

## Глава 3

# Релятивистская динамика

В этой главе мы переходим к обсуждению общих вопросов, связанных с динамикой взаимодействия частиц. Законы сохранения энергии и импульса являются универсальным инструментом получения информации о движении частиц после их столкновения, даже без знания деталей их взаимодействия. Для незнакомых с основами физики элементарных частиц имеет смысл предварительно прочитать приложение Q: “*Квантовый мир*” (стр.443).

Законы сохранения позволяют проанализировать особенности организации межзвёздных перелётов и возможные ограничения, которые делают их, к сожалению, не столь реалистичными.

Затем мы изучим понятие силы и обобщение 2-го закона Ньютона при движении частицы под воздействием внешнего силового поля. Будет найден характер силы, для которой сохраняется полная энергия и момент импульса частицы. В общем случае такая сила может зависеть от скорости частицы.

В заключение главы мы продолжим развитие ковариантного формализма для описания динамических задач. Будут введены  $s, t, u$  – инварианты, широко используемые в физике элементарных частиц. Далее будет рассмотрено ковариантное представление для момента импульса и спина. Мы рассмотрим томасовскую прецессию спина и вопросы, связанные с нелокальностью законов сохранения.

---

## РЕЛЯТИВИСТСКИЙ МИР

Сергей С. Степанов

Последняя версия находится на сайте <http://synset.com>. Все обнаруженные ошибки и замечания просьба присылать по почте: [phys@synset.com](mailto:phys@synset.com). (с) 2009-2012, Печать: 2012-03-27

---

### 3.1 Энергия и импульс

• Запишем полученные в первой главе выражения для энергии и импульса частицы массой  $m$ , движущейся со скоростью  $u$ :

$$E = \frac{m}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}}. \quad (3.1)$$

Возводя их в квадрат и вычитая, можно исключить скорость:

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2. \quad (3.2)$$

Разделив импульс на энергию, можно также исключить массу:

$$\mathbf{p} = E \mathbf{u}. \quad (3.3)$$

В такой форме связь энергии и импульса справедлива и для безмассовых частиц, например, фотонов. В этом случае, так как  $c = 1$ , то скорость можно записать при помощи единичного вектора  $\mathbf{u} = \mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n}^2 = 1$ . Учитывая формулу Планка  $E = h\nu$ , имеем:

$$\mathbf{p} = E \mathbf{n} = h\nu \mathbf{n} = \frac{h}{\lambda} \mathbf{n}, \quad (3.4)$$

где  $\lambda = 1/\nu$  – длина волны, связанная с квантовыми свойствами фотона (точнее с ансамблем фотонов).

Напомним, что для восстановления в формулах фундаментальной скорости “ $c$ ” необходимо умножить все величины, имеющие размерность времени в некоторой степени, на “ $c$ ” в этой же степени. Поэтому для скорости ( $\mathbf{u}$ ), импульса ( $\mathbf{p}$ ), энергии ( $E$ ), силы ( $\mathbf{F}$ ) и ускорения ( $\mathbf{a}$ ) необходимо сделать следующие замены:

$$t \mapsto tc, \quad \mathbf{u} \mapsto \frac{\mathbf{u}}{c}, \quad \mathbf{p} \mapsto \frac{\mathbf{p}}{c}, \quad E \mapsto \frac{E}{c^2}, \quad \mathbf{F} \mapsto \frac{\mathbf{F}}{c^2}, \quad \mathbf{a} \mapsto \frac{\mathbf{a}}{c^2}.$$

Формулы (3.1) с константой “ $c$ ” имеют вид:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2/c^2}}. \quad (3.5)$$

Аналогично соотношения (3.2), (3.3) записываются следующим образом:

$$E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4, \quad \mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{u}.$$

Можно получить разложения энергии и импульса (3.5) в ряд по  $1/c$ :

$$E = mc^2 + \frac{m\mathbf{u}^2}{2} + \frac{3}{8} \frac{m\mathbf{u}^4}{c^2} + \dots, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{u} + m\mathbf{u} \frac{\mathbf{u}^2}{2c^2} + \dots$$

Не считая энергии покоя  $mc^2$ , ведущие члены соответствуют классическим выражениям  $E = m\mathbf{u}^2/2$  и  $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ .

• В атомной физике и физике элементарных частиц используют не систему единиц СИ, а энергетические единицы *электрон-вольты*. Это энергия, которую приобретает электрон с зарядом “ $e$ ”, проходя разность потенциалов в один вольт. Электрон-вольт – очень маленькая энергия по сравнению с энергиями, к которым привык человек:

$$1 \text{ эВ} = 1.602\,176\,53(14) \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

На самом деле она мала даже для типичных задач микромира, поэтому обычно встречаются её производные с приставкой кило ( $10^3$ ), мега ( $10^6$ ), гига ( $10^9$ ), тера ( $10^{12}$ ), и т.д. Обратим внимание на число в круглых скобках в определении 1 эВ. Это экспериментальная ошибка, показывающая типичный разброс последних двух значащих цифр.

В системе единиц  $c = 1$ , которая принята в этой книге, масса равна энергии покоя частицы. Поэтому массы электрона и протона выражаются в электрон-вольтах:

$$m_e \approx 0.511 \text{ МэВ}, \quad m_p \approx 938 \text{ МэВ.}$$

Квантовые закономерности определяют характерные размеры и энергии атомов – радиус Бора  $r_B$  и энергию связи Ридберга  $E_R$ :

$$r_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \approx 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ м}, \quad E_R = \frac{e^2}{2r_B} \approx 13.6 \text{ эВ}$$

Энергия  $E_R$  определяет дефект массы атома водорода, т.е. разницу между массой электрона + протона и массой всего атома водорода. Масса протона существенно больше этой энергии, поэтому относительное изменение массы атома за счёт энергии связи оказывается порядка  $1.5 \cdot 10^{-8}$ .

Возможна ситуация, когда вся масса частиц превращается в энергию излучения. Например, это происходит при аннигиляции электрона и антиэлектрона (позитрона)  $e^+ + e^- \mapsto 2\gamma$  с энергией излучения, равной  $2m_e \approx 1\text{МэВ}$ .

В то же время изменение энергии привычных объектов приводит к совсем небольшому изменению их массы. Если мы роняем утюг массой  $m$  с высоты  $H$  в один метр и вся его потенциальная энергия превращается во внутреннюю, то относительное изменение массы утюга составит:

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{mgH/c^2}{m} = \frac{gH}{c^2} \sim 10^{-16}.$$

Тот же утюг, используемый по назначению, при нагреве на 200 градусов при удельной теплоёмкости порядка 500 Дж/(кг К) (железо) получит на единицу массы дополнительную энергию  $10^5$  Дж/кг. Относительное изменение его массы в этом случае составит порядка  $10^{-12}$ .

- Энергия, необходимая для ускорения частицы до скорости  $u$ :

$$T = E - m = \frac{m}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} - m,$$

называется *кинетической*. Именно она приводится при указании параметров ускорителя элементарных частиц. При малых скоростях она стремится к классическому выражению  $T \approx m\mathbf{u}^2/2$ . Если же  $T \gg m$ , то кинетическая энергия приближённо равна полной энергии ( $T \approx E$ ). Например, большой адронный коллайдер ЛНС в ЦЕРНЕ ускоряет протоны  $m_p \approx 0.9$  ГэВ до кинетических энергий  $T \sim 7000$  ГэВ.

Быстро движущиеся частицы могут столкнуться как с неподвижной мишенью, так и со встречным пучком ускоренных частиц. В последнем случае существует заметный энергетический выигрыш. Пусть частицы одинаковые и полная энергия каждого пучка равна  $E = m/\sqrt{1 - u^2}$ . Это означает, что скорости частиц равны  $u^2 = 1 - m^2/E^2$ :



Перейдём в систему отсчёта, которая движется влево (второй рисунок) со скоростью  $v = -u$ . В этом случае частицы правого пучка будут неподвижны. Для вычисления энергии левого пучка воспользуемся преобразованием для энергии (1.25), стр. 56, с  $\mathbf{v} = -\mathbf{u}$  и формулой  $\mathbf{p} = E\mathbf{u}$ :

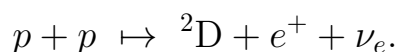
$$E' = \frac{E + \mathbf{u}\mathbf{p}}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} = \frac{1 + u^2}{\sqrt{1 - u^2}} E.$$

Подставляя  $u^2 = 1 - m^2/E^2$  для полных и кинетических энергий, окончательно имеем:

$$E' = \frac{2E^2}{m} - m, \quad \frac{T'}{m} = 2 \left( 1 + \frac{T}{m} \right)^2 - 2. \quad (3.6)$$

Эти соотношения позволяют сравнить столкновение двух пучков, имеющих энергии  $E, T$ , с рассеиванием на неподвижной мишени одного пучка с энергией  $E', T'$ . При больших энергиях  $T \gg m$  имеем  $T' \approx 2T^2/m$ . Благодаря квадратичной зависимости эквивалент столкновения с неподвижной мишенью растёт очень быстро. Например, для большого адронного коллайдера ЛНС энергия каждого пучка протонов равна 7 ТэВ ( $7 \cdot 10^{12}$  эВ), что приводит к такому же результату, как и столкновение с мишенью с энергией 133 ТэВ. Таким образом, получается выигрыш в 19 раз! При малых скоростях ( $T \ll m$ ) кинетическая энергия рассеивания на мишени равна  $T' \approx 4T$ , т.е. выигрыш при переходе от одного пучка к двум всего лишь четырёхкратный ( $\ll C_7$ ).

• Вся энергетика, которую мы используем, существует благодаря текущей или накопленной солнечной энергии. Она, в свою очередь, обусловлена гравитационными силами, которые сдвливают и разогревают огромный плазменный шар до таких давлений и температур, что начинают идти термоядерные реакции. В *реакции синтеза* (слияния) из двух ядер водорода (протонов см. стр. 446) возникает дейтерий  ${}^2\text{D}$ :



Эта реакция идёт с “выделением энергии”. Это не очень удачный термин, так как полная энергия любой реакции постоянна. Речь идёт о разности *кинетических энергий* частиц после и до столкновения:

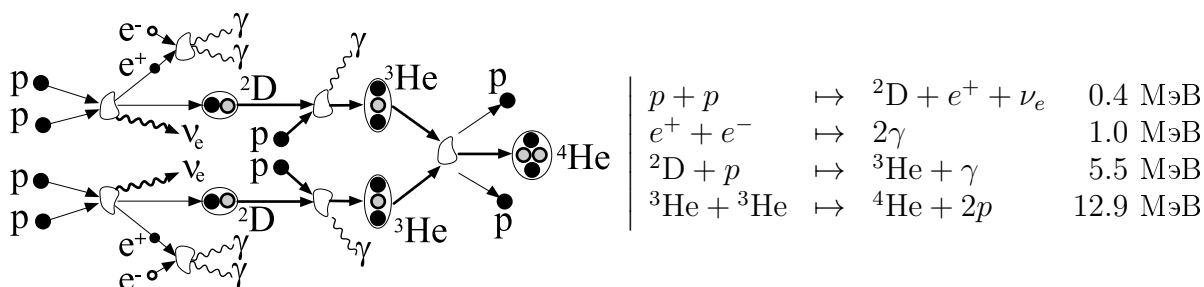
$$\sum_i (T_i + m_i) = \sum_j (T'_j + m'_j) \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \left( \sum_i m_i \right) - \left( \sum_j m'_j \right).$$

Для вычисления выделившейся энергии *движения* необходимо найти разницу масс частиц до и после соударения. Так, для первой реакции, лежащей в основе термоядерной энергии нашего Солнца, имеем:

$$\Delta T = 2 \cdot 938.272 - (1875.613 + 0.511) = 0.42 \text{ МэВ},$$

где массы частиц можно найти на стр. 452. Баланс кинетической энергии важен, так как именно энергия движения может быть в дальнейшем потенциально преобразована в другие “полезные” формы энергии (например, электрическую, и в конечном счёте снова в механическую).

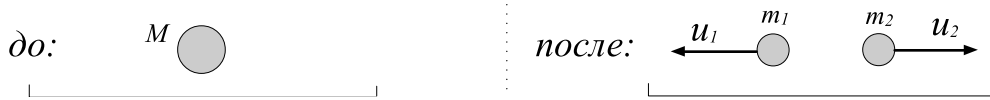
Протон - протонный синтез идёт очень медленно (малая вероятность реакции) и выделяет немного энергии, почти половина которой уносится слабо взаимодействующим с веществом нейтрино. Позитрон аннигилирует с электроном, а дейтерий, сливаясь с протоном, порождает гелий-3 с уже большим энергетическим выходом. После ещё одной реакции синтеза возникает гелий-4. В результате этих реакций четыре протона и два электрона превращаются в ядро гелия, два нейтрино и шесть фотонов:



Суммарная энергия 26.7 МэВ по сравнению с массой четырех протонов составляет заметную величину 0.7%. Из-за излучения Солнце ежегодно теряет порядка  $10^{17}$  кг, или  $5 \cdot 10^{-14}$  своей массы. В качестве упражнения предлагается вычислить увеличение кинетических энергий частиц в каждой реакции солнечного цикла и их суммарную энергию.

### 3.2 Распады и столкновения

• Предположим, что в результате некоторых внутренних причин неподвижная частица массой  $M$  распадается на две частицы с массами  $m_1$  и  $m_2$ , имеющие скорости  $u_1$  и  $u_2$ :



Найдём энергии продуктов распада. Для этого запишем законы сохранения:

$$E = E_1 + E_2, \quad p = p_1 + p_2.$$

Стандартный приём решения подобных задач состоит в использовании соотношения  $E^2 - p^2 = m^2$ , при помощи которого избавляются от одной из неизвестных скоростей (энергии и импульса). Перенесём  $E_1$  и  $p_1$  в законах сохранения влево, возведём их в квадрат и вычтем:

$$(E - E_1)^2 - (p - p_1)^2 = E_2^2 - p_2^2 = m_2^2.$$

Раскрывая скобки и снова учитывая выражение для квадрата массы, имеем:

$$M^2 + m_1^2 - 2EE_1 + 2pp_1 = m_2^2.$$

Так как начальная частица покоится, для неё  $E = M$  и  $p = 0$ . Поэтому несложно получить выражение для энергии первого продукта распада  $E_1$ . Для  $E_2$  достаточно переставить местами индексы. В результате:

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}, \quad E_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M}.$$

Таким образом, энергии полностью определяются массой начальной частицы и массами продуктов её распада. При желании, при помощи формулы  $E = m/\sqrt{1 - u^2}$  можно найти и их скорости.

Когда такой распад возможен? Масса начальной частицы превращается в энергию разлетающихся после распада частиц:

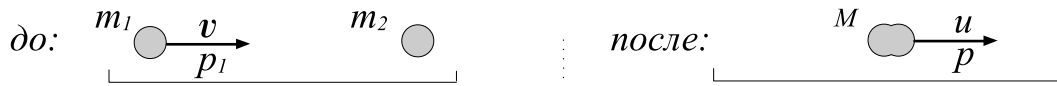
$$M = \frac{m_1}{\sqrt{1 - u_1^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{1 - u_2^2}} > m_1 + m_2.$$

Если  $M < m_1 + m_2$ , то такой *самопроизвольный* распад невозможен по энергетическим соображениям и требуется некоторое внешнее воздействие, чтобы разрушить *энергию связи*, равную  $m_1 + m_2 - M$ .

