0x} \operatorname{sh}(at)}.$$

Осталось выразить константы X_0, Y_0 и V_{0x}, V_{0y} через начальные условия. Полагая $t = 0$, имеем $x_0 = X_0$ и $y_0 = Y_0$. Беря производную левой и правой части по времени при $t = 0$, получаем:

$$V_{0x} = \frac{v_{0x}}{1 + ax_0}, \quad V_{0y} = \frac{v_{0y}}{1 + ax_0},$$

где (v_{0x}, v_{0y}) – начальная скорость частицы в неинерциальной системе. Подставляя эти константы в траекторию, окончательно имеем:

$$1 + ax = \frac{(1 + ax_0)^2}{(1 + ax_0) \operatorname{ch}(at) - v_{0x} \operatorname{sh}(at)}, \quad (4.116)$$

$$a(y - y_0) = \frac{v_{0y} (1 + ax_0) \operatorname{sh}(at)}{(1 + ax_0) \operatorname{ch}(at) - v_{0x} \operatorname{sh}(at)}, \quad (4.117)$$

что является решением поставленной задачи.

Пусть в момент времени $t = 0$ частица находилась в начале системы отсчета $x_0 = y_0 = 0$ и имела составляющую скорости v_{0y} вдоль оси y , а $v_{0x} = 0$. В этом случае выражения для траектории упрощаются:

$$x(t) = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{\operatorname{ch}(at)} - 1 \right], \quad y(t) = \frac{v_{0y}}{a} \operatorname{th}(at), \quad (4.118)$$

а координатные скорости будут равны:

$$v_x(t) = -\frac{\operatorname{sh}(at)}{\operatorname{ch}^2(at)}, \quad v_y(t) = \frac{v_{0y}}{\operatorname{ch}^2(at)}. \quad (4.119)$$

Физическое время связано с координатным как $d\tau_0 = (1 + ax) dt$, а физическая длина равна $dl^2 = dx^2 + dy^2$. Поэтому компоненты *физической скорости* — это $v_i/(1 + ax)$. Вдоль оси y физическая скорость нелинейно зависит от времени: $v_y/(1 + ax) = v_{0y}/\operatorname{ch}(at)$, что связано с различным ходом часов, отличающихся координатой x . Физическая скорость вдоль оси x со временем стремиться по модулю к единице: $v_x/(1 + ax) = -\operatorname{th}(at)$. При $v_{0y} = 1$ квадрат физической скорости $(v_x^2 + v_y^2)/(1 + ax)^2$ всё время равен единице (фундаментальной скорости “ c ”).

Собственное время частицы равно:

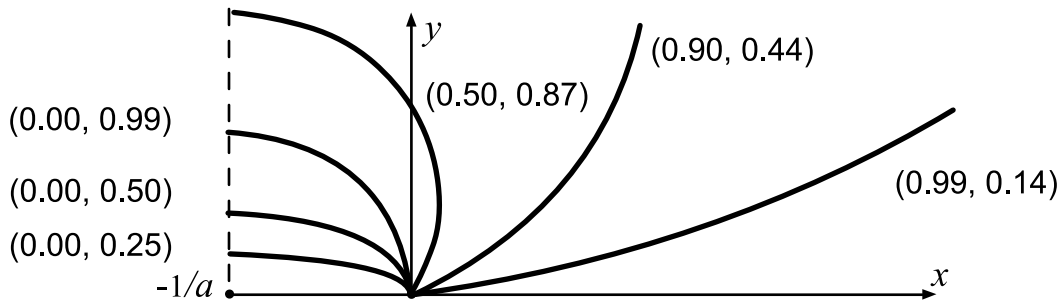
$$\tau = \int_0^t ds = \int_0^t \sqrt{(1 + ax(t))^2 - v_x^2(t) - v_y^2(t)} dt = \frac{\sqrt{1 - v_{0y}^2}}{a} \operatorname{th}(at).$$

За бесконечное координатное время $t = \infty$ частица уходит за горизонт событий $x_0 = -1/a$ наблюдателя в начале координат. При этом собственное время самой частицы к этому “моменту” остается конечным.

Наконец, траектория частицы получается после исключения времени:

$$y = \frac{v_{0y}}{a} \sqrt{1 - (1 + ax)^2}$$

и при малых ax переходит в параболу (так в равноускоренной системе выглядит движение свободной частицы в классической механике).



Выше на рисунке приведено несколько примеров траекторий начинающихся из точки $x_0 = y_0 = 0$. Рядом с линиями в скобках приведены значения компонент начальной скорости (v_{0x}, v_{0y}) .

• В качестве еще одного примера, найдём траекторию свободной частицы во вращающейся системе отсчета (см. стр. 232). В лабораторной системе её траектория, проходящая в момент времени $T = 0$ через точку с декартовыми координатами (X_0, Y_0) , имеет вид:

$$X = X_0 + V_0 \cos(\alpha) T, \quad Y = Y_0 + V_0 \sin(\alpha) T,$$

где α – угол между направлением движения и осью X . Модуль вектора скорости V_0 , когда вместо частицы движется импульс света равен единице ($V_0 = c = 1$). Запишем траекторию в полярных координатах $X = R \cos \Phi$, $Y = R \sin \Phi$ и перейдем к криволинейным координатам вращающейся системы отсчета в плоскости $Z = z = 0$:

$$T = t, \quad R = r, \quad \Phi = \phi + \omega t.$$

После несложных выкладок ($\ll \text{H}_{32}$) получаем:

$$\begin{cases} x = r_0 \cos(\phi_0 - \omega t) + V_0 t \cos(\alpha - \omega t) \\ y = r_0 \sin(\phi_0 - \omega t) + V_0 t \sin(\alpha - \omega t), \end{cases} \quad (4.120)$$