Требование  $M > m_1 + m_2$  запрещает испускание частицей некоторой другой частицы при сохранении своей исходной массы. Например, равномерно движущийся электрон не может излучить фотон, оставшись электроном. На самом деле он не может и превратиться в другую частицу в процессе такого распада, но это уже другая история.

Почему вообще частицы распадаются? Обычно к этому приводят некоторые эволюционные процессы, происходящие внутри исходной частицы. Простейшим примером может служить взрыв в результате химических реакций. В квантовом мире распады обычно связаны с *туннелированием квантовой частицы* через потенциальный барьер, непреодолимый для классической частицы. В квантово-релятивистском мире элементарных частиц ситуация ещё менее наглядна. Например, свободный нейтрон в среднем за 15 минут распадается на протон, электрон и нейтрино, которые “в нём *не находились*”. Этот же нейтрон внутри ядер, в окружении других нейтронов и протонов, вполне стабилен и не подвержен распаду.

Распад обратен ситуации “слипания”, когда в результате столкновения двух частиц возникает третья. Рассмотрим такую реакцию в *лабораторной системе отсчёта*, где первая частица с массой  $m_1$  имеет скорость  $v$  и энергию  $E_1 = m_1/\sqrt{1-v^2}$ , а вторая с массой  $m_2$  покоится. Результат их столкновения имеет массу  $M$  и движется со скоростью  $u$ :



Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$E_1 + m_2 = E, \quad p_1 = p.$$

Возводя в квадрат и вычитая, находим квадрат массы результирующей частицы, которая, естественно, больше, чем сумма исходных:

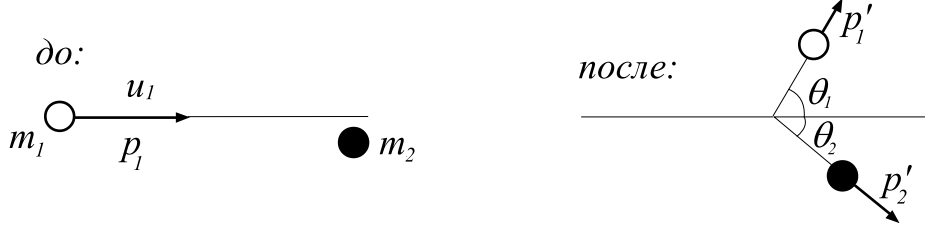
$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1m_2}{\sqrt{1-v^2}} = (m_1 + m_2)^2 + 2m_1m_2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1 \right).$$

Её скорость можно найти из сохранения импульса  $p_1 = p$ , однако более быстрый путь – воспользоваться связью импульса, энергии и скорости:

$$u = \frac{p}{E} = \frac{p_1}{E_1 + m_2} = \frac{v}{1 + (m_2/m_1)\sqrt{1-v^2}}.$$

Если  $v \rightarrow 1$ , то к скорости света стремится и скорость результирующей частицы.

• Рассмотрим теперь ситуацию, когда частица, имеющая энергию  $E_1$  и массу  $m_1$ , налетает на неподвижную частицу с массой  $m_2$  и массы частиц после этого взаимодействия не изменяются (*упругое столкновение*):



Если столкновение было “не лобовое”, то частицы разлетятся под некоторыми углами к скорости  $\mathbf{u}_1$  налетающей частицы. Обозначим все величины после столкновения штрихами и запишем законы сохранения:

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2, \quad \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2,$$

где  $E_2 = m$ ,  $\mathbf{p}_2 = 0$ . Избавимся от энергии и импульса одной из частиц:

$$(E_1 + m_2 - E'_1)^2 - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 = m_2^2.$$

Возводя в квадрат, получаем:

$$\mathbf{p}_1 \mathbf{p}'_1 = (E_1 + m_2) E'_1 - m_1^2 - E_1 m_2.$$

Скалярное произведение импульсов выражается через их модули и угол:  $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}'_1 = p_1 p'_1 \cos \theta_1$ . Поэтому угол вылета частиц равен:

$$\cos \theta_1 = \frac{(E_1 + m_2) E'_1 - m_1^2 - E_1 m_2}{p_1 p'_1}, \quad \cos \theta_2 = \frac{(E_1 + m_2)(E'_2 - m_2)}{p_1 p'_2}.$$

Второй угол получается совершенно аналогично. При этом необходимо избавиться от энергии и импульса первой частицы после столкновения.

Сам по себе угол рассеивания зависит от прицельного расстояния и характера взаимодействия между частицами. Однако независимо от последнего энергия рассеявшейся частицы, благодаря законам сохранения, связана с этим углом. Чем сильнее теряет энергию первая частица, тем на больший угол она рассеивается. Заметим, что так как  $E'_2 > m_2$ ,  $E_2 = m_2$ , то из закона сохранения энергии следует, что  $E'_1 < E_1$ , т.е. энергия уменьшается, переходя к покоящейся частице.

Подставив в выражение для  $\cos \theta_1$  зависимость импульса от энергии  $p' = \sqrt{E_1'^2 - m_1^2}$  и взяв производную по  $E_1'$ , можно ( $\ll N_{22}$ ) найти максимальное значение угла рассеяния:

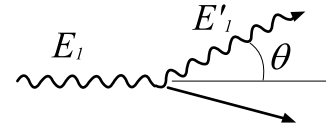
$$(\sin \theta_1)_{max} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Естественно, максимум, отличный от  $\theta = \pi/2$ , существует, если масса налетающей частицы  $m_1$  больше, чем масса частицы  $m_2$ .



Особенно просто выражение для результирующей энергии выглядит, если налетающая частица является безмассовой  $m_1 = 0$ . Например, в *эффекте Комптона* (1923 г.) фотон рассеивается на электроне. В этом случае  $p_1 = E_1$ ,  $p'_1 = E'_1$ , и энергия фотона после столкновения равна:

$$\frac{1}{E'_1} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{m_2} (1 - \cos \theta_1).$$



С фотоном по формуле Планка связаны частота  $E = h\nu$  и длина волны  $\lambda = 1/\nu$ . Относительное изменение  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$  последней имеет вид:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{E_1}{m_2} (1 - \cos \theta_1).$$

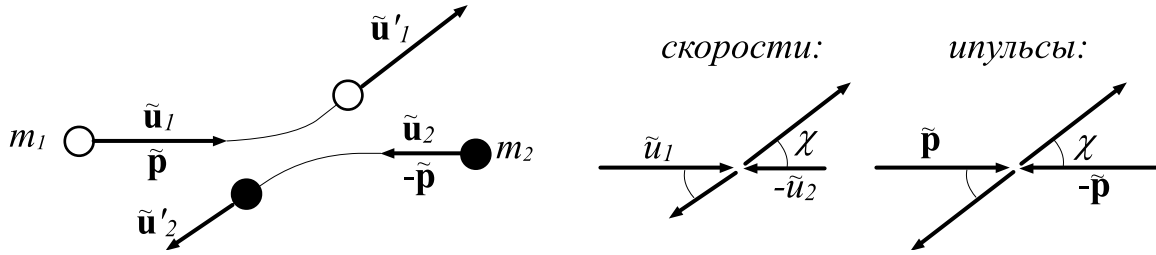
Таким образом, чем больше угол рассеивания, тем сильнее увеличивается длина волны (уменьшается энергия). Чтобы относительное изменение длины волны было заметным, необходимы энергии фотона  $E_1$ , сравнимые с массой электрона  $E_1 \sim m_2$ . Постоянная Планка в электрон-вольтах равна:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6.582\,118\,99(16) \cdot 10^{-22} \text{ МэВ} \cdot \text{с}.$$

Поэтому частоты фотона, соответствующие массе электрона  $m_e = 0.511$  МэВ, равны  $10^{20}$  герц. Длина волны при этом составляет  $\sim 10^{-12}$  м. Это фотоны жесткого *рентгеновского излучения*, которые могут быть получены при помощи рентгеновской трубки, в которой ускоренные электрическим полем электроны при резком ударе об анод испускают рентгеновские лучи (тормозное излучение). Дополнительно они выбивают электроны из внутренних электронных оболочек атомов. Замещающие их электроны с верхних энергетических уровней также испускают фотоны рентгеновского спектра. Величина  $h/mc = 2.4263 \cdot 10^{-12}$  м называется *комптоновской длиной волны электрона*. Изменение длины волны (частоты) фотона при рассеивании на электроне – это чисто квантовый эффект. В классической электродинамике при рассеивании электромагнитной волны на заряженной частице частота волны не изменится.

Выше рассмотрено столкновение в лабораторной системе отсчёта, когда одна частица покоится, а другая налетает на неё с импульсом  $p_1$ . Термин “*лабораторная система отсчёта*” мы уже несколько раз использовали. Он происходит от экспериментов, в которых один вид частиц разгоняют при помощи ускорителя и направляют на неподвижную мишень, состоящую из частиц другого вида. Естественно, это достаточно условный термин, потому что в тех же лабораториях проводят и эксперименты со встречными пучками, разгоняя каждый из них в ускорителе.

- Рассмотрим теперь упругое столкновение двух частиц в системе отсчёта *центра масс*, в которой их суммарный импульс равен нулю.



На первом рисунке изображено это столкновение в динамике и нарисованы траектории частиц. Когда они сближаются, начинает сказываться сила взаимодействия между ними и траектории искривляются. Когда частицы достаточно удалились друг от друга, они снова становятся свободными и движутся с постоянной скоростью.

По определению системы центра масс модули импульсов частиц равны друг другу до и после соударения. В силу закона сохранения импульса угол рассеивания обеих частиц один и тот же, равный  $\chi$ . Энергии частиц при столкновении не изменяются, так как из закона сохранения при одинаковых начальных импульсах имеем:

$$\sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m_1^2} + \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m_2^2} = \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}'^2 + m_1^2} + \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}'^2 + m_2^2},$$

откуда  $\tilde{\mathbf{p}}'^2 = \tilde{\mathbf{p}}^2$ , и, следовательно,  $\tilde{E}_i = \tilde{E}'_i$ . Энергия и импульс в системе центра масс помечены тильдой, чтобы отличать их от лабораторной системы. Скорости при одинаковых импульсах подчиняются соотношению:

$$|\tilde{\mathbf{p}}| = \tilde{E}_1 \tilde{u}_1 = \tilde{E}_2 \tilde{u}_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{\tilde{u}_1 / \sqrt{1 - \tilde{u}_1^2}}{\tilde{u}_2 / \sqrt{1 - \tilde{u}_2^2}},$$

и при различных массах также различны.

Выразим энергии в *лабораторной* системе отсчёта через угол  $\chi$  в системе *центра масс*. Для этого перейдём в инерциальную систему отсчёта, движущуюся *влево* со скоростью  $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{u}}_2$ . В этой системе вторая частица до столкновения покоится. Воспользуемся формулой преобразования энергии (1.25), стр. 56. Энергия первой частицы и модуль импульса до и после столкновения в системе центра масс не меняются:  $\tilde{E}_1 = \tilde{E}'_1 = \tilde{E}$ ,  $|\tilde{\mathbf{p}}_1| = |\tilde{\mathbf{p}}'_1| = \tilde{p}$ . В лабораторной системе энергии равны:

$$E_1 = \frac{\tilde{E}_1 + \tilde{u}_2 \tilde{p}_1}{\sqrt{1 - \tilde{u}_2^2}}, \quad E'_1 = \frac{\tilde{E}_1 + \tilde{u}_2 \tilde{p}_1 \cos \chi}{\sqrt{1 - \tilde{u}_2^2}}, \quad (3.7)$$

где учтено, что после столкновения энергия не изменяется и скалярное произведение  $\mathbf{v}\mathbf{p}$  равно произведению модулей на косинус угла  $\chi$ .

Поэтому переданная энергия в лабораторной системе равна:

$$E'_1 - E_1 = -\frac{\tilde{p}_1 \tilde{u}_2}{\sqrt{1 - \tilde{u}_2^2}} (1 - \cos \chi) = -\frac{\tilde{p}^2}{m_2} (1 - \cos \chi),$$

где  $\tilde{u}_2$  выражена через  $\tilde{p}_2$ , равный  $\tilde{p}$  (в системе центра масс). Чтобы его найти, воспользуемся первым соотношением (3.7), в которое подставим связь энергии и импульса  $\tilde{E}_1 = \sqrt{\tilde{p}^2 + m_1^2}$ , а также импульса и скорости  $1 + \tilde{p}^2/m_2^2 = 1/(1 - \tilde{u}_2^2)$ :

$$E_1 = \frac{\tilde{E}_1}{\sqrt{1 - \tilde{u}_2^2}} + \frac{\tilde{p}^2}{m_2} = \sqrt{\tilde{p}^2 + m_1^2} \sqrt{1 + \tilde{p}^2/m_2^2} + \frac{\tilde{p}^2}{m_2}.$$

Решая это уравнение относительно  $\tilde{p}$ , получаем:

$$\frac{\tilde{p}^2}{m_2} = \varepsilon = \frac{(E_1^2 - m_1^2) m_2}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1},$$

Что даёт  $E'_1$ , а при помощи закона сохранения и  $E'_2 = E_1 + m_2 - E'_1$ :

$$E'_1 = E_1 - \varepsilon (1 - \cos \chi), \quad E'_2 = m_2 + \varepsilon (1 - \cos \chi).$$

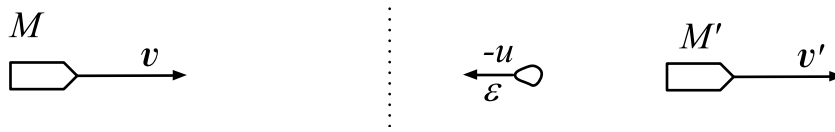
Таким образом, энергии рассеянных частиц в лабораторной системе достаточно просто связаны с углом  $\chi$  поворота импульсов в системе центра масс. Величина  $\varepsilon (1 - \cos \chi)$  является энергией, переданной первой частицей, и она тем больше, чем больше  $\chi$ . При “лобовом” столкновении, когда  $\chi = \pi$ , эта энергия максимальна и равна  $2\varepsilon$ .

В заключение рассмотрим один важный аспект, связанный с законами сохранения [15]. Если частицы взаимодействуют, то скорость конкретной частицы изменяется. Поэтому её энергия и импульс должны вычисляться в конкретный момент времени. При записи закона сохранения, например, импульса мы суммируем импульсы частиц, вычисленные в данный момент времени в конкретной системе отсчёта. Однако, так как частицы находятся в различных точках пространства, в другой системе такая сумма будет соответствовать не одновременным моментам времени!

В результате, вообще говоря, закон сохранения имеет однозначный смысл, только когда частицы ещё не взаимодействовали или после этого взаимодействия. В этом случае они движутся с постоянными скоростями (импульсами), и даже не одновременные значения импульсов, дадут одинаковую сумму. Мы подробнее рассмотрим этот вопрос в последнем разделе главы.

### 3.3 Космические полёты

Межзвёздные расстояния огромны. Чтобы их преодолеть, необходимо движение с релятивистскими скоростями. В *пустом пространстве* летательный аппарат может ускорить себя, только лишившись части своей массы. Рассмотрим детали релятивистского реактивного движения. Пусть ракета массой  $M$ , летящая со скоростью  $v$ , за малый интервал времени  $dt$  испускает в противоположном направлении движения нечто, обладающее небольшой энергией  $\varepsilon$  и скоростью  $-u$ :



Скорость ракеты при этом увеличивается, а масса уменьшается. Законы сохранения энергии и импульса имеют вид:

$$\frac{M}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{M'}{\sqrt{1-v'^2}} + \varepsilon, \quad \frac{Mv}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{M'v'}{\sqrt{1-v'^2}} - u\varepsilon,$$

где  $M'$  и  $v'$  – масса и скорость ракеты после испускания, а для импульса испускаемого объекта подставлено соотношение  $p = -u\varepsilon$  (скорость  $\mathbf{u}$  направлена против  $v$ ). Считая изменения энергии и импульса *малыми*, их можно записать в дифференциалах ( $df = f' - f$ ):

$$d\left(\frac{M}{\sqrt{1-v^2}}\right) = -\varepsilon, \quad d\left(\frac{vM}{\sqrt{1-v^2}}\right) = u\varepsilon$$

или, исключая  $\varepsilon$ , имеем:

$$d\left(\frac{vM}{\sqrt{1-v^2}}\right) = -u d\left(\frac{M}{\sqrt{1-v^2}}\right). \quad (3.8)$$

Выше скорость истечения  $u_x = -u$ , как и скорость ракеты, измерялись относительно “неподвижной” системы отсчёта. Будем считать постоянной скорость истечения *относительно ракеты*  $u'_x = -u_0 = \text{const}$ . Тогда по правилу релятивистского сложения скоростей эта скорость для “неподвижного” наблюдателя равна:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v} = \frac{-u_0 + v}{1 - u_0 v} = -u.$$

Естественно, текущая скорость  $u$  в неподвижной системе отсчёта зависит от скорости ракеты  $v$  и при её увеличении уменьшается ( $u_0 < 1$ ).

Масса ракеты  $M = M(t)$  и её скорость  $v = v(t)$  являются функциями времени. Время всегда можно исключить и считать, что оставшаяся масса ракеты зависит от приобретённой ею скорости  $M = M(v)$ . Разделив (3.8) на  $dv$ , получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{d(vf)}{dv} = \frac{v - u_0}{1 - u_0v} \frac{df}{dv}, \quad \text{где} \quad f = f(v) = \frac{M(v)}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Раскроем производную произведения и разделим дифференциалы:

$$\frac{df}{f} = \frac{v - 1/u_0}{1 - v^2} dv = \frac{v dv}{1 - v^2} - \frac{1}{2u_0} \left( \frac{dv}{1 - v} + \frac{dv}{1 + v} \right).$$

Это уравнение легко интегрируется ( $\llcorner$  Н<sub>23</sub>). Возвращаясь от функции  $f$  к массе  $M = f \sqrt{1 - v^2}$ , окончательно получаем:

$$\frac{M}{M_0} = \left( \frac{1 - v}{1 + v} \right)^{1/(2u_0)}, \quad (3.9)$$

где  $M_0 = M(0)$  - масса ракеты в начале разгона ( $v_0 = 0$ ). Восстанавливая фундаментальную скорость  $v \mapsto v/c$ , несложно ( $\llcorner$  Н<sub>24</sub>) в нерелятивистском пределе получить известную формулу Циолковского  $M = M_0 e^{-v/u_0}$ .

При выводе формулы реактивного движения мы предполагали, что поток выбрасываемого из ракеты вещества постоянен как по скорости, так и по интенсивности. На самом деле это достаточно неэффективный способ ускорения, так как на начальных этапах приходится разгонять как полезный груз, так и топливо. Более рациональным является выбрасывание в начальный момент как можно большего количества вещества, хотя ускорение, испытываемое при этом ракетой, будет очень большим. Так, если вещество испускается ракетой не постепенно, а “сразу”, например, в результате взрыва, то ситуация с балансом полезной массы ракеты и исходной  $M/M_0$  будет иной. Запишем законы сохранения энергии и импульса, когда ракета первоначально была неподвижна, имея массу  $M_0$ . Пусть она испускает со скоростью  $u_0$  некоторую массу  $m$ :

$$M_0 = \frac{M}{\sqrt{1 - v^2}} + \frac{m}{\sqrt{1 - u_0^2}}, \quad \frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{mu_0}{\sqrt{1 - u_0^2}}.$$

Исключая  $m$ , получаем:

$$\frac{M}{M_0} = \frac{\sqrt{1 - v^2}}{1 + v/u_0}.$$

В случае, если  $u_0 = 1$  (фундаментальная скорость), результат совпадает с (3.9). Однако при  $u_0 < 1$  формулы различаются, и вместо степенного убывания массы мы имеем значительно более мягкую зависимость от  $u_0$ .

Из соотношения (3.9) следует, что чем выше скорость истечения  $u_0$ , тем меньшую часть исходной массы теряет ракета. В химических ракетных двигателях скорость истечения в долях фундаментальной скорости составляет порядка  $u = 10^{-5} = 3$  км/с. Поэтому при разгоне до половины скорости света  $v = 1/2$  от ракеты останется  $10^{-23856}$  часть. Понятно, что подобный способ релятивистского ускорения абсолютно нереалистичен.

Наиболее экономичным является двигатель, в котором скорость истечения близка к единице  $u_0 \sim 1$ . В этом случае для достижения половины скорости света  $v = 1/2$  потребуется потратить 40% исходной массы. Обычно подобные двигатели называются фотонными, однако в качестве реактивной струи могут использоваться не только фотоны, но и заряженные частицы, ускоренные при помощи электромагнитных полей до скоростей, близких к скорости света.

Представим корабль в виде большого циклического ускорителя заряженных частиц, которые постепенно разгоняются электрическим полем, удерживаясь на круговой или спиральной орбите при помощи магнитного поля. Достигнув околосветовых скоростей, они выбрасываются в виде реактивной струи. Другой вариант – очень длинный линейный ускоритель частиц, которыми могут быть и достаточно тяжёлые ионизированные атомы. Такой принцип устройства ракеты часто называется ионным двигателем. Он имеет очень маленькую реактивную силу, однако на маршевом разгоне (этап набора скорости при старте, например, с орбиты вокруг Земли) постепенно и достаточно эффективно увеличивает скорость ракеты. Возможны также гибридные варианты, когда несколько пар линейных ускорителей закливают разворотными кольцами с магнитным полем. В этом случае двигатель может работать как в линейном, так и в циклическом варианте.

В солнечной системе, кроме химических ракет и ракет, использующих ядерные реакции, возможно движение при помощи светового солнечного давления, отражаемого большими зеркальными парусами. Стоит также упомянуть идею внешнего ускорения космического аппарата без двигателя. В этом случае он может удаляться от Земли, получая импульсы (например, лазерные) от цепочки вращающихся на разных расстояниях вокруг Земли ускорительных установок. Отдача от таких импульсов будет постепенно увеличивать скорость и самих установок. Подобная раскручивающаяся и увеличивающаяся “праща” может постоянно запускать множество небольших аппаратов для исследования Солнечной системы, получая энергию для импульсов от солнечных батарей. Не запрещено также и дальнейшее совершенствование идеи Жюль Верна ☺.

Движение с околосветовыми скоростями сопряжено с множеством опасностей. Помимо космических пиратов негуманоидного вида, главным врагом звездолета будут атомы водорода. По современным оценкам в каждом кубическом сантиметре межзвёздного пространства содержится примерно один такой атом. Даже если он имеет небольшую скорость, при столкновении с обшивкой быстро летящего корабля будет порождаться жёсткое радиоактивное излучение. Одним из возможных решений (технически пока непонятно, как реализуемым) была бы защита от этих частиц при помощи электромагнитных полей, с одновременным захватом их для пополнения расходуемого для реактивного движения вещества. Ещё большая проблема – пыль и микрометеориты, которые могут быть смертельными даже для автоматических зондов.

Вторая проблема - энергетическая. Даже без учёта расхода массы ракеты в соответствии с формулой Циолковского, чтобы ускорить зонд массой 100 кг. до скорости, равной половине скорости света, требуется  $15 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \approx 10^{18}$  Дж. По современным меркам это гигантская энергия. Однако освоение термоядерного управляемого синтеза сделает подобные энергии более реалистичными. Не стоит на месте также и физика элементарных частиц. Чем глубже мы опускаемся по структурной лестнице, тем большие энергии связанных состояний потенциально нам доступны. Электрон так же неисчерпаем, как и атом ☺.

Кроме технологических проблем, возникающих при исследовании глубокого космоса, существуют и проблемы, связанные с целесообразностью таких экспедиций. Чем дальше мы забираемся в космос, тем позже человечество узнаёт о результатах исследований. В какой-то момент задержка в получении новой информации полностью нивелирует её ценность. Сомнительна также польза пилотируемых экспедиций, даже в пределах солнечной системы. Стремительно развивающаяся компьютерная техника уже в ближайшем будущем будет обладать интеллектом, сравнимым с человеческим и, к сожалению, превышающим его. Поэтому слабые биологические организмы, которые необходимо защищать от радиации, обеспечивать воздухом и водой, делают бессмысленными пилотируемые человеческими особями экспедиции. Единственная причина, по которой необходима разработка звездолетов с биологическим экипажем, – это возможные проблемы с нашим Солнцем. Пока нет оснований считать, что оно выйдет из режима спокойного горения, став, например, сверхновой. Однако мы достаточно мало знаем о его физике. В любом случае возможность построения ковчегов, способных спасти часть биологических существ и знаний человечества, должна быть проработана.

### 3.4 Сила

• Рассмотрим движение частицы под воздействием внешней, не зависящей от времени силы. В классической физике для предсказания траектории частицы  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  достаточно знать её положение и скорость в начальный момент времени. Если траектория является гладкой (дифференцируемой) функцией времени, то с математической точки зрения это означает, что уравнения движения должны быть дифференциальными уравнениями второго порядка:

$$\mathbf{f}(\ddot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) = 0,$$

где точка над вектором означает производную по времени. Знание уравнений движения, начальных значений скорости  $\mathbf{u}_0 = \dot{\mathbf{r}}(0)$  и положения  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$  объекта позволяет предсказать его траекторию. Естественно, для этого необходим явный вид уравнений, которые обычно получаются на основе эмпирических наблюдений. Например, при движении небольшого (“пробного”) заряда  $q$  в окрестности неподвижного заряда  $Q$  выполняется закон Кулона:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{qQ}{r^3} \mathbf{r}.$$

В левой части уравнения находится производная *релятивистского* импульса  $\mathbf{p} = m\mathbf{u}/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$ . Векторная функция координат в правой части называется *силой*. Таким образом, по *определению* сила равна скорости изменения импульса объекта:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m\mathbf{a}}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} + \frac{m\mathbf{u}(\mathbf{u}\mathbf{a})}{(1 - \mathbf{u}^2)^{3/2}}, \quad (3.10)$$

где  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{u}}$ . Можно было бы определить силу, как  $m\mathbf{a}$  или  $m\mathbf{a}/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$ . Однако в этом случае эмпирическое выражение для кулоновского уравнения движения привело бы к тому, что сила оказалась зависящей не только от положения пробного заряда, но и от его скорости и, что совсем нехорошо, – от ускорения.

Поэтому определение (3.10) выбрано таким образом, чтобы вектор силы, приводящий к эмпирическим уравнениям движения, выглядел наиболее *просто*.

Отдельный вопрос, почему “простота” возникает, если сила равна производной импульса? Оставляя этот вопрос пока без ответа, примем (3.10) как определение и рассмотрим некоторые общие свойства динамики, не зависящие от явного вида взаимодействия  $\mathbf{F}$ .



• Скалярное произведение силы на скорость равно изменению энергии движения частицы:

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{u}\mathbf{F}. \quad (3.11)$$

Кроме прямой проверки, эту формулу легко получить дифференцированием связи энергии, импульса и массы  $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$  с последующей подстановкой  $\mathbf{p} = \mathbf{u}E$ .

Найдём ускорение пробного тела:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{u}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{p}}{E} \right) = \frac{\mathbf{F} - \mathbf{u}(\mathbf{u}\mathbf{F})}{E}. \quad (3.12)$$

Такое представление не содержит в явном виде массу частицы, поэтому применимо и для безмассовых объектов, например, фотонов. Как известно, в гравитационном поле траектория света отклоняется от прямой линии. Смещение положения звёзд, видимых в момент затмения Солнца возле края его поверхности (относительно их положения в отсутствие Солнца), стало триумфом теории гравитации Эйнштейна:



В последней этот эффект связан с кривизной четырёхмерного пространства и времени. Однако если сила гравитационного притяжения зависит не от массы частицы  $m$ , а от её энергии  $E$ , подобные искривления траектории можно достаточно просто описать в рамках плоского пространства. Подробнее мы рассмотрим эти вопросы во второй части книги.

При помощи (3.12) можно записать изменение со временем квадрата скорости:

$$\frac{d\mathbf{u}^2}{dt} = \frac{2(\mathbf{u}\mathbf{F})}{E} (1 - \mathbf{u}^2).$$

Такое уравнение движения приводит к тому, что при приближении скорости  $\mathbf{u}$  к скорости света её модуль перестаёт изменяться, так как множитель  $(1 - \mathbf{u}^2)$  “замораживает” динамику. В частности, “светоподобные” объекты, имеющие изначально единичный модуль скорости  $\mathbf{u}^2 = 1$ , не меняют этого значения. Хотя, конечно, они могут изменить направление скорости под воздействием силы  $\mathbf{F}$  (если она зависит, например, от энергии объекта  $E$ ).

• Найдём общее выражение для силы, согласующееся с законами сохранения энергии и момента импульса. Пусть вокруг неподвижного, “точечного” источника силы *пространство изотропно*. В этом случае сила, действующая на пробную частицу, может зависеть только от вектора расстояния от центра поля  $\mathbf{r}$  и скорости пробной частицы  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{F} = f_1 \mathbf{r} + f_2 \mathbf{u}(\mathbf{ru}) + f_3 [\mathbf{r} \times \mathbf{u}],$$

где  $f_i$  – скалярные функции, которые могут зависеть от расстояния до источника силы  $r = \sqrt{\mathbf{r}}$ , модуля скорости  $u = \sqrt{\mathbf{u}^2}$  и скалярного произведения  $\mathbf{ru}$ . Множитель  $(\mathbf{ru})$  при функции  $f_2$  выбран для удобства.

При наличии такого силового воздействия может сохраняться (не меняться во времени) скалярная функция координат и скорости, называемая *полной энергией*. Простейший выбор такой функции соответствует классической сумме энергии движения  $E$  и *потенциальной* энергии  $V(r)$ :

$$\mathcal{E} = E + V(r) = \text{const.}$$

Учитывая (3.11), возьмём производную полной энергии по времени:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{u}\mathbf{F} + V'(r)\frac{\mathbf{ru}}{r} = f_1(\mathbf{ru}) + f_2(\mathbf{ru})\mathbf{u}^2 + V'(r)\frac{(\mathbf{ru})}{r} = 0.$$

Из этого уравнения следует, что  $f_1 = -f_2\mathbf{u}^2 - V'/r$ . Видно, что на сохранение полной энергии пробной частицы не оказывает влияние компонента силы  $f_3$ , перпендикулярная скорости. Итак, энергия сохраняется, если сила имеет следующий вид:

$$\mathbf{F} = -\frac{V'(r)}{r}\mathbf{r} - f_2[\mathbf{u} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{u}]] + f_3[\mathbf{u} \times \mathbf{r}], \quad (3.13)$$

где для компактности мы воспользовались формулой “бац минус цаб”:  $[\mathbf{u} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{u}]] = \mathbf{ru}^2 - \mathbf{u}(\mathbf{ru})$ . Вторая и третья компоненты силы всегда остаются перпендикулярными скорости, поэтому, изменяя её направление, не изменяют абсолютную величину (т.е. энергию).