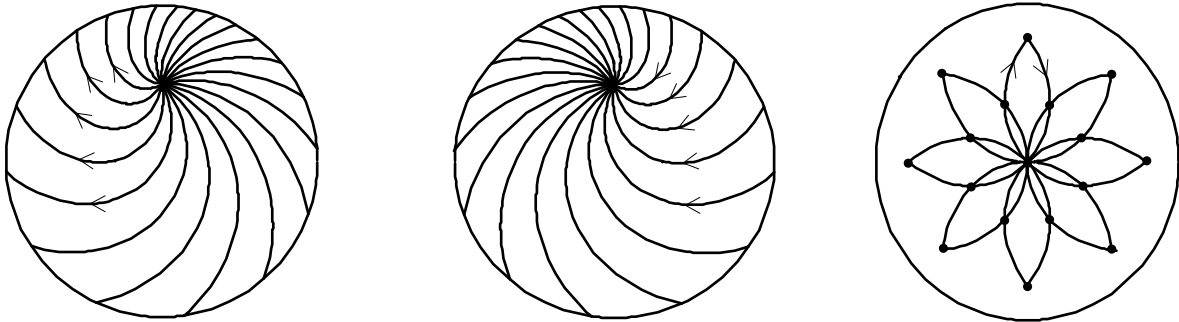
где r_0, ϕ_0 – начальное положение частицы в координатах неинерциальной системы и $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$. Отметим также выражение для изменения расстояния от центра вращения со временем:

$$r^2 = r_0^2 + 2r_0 V_0 t \cos(\phi_0 - \alpha) + V_0^2 t^2 \quad (4.121)$$

и постоянные функции скоростей (точка – производная по t):

$$\dot{r}^2 + r^2(\dot{\phi} + \omega)^2 = V_0^2, \quad r^2(\dot{\phi} + \omega) = V_0 r_0 \sin(\alpha - \phi_0). \quad (4.122)$$

Ниже на рисунках изображены некоторые траектории света ($V_0 = 1$) во вращающейся системе отсчета:



На первом рисунке лучи света выходят из точки $r_0 = 1/(2\omega)$ в различные стороны. На втором, наоборот, лучи сходятся в этой точке. Наконец, на третьем рисунке изображены траектории обмена световыми сигналами между наблюдателями, расположенными в жирных точках с наблюдателем, находящимся на оси вращения.

Качественно поведение изгиба световых траекторий можно понять, если вспомнить свойство силы инерции Кориолиса во вращающейся системе отсчета. Эта сила зависит от скорости тела и на вращающемся против часовой стрелке диске направлена перпендикулярно скорости, вправо от неё (в векторных обозначениях соответствующее ускорение имеет вид $2[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}]$). Аналогично, при движении импульса света его траектория всё время изгибается вправо.

Эта ключевая особенность вращающейся системы отсчета приводит к тому, что при радиолокационном измерении расстояния сигнал между наблюдателями проходит по различным путям, в зависимости от того к какому из наблюдателей он движется. Выше на третьем рисунке цветок световых лучей как раз отражает подобное несовпадение траекторий. Стрелками помечено направления движения импульсов.

В отличие от вращающейся системы, в жесткой равноускоренной системе отсчета траектория света в радиолокационном эксперименте одна и та же при движении света “туда и обратно”. Аналогично мяч в поле силы тяжести при игре в волейбол движется по одной параболе, не зависимо от того, игроки какой команды его отправили в этот полет. Траектория движения такого светового импульса находится из уравнений (4.116), (4.117) в которых необходимо положить $v_{0x} = (1 + ax_0) \cos \alpha$ и $v_{0y} = (1 + ax_0) \sin \alpha$.

Искривление лучей света приводит к тому, что окружающий мир в неинерциальной системе отсчёта выглядит совсем не так как в инерциальной. Наблюдатель видит объект в направлении под которым к нему пришел “луч” света, излученный этим объектом. Если “луч” движется по искривленной траектории, то и предмет будет виден не там, где он находится “на самом деле”. Выше на втором рисунке каждая линия показывает последовательность точек, которые наблюдатель видит находящимися на одной прямой.

В равноускоренной системе отсчёта также происходит визуальное искажение окружающего мира. Например, наблюдатель в начале координат видит своих коллег по системе, находящихся на оси y не вверху и внизу, а впереди себя. Чем дальше такой наблюдатель от него находится, тем под большим углом к оси y он будет визуальным наблюдаться. Качественно это легко представить нарисовав параболу между двумя точками на оси y . Эта ось играет для равноускоренной вдоль оси x системы роль поверхности Земли. Брошенный из одной точки в другую камень полетит по параболе, начиная и оканчивая движение под углом к поверхности. Аналогично ведут себя и лучи света.

4.10 Динамика в неинерциальной системе

Вернёмся к общему решению для траектории свободной частицы в жёсткой равноускоренной системе отсчёта (4.116), (4.117), стр. 256. Дифференцируя эти выражения по времени, несложно найти компоненты координатной скорости частицы:

$$v_x = \frac{(1+ax)^2}{(1+ax_0)^2} [v_{0x} \operatorname{ch}(at) - (1+ax_0) \operatorname{sh}(at)], \quad v_y = v_{0y} \frac{(1+ax)^2}{(1+ax_0)^2}.$$

С их помощью запишем квадрат физической скорости:

$$\frac{v_x^2 + v_y^2}{(1+ax)^2} = 1 - \frac{(1+ax)^2}{(1+ax_0)^4} [(1+ax_0)^2 - v_{0x}^2 - v_{0y}^2].$$

Это соотношение можно переписать в виде:

$$\frac{1+ax}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/(1+ax)^2}} = \frac{1+ax_0}{\sqrt{1-\mathbf{v}_0^2/(1+ax_0)^2}},$$

где $\mathbf{v}^2 = v_x^2 + v_y^2$ и аналогично для начального значения с индексом 0. В правой части равенства стоит константа, поэтому при движении частицы сохраняется (является интегралом движения) следующая величина:

$$E = m \frac{1+ax}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/(1+ax)^2}} = \text{const}, \quad (4.123)$$

которую мы назовём *энергией частицы*. Параметр m на который умножен интеграл движения, будем считать массой частицы.

В нерелятивистском пределе малых скоростей разложим корень в ряд Тейлора:

$$E \approx m(1+ax) + \frac{m\mathbf{v}^2/2}{1+ax} \approx m + \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + m a x,$$

где во втором приближенном равенстве мы пренебрегли в знаменателе ускорением, считая $\mathbf{v}^2 a x \ll 1$. Равноускоренная неинерциальная система отсчёта в классической механике эквивалента однородному полю тяжести с $g = a$ (направленному против оси x). Поэтому член $m a x$ соответствует потенциальной энергии, а выражение для E является полной энергией частицы (кинетическая плюс потенциальная), включая энергию покоя $E_0 = m$.

Таким образом, сохраняющаяся величина (4.123) является полной энергией релятивистской частицы в неинерциальной системе отсчёта. Эта энергия эффективно учитывает силу инерции которая действует на частицу, поэтому зависит не только от её скорости, но и от положения.

Умножим числитель и знаменатель в выражении для энергии на $1+ax$:

$$E = \frac{m(1+ax)^2}{\sqrt{(1+ax)^2 - \mathbf{v}^2}}.$$

Так как в жесткой равноускоренной системе отсчёта в координатах Мёллера интервал вдоль траектории движения частицы равен:

$$ds^2 = (1+ax)^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 = [(1+ax)^2 - \mathbf{v}^2] dt^2$$

и $g_{00} = (1+ax)^2$, энергию можно переписать в виде:

$$E = mg_{00} \frac{dt}{ds}.$$

Вводя 4-вектор $dx^\alpha = \{dt, d\mathbf{x}\}$, аналогично инерциальной системе отсчёта, определим 4-скорость и 4-импульс частицы:

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}, \quad p^\alpha = m u^\alpha.$$

При помощи метрического тензора опустим индекс вниз, определив:

$$p_\alpha = g_{\alpha\beta} p^\beta.$$

Так как $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, то квадрат 4-вектора скорости равен единице, а квадрат 4-импульса, как обычно, равен квадрату инвариантной массы частицы:

$$m^2 = p_\alpha p^\alpha = g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta.$$

Для жесткой равноускоренной системы $g_{0i} = 0$ и $g_{ij} = -\delta_{ij}$, поэтому сохраняющаяся полная энергия E совпадает с нулевой компонентой p_0 контравариантного 4-вектора p_α :

$$p_0 = g_{0\alpha} p^\alpha = g_{00} m \frac{dt}{ds} + g_{0i} m \frac{dx^i}{ds} = g_{00} m \frac{dt}{ds}.$$

Обратим внимание, что в неинерциальных системах отсчёта, в отличие от инерциальных в лоренцевых координатах, коэффициенты метрического тензора зависят от координат. Поэтому, p_α является отличной от p^α функцией координат и в жесткой неинерциальной системе отсчёта сохраняется именно $p_0 = E$, а не p^0 .

Так как скорость частицы под воздействием сил инерции, в общем случае, меняет своё направление, трёхмерный импульс не сохраняется. Это относится как к p_i , так и к p^i . Сохраняется только полная энергия.

• Проведём некоторые обобщения. Определим *квадрат физической скорости* частицы:

$$\tilde{\mathbf{v}}^2 = \frac{\delta l^2}{\delta \tau^2} = \frac{\gamma_{ij} dx^i dx^j}{\left(\sqrt{g_{00}} dt + g_{0i} dx^i / \sqrt{g_{00}}\right)^2}, \quad (4.124)$$

где δl – физическая длина и $\delta \tau$ – физическое время. Деля числитель и знаменатель на dt , получаем связь квадрата физической скорости (помечена тильдой) с компонентами $v^i = dx^i/dt$ координатной скорости:

$$\tilde{\mathbf{v}}^2 = \frac{\gamma_{ij} v^i v^j}{g_{00} (1 - \gamma_i v^i)^2}, \quad (4.125)$$

где введено сокращение

$$\gamma_i = -\frac{g_{0i}}{g_{00}}.$$

Соответственно *компонентами физической скорости* (снова тильда) назовём:

$$\tilde{v}^i = \frac{v^i / \sqrt{g_{00}}}{1 - \gamma_i v^i}, \quad (4.126)$$

так, что

$$\tilde{\mathbf{v}}^2 = \gamma_{ij} \tilde{v}^i \tilde{v}^j = \tilde{v}_i \tilde{v}^i, \quad \tilde{v}_i = \gamma_{ij} \tilde{v}^j.$$

Отметим также соотношение:

$$\frac{1}{1 - \gamma_i v^i} = 1 + \gamma_i \tilde{v}^i \sqrt{g_{00}},$$

которое получается после свёртки определения (4.126) с γ_i .

Собственное время частицы (интервал вдоль её траектории) можно записать в виде:

$$ds = [\delta \tau^2 - \delta l^2]^{1/2} = \sqrt{1 - \tilde{\mathbf{v}}^2} \delta \tau$$

или, подставляя интервал физического времени, как:

$$ds = \sqrt{1 - \tilde{\mathbf{v}}^2} (\sqrt{g_{00}} dt + g_{0i} dx^i / \sqrt{g_{00}}) = \sqrt{1 - \tilde{\mathbf{v}}^2} (1 - \gamma_i v^i) \sqrt{g_{00}} dt.$$

Поэтому компоненты вектора координатной 4-скорости $u^\alpha = dx^\alpha/ds$ равны:

$$u^0 = \frac{\gamma_i \tilde{v}^i + 1/\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \tilde{\mathbf{v}}^2}}, \quad u^i = \frac{\tilde{v}^i}{\sqrt{1 - \tilde{\mathbf{v}}^2}}. \quad (4.127)$$

Подчеркнём еще раз, что $\tilde{\mathbf{v}}$ – это физическая, а не координатная скорость.