Заметим, что полная энергия может и не быть *суммой* энергии движения  $E$  и потенциального воздействия  $V(r)$ . В качестве упражнения предлагается проверить, что следующая величина:

$$\mathcal{E} = E e^{V(r)} = \text{const}$$

сохраняется, если сила имеет вид:

$$\mathbf{F} = -E \frac{V'(r)}{r}\mathbf{r} - f_2[\mathbf{u} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{u}]] + f_3[\mathbf{u} \times \mathbf{r}]. \quad (3.14)$$

Отличие (3.14) от силы (3.13), приводящей к аддитивному закону сохранения энергии, состоит в появлении энергии движения  $E$ , зависящей от скорости в первом слагаемом.

• Кроме полной энергии, может также сохраняться момент импульса  $\mathbf{L}$ , перпендикулярный скорости  $\mathbf{u}$  и радиус-вектору  $\mathbf{r}$ . Благодаря этому траектория частицы всегда остаётся в одной плоскости, проходящей через начальные значения векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{u}$ . Классическая формула  $\mathbf{L} = m[\mathbf{r} \times \mathbf{u}]$  в релятивистском случае может быть обобщена различным образом. Наиболее простое выражение для момента

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] = E [\mathbf{r} \times \mathbf{u}]$$

сохраняется

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{u} \times \mathbf{p}] + [\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}] = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}] = f_2(\mathbf{ru})[\mathbf{r} \times \mathbf{u}] + f_3(\mathbf{r}(\mathbf{ru}) - \mathbf{ur}^2) = 0$$

только, если  $f_2 = f_3 = 0$  (векторы  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{r}$  в общем случае имеют произвольное направление, а  $[\mathbf{r} \times \mathbf{u}]$  им перпендикулярен).

Однако это не означает, что нельзя построить соответствующий интеграл движения при  $f_2 \neq 0$ . Несложно видеть, что вектор  $[\mathbf{u} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{u}]]$  в выражениях (3.14), (3.13) остаётся в плоскости  $(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ , не выводя из неё траекторию движения частицы (в отличие от третьей компоненты силы  $f_3$ ). Поэтому при наличии  $f_2$  сохраняется следующая величина:

$$\mathbf{L} = g(E) [\mathbf{r} \times \mathbf{p}],$$

где  $g(E)$  – некоторая функция энергии движения. Действительно, например, для (3.14) с  $f_3 = 0$  уравнение:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = g'(E)(\mathbf{uF})[\mathbf{r} \times \mathbf{p}] + g(E) f_2(\mathbf{ru})[\mathbf{r} \times \mathbf{u}] = 0$$

выполняется, если

$$f_2 = -E \frac{g'(E)}{g(E)} \frac{(\mathbf{uF})}{(\mathbf{ru})} = E^2 \frac{g'(E)}{g(E)} \frac{V'(r)}{r}.$$

В наиболее простом случае линейной зависимости от энергии  $g(E) = E$  “модифицированный момент импульса”  $\mathbf{L} = E [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$  сохраняется (движение происходит в плоскости) для следующей силы:

$$\mathbf{F} = -E \frac{V'(r)}{r} \{ \mathbf{r} + [\mathbf{u} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{u}]] \}.$$

Общий множитель  $E$  возникает для мультипликативной полной энергии и отсутствует в случае аддитивной полной энергии. Для гравитационного взаимодействия при малых скоростях это выражение должно переходить в закон гравитации Ньютона, поэтому  $V(r) = -\alpha/r$ . Как мы увидим во второй части, такая сила в первом приближении по  $\alpha$  приводит к таким же выражениям для смещения перигелия Меркурия и отклонения света, как и теория гравитации Эйнштейна.

• Найдём теперь, как связаны векторы силы для наблюдателей в двух инерциальных системах отсчёта. Для этого запишем преобразования Лоренца (см. стр. 31) для интервала времени  $dt$  между двумя последовательными положениями объекта в пространстве:

$$dt' = \frac{dt - \mathbf{v} d\mathbf{r}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} = \frac{1 - \mathbf{v} \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} dt,$$

где  $\mathbf{v}$  – относительная скорость систем отсчёта, а  $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$  – скорость объекта. Используя формулу для преобразования квадратов скорости (1.16), стр. 34:

$$\frac{\sqrt{1 - \mathbf{u}'^2}}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} = \frac{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}{1 - \mathbf{v} \mathbf{u}}, \quad (3.15)$$

это соотношение можно переписать в более симметричном виде:

$$dt' \sqrt{1 - \mathbf{u}'^2} = dt \sqrt{1 - \mathbf{u}^2}. \quad (3.16)$$

В левой и правой части стоит одно выражение, записанное с точки зрения каждой инерциальной системы. Поэтому его называют *инвариантом* преобразований. В данном случае это бесконечно малое собственное время объекта  $dt_0$ , одинаковое для обеих систем отсчёта  $S$  и  $S'$ . Действительно, если часы движутся со скоростью  $\mathbf{u}$ , то прошедшее на них время относительно системы отсчёта  $S$  равно  $dt_0 = dt\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$  (см. стр 79). Эту же формулу можно записать и для системы  $S'$ , поставив в правой части штрихованную скорость и время. В левой же части в обоих случаях стоит одна и та же величина – собственное время частицы.

Возьмём дифференциалы от преобразования импульса и энергии (стр. 57), считая относительную скорость систем отсчёта  $\mathbf{v}$  постоянной:

$$dE' = \frac{dE - v dp_x}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad dp'_x = \frac{dp_x - v dE}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad dp'_y = dp_y.$$

Разделим эти соотношения на дифференциалы времени (3.16) и, учитывая, что  $dE/dt = \mathbf{u}\mathbf{F}$ , получаем:

$$\frac{\mathbf{u}'\mathbf{F}'}{\sqrt{1 - \mathbf{u}'^2}} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{F} - v F_x}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2} \sqrt{1 - v^2}}, \quad \frac{F'_x}{\sqrt{1 - \mathbf{u}'^2}} = \frac{F_x - v (\mathbf{u}\mathbf{F})}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2} \sqrt{1 - v^2}}.$$

Эти преобразования связывают компоненты силы, измеряемой наблюдателями в двух инерциальных системах отсчёта  $S'$  и  $S$ . Для поперечных к направлению скорости  $v$  проекций силы неизменными оказываются комбинации  $F_y/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$  и  $F_z/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$ . Это следует из  $dp'_y = dp_y$  и  $dp'_z = dp_z$ .

• Мы уже отмечали, что четвёрка величин скалярной энергии и векторного импульса  $(E, \mathbf{p})$  преобразуется так же, как и время с радиус-вектором  $(t, \mathbf{r})$ . Аналогичная ситуация и с силой. В этом случае соответствующими четырьмя величинами (*4-вектор силы*) являются:

$$f^\alpha = \left( \frac{\mathbf{u}\mathbf{F}}{\sqrt{1-\mathbf{u}^2}}, \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1-\mathbf{u}^2}} \right).$$

В первой главе преобразования для координат и времени были записаны в векторном виде (стр. 31):

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \gamma \mathbf{v}t + \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}). \quad (3.17)$$

Аналогичные векторные преобразования справедливы и для силы:

$$\frac{\mathbf{F}'}{\sqrt{1-\mathbf{u}'^2}} = \frac{\mathbf{F} - \gamma \mathbf{v}(\mathbf{u}\mathbf{F}) + \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{F})}{\sqrt{1-\mathbf{u}^2}}.$$

Отметим также соотношение:

$$\mathbf{u}'\mathbf{F}' = \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{v})\mathbf{F}}{1 - \mathbf{u}\mathbf{v}},$$

которое следует из преобразования для нулевых компонент 4-силы. В нём дополнительно учтено преобразование для квадрата скорости (3.15).

В дальнейшем нам понадобится обратное преобразование для силы. Как обычно, оно получается перестановкой штрихованных и нештрихованных величин с заменой  $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$ :

$$\frac{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}{1-\mathbf{v}\mathbf{u}} \mathbf{F} = \mathbf{F}' + \gamma \mathbf{v}(\mathbf{u}'\mathbf{F}') + \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{F}'). \quad (3.18)$$

В этом преобразовании также произведено небольшое упрощение при помощи соотношения (3.15).

Преобразования силы между инерциальными системами отсчёта позволяют найти силу взаимодействия между двумя движущимися объектами, если известна “статическая сила”, в ситуации, когда один из объектов неподвижен. Мы воспользуемся этим фактом в следующей главе, чтобы при помощи закона Кулона взаимодействия неподвижного заряда  $Q$  на пробный заряд  $q$

$$\mathbf{F} = \frac{qQ}{r^3} \mathbf{r}$$

найти силу воздействия со стороны движущегося со скоростью  $\mathbf{v}$  заряда. В результате возникнет специфическая компонента силы, имеющая смысл магнитного поля. В конечном счёте это приведёт нас к уравнениям Максвелла и классической электродинамике, в основе которой на самом деле лежат “лишь” закон Кулона и преобразования Лоренца.

### 3.5 Решения динамических уравнений

• Рассмотрим динамическое уравнение для релятивистской частицы, движущейся в поле постоянной силы:

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-\mathbf{u}^2}} = \mathbf{F} = \text{const.}$$

Несмотря на простоту уравнения, релятивистская динамика приводит к довольно громоздким решениям. Во второй главе, при рассмотрении равноускоренного движения, мы изучили частный случай движения вдоль прямой. Найдём теперь решение для произвольного направления начальной скорости  $\mathbf{u}_0$  частицы и вектора силы  $\mathbf{F}$ .

Интегрируя динамическое уравнение первый раз, получаем:

$$\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-\mathbf{u}^2}} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{a}t,$$

где введен постоянный вектор  $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ , а  $\mathbf{w}_0$  - константа интегрирования. Она может быть выражена через начальную скорость объекта  $\mathbf{u}_0$  в момент времени  $t = 0$ :

$$\mathbf{w}_0 = \frac{\mathbf{u}_0}{\sqrt{1-\mathbf{u}_0^2}}.$$

Если возвести выражение для скорости в квадрат, можно выразить  $\mathbf{u}^2$  через время и переписать зависимость вектора скорости от времени в явном виде:

$$\mathbf{u}(t) = \frac{\mathbf{w}_0 + \mathbf{a}t}{\sqrt{1 + (\mathbf{w}_0 + \mathbf{a}t)^2}}.$$

Так как по определению  $\mathbf{u}(t) = d\mathbf{r}/dt$ , то, чтобы получить закон движения частицы, необходимо проинтегрировать функцию  $\mathbf{u}(t)$ :

$$\mathbf{r} = \int \mathbf{u}(t) dt = \frac{\alpha}{a} \int \frac{\mathbf{w}_0 + \mathbf{a}t}{\sqrt{1 + \alpha^2 \left(t + \frac{\mathbf{w}_0 \mathbf{a}}{a^2}\right)^2}} dt,$$

где в знаменателе выделен полный квадрат по  $t$ ,  $a = |\mathbf{a}|$  и

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{[\mathbf{w}_0 \times \mathbf{a}]^2}{a^2}}}.$$

Сделаем замену  $\tau = t + (\mathbf{w}_0 \mathbf{a})/a^2$ :

$$\mathbf{r} = \frac{\alpha}{a} \int \frac{\mathbf{a}\tau + [\mathbf{a} \times [\mathbf{w}_0 \times \mathbf{a}]]/a^2}{\sqrt{1 + \alpha^2 \tau^2}} d\tau,$$

где применена формула двойного векторного произведения.

Этот интеграл легко вычисляется при помощи следующих табличных интегралов:

$$\int \frac{\tau d\tau}{\sqrt{1 + \alpha^2 \tau^2}} = \frac{1}{\alpha^2} \sqrt{1 + \alpha^2 \tau^2}, \quad \int \frac{d\tau}{\sqrt{1 + \alpha^2 \tau^2}} = \frac{1}{\alpha} \ln \left( \alpha \tau + \sqrt{1 + \alpha^2 \tau^2} \right),$$

проверяемых прямым дифференцированием. В результате:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{a}}{a^2} \left( \sqrt{1 + (\mathbf{w}_0 + \mathbf{a}t)^2} - \sqrt{1 + \mathbf{w}_0^2} \right) + \frac{[\mathbf{a} \times [\mathbf{w}_0 \times \mathbf{a}]]}{a^2} \tau_0(t),$$

где  $\mathbf{r}_0$  – положение тела в момент времени  $t = 0$ . Константы интегрирования выбраны таким образом, чтобы  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ . Величина

$$\tau_0(t) = \frac{1}{a} \ln \frac{\sqrt{1 + (\mathbf{w}_0 + \mathbf{a}t)^2} + at + (\mathbf{w}_0 \mathbf{a})/a}{\sqrt{1 + \mathbf{w}_0^2} + (\mathbf{w}_0 \mathbf{a})/a}$$

имеет смысл собственного времени объекта. Оно по определению равно:

$$\tau_0(t) = \int_0^t \sqrt{1 - \mathbf{u}^2(t)} dt = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + (\mathbf{w}_0 + \mathbf{a}t)^2}}.$$

Если с движущейся под воздействием постоянной силы частицей связать часы, то за время движения  $t$  они покажут интервал времени  $\tau_0(t)$ . Выражение для  $\tau_0(t)$ , при известных начальной скорости частицы и её “ускорений” позволяет вычислить показания движущихся часов. В частном случае начально неподвижной частицы её собственное время равно:

$$\tau_0(t) = \frac{1}{a} \ln \left( \sqrt{1 + (at)^2} + at \right).$$

Если собственное ускорение  $\mathbf{a}$  и начальная скорость  $\mathbf{u}_0$  параллельны друг другу, то векторное произведение  $[\mathbf{a} \times [\mathbf{w}_0 \times \mathbf{a}]]$  равно нулю и выражение для траектории заметно упрощается. Тело движется по прямой линии. Если вдоль неё направить ось  $x$ , то получится уже известное нам выражение (2.28), стр.113:

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{a} \left( \sqrt{1 + (w_0 + at)^2} - \sqrt{1 + w_0^2} \right).$$

Если построить эту траекторию на плоскости  $(x, t)$ , то получится гипербола. Поэтому такое движение часто называют *гиперболическим*. Хотя мы видим, что в общем решении зависимость от времени входит более сложным образом, поэтому термин “гиперболическое движение” применим только для движения по прямой. В общем случае лучше просто говорить о *релятивистском равноускоренном движении*.

• Рассмотрим ещё один пример решения релятивистских динамических уравнений. Пусть сила зависит от скорости следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{u} \times \mathbf{B},$$

где  $\mathbf{u}$  – скорость частицы, а  $\mathbf{B}$  – некоторый постоянный вектор. Как мы увидим в следующей главе, подобное уравнение возникает при движении единичного заряда в постоянном однородном магнитном поле.