Теперь мы можем определить полную энергию частицы:

$$E = m g_{0\alpha} u^\alpha = m g_{00} (u^0 - \gamma_i u^i).$$

Подставляя компоненты 4-скорости, окончательно имеем

$$E = \frac{m \sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \tilde{\mathbf{v}}^2}}. \quad (4.128)$$

В главе 11 мы докажем, что если метрические коэффициенты $g_{\alpha\beta}$ в неинерциальной системе отсчёта не зависят от времени, то выражение (4.128) является интегралом движения. Другими словами в стационарном случае полная энергия частицы всегда сохраняется.

Так, равномерно вращающаяся система отсчёта является стационарной. Продемонстрируем, что энергия частицы (4.128) в этой системе постоянна. Для интервала (стр. 232)

$$ds^2 = (1 - \omega^2 r^2) dt^2 - 2\omega r^2 dt d\phi - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2$$

физическое время и квадрат физической длины равны:

$$\delta\tau = \sqrt{1 - (\omega r)^2} dt - \frac{\omega r^2 d\phi}{\sqrt{1 - (\omega r)^2}}, \quad \delta l^2 = dr^2 + \frac{r^2 d\phi^2}{1 - (\omega r)^2}.$$

Поэтому квадрат физической длины (4.124) равен:

$$\tilde{\mathbf{v}}^2 = \frac{(1 - \omega^2 r^2) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2}{(1 - \omega^2 r^2 - \omega r^2 \dot{\phi})^2},$$

где точка – производная по времени t . Соответственно, энергия частицы равна:

$$E = m \frac{1 - \omega r^2 (\omega + \dot{\phi})}{\sqrt{1 - \dot{r}^2 - r^2 (\omega + \dot{\phi})^2}}. \quad (4.129)$$

Благодаря соотношениям (4.122), стр. 258 числитель и знаменатель в выражении для энергии постоянны.

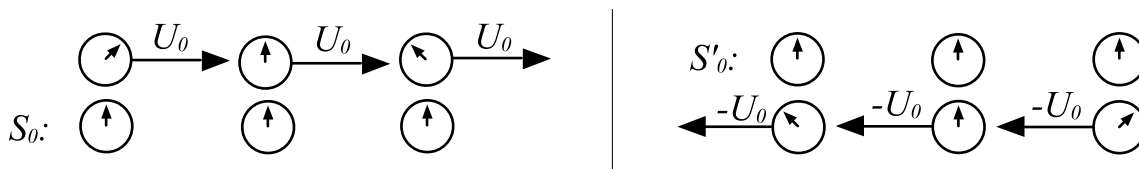
Отметим простое частное решение приводящее к постоянству энергии:

$$\dot{\phi} = -\omega, \quad \dot{r} = \text{const.}$$

В лабораторной системе отсчёта такая траектория частицы соответствует движению по прямой, проходящей через центр вращения. В координатных величинах неинерциальной системы отсчёта это движение выглядит как раскручивающаяся спираль.

4.11 Парадоксы остановки и близнецов

• “Парадокс остановки.” Во второй главе (стр. 83) рассматривалась эскадра космических кораблей S'_0 , движущихся со скоростью U_0 относительно инерциальной системы $S_0 : (T, X)$. В силу относительности одновременности, наблюдатели данной системы отсчёта регистрируют различное время на движущихся относительно них часах:

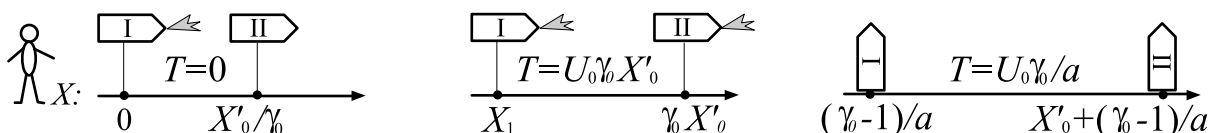


Если эскадра принимает решение остановиться, то для наблюдателей в S_0 одновременное торможение кораблей (происходящее в S'_0) не будет выглядеть одновременным. Пусть при торможении корабли выдерживают неизменным расстояние между ними. Когда относительно S_0 скорость, например, центрального корабля будет нулевой, такая же скорость должна быть для *неподвижных относительно него* других кораблей. В результате, неодновременное (в S_0) торможение странным образом оканчивается одновременной остановкой для всех, теперь неподвижных наблюдателей как в системе S , так и в системе S_0 .

Проведём расчёт торможения для двух кораблей. Пусть в момент времени $T' = 0$ по часам системы $S'_0 : (T', X')$ они начинают одновременно тормозить. Первый (задний) корабль имеет в S'_0 координату $X' = 0$, а второй (передний) – $X' = X'_0$. Запишем преобразования Лоренца:

$$T = \gamma_0 (T' + U_0 X'), \quad X = \gamma_0 (X' + U_0 T').$$

Положив $T' = 0$, $X' = X'_0$, получаем, что второй корабль в системе S_0 начнёт торможение в момент $T = U_0 \gamma_0 X'_0$, имея координату $X = \gamma_0 X'_0$ (ниже второй рисунок). При $T = 0$ (когда в S_0 начал тормозить первый корабль) второй корабль имеет координату $X = X'_0/\gamma_0$:



Предположим, что корабли эскадры образуют жесткую равноускоренную (сейчас равнозамедленную) систему отсчёта $S : (t, x)$ с началом на первом корабле. До торможения радиолокационное расстояние между кораблями равнялось X'_0 . Как только появилось ускорение оно стало $x_0 = -\ln(1 - aX'_0)/a$, см. стр.207 (ускорение направлено против оси x).