Производная энергии по времени равна произведению скорости на силу:  $dE/dt = \mathbf{u}\mathbf{F}$ , а скалярное произведение  $\mathbf{u}[\mathbf{u} \times \mathbf{B}] = [\mathbf{u} \times \mathbf{u}]\mathbf{B} = 0$ . Поэтому энергия движения  $E$  в таком поле сил не изменяется, а следовательно, не изменяется модуль скорости. Этим можно воспользоваться, записав связь импульса, энергии и скорости:  $\mathbf{p} = E\mathbf{u}$ . Постоянная энергия выносится из-под производной по времени, и уравнение движения принимает следующий вид:

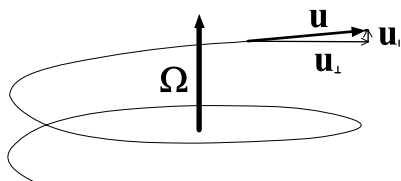
$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad (3.19)$$

где введен постоянный вектор  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{B}/E$ , пропорциональный силовому полю  $\mathbf{B}$  и постоянной энергии частицы, зависящей от начальной скорости частицы. Умножая это уравнение на  $\boldsymbol{\Omega}$ , приходим к выводу, что составляющая скорости в направлении вектора  $\boldsymbol{\Omega}$  не изменяется:

$$\frac{d(\mathbf{u}\boldsymbol{\Omega})}{dt} = 0.$$

Вдоль вектора  $\boldsymbol{\Omega}$  частица продолжает двигаться равномерно. Изменение направления скорости происходит в плоскости, перпендикулярной  $\boldsymbol{\Omega}$ .

Уравнение (3.19) достаточно просто решается при подходящем выборе системы координат. Для этого ось  $z$  направляется вдоль вектора  $\boldsymbol{\Omega}$  и получается система из двух дифференциальных уравнений. Мы тем не менее решим (3.19) в векторных обозначениях. Разложим вектор скорости на продольную  $\mathbf{u}_{\parallel}$  и поперечную составляющие  $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}$ :



$$\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{u})}{\omega^2},$$

$$\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \frac{\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{u})}{\omega^2},$$

где введен модуль вектора  $\omega = |\boldsymbol{\Omega}| = |\mathbf{B}|/E$ .



Так как  $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} = 0$  и  $\boldsymbol{\Omega}\mathbf{u}$  постоянна, то поперечная составляющая удовлетворяет уравнению (3.19):

$$\frac{d\mathbf{u}_\perp}{dt} = \mathbf{u}_\perp \times \boldsymbol{\Omega}.$$

Возьмём от этого уравнения производную по времени и раскроем двойное векторное произведение, учитывая, что  $\mathbf{u}_\perp \boldsymbol{\Omega} = 0$ :

$$\frac{d^2\mathbf{u}_\perp}{dt^2} = \frac{d\mathbf{u}_\perp}{dt} \times \boldsymbol{\Omega} = [\mathbf{u}_\perp \times \boldsymbol{\Omega}] \times \boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{u}_\perp.$$

В результате получается уравнение для осциллятора:

$$\frac{d^2\mathbf{u}_\perp}{dt^2} + \omega^2 \mathbf{u}_\perp = 0.$$

Решая его для каждой компоненты скорости, получаем:

$$\mathbf{u}_\perp(t) = \mathbf{a} \cos(\omega t) + \mathbf{b} \sin(\omega t),$$

где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  – два постоянных вектора, перпендикулярных  $\boldsymbol{\Omega}$ . Они находятся из начальных условий:

$$\mathbf{u}_\perp(0) = \mathbf{u}_0 - \frac{\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{u}_0)}{\omega^2} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \times [\mathbf{u}_0 \times \boldsymbol{\Omega}]}{\omega^2} = \mathbf{a}, \quad \frac{d\mathbf{u}_\perp(0)}{dt} = [\mathbf{u}_0 \times \boldsymbol{\Omega}] = \omega \mathbf{b},$$

где  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$  – начальное значение скорости. В результате:

$$\mathbf{u} = \frac{\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{u}_0)}{\omega^2} + \frac{\boldsymbol{\Omega} \times [\mathbf{u}_0 \times \boldsymbol{\Omega}]}{\omega^2} \cos(\omega t) + \frac{[\mathbf{u}_0 \times \boldsymbol{\Omega}]}{\omega} \sin(\omega t).$$

При записи этого решения мы выразили поперечную скорость  $\mathbf{u}_\perp$  через полную скорость  $\mathbf{u}$  и учли, что  $\mathbf{u}\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{u}_0\boldsymbol{\Omega} = \text{const}$ .

Интегрируя скорость по времени, получаем уравнение для траектории:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{[\mathbf{u}_0 \times \boldsymbol{\Omega}]}{\omega^2} + \frac{\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{u}_0)}{\omega^2} t + \frac{\boldsymbol{\Omega} \times [\mathbf{u}_0 \times \boldsymbol{\Omega}]}{\omega^3} \sin(\omega t) - \frac{[\mathbf{u}_0 \times \boldsymbol{\Omega}]}{\omega^2} \cos(\omega t),$$

где  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$  – положение частицы в момент времени  $t = 0$ . Это уравнение спирали. Частица с угловой скоростью  $\omega$  поворачивается в плоскости, перпендикулярной  $\boldsymbol{\Omega}$ . Векторы при синусе и косинусе лежат в этой плоскости. Они перпендикулярны друг другу и имеют одинаковую длину. Эта длина определяет радиус спирали  $R$ , “разматывающейся” вдоль  $\boldsymbol{\Omega}$ :

$$R = \frac{|\mathbf{u}_0 \times \boldsymbol{\Omega}|}{\omega^2} = \frac{|\mathbf{u}_0|}{\omega} \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\mathbf{u}_0$  и  $\boldsymbol{\Omega}$ . Если  $\alpha = \pi/2$  (начальная скорость перпендикулярна  $\boldsymbol{\Omega}$ ), радиус максимален и пропорционален начальному импульсу частицы:  $R = |\mathbf{u}_0|E/|\mathbf{B}| = |\mathbf{p}_0|/|\mathbf{B}|$ .

### 3.6 Ковариантная динамика \*

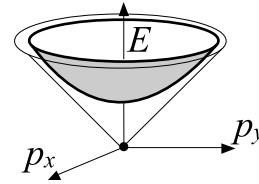
• Любые физические величины могут быть выражены в терминах 4-векторов. Как только подобный 4-вектор записан, при помощи соотношений (2.44), стр. 128, не составляет труда найти закон преобразования физической величины между двумя инерциальными системами отсчёта.

Так, умножая 4-вектор скорости (2.49), стр. 132, на массу, мы получаем 4-вектор энергии импульса:

$$p^\alpha = mu^\alpha = m \frac{dx^\alpha}{ds} = \left( \frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{u}^2}}, \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-\mathbf{u}^2}} \right) = (E, \mathbf{p}),$$

где учтено, что инвариантный интервал вдоль траектории движения частицы равен  $ds = dt \sqrt{1-\mathbf{u}^2}$ , а  $dx^\alpha = (dt, d\mathbf{r})$ . Масса частицы является инвариантом. Её квадрат совпадает с квадратом 4-импульса:

$$p^2 = p^\alpha p_\alpha = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2.$$



Это же выражение сразу следует из соотношения для 4-скорости  $u^2 = 1$ . В 4-мерном импульсном пространстве с осями  $E, p_x, p_y, p_z$  уравнение  $p^2 = m^2$  является гиперboloидом. Для “обычных” частиц  $m^2 > 0, E > 0$ , поэтому энергия и импульс частиц находятся на верхней чаше гиперboloида, которую называют *массовой поверхностью*. Частицы с нулевой массой лежат на конусе.

Для энергии и импульса можно записать векторное преобразование между двумя системами отсчёта (см. также стр. 57):

$$E' = \gamma(E - \mathbf{v}\mathbf{p}), \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p} - \gamma\mathbf{v}E + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{p}).$$

Масса фотона равна нулю, и в соответствии с формулой Планка можно ввести волновой 4-вектор:

$$p^\alpha = \hbar k^\alpha, \quad k^\alpha = (\omega, \mathbf{k}) = (\omega, \omega\mathbf{n}),$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор в направлении распространения фотона, а  $\omega = 2\pi\nu$  – его круговая частота. При помощи этих соотношений и преобразований энергии - импульса можно снова записать соотношение для эффекта Доплера и аберрации (стр. 133).

• Для получения 4-вектора силы необходимо продифференцировать 4-импульс по инвариантному интервалу:

$$f^\alpha = \frac{dp^\alpha}{ds}.$$

Учитывая, что для инварианта  $s$  (собственное время) вдоль траектории движения частицы равен  $ds = \sqrt{1 - \mathbf{u}^2} dt$ , получаем:

$$f^\alpha = \frac{dp^\alpha/dt}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} = \left( \frac{\mathbf{u}\mathbf{F}}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}}, \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} \right),$$

где подставлены выражения  $dE/dt = \mathbf{u}\mathbf{F}$ ,  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ . Величина  $f^\alpha$  является 4-вектором [преобразуется в соответствии с соотношениями (2.44)], так как 4-вектором является  $p^\alpha$ , а  $ds$  – инвариант преобразований.

Скалярное произведение 4-силы на 4-импульс равно нулю:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{f} = p_\alpha f^\alpha = p^0 f^0 - \mathbf{p}\mathbf{f} = \frac{E(\mathbf{u}\mathbf{F}) - \mathbf{p}\mathbf{F}}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} = 0,$$

где в последнем равенстве необходимо подставить  $\mathbf{p} = \mathbf{u}E$ . Это соотношение можно также доказать, продифференцировав массу, которая является константой:

$$0 = \frac{dm^2}{ds} = \frac{d(p^\alpha p_\alpha)}{ds} = \frac{dp^\alpha}{ds} p_\alpha + p^\alpha \frac{dp_\alpha}{ds} = 2p_\alpha \frac{dp^\alpha}{ds} = 2p_\alpha f^\alpha.$$

Производная квадрата  $p^\alpha p_\alpha$  вычисляется по правилу производной произведения. Затем учитывается свойство скалярного произведения любых двух векторов:  $A^\alpha B_\alpha = A_\alpha B^\alpha$  (стр. 129). Напомним, что аналогичные рассуждения были проделаны при доказательстве соотношения  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0$ .

Квадрат 4-силы является инвариантом, поэтому следующая комбинация

$$f^2 = \frac{(\mathbf{u}\mathbf{F})^2 - \mathbf{F}^2}{1 - \mathbf{u}^2} = inv$$

имеет одно и то же значение для всех инерциальных наблюдателей.

Используя определение 4-ускорения  $a^\alpha = du^\alpha/ds$  (стр. 133), выражение для 4-силы можно написать в квазиньютоновском виде

$$f^\alpha = m a^\alpha.$$

Естественно, это соотношение записано для 4-векторов и, конечно, не эквивалентно обычному ньютоновскому закону  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  для обычных 3-векторов.

• В ковариантных обозначениях описание реакций взаимодействия частиц становится очень лаконичным и простым. Для двух частиц с 4-импульсами  $p_1 = (E_1, \mathbf{p}_1)$  и  $p_2 = (E_2, \mathbf{p}_2)$ , имеющих массы  $m_1$  и  $m_2$ , справедливы следующие соотношения:

$$p_1^2 = m_1^2, \quad p_2^2 = m_2^2, \quad p_1 \cdot p_2 = E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2.$$

Всегда, когда встречается квадрат 4-импульса, его можно сразу заменить на квадрат массы частицы. Последнее соотношение является общим определением скалярного произведения 4-векторов. Квадраты 4-векторов или их скалярные произведения являются инвариантами, поэтому могут быть расписаны в любой системе отчёта. Полученное значение численно будет совпадать со значением этого инварианта в любой другой системе. Если построено равенство, связывающее два инварианта, можно записать его левую часть в одной системе координат, а правую – в другой. В результате получится связь между величинами, измеряемыми наблюдателями в различных системах отсчёта.

Рассмотрим ещё раз реакцию, в которой частица с 4-импульсом  $p$  распадается на две частицы с 4-импульсами  $p_1$  и  $p_2$  (стр. 146). Закон сохранения энергии и импульса (компонент 4-импульса) в этом случае имеет вид:

$$p = p_1 + p_2.$$

Для нулевых компонент 4-векторов это уравнение даёт закон сохранения энергии, а для пространственных – закон сохранения импульса.

Переносим 4-импульс  $p_1$  влево и возводя в квадрат, получаем:

$$(p - p_1)^2 = m^2 + m_1^2 - 2p \cdot p_1 = m_2^2,$$

где квадрат раскрывается по обычной алгебраической формуле.

Теперь можно расписать это выражение в конкретной системе отсчёта. Наиболее естественно выбрать систему, в которой исходная частица покоится  $p = (m, \mathbf{0})$ . В этом случае скалярное произведение равно  $p \cdot p_1 = mE_1 - \mathbf{0} \cdot \mathbf{p}_1 = mE_1$ . Поэтому:

$$m^2 + m_1^2 - 2mE_1 = m_2^2.$$

В результате энергия продукта распада оказывается зависящей от масс распавшихся частиц и массы исходной частицы:

$$E_1 = \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m}.$$

Абсолютно аналогично находится  $E_2$ . Для этого в законе сохранения необходимо перенести 4-импульс  $p_2$  влево (или поменять местами индексы).

• Рассмотрим теперь реакцию *упругого столкновения* двух частиц с 4-импульсами  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ . После столкновения их массы не изменяются, а 4-импульсы становятся равными  $\mathbf{p}'_1$  и  $\mathbf{p}'_2$ . Закон сохранения энергии-импульса в этом случае имеет вид:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2.$$

Избавимся от энергии и импульса одной из конечных частиц. Для этого  $\mathbf{p}'_1$  перенесём влево и всё выражение возведём в квадрат:

$$(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1)^2 = \mathbf{p}'_2{}^2.$$

Проведя стандартные алгебраические действия, имеем:

$$m_1^2 + m_2^2 + m_1^2 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}'_1 - 2\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}'_1 = m_2^2.$$

Выберем *лабораторную систему* отсчёта, в которой вторая частица неподвижна  $\mathbf{p}_2 = (m_2, \mathbf{0})$ :

$$m_1^2 = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}'_1 + m_2 \cdot (\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1) = E_1 E'_1 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}'_1 + m_2 (E'_1 - E_1).$$

Теперь несложно выразить угол рассеяния  $\mathbf{p}\mathbf{p}' = pp' \cos \theta$  через энергию налетающей частицы  $E_1 = \sqrt{p^2 + m_1^2}$  и её же энергию после рассеяния  $E'_1 = \sqrt{p'^2 + m_1^2}$ .

Для нахождения зависимости импульса  $|\tilde{\mathbf{p}}_1| = |\tilde{\mathbf{p}}_2| = \tilde{p}$  и угла рассеяния  $\chi$  в *системе центра масс* от энергий частиц в лабораторной системе запишем закон сохранения в виде  $\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2$  и умножим его на  $\mathbf{p}_2$ .

$$\mathbf{p}_2 \cdot (\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1) = \mathbf{p}_2 \cdot (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2).$$

Это равенство является инвариантом, т.е. имеет одинаковые значения в любой системе отсчёта. Распишем левую часть в лабораторной системе  $\mathbf{p}_2 = (m_2, \mathbf{0})$ , а правую – в системе центра масс  $\mathbf{p}_2 = (\tilde{E}_2, \tilde{\mathbf{p}}_2)$ :

$$m_2(E'_1 - E_1) = m_2^2 - (\tilde{E}_2 \tilde{E}'_2 - \tilde{\mathbf{p}}_2 \tilde{\mathbf{p}}'_2).$$

В системе центра масс энергии частиц и модули импульсов не изменяются:

$$\tilde{E}_2 = \tilde{E}'_2, \quad |\tilde{\mathbf{p}}_1| = |\tilde{\mathbf{p}}_2| = \tilde{p}.$$

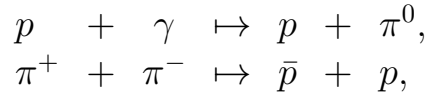
Поэтому, учитывая, что  $\tilde{E}_2^2 - \tilde{\mathbf{p}}_2^2 = m_2^2$ , получаем соотношение:

$$E'_1 - E_1 = -\frac{\tilde{p}^2}{m_2} (1 - \cos \chi),$$

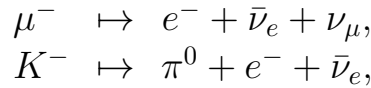
найденное ранее при помощи закона преобразования энергии и импульса между двумя системами отсчёта (стр. 151).

### 3.7 Инварианты $s$ , $t$ и $u$ \*

• Если при столкновении двух частиц изменяются не только их скорости, но и массы, такая реакция называется двухчастичным *неупругим столкновением*. Например:

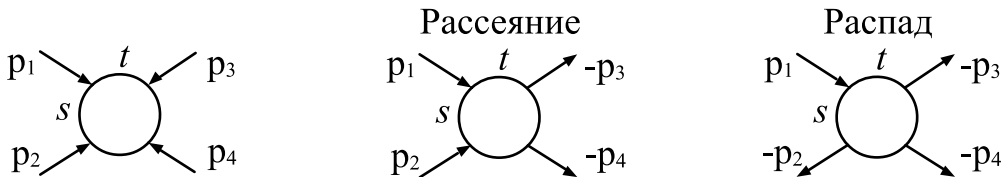


где  $p$ ,  $\bar{p}$  – протон и антипротон,  $\gamma$  – фотон,  $\pi^0$ ,  $\pi^\pm$  – нейтральный и заряженные пи-мезоны. С двухчастичными неупругими столкновениями связаны реакции распадов частицы на три другие частицы. Например:



где  $\mu$  – мюон,  $K^-$  – каон,  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  – электронное и мюонное нейтрино.

Приведенные выше реакции рассеяния и распада объединяет то, что в них участвуют 4 частицы. Для единства мы запишем это в виде *четырёх-хвостой диаграммы* (первый рисунок ниже), в которой все 4-импульса направлены к центру. В реакции рассеяния  $1 + 2 \mapsto 3 + 4$  необходимо изменить знак у 4-импульсов частиц 3 и 4:  $p_3 \mapsto -p_3$ ,  $p_4 \mapsto -p_4$ . Для реакции распада  $1 \mapsto 2 + 3 + 4$  изменяются знаки у частиц 2, 3 и 4. Можно также считать, что для начальных частиц  $p = (E, \mathbf{p})$ , а для финальных  $-p = (-E, -\mathbf{p})$ :



При таком соглашении и для рассеяния, и для распада закон сохранения будет иметь единую форму:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0.$$

Для описания таких реакций вводятся следующие *инварианты*:

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \\ t &= (p_1 + p_3)^2 = (p_2 + p_4)^2, \\ u &= (p_1 + p_4)^2 = (p_2 + p_3)^2. \end{aligned}$$

Это общепринятые обозначения, и не стоит путать  $s$  с интервалом, а  $t$  – со временем. Во вторых равенствах каждого определения учтён закон сохранения 4-импульса.

Сумма всех трёх инвариантов равна сумме квадратов масс частиц:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 = h. \quad (3.20)$$

Для доказательства умножим закон сохранения на  $\mathbf{p}_1$ :

$$\mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) = m_1^2 + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_4 = 0.$$

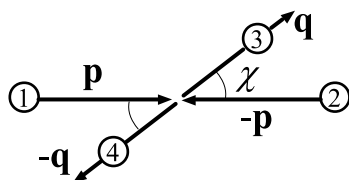
С другой стороны, раскрывая квадраты в определении  $s, t, u$ , имеем:

$$s + t + u = (m_1^2 + m_2^2 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) + (m_1^2 + m_3^2 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3) + (m_1^2 + m_4^2 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_4).$$

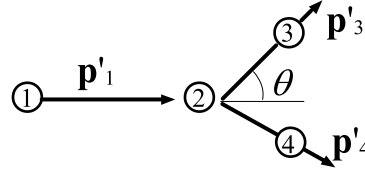
С учётом этих двух соотношений несложно получить (3.20). Поэтому введенные три инварианта не являются независимыми. Обычно таковыми считаются  $s$  и  $t$ , а инвариант  $u = h - s - t$  выражается через них.

Рассмотрим подробнее двухчастичное рассеяние. Обычно его изучают в двух системах отсчёта – *системе центра масс* (центра инерции) и *лабораторной системе*. В первом случае производится встречное столкновение частиц так, что суммарный импульс частиц до и после взаимодействия равен нулю. В лабораторной системе отсчёта производится столкновение частиц первого сорта с неподвижными частицами второго сорта, которые называются также *мишенью*.

Система центра масс



Лабораторная система



Величины, относящиеся к лабораторной системе, мы будем помечать штрихами, а в системе центра масс они будут без штрихов.

В системе центра масс  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ ,  $\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = 0$  удобно ввести два импульса  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4$ . Так как масса частиц изменяется, то из закона сохранения энергии:

$$\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_1^2} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_2^2} = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_3^2} + \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_4^2}$$

уже не следует равенство модулей импульсов до и после столкновения, и в общем случае  $|\mathbf{p}| \neq |\mathbf{q}|$ . Соответственно изменяются и энергии частиц. Если же  $m_3 = m_1$  и  $m_4 = m_2$ , то  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}|$ .

Подобная реакция может происходить только, если суммарная энергия исходных частиц в системе центра масс больше суммы масс конечных частиц  $E_1 + E_2 > m_3 + m_4$ . Подобное энергетическое неравенство называется *порогом реакции*.

• Инвариант  $s$  имеет смысл квадрата полной энергии в системе центра масс. Действительно, если  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ , то  $s = (E_1 + E_2)^2 = (E_3 + E_4)^2$ . При помощи  $s$  можно выразить энергии частиц в *системе центра масс* до и после столкновения. Для этого вычислим следующий инвариант:

$$\mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = E_1(E_1 + E_2) = E_1\sqrt{s}.$$

С другой стороны, раскрыв скобки:  $\mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = m_1^2 + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = E_1\sqrt{s}$  и выразив  $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2$ , можно его подставить в определение инварианта:

$$s = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = m_2^2 - m_1^2 + 2E_1\sqrt{s}.$$

В результате получается энергия  $E_1$  (и аналогично  $E_2$ ):

$$E_1 = \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}}, \quad E_2 = \frac{s + m_2^2 - m_1^2}{2\sqrt{s}}.$$

Чтобы найти энергии частиц после столкновения, необходимо во всех соотношениях произвести замену индексов  $1 \mapsto 3$ ,  $2 \mapsto 4$ . В результате:

$$E_3 = \frac{s + m_3^2 - m_4^2}{2\sqrt{s}}, \quad E_4 = \frac{s + m_4^2 - m_3^2}{2\sqrt{s}}.$$

Квадраты импульсов до и после реакции могут быть найдены из стандартной связи  $\mathbf{p}^2 = E_1^2 - m_1^2$  и  $\mathbf{q}^2 = E_3^2 - m_3^2$ , откуда:

$$\mathbf{p}^2 = \frac{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}{4s}, \quad \mathbf{q}^2 = \frac{\lambda(s, m_3^2, m_4^2)}{4s},$$

где введена т.н. *функция треугольника*:

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = [x - (\sqrt{y} + \sqrt{z})^2] [x - (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2].$$

Второй инвариант  $t$  связан с углом рассеяния в системе центра масс. Так как частица 3 является финальной, необходимо заменить  $\mathbf{p}_3 \mapsto -\mathbf{p}_3$ :

$$t = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1E_3 + 2|\mathbf{p}||\mathbf{q}| \cos \chi.$$

Используя полученные выше соотношения, имеем:

$$\cos \chi = \frac{s^2 + s(2t - h) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2) \lambda(s, m_3^2, m_4^2)}}, \quad (3.21)$$

где  $h$  – сумма квадратов масс частиц, а  $|\mathbf{p}|$  и  $|\mathbf{q}|$  выражаются через  $s$ .



• Аналогично через инварианты выражаются величины в *лабораторной системе отсчёта*, в которой будем считать вторую частицу неподвижной  $\mathbf{p}_2 = (m_2, \mathbf{0})$ . Возводя в квадрат определения инвариантов, содержащие  $\mathbf{p}_2$ :  $s = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2$ ,  $t = (\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_2)^2$  и  $u = (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)^2$ , получаем:

$$E'_1 = \frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2m_2}, \quad E'_3 = \frac{m_2^2 + m_3^2 - u}{2m_2}, \quad E'_4 = \frac{m_2^2 + m_4^2 - t}{2m_2}.$$

Напомним, что  $u$  не является независимым инвариантом и выражается через  $s$ ,  $t$  и сумму квадратов масс частиц (3.20).

Квадраты импульсов находим из связи энергии, импульса и массы  $\mathbf{p}'_1{}^2 = E'^2_1 - m_1^2$ , и т.д.:

$$\mathbf{p}'_1{}^2 = \frac{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}{4m_2^2}, \quad \mathbf{p}'_3{}^2 = \frac{\lambda(u, m_3^2, m_2^2)}{4m_2^2}, \quad \mathbf{p}'_4{}^2 = \frac{\lambda(t, m_4^2, m_2^2)}{4m_2^2}.$$

Угол вылета третьей частицы относительно импульса первой выражается через инвариант  $t$ :

$$t = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 = m_1^2 + m_3^2 - 2E'_1 E'_3 + 2|\mathbf{p}'_1||\mathbf{p}'_3| \cos \theta.$$

Подставляя выражения для энергий и квадратов импульсов, имеем:

$$\cos \theta = \frac{(s - m_1^2 - m_2^2)(m_2^2 + m_3^2 - u) + 2m_2^2(t - m_1^2 - m_3^2)}{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2) \lambda(u, m_2^2, m_3^2)}}.$$

Так как величины  $s$  и  $t$  являются инвариантами (одинаковыми в лабораторной системе и системе центра масс), они позволяют связать энергии, импульсы и углы в этих двух системах отсчёта. Для этого необходимо, например,  $s$  выразить через энергию  $E'_1$ :

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E'_1.$$

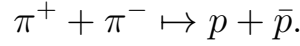
Так как переменная  $s = (E_1 + E_2)^2$  положительна в системе центра масс, она, естественно, будет положительной и в лабораторной системе отсчёта. Запишем в явном виде связь энергии первой частицы в двух системах отсчёта:

$$E_1 = \frac{m_1^2 + m_2 E'_1}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E'_1}}.$$

Аналогично можно выразить  $t$  через угол  $\theta$  рассеяния третьей частицы. После этого несложно найти связь углов  $\theta$  и  $\chi$  рассеяния в двух системах отсчёта.

### 3.8 Диаграммы Далица и Мандельстама \*\*

• Рассмотрим реакцию аннигиляции пи-мезонов, при которой рождаются протон и антипротон



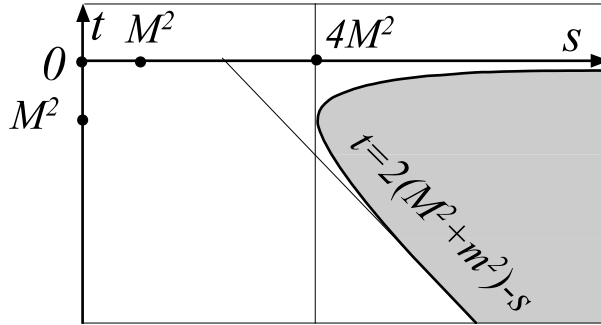
Это реакция *неупругого* рассеяния, так как исходные частицы (пи-мезоны) изменяют не только свои импульсы, но и “вид”, превращаясь в протоны. В этом случае исходные массы равны  $m_1 = m_2 = m = 135$  МэВ и отличаются от масс конечных частиц  $m_3 = m_4 = M = 938$  МэВ. Поэтому косинус угла рассеяния в системе центра (3.21) масс равен:

$$\cos \chi = \frac{s + 2(t - m^2 - M^2)}{\sqrt{(s - 4m^2)(s - 4M^2)}}.$$

Порог реакции  $s \geq (m_3 + m_4)^2 = 4M^2$ . Однако существует дополнительное ограничение, связанное с тем, что  $\cos^2 \chi \leq 1$ . Это неравенство имеет следующий вид:

$$t(t + s - 2(M^2 + m^2)) + (M^2 - m^2)^2 \leq 0. \quad (3.22)$$

Таким образом, возникает энергетически разрешённая область на плоскости  $(s, t)$ , которую называют диаграммой Далица:



На диаграмме Далица два независимых инварианта  $s$  и  $t$  откладываются на перпендикулярных декартовых осях, а энергетически разрешённая область отмечается серым цветом. Порог реакции  $s \geq 4M^2$  проведен в виде тонкой вертикальной линии, справа от которой должна находиться разрешённая область. Это приводит к тому, что  $t < 0$ . Граница разрешённой области получается, когда в соотношении (3.22) выбирается знак равенства:

$$t + s - 2(M^2 + m^2) + \frac{(M^2 - m^2)^2}{t} = 0.$$

При  $t \rightarrow \infty$  это уравнение стремится к прямой  $t = 2(M^2 + m^2) - s$ . Вторая асимптотика соответствует пределу  $s \rightarrow \infty, t \rightarrow 0$ .