Запишем преобразования между инерциальным и неинерциальным наблюдателями (4.27), стр. 216. При торможении, заменяем $a \mapsto -a$:

$$\begin{cases} aX &= -\operatorname{ch}(\alpha_0 - at) e^{-ax} + \gamma_0, \\ aT &= -\operatorname{sh}(\alpha_0 - at) e^{-ax} + \gamma_0 U_0, \end{cases} \quad (4.130)$$

где $\alpha_0 = \operatorname{ath}(U_0)$. До момента времени $T = U_0 \gamma_0 X'_0$ точка (корабль) движется равномерно: $X = U_0 T + X'_0 / \gamma_0$. После этого начинается торможение. Исключая из (4.130) время t , получаем выражение для траектории фиксированной точки с координатой $x = x_0 = -\ln(1 - aX'_0)/a$:

$$aX = \gamma_0 - \sqrt{(1 - aX'_0)^2 + (U_0 \gamma_0 - aT)^2}, \quad T > U_0 \gamma_0 X'_0.$$

Скорость этой точки меняется со временем следующим образом:

$$U = \frac{dX}{dT} = (U_0 \gamma_0 - aT) [(1 - aX'_0)^2 + (U_0 \gamma_0 - aT)^2]^{-1/2}. \quad (4.131)$$

Мы видим, что *независимо* от положения точки X'_0 , её скорость окажется нулевой в момент времени $T = U_0 \gamma_0 / a$. Начав одновременное торможение с точки зрения системы S_0 , корабли эскадры будут двигаться с различной скоростью и в результате их остановка произойдёт одновременно. Относительность понятия жесткости системы отсчета и лежит в основе “парадокса остановки”.

При $T = U_0 \gamma_0 / a$ координаты первого ($X'_0 = 0$) и второго ($X'_0 > 0$) кораблей (которые остановились) в системе S_0 будут равны:

$$X^{(I)} = \frac{\gamma_0 - 1}{a}, \quad X^{(II)} = X'_0 + \frac{\gamma_0 - 1}{a}.$$

Поэтому расстояние $X^{(II)} - X^{(I)}$ между кораблями в момент остановки будет в точности равно их расстоянию X'_0 в системе S'_0 перед началом торможения. Линейка, начало и конец которой образуют корабли, перед началом торможения для наблюдателей в S_0 выглядела сжатой в направлении движения (лоренцево сокращение). При торможении она постепенно удлиняется и в момент остановки для наблюдателей в S_0 лоренцево сокращение длины линейки окончательно исчезает. Аналогично, естественно, выглядит ситуация при ускорении кораблей, при котором “жесткая” (в смысле собственной длины) линейка относительно лабораторной системы постепенно сжимается (достаточно сложным образом, см., стр. 211), а после отключения двигателей оказывается сжатой в γ раз, в точном соответствии с формулой Лоренца. После остановки линейки в результате жесткого торможения, это сжатие снова исчезает.

• *Парадокс близнецов* был рассмотрен во второй главе (стр. 84), и как мы видели, ничего парадоксального в нём нет. Более того, для понимания причины кажущегося парадокса достаточно использовать только инерциальные системы. Ключом к пониманию проблемы служит эффект относительности одновременности, который нужно учитывать вместе с эффектом замедления времени. Движущийся путешественник регистрирует замедление хода всех часов в системе отсчёта своего брата - домоседа. Однако, относительность одновременности приводит к тому, что время на этих часах, находящихся вдоль его траектории, “сдвинуто” в будущее. Поэтому, хотя часы системы домоседа идут медленнее, они всё сильнее опережают часы путешественника.

Неинерциальные системы позволяют провести расчёты с точки зрения каждого брата на этапах ускоренного движения. В общем случае, в лабораторной системе отсчёта часы, движущиеся со скоростью $\mathbf{U}(T)$ имеют следующее накопленное время, которое показывают часы путешественника когда с точки зрения домоседа проходит время T_0 :

$$\tau = \int_0^{T_0} ds = \int_0^{T_0} \sqrt{1 - \mathbf{U}^2(T)} dT. \quad (4.132)$$

Чтобы получить время на часах домоседа в неинерциальной системе отсчёта, необходимо найти как изменяется координата $x^\alpha(t)$ домоседа в этой системе. Зная функции $x^\alpha(t)$, можно вычислить собственное время часов домоседа:

$$\tau_0 = \int_0^{t_0} ds = \int_0^{t_0} \left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \right)^{1/2} dt. \quad (4.133)$$

Подчеркнем, что формулы (4.132) и (4.133) дают собственное время различных часов (путешественника и домоседа, соответственно). Понятно, что после вычисления τ и τ_0 , необходимо также записать связь координатных времен T_0 и t_0 .

В качестве примера приведём вычисления для жёсткой равноускоренной системы отсчёта. Для простоты будем считать, что путешественник, пролетая мимо домоседа со скоростью U_0 , синхронизирует с ним начальный отсчёт времени $T = t = 0$. Затем он начинает торможение до полной остановки в системе домоседа S_0 . Находясь в дальнейшем в одной инерциальной системе отсчёта, братья могут однозначным образом сравнить показания своих часов и выяснить у кого они отстали.

Подставляя скорость (4.131) в соотношение (4.132) для путешественника с координатой $x = x_0 = X'_0 = 0$, имеем:

$$\tau = \int_0^{T_0} \frac{dT}{\sqrt{1 + (U_0\gamma_0 - aT)^2}} = \frac{1}{a} [\text{ash}(U_0\gamma_0) - \text{ash}(U_0\gamma_0 - aT_0)].$$

Остановка путешественника $U(T_0) = 0$ происходит по часам домоседа при $T_0 = U_0\gamma_0/a$ (см. “парадокс остановки”). К этому моменту часы путешественника показывают время τ :

$$a\tau = \text{ash}(U_0\gamma_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} \text{sh}(a\tau) = \frac{U_0\gamma_0}{a} = T_0. \quad (4.134)$$

Естественно, этот результат совпадает с вычислением времени часов, ускоряющихся из состояния покоя до скорости U_0 (см. стр. 116).