• Рассмотрим теперь реакцию упругого рассеяния пи-мезона на протоне:

$$\pi^+ + p \mapsto \pi^+ + p.$$

В этом случае новые частицы не рождаются и происходит просто изменение импульсов исходных частиц, поэтому эта реакция и называется упругой. Массы частиц равны  $m_1 = m_3 = m$ ,  $m_2 = m_4 = M$ , и порогом реакции будет  $s \geq (M + m)^2$ . Косинус угла рассеяния равен:

$$\cos \chi = \frac{s^2 + 2s(t - m^2 - M^2) + (M^2 - m^2)^2}{(s - (M + m)^2)(s - (M - m)^2)}.$$

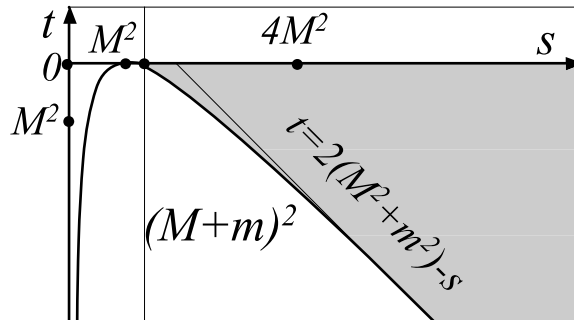
Для получения энергетических неравенств в данном случае проще расписать два неравенства  $\cos \chi \leq 1$  и  $\cos \chi \geq -1$ . Первое даёт

$$st \leq 0,$$

и, так как  $s > 0$ , имеем  $t \leq 0$ . Второе неравенство приводит к соотношению, похожему на (3.22), но с переставленными местами инвариантами  $s$  и  $t$ :

$$s(s + t - 2(M^2 + m^2)) + (M^2 - m^2)^2 \geq 0. \quad (3.23)$$

Нарисуем энергетически разрешённую область на диаграмме Далица:

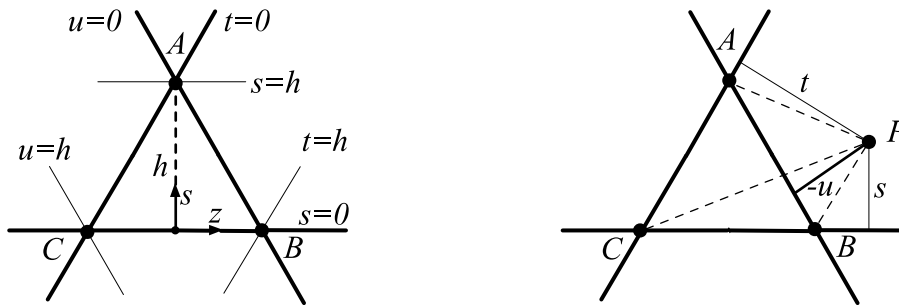


Обратим внимание, что эта граничная энергетическая линия получается из линии реакции  $\pi^+ + \pi^- \mapsto \bar{p} + p$  перестановкой местами  $s$  и  $t$  инвариантов. Это происходит потому, что рассматриваемые две реакции являются фактически одной четырёххвосткой. Если в  $\pi^+ + \pi^- \mapsto \bar{p} + p$  поменять местами 2-ю и 3-ю частицы, мы получим реакцию  $\pi^+ + p \mapsto \pi^+ + p$  (массы протона и антипротона одинаковые). Понятно, что инварианты  $s = (p_1 + p_2)$  и  $t = (p_1 + p_3)$  поменяются местами. Говорят, что эти реакции происходят в различных *каналах* одной и той же четырёххвостки. Первая реакция происходит в  $s$  канале, а вторая – в  $t$ . Соответственно, линия граничной области получается при повороте рисунка на 90 градусов.

• Кроме энергетических диаграмм Далица используются также *диаграммы Мандельштама*, на которых одновременно изображаются все три инварианта  $(s, t, u)$ . Такая диаграмма является косоугольной системой координат, в которой оси  $s$  и  $t$  проведены под углом  $60^\circ$  градусов. Однако рисуются не сами оси, а уровни  $s = 1, s = 2, \dots$ , параллельные оси  $s = 0$  и отстоящие от неё на  $1, 2, \dots$ . Аналогично для уровней  $t, u$ . Линии  $s = 0, t = 0$  и  $u = 0$  образуют правильный треугольник  $ABC$ , высота которого равна

$$h = s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2.$$

Положительные значения инвариантов откладываются от нулевой линии в сторону треугольника, а отрицательные – в обратную:



На первом рисунке жирными линиями отмечены нулевые уровни, а тонкими – уровни  $s = h, t = h, u = h$ . В точке  $A$  значение инвариантов равно  $s = h, t = u = 0$ . Их сумма равна  $h$ . Это свойство выполняется для любой точки плоскости (второй рисунок). Действительно, для площадей треугольников, образованных точками  $P, A, B, C$ , выполняется соотношение

$$S_{ABC} = S_{BCP} + S_{ACP} - S_{ABP}.$$

Площадь треугольника равна половине произведения высоты на основание. Основания всех треугольников одинаковые, а высоты равны  $h, s, t$  и  $-u$ , поэтому  $h = s + t + u$ .

Можно перейти к прямоугольным декартовым координатам, проведя вертикальную ось  $s$  вдоль высоты  $h$  перпендикулярно линии  $s = 0$ , которая будет горизонтальной осью  $z$  (первый рисунок). Прямоугольные координаты  $(z, s)$  связаны с инвариантом  $t$  следующим образом:

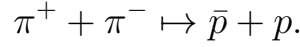
$$t = \frac{h + \sqrt{3}z - s}{2}.$$

Третий инвариант равен

$$u = \frac{h - \sqrt{3}z - s}{2},$$

в результате чего сумма всех инвариантов равняется  $h$ .

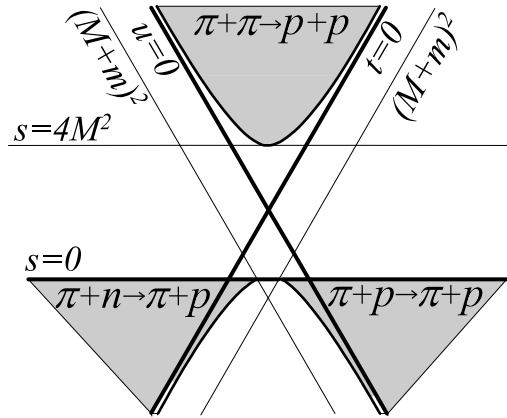
Рассмотрим снова реакцию аннигиляции двух пи-мезонов с рождением протон-антипротонной пары:



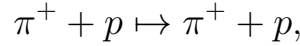
Разрешённая область для этой реакции определяется неравенством порога  $s \leq 4M^2$  и соотношением (3.22). Выразим в последнем  $t$  через переменные  $z$  и  $s$ :

$$3z^2 - (s - h)^2 + 4(M^2 - m^2)^2 \leq 0, \quad (3.24)$$

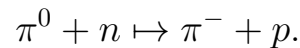
где  $h = 2(M^2 + m^2)$ . Эта область изображена на рисунке ниже:



и соответствует параболе в верхней части рисунка с асимптотическими линиями  $u = 0$  и  $t = 0$ . Реакцию



и аналогично для античастиц, можно изобразить на этом же рисунке, если считать, что в ней, как и в предыдущей реакции, пи-мезоны имеют номера 1 и 2, а протоны – 3 и 4. Тогда в неравенствах (3.23),  $t \leq 0$ ,  $s \geq (M + m)^2$  необходимо поменять  $s$ ,  $t$  местами, и получится (3.24) с обратным знаком неравенства и  $s \leq 0$ ,  $t \geq (M + m)^2$ . Эта область изображена на рисунке в правом нижнем углу. Третий возможный канал изображен в левом углу рисунка и соответствует реакции неупругого рассеяния нейтрального пи-мезона на нейтроне с образованием протона и заряженного пи-мезона:



На самом деле эта реакция не полностью симметрична двум предыдущим, так как массы частиц различаются. Однако это отличие невелико. Так, нейтрон тяжелее протона примерно на 0.1% или 1% от массы пи-мезона. Аналогично нейтральный пи-мезон  $\pi^0$  всего на 1% легче, чем его заряженные собратья  $\pi^\pm$ .

Таким образом, все три реакции получаются перестановкой частиц в реакции и переобозначением инвариантных переменных  $s$ ,  $t$  и  $u$ .

### 3.9 Антисимметричные тензоры \*

• В релятивистской физике важную роль играют *антисимметричные тензоры*. Антисимметричный тензор второго ранга  $A^{\alpha\beta}$  имеет 6 независимых ненулевых компонент. Если два индекса у него совпадают, то он (в силу антисимметрии) равен нулю. Ненулевыми компонентами будут  $A^{01}$ ,  $A^{02}$ ,  $A^{03}$ ,  $A^{12}$ ,  $A^{13}$  и  $A^{23}$ . Все остальные компоненты получаются перестановкой индексов. Например,  $A^{10} = -A^{01}$ , и т.д. Два 3-мерных вектора  $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$  и  $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$  имеют 6 компонент, поэтому с их помощью можно представить антисимметричный тензор второго ранга в виде следующей таблицы:

$$A^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -a_x & -a_y & -a_z \\ a_x & 0 & b_z & -b_y \\ a_y & -b_z & 0 & b_x \\ a_z & b_y & -b_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Сокращённо эта таблица записывается следующим образом:  $A^{\alpha\beta} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Антисимметричный тензор с нижними индексами получается при помощи свёртки с метрическими тензорами:  $A_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} A^{\mu\nu}$ . В результате:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & a_x & a_y & a_z \\ -a_x & 0 & b_z & -b_y \\ -a_y & -b_z & 0 & b_x \\ -a_z & b_y & -b_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Например, так как метрический тензор  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  диагонален, имеем:

$$\begin{aligned} A_{01} &= g_{0\mu}g_{1\nu}A^{\mu\nu} = g_{00}g_{11}A^{01} = -A^{01}, \\ A_{12} &= g_{1\mu}g_{2\nu}A^{\mu\nu} = g_{11}g_{22}A^{12} = +A^{12}. \end{aligned}$$

Таким образом, компоненты, имеющие нулевой индекс, изменяют свой знак, а компоненты без нулевого индекса не изменяются. Это можно записать с следующим виде:  $A_{\alpha\beta} = (-\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

Аналогично можно опустить или поднять только один индекс. Запишем такой тензор  $A^{\alpha}_{\beta} = A^{\alpha\mu}g_{\mu\beta}$  при помощи умножения матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_x & -a_y & -a_z \\ a_x & 0 & b_z & -b_y \\ a_y & -b_z & 0 & b_x \\ a_z & b_y & -b_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_x & a_y & a_z \\ a_x & 0 & -b_z & b_y \\ a_y & b_z & 0 & -b_x \\ a_z & -b_y & b_x & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом таблица перестаёт быть антисимметричной  $A^{\alpha}_{\beta} \neq -A^{\beta}_{\alpha}$ .

• Связь значений компонент антисимметричного тензора, измеренных в двух инерциальных системах отсчёта, можно получить по общему правилу преобразования тензоров:

$$A'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu A^{\mu\nu} = \Lambda^\alpha_\mu A^{\mu\nu} (\Lambda^T)_\nu^\beta = (\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{\Lambda}^T)^{\alpha\beta},$$

где введена транспонированная матрица лоренцевского преобразования  $(\Lambda^T)_\nu^\beta = \Lambda^\beta_\nu$ . Так как  $\Lambda^\beta_\nu$  симметрична, для получения компонент  $A'^{\alpha\beta}$  в системе  $S'$  необходимо  $A^{\alpha\beta}$  слева и справа умножить на матрицу  $\mathbf{\Lambda}$ :

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -a_x & -a_y & -a_z \\ a_x & 0 & b_z & -b_y \\ a_y & -b_z & 0 & b_x \\ a_z & b_y & -b_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы, приходим к следующим преобразованиям:

$$\begin{aligned} a'_x &= a_x, & a'_y &= \gamma(a_y + vb_z), & a'_z &= \gamma(a_z - vb_y), \\ b'_x &= b_x, & b'_y &= \gamma(b_y - va_z), & b'_z &= \gamma(b_z + va_y). \end{aligned} \quad (3.25)$$

При помощи этих преобразований несложно проверить, что следующие комбинации векторов:

$$\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = inv, \quad \mathbf{ab} = inv.$$

являются инвариантными, т.е. имеют одинаковое значение во всех инерциальных системах отсчёта. В частности, если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ортогональны в одной системе отсчёта, то они будут ортогональными и в любой другой.

*Абсолютным антисимметричным тензором* называется тензор любого ранга (с произвольным числом индексов), изменяющий знак при перестановке любых двух индексов. Антисимметричный тензор второго ранга, естественно, является абсолютно антисимметричным тензором.

Для такого тензора  $A^{\alpha\beta\gamma}$  ранга 3 есть только 4 независимые ненулевые компоненты:  $A^{012}$ ,  $A^{013}$ ,  $A^{023}$ ,  $A^{123}$ . Остальные получаются перестановкой индексов:  $A^{120} = -A^{102} = A^{012}$ . Поэтому, как мы увидим чуть ниже,  $A^{\alpha\beta\gamma}$  можно выразить через четыре компоненты 4-вектора.

Абсолютный антисимметричный тензор  $A^{\alpha\beta\gamma\delta}$  ранга 4 имеет только одну нетривиальную компоненту  $A^{0123}$ . Абсолютные антисимметричные тензоры более высокого ранга в 4-мерном пространстве-времени всегда равны нулю. У них всегда хотя бы одна пара индексов будет иметь одинаковые значения.

• Важную роль в индексной математике играет абсолютно антисимметричный символ *Левы-Чевиты*. В 2-мерном пространстве такой символ вводится с двумя индексами  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ , так, что  $\varepsilon_{12} = 1$ , а при перестановке индексов он меняет свой знак. В 3-мерном пространстве символ Левы-Чевиты имеет три индекса и значение  $\varepsilon_{123} = 1$ . С его помощью можно записать векторное произведение  $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$ :

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_3 = \varepsilon_{312} a_1 b_2 + \varepsilon_{321} a_2 b_1 + \dots = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

и т.д. Слагаемые, обозначенные многоточием, равны нулю, так как равен нулю символ Левы-Чевиты с одинаковыми индексами.

Аналогично определяется 4-мерный символ Левы-Чевиты  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ . Его компоненты получаются из значения  $\varepsilon_{0123} = 1$ . Например:

$$\varepsilon_{2103} = -\varepsilon_{1203} = \varepsilon_{1023} = -\varepsilon_{0123} = -1, \quad \varepsilon_{0103} = \varepsilon_{1111} = 0.$$

Т.е. если индексы одинаковы, то символ равен нулю, а при перестановке *любых двух* индексов он изменяет знак. Напомним, что индексы координат события в 4-мерном пространстве принято нумеровать с нуля.

При помощи символов Левы-Чевиты можно записывать определители матриц. Например, для матрицы 2x2

$$\det |a_{ij}| = \varepsilon_{ij} a_{1i} a_{2j} = \varepsilon_{12} a_{11} a_{22} + \varepsilon_{21} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Аналогично для определителей матриц 3x3 и 4x4:

$$\det |a_{ij}| = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}, \quad \det |a_{ij}| = \varepsilon_{ijkl} a_{0i} a_{1j} a_{2k} a_{3l},$$

где стоит произведение элементов матриц с фиксированными значениями первого индекса, упорядоченными по возрастанию. По вторым индексам проводится свёртка с символом Левы-Чевиты (все суммационные индексы записаны внизу). Докажем, что 4-мерный символ Левы-Чевиты *является тензором* относительно преобразований Лоренца. Запишем, например, преобразование для:

$$\varepsilon'_{0123} = \tilde{\Lambda}_0^\alpha \tilde{\Lambda}_1^\beta \tilde{\Lambda}_2^\gamma \tilde{\Lambda}_3^\delta \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \det \tilde{\Lambda} = 1,$$

где мы воспользовались сначала определением определителя, а затем ортогональностью преобразований Лоренца (стр.137). Таким образом, если в одной инерциальной системе  $\varepsilon_{0123} = 1$ , то и в другой он будет равен единице. Несложно видеть, что перестановка индексов этого результата не меняет. Если пара любых индексов совпадает, например,  $\varepsilon'_{0023}$ , то результат свертки с лоренцевскими матрицами будет равен нулю, так как идёт свёртка симметричного тензора  $\tilde{\Lambda}_0^\alpha \tilde{\Lambda}_0^\beta$  и антисимметричного  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$  по индексам  $\alpha$  и  $\beta$ .