Найдём теперь собственное время домоседа в неинерциальной системе. Его траектория получается из (4.130) при $X = 0$:

$$\gamma_0 e^{ax} = \text{ch}(\alpha_0 - at), \quad \frac{dx}{dt} = -\text{th}(\alpha_0 - at).$$

Поэтому интервал собственного времени домоседа равен:

$$d\tau_0 = \sqrt{e^{-2ax} (dt^2 - dx^2)} = \frac{\gamma_0 dt}{\text{ch}^2(\alpha_0 - at)}.$$

Интегрируя его от нуля до t_0 , получаем:

$$\tau_0 = \frac{\gamma_0}{a} [\text{th}(\alpha_0) - \text{th}(\alpha_0 - at_0)].$$

Домосед останавливается относительно путешественника, когда его скорость dx/dt становится равной нулю. Это происходит при $t_0 = \alpha_0/a$. В этот момент:

$$\tau_0 = \frac{\gamma_0 \text{th}(\alpha_0)}{a} = \frac{U_0\gamma_0}{a} = T_0. \quad (4.135)$$

Мы, естественно, снова получаем значение T_0 , равное времени до момента относительной неподвижности домоседа и путешественника в системе отсчёта S_0 .

Таким образом, соотношение (4.134) справедливо с точки зрения любого наблюдателя и даёт абсолютный эффект замедления времени на движущихся с переменной скоростью часах по сравнению с неподвижными часами. Естественно, можно рассмотреть и классический вариант полёта (ускорение из состояния покоя, равномерное движение и торможение, а затем возвращение в той-же последовательности). Однако понятно, что ничего нового соответствующие вычисления в эффект не добавляют.

4.12 Парадоксы Белла и Эренфеста

• *Парадокс Белла* связан с нежесткой равноускоренной системой отсчёта (стр. 229). Пусть между двумя кораблями натянута струна. Эти корабли начинают равноускоренно двигаться с *одинаковой* скоростью относительно неподвижной (лабораторной) системы S_0 . Длина L струны в этой системе неизменна. В неинерциальной системе, связанной с кораблями, интервал между двумя событиями имеет вид (стр. 228):

$$ds^2 = dt^2 - 2 \operatorname{sh}(at) dt dx - dx^2 - dy^2.$$

Соответствующий ему элемент физической длины зависит от времени:

$$\delta l^2 = \operatorname{ch}^2(at) dx^2 - dy^2.$$

Если у наблюдателя в неинерциальной системе есть “жесткая” линейка, расположенная перпендикулярно ускорению, то её длина не изменяется $\delta l = dy$. Аналогичная линейка, ориентированная вдоль ускорения, будет растягиваться со временем $\delta l = \operatorname{ch}(at) dx$. Повернув первую линейку вдоль ускорения неинерциальный наблюдатель зарегистрирует расхождение их длин. Аналогично, изменяется со временем конечное радиолокационное расстояние (4.53), стр. 229.

Таким образом, в одной системе отсчёта струна имеет неизменную длину, а в другой эта длина увеличивается. Возникает закономерный вопрос – порвётся ли со временем струна? Чтобы усилить необычность ситуации, представим, что траектория каждой точки струны контролируется из лабораторной системы, так, что она “бережно” ускоряется без каких либо рывков и натяжений (с точки зрения лабораторных наблюдателей). При этом, правда, в любой другой инерциальной системе отсчёта такое *одновременное* ускорение точек струны уже не будет выглядеть таким же “бережным” и одновременным.

Вообще говоря, вопрос о разрыве струны выходит за рамки кинематики и при последовательном подходе требует построения её модели. Если струна прикреплена только к кораблям, изменения скоростей её концов (кораблей) определенным образом должны передаваться по струне, вызывая в ней некоторые напряжения.

В рамках кинематики обычно предполагается что, если радиолокационное расстояние между двумя точками неизменно, то и дополнительного натяжения струны, натянутой между ними, возникать не должно (при этом, игнорируется эффект действия сил инерции, которые при небольших ускорениях невелики).

Если же радиолокационное расстояние между точками растёт, то между ними должно возникать механическое напряжение. С этой точки зрения, в мысленном эксперименте Белла струна, находящаяся в нежесткой системе отсчёта, должна порваться.

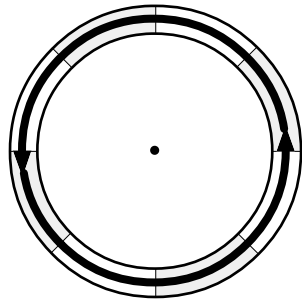
При этом не стоит забывать, что лоренцево сжатие в инерциальных системах отсчёта – это чисто кинематический эффект. Когда измеряется длина стержня при его равномерном движении, наблюдатель, связанный со стержнем, ”не согласен” с измерительной процедурой неподвижного наблюдателя (см., стр. 94). Поэтому говорить о том, что стержень испытывает механическое сжатие неверно. Например, пусть относительно неподвижных наблюдателей с постоянной скоростью движется стержень ориентированный перпендикулярно к направлению скорости. Если теперь этот стержень медленно повернётся, расположившись вдоль вектора скорости, то неподвижные наблюдатели ”увидят” как он сожмётся. Однако, естественно, стержень, оставаясь в инерциальной системе (пространство в которой изотропно), не испытывает ни каких сил натяжения при таком сжатии. Это эффект относительности измерительных процедур в двух системах отсчёта.

Несколько иная ситуация в неинерциальных системах отсчёта. При измерении радиолокационного расстояния используется свет. Это же электромагнитное поле лежит в основе внутреннего устройства материальных тел (стержней, струн). Поэтому, если радиолокационное расстояние увеличивается, то это должно сказываться и на силах действующих внутри вещества.

В связи с этим ”парадоксом” имеет смысл напомнить, что абсолютно твёрдое (”жесткое”) тело противоречит принципам теории относительности. Жесткость понятие относительное и тел с неизменными размерами для наблюдателей в различных системах отсчёта существовать не может. Одна из причин этого в том, что любое физическое перемещение в пространстве имеет скорость всегда меньшую, чем фундаментальная скорость (равная скорости света). Предположим, что существует, например, абсолютно твёрдый стержень. Тогда, толкнув его за один конец, мы должны были бы получить мгновенную реакцию и второго конца, расположенного на некотором расстоянии от первого. Подобное возмущение от толчка должно было передаваться по стержню с бесконечной скоростью. Сверхсветовые скорости ”плохи”, т.к. приводят к мнимому фактору $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ в преобразованиях Лоренца или в выражении для. Кроме этого возникают серьезные проблемы с причинностью (см. стр. 118).

• *Парадокс Эренфеста* связан с геометрическими эффектами во вращающейся системе отсчёта. Как и многие другие “парадоксы”, парадокс Эренфеста обусловлен непривычностью для нас физики больших скоростей, а не с противоречивостью теории относительности.

Пусть в лабораторной системе отсчёта находится неподвижный круговой желоб, внутри которого с угловой скоростью ω быстро вращается кольцо радиуса r . Наблюдатель лабораторной системы, неподвижный относительно желоба, может измерить длину ΔL сегмента вращающегося кольца, путём одновременной (по его часам) фиксации положений начала и конца сегмента. В соответствии с эффектом сокращения длины (стр. 94), ΔL будет меньше, чем собственная длина сегмента Δl :



$$\Delta L = \Delta l \sqrt{1 - (\omega r)^2},$$

где $\omega r = v$ — это линейная скорость точки кольца. Сумма длин ΔL всех сегментов кольца совпадает с длиной неподвижного желоба и равняется $2\pi r$. Таким образом, “собственная длина” кольца l (равная сумме всех измерений Δl) оказывается больше, чем $2\pi r$:

$$l = \frac{2\pi r}{\sqrt{1 - (\omega r)^2}}.$$

Этот же результат получается, если проинтегрировать физическую длину (4.91), стр. 244 по углу ϕ от 0 до 2π . Эта длина равна сумме радиолокационных измерений, проведенных *различными* неинерциальными наблюдателями. Длину окружности может измерить и один неинерциальный наблюдатель, вычислив время движения светового сигнала по окружности. В этом случае он получит различные расстояния в зависимости от направления его движения (по часовой стрелке и против):

$$l_- = 2\pi r \sqrt{\frac{1 - \omega r}{1 + \omega r}}, \quad l_+ = 2\pi r \sqrt{\frac{1 + \omega r}{1 - \omega r}},$$

а их среднее значение будет равно $l = (l_+ + l_-)/2$ (см. эффект Саньяка на стр. 223). Всё это выглядит необычным с точки зрения классической физики. Однако ничего парадоксального (=противоречивого) в этом нет. Это противоречит лишь нашей интуиции, воспитанной на классической механике.

Иногда утверждают, что вращающееся кольцо (или диск) должно как-то выгибаться, чтобы согласовать такое необычное свойство своей длины с евклидовой геометрией в инерциальной системе отсчёта. Конечно это не так. Траектории движения каждой точки вращающегося кольца задаются в лабораторной системе. Естественно в этой системе его длина равна $2\pi r$ и не о каких изгибах речи идти не может. А вот то, что собственная длина кольца отличается от $2\pi r$, да ещё зависит от способа её измерения, связано с необычными свойствами измерительных процедур в неинерциальных системах отсчёта. Как мы увидим в главе 11, трёхмерное пространство в неинерциальной системе, понимаемое как совокупность бесконечно малых радиолокационных расстояний, может иметь неевклидовую геометрию. Такое пространство во вращающейся системе отсчёта имеет отрицательную кривизну.

Сложнее разобраться с физикой подобного диска или кольца на этапе их раскрутки, в результате которой они достигают угловой скорости ω . Для последовательного описания таких физических систем, как и для струны в парадоксе Белла, мы должны построить соответствующую механическую модель вещества из которого сделана система. В любом случае, постепенно раскручивающийся диск, не является жестким. Связанную с ним неинерциальную систему можно получить, например, записав следующее координатное преобразование:

$$T = t, \quad R = r, \quad \Phi = \phi + \omega(t) t,$$

где $\omega(t)$ некоторая функция, определяющая изменение угловой скорости. Эти преобразования приводят к метрике:

$$ds^2 = [1 - \Omega^2(t) r^2] dt^2 - 2r^2 \Omega(t) dt d\phi - dr^2 - r^2 d\phi^2,$$

где $\Omega(t) = \omega + \dot{\omega}t$ и, как обычно, $\dot{\omega} = d\omega/dt$. Элемент физической длины в такой неинерциальной системе отсчёта равен:

$$\delta l^2 = dr^2 + \frac{r^2 d\phi^2}{1 - \Omega^2(t) r^2}.$$

Если $\dot{\omega} \neq 0$, то радиолокационное расстояние вдоль любой окружности увеличивается со временем. Таким образом, во вращающемся с ускорением диске должны возникать не только натяжения за счёт сил инерции вдоль радиуса, но в поперечном направлении. Поэтому, если верны рассуждения, приведенные при обсуждении парадокса Белла, на диске должны действовать разрывные силы, действующие вдоль окружностей.

IV Неинерциальные системы

- **H₂₆** *Траектория второго корабля* (стр. 207)

Пользуемся тождествами:

$$\operatorname{ch}(\alpha) + \operatorname{sh}(\alpha) = e^\alpha, \quad \operatorname{ch}(\alpha) - \operatorname{sh}(\alpha) = e^{-\alpha}.$$

- **H₂₇** *Времена посылки и получения сигнала* (стр. 208)

Так как $l_0 = \tau_0/2 = \ln(1 + ax_0)/a$, имеем:

$$e^{at_2} = aT + \sqrt{e^{a\tau_0} + (aT)^2} = (1 + ax_0) \left[\operatorname{sh} \left(\frac{at'}{1 + ax_0} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{at'}{1 + ax_0} \right) \right],$$

где время T подставлено из второго соотношения (4.11), стр. 208. Учтя тождества предыдущей задачи и заменив $1 + ax_0$ на e^{al_0} , получаем время возвращения сигнала t_2 . Время отправки $t_1 = t_2 - \tau_0 = t_2 - 2l_0$

- **H₂₈** *Скорость точки $X = 0$* (стр. 213)

При помощи преобразований (4.19), стр. 212 запишем выражение для траектории точки $X = 0$ системы S_0 относительно наблюдателя в $x = 0$:

$$x = -\frac{1}{a} \ln[\operatorname{ch}(at)] \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{dx}{dt} = -\operatorname{th}(at) = -\frac{aT}{\sqrt{1 + (aT)^2}}.$$

В последнем равенстве вместо t подставлено время часов, находящихся в $x = 0$, равное $\operatorname{sh}(at) = aT$ для наблюдателей в S_0 . Из этого соотношения следует, что скорость наблюдателя в $X = 0$ относительно S равна скорости (с обратным знаком) наблюдателя в $x = 0$ относительно S_0 .

- **H₂₉** *Разложение по $1/c^2$ неинерциальных преобразований* (стр. 216)

Запишем преобразования (4.27) на стр. 216 в несвернутом виде и сделаем замены $T \mapsto cT$, $t \mapsto ct$, $a \mapsto a/c^2$ и $U_0 \mapsto U_0/c$:

$$\begin{aligned} \frac{aX}{c^2} &= \gamma_0 \left[\operatorname{ch} \left(\frac{at}{c} \right) + \frac{U_0}{c} \operatorname{sh} \left(\frac{at}{c} \right) \right] e^{ax/c^2} - \gamma_0, \\ \frac{aT}{c} &= \gamma_0 \left[\operatorname{sh} \left(\frac{at}{c} \right) + \frac{U_0}{c} \operatorname{ch} \left(\frac{at}{c} \right) \right] e^{ax/c^2} - \gamma_0 \frac{U_0}{c}. \end{aligned}$$

При разложении в ряд по $1/c$ учитываем, что:

$$e^x \approx 1 + x + \dots, \quad \operatorname{ch}(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \dots, \quad \operatorname{sh}(x) \approx x + \dots$$

Подставляя эти разложения, получаем:

$$X \approx x + U_0 t + \frac{1}{2} at^2, \quad T \approx t.$$

- **Н₃₀** *Интервал системы Лоренца-Мёллера-Нельсона* (стр. 235)

$$ds^2 = \{(1 + \mathbf{W}\mathbf{r})^2 - [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]^2\} dt^2 - 2[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] d\mathbf{r}dt - d\mathbf{r}^2,$$

где

$$\mathbf{W} = \gamma \dot{\mathbf{v}} + \frac{\gamma(\gamma - 1)}{v^2} (\dot{\mathbf{v}}\mathbf{v})\mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{\gamma - 1}{v^2} [\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}].$$

- **Н₃₁** *Преобразование для γ_{ij}* (стр. 246)

Компоненты метрического тензора преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} g_{00} &= (\partial_0 t')^2 g'_{00}, & g_{0i} &= (\partial_0 t') (\partial_i t' g'_{00} + \partial_i x'^p g'_{0p}) \\ g_{ij} &= \partial_i t' \partial_j t' g'_{00} + (\partial_i x'^p \partial_j t' + \partial_j x'^p \partial_i t') g'_{p0} + \partial_i x'^p \partial_j x'^q g'_{pq}. \end{aligned}$$

Кроме этого

$$\begin{aligned} \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} &= \frac{1}{g'_{00}} (\partial_i t' g'_{00} + \partial_i x'^p g'_{0p}) (\partial_j t' g'_{00} + \partial_j x'^q g'_{0q}) \\ &= \partial_i t' \partial_j t' g'_{00} + \partial_i t' \partial_j x'^q g'_{0q} + \partial_i x'^p \partial_j t' g'_{0p} + \partial_i x'^p \partial_j x'^q \frac{g'_{0p}g'_{0q}}{g'_{00}}. \end{aligned}$$

Вычитая их, получаем требуемое соотношение.

- **Н₃₂** *Траектория частицы во вращающейся системе* (стр. 258)

Систему уравнений:

$$\begin{cases} r \cos(\phi + \omega t) = r_0 \cos \phi_0 + t \cos \alpha \\ r \sin(\phi + \omega t) = r_0 \sin \phi_0 + t \sin \alpha \end{cases}$$

удобно переписать в комплексном виде при помощи формулы Эйлера (умножаем второе уравнение на мнимую единицу и складываем с первым уравнением):

$$r e^{i(\phi + \omega t)} = r_0 e^{i\phi_0} + V_0 t e^{i\alpha}.$$

Взятие модуля этого выражения дает уравнение для r^2 (4.121), стр. 258. Умножая обе части на $e^{-i\omega t}$ и снова раскладывая экспоненту на косинус и синус, приходим к финальному решению (4.120). Если же взять производную по времени:

$$\left[\dot{r} + ir(\dot{\phi} + \omega) \right] e^{i(\phi + \omega t)} = V_0 e^{i\alpha}$$

и её комплексный модуль, то получится первое соотношение (4.122). Второе соотношение (4.122) проще всего получить в лабораторной системе $R^2\dot{\Phi} = V_0 R_0 \sin(\alpha - \Phi_0)$, дифференцированием по времени траектории движения, записанной в полярных координатах.