При помощи символа Леви-Чевиты можно создавать новые тензоры. Определим, например, следующий антисимметричный тензор:

$${}^*A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} A^{\gamma\delta}.$$

Тензоры со звёздочкой  ${}^*A$  называются *дуальными* (или *сопряжёнными*) к тензору, сворачиваемому с  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ . Найдём компоненты дуального тензора. Расписывая явным образом сумму по повторяющимся индексам и опуская одинаковые индексы, для которых символ Леви-Чевиты равен нулю, получаем:

$${}^*A_{01} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{0123} A^{23} + \varepsilon_{0132} A^{32}) = \varepsilon_{0123} A^{23} = A^{23} = b_x,$$

$${}^*A_{12} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{1203} A^{03} + \varepsilon_{1230} A^{30}) = \varepsilon_{0123} A^{03} = A^{03} = -a_z,$$

где  $\varepsilon_{0132} A^{32} = \varepsilon_{0123} A^{23}$ , так как обе величины одновременно являются антисимметричными. Во втором случае индекс 0 в символе Леви-Чевиты необходимо перенести в начало  $\varepsilon_{1203} = -\varepsilon_{1023} = \varepsilon_{0123}$ . Заметим, что коэффициент  $1/2$  в определении дуального тензора связан с числом возможных перестановок 2-х индексов ( $2! = 2$ ). Расписывая таким образом все компоненты, получаем:

$${}^*A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & b_x & b_y & b_z \\ -b_x & 0 & -a_z & a_y \\ -b_y & a_z & 0 & -a_x \\ -b_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^*A^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -b_x & -b_y & -b_z \\ b_x & 0 & -a_z & a_y \\ b_y & a_z & 0 & -a_x \\ b_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  в дуальном тензоре по сравнению с исходным меняются местами. Сокращённо таблицы сопряженных тензоров можно записать следующим образом:  ${}^*A_{\alpha\beta} = (-\mathbf{b}, -\mathbf{a})$ ,  ${}^*A^{\alpha\beta} = (\mathbf{b}, -\mathbf{a})$ .

Полученные выше инварианты можно записать в следующем явно ковариантном виде:

$$A^2 = A_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} = 2(\mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2), \quad {}^*AA = {}^*A_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} = -4\mathbf{a}\mathbf{b}.$$

Аналогично можно определить дуальные тензоры к тензорам третьего и первого ранга:

$${}^*A_\alpha = \frac{1}{6} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} A^{\beta\gamma\delta}, \quad {}^*A_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} A^\delta.$$

Так, компоненты 4-вектора  ${}^*A_\alpha$  являются 4-мя независимыми ненулевыми компонентами тензора  $A^{\alpha\beta\gamma}$ .

### 3.10 Момент импульса и спин\*

• Хорошим физическим примером антисимметричного тензора является 4-тензор *4-момента импульса*:

$$L^{\alpha\beta} = x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha, \quad (3.26)$$

где  $x^\alpha = \{t, \mathbf{r}\}$  – положение частицы в момент времени  $t$  и  $p^\alpha = \{E, \mathbf{p}\}$  – её энергия и импульс. Распишем в явном виде компоненты  $L^{\alpha\beta}$ . В силу определения он антисимметричен:

$$L^{\alpha\beta} = -L^{\beta\alpha}.$$

В результате его диагональные элементы равны нулю ( $L^{00} = L^{11} = L^{22} = L^{33} = 0$ ). Для пространственных компонент имеем:

$$\begin{aligned} L^{23} &= x^2 p^3 - x^3 p^2 = y p_z - z p_y = L_x, \\ L^{31} &= x^3 p^1 - x^1 p^3 = z p_x - x p_z = L_y, \\ L^{12} &= x^1 p^2 - x^2 p^1 = x p_y - y p_x = L_z. \end{aligned}$$

Это компоненты 3-вектора момента импульса, равного векторному произведению радиус-вектора на импульс:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

Аналогично расписываются компоненты тензора момента импульса в случае, если один из индексов равен нулю:

$$\begin{aligned} L^{10} &= x^1 p^0 - x^0 p^1 = x E - t p_x = G_x, \\ L^{20} &= x^2 p^0 - x^0 p^2 = y E - t p_y = G_y, \\ L^{30} &= x^3 p^0 - x^0 p^3 = z E - t p_z = G_z. \end{aligned}$$

Как и момент импульса, эти компоненты можно представить в виде 3-мерного вектора ( $\mathbf{p} = \mathbf{u} E$ ):

$$\mathbf{G} = E \mathbf{r} - t \mathbf{p} = (\mathbf{r} - \mathbf{u} t) E.$$

С учётом свойства антисимметричности 4-тензор момента импульса можно записать в следующей табличной форме:

$$L^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -G_x & -G_y & -G_z \\ G_x & 0 & L_z & -L_y \\ G_y & -L_z & 0 & L_x \\ G_z & L_y & -L_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Любой антисимметричный тензор в 4-мерном пространстве имеет 6 независимых компонент и может быть выражен через компоненты двух 3-мерных векторов. Это обозначается следующим образом:  $L^{\alpha\beta} = (\mathbf{G}, \mathbf{L})$ , где компоненты векторов перечисляются так же, как и в таблице  $L^{\alpha\beta}$ .

• Связь значений компонент момента импульса, измеренных в двух инерциальных системах отсчёта, можно получить по формулам для произвольного антисимметричного тензора (3.25), стр. 179, с  $\mathbf{a} = \mathbf{G}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{L}$ :

$$\begin{aligned} G'_x &= G_x, & G'_y &= \gamma(G_y + vL_z), & G'_z &= \gamma(G_z - vL_y), \\ L'_x &= L_x, & L'_y &= \gamma(L_y - vG_z), & L'_z &= \gamma(L_z + vG_y). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Аналогично можно получить и преобразования в векторном виде. В этом случае проще сразу подставить в  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  векторные преобразования Лоренца для координат (1.12), стр.31, и импульса (1.27), стр.57:

$$\mathbf{L}' = \mathbf{r}' \times \mathbf{p}' = \{\mathbf{r} - \gamma\mathbf{v}t + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r})\} \times \{\mathbf{p} - \gamma\mathbf{v}E + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{p})\}.$$

Перемножая и исключая время  $t\mathbf{p} = E\mathbf{r} - \mathbf{G}$ , получаем:

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} + \gamma[\mathbf{v} \times \mathbf{G}] + \Gamma \left\{ (\mathbf{r}\mathbf{v})[\mathbf{v} \times \mathbf{p}] + (\mathbf{p}\mathbf{v})[\mathbf{r} \times \mathbf{v}] \right\}.$$

Умножим выражение в фигурных скобках на произвольный вектор  $\mathbf{a}$ , который затем можно “сократить” (т.е. положить  $\mathbf{a} = \{1, 0, 0\}$ , и т.д.):

$$\mathbf{a}\{\dots\} = [\mathbf{a} \times \mathbf{v}][(\mathbf{r}\mathbf{v})\mathbf{p} - (\mathbf{p}\mathbf{v})\mathbf{r}] = -[\mathbf{a} \times \mathbf{v}][\mathbf{v} \times \mathbf{L}] = -\mathbf{a}[\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{L}]].$$

Опуская  $\mathbf{a}$  и раскрывая двойное векторное произведение, получаем:

$$\mathbf{L}' = \gamma(\mathbf{L} + \mathbf{v} \times \mathbf{G}) - \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{L}), \quad (3.28)$$

$$\mathbf{G}' = \gamma(\mathbf{G} - \mathbf{v} \times \mathbf{L}) - \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{G}), \quad (3.29)$$

где преобразования для вектора  $\mathbf{G}$  находятся аналогичным образом. Если  $\mathbf{v}$  направлено вдоль оси  $x$ , снова получаются преобразования (3.27). Заметим, что из определения векторов следует, что  $\mathbf{G}\mathbf{L} = 0$ . Естественно, преобразования Лоренца сохраняют эту ортогональность.

Ещё один инвариант  $\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2$ , справедливый для любого антисимметричного тензора при произвольном направлении относительной скорости  $\mathbf{v}$  ( $\ll H_{25}$ ), приводит к соотношению:

$$\mathbf{G}^2 - \mathbf{L}^2 = (\mathbf{p}^2 - \mathbf{E}^2)(t^2 - \mathbf{r}^2) + (Et - \mathbf{r}\mathbf{p})^2.$$

Это выражение можно записать в явном ковариантном виде при помощи 4-векторов:

$$\mathbf{G}^2 - \mathbf{L}^2 = -\mathbf{p}^2\mathbf{x}^2 + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})^2 = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})^2 - m^2\mathbf{x}^2,$$

где прямым шрифтом записаны 4-векторы импульса “ $\mathbf{p}$ ” и точки в пространстве-времени “ $\mathbf{x}$ ”, а  $m^2 = \mathbf{p}^2$  – квадрат массы частицы. В силу инвариантности 4-произведения инвариантной будет и разница квадратов векторов  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{L}$ .

• Чтобы компоненты тензора  $L^{\alpha\beta}$  сохранялись, сила, действующая на частицу, должна иметь определённый вид. Условия, при которых сохраняется пространственная часть тензора  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , изучались в разделе, посвящённом понятию силы (стр. 159). Рассмотрим теперь условия, при которых интегралом движения является вектор  $\mathbf{G}$ . Возьмём его производную по времени и приравняем её к нулю:

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \frac{d(E\mathbf{r} - t\mathbf{p})}{dt} = (\mathbf{u}\mathbf{F})\mathbf{r} + E\mathbf{u} - \mathbf{p} - t\mathbf{F} = (\mathbf{u}\mathbf{F})\mathbf{r} - t\mathbf{F} = 0,$$

где записана сила  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$  и учтено, что  $dE/dt = \mathbf{u}\mathbf{F}$  и  $\mathbf{p} = E\mathbf{u}$ . Так как  $\mathbf{r}$  – координата частицы, а  $t$  – независимое от неё текущее время, то это выражение будет равно нулю, только если частица свободна  $\mathbf{F} = 0$ . В этом случае она движется по траектории  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}t$ , где  $\mathbf{r}_0$  – некоторый постоянный вектор, и  $\mathbf{G} = E\mathbf{r}_0$  сохраняется, так как сохраняется энергия свободной частицы.

Рассмотрим множество взаимодействующих между собой частиц, считая, что  $\mathbf{G}$  равен сумме  $E_i\mathbf{r}_i - t\mathbf{p}_i$  по каждой частице. В этом случае  $\mathbf{G}$  является интегралом движения, если сила  $\mathbf{F}_i$ , действующая на  $i$ -ю частицу со стороны остальных частиц, удовлетворяет уравнениям:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0, \quad \sum_i (\mathbf{u}_i\mathbf{F}_i)\mathbf{r}_i = 0.$$

Первое соотношение является 3-м законом Ньютона и выполняется, например, если сила равна парному взаимодействию на  $i$ -ю частицу со стороны всех остальных частиц, пропорциональному расстоянию между частицами. Сложнее удовлетворить второму условию.

Вообще, в теории относительности достаточно просто описывается динамика “пробной частицы”, находящейся во внешнем стационарном (неизменном) поле сил. Если же необходимо рассмотреть взаимодействие “равноправных” частиц, то простое понятие силы, которая зависит от положений (и, возможно, скоростей) всех частиц перестаёт работать. Пусть, например, взаимодействуют две быстро движущиеся частицы. Так как любое воздействие не может распространяться быстрее фундаментальной скорости, всегда будет присутствовать “задержка”. Каждая частица будет “чувствовать” другую не там, где она “на самом деле” находится. В результате динамическая задача становится очень сложной. Определённое упрощение возникает при введении концепции поля сил, подчиняющегося некоторым уравнениям и являющегося в известной мере самостоятельной сущностью. Мы подробно изучим эти вопросы в следующей главе, посвященной электромагнитному взаимодействию.

Тем не менее, рассмотрим физический смысл вектора  $\mathbf{G}$ , предположив, что он сохраняется. Так как полная энергия также сохраняется:  $\sum E = \text{const}$  (сумма по всем частицам), то сохраняется и:

$$\frac{\mathbf{G}}{\sum E} = \frac{\sum E\mathbf{r}}{\sum E} - \frac{\sum \mathbf{p}}{\sum E} t = \mathbf{R} - \mathbf{V} t = \text{const}.$$

где введены радиус-вектор положения *центра энергии* системы  $\mathbf{R}$  и его “суммарная скорость”  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{R} = \frac{\sum E\mathbf{r}}{\sum E} \approx \frac{\sum m\mathbf{r}}{\sum m}, \quad \mathbf{V} = \frac{\sum \mathbf{p}}{\sum E} \approx \frac{\sum m\mathbf{u}}{\sum m}.$$

Приближённые равенства записаны в нерелятивистском пределе. В этом пределе центр энергии имеет смысл *центра масс*. Постоянство вектора  $\mathbf{G}$  приводит к равномерному движению центра энергии системы частиц вдоль прямой:  $\mathbf{R} = \mathbf{V} t + \text{const}$ .

Обратим внимание, что для вычисления  $\mathbf{R}$  используются энергии движения  $E = m/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$ , а не полная энергия частицы с учётом её взаимодействия. Поэтому точнее назвать  $\mathbf{R}$  *центром энергии движения*.

В системе отсчёта  $S'$ , связанной с частицей, её энергия равна массе, а импульс равен нулю (частица неподвижна). Поэтому  $\mathbf{G}' = m\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{L}' = 0$ . Запишем обратные к (3.28) преобразования, поменяв штрихованные и не штрихованные величины и  $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$

$$\mathbf{L} = \gamma\mathbf{L}' - \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{L}') - \gamma[\mathbf{v} \times \mathbf{G}'] = -m\gamma[\mathbf{v} \times \mathbf{r}'] = m\gamma[\mathbf{r} \times \mathbf{v}].$$

В последнем равенстве произошла замена  $\mathbf{r}'$  на  $\mathbf{r}$ , так как в векторных преобразованиях Лоренца они отличаются слагаемыми, пропорциональными вектору относительной скорости  $\mathbf{v}$ . Они будут равны нулю в силу векторного произведения. Так как  $m\gamma\mathbf{v}$  является импульсом частицы, мы снова приходим к выражению для момента импульса  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ .

В разделе, посвящённом силе, мы рассматривали модифицированный момент импульса  $\mathbf{L} = E[\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$ , который сохраняется, если сила определённым образом зависит от скорости частицы. Подобный момент импульса также можно представить в ковариантном тензорном виде. Однако для этого уже потребуется тензор третьего ранга:

$$L^{\alpha\beta\gamma} = (x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha)p^\gamma.$$

Так как  $p^0 = E$ , пространственные компоненты  $L^{\alpha\beta 0}$  приводят к модифицированному моменту импульса.

• Если рассматривается не точечная частица, а система частиц (например, вращающийся гироскоп), то, кроме тензора момента импульса, удобно ввести 4-вектор спина. Он имеет смысл собственного момента импульса в системе, где центр энергии системы покоится.

Запишем суммарные величины, характеризующие систему частиц:

$$\mathcal{E} = \sum E, \quad \mathbf{P} = \sum \mathbf{p}, \quad \mathbf{L} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad \mathbf{R} = \frac{\sum E \mathbf{r}}{\sum E},$$

где опущены индексы, нумерующие частицы. Таким образом,  $\mathcal{E}$  – это полная энергия движения,  $\mathbf{P}$  – полный импульс частиц,  $\mathbf{L}$  – суммарный момент импульса и  $\mathbf{R}$  – центр энергии системы.

Для этих суммарных величин определим следующий 4-вектор:

$$S_\nu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} L^{\alpha\beta} U^\gamma, \quad (3.30)$$

где  $\varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma}$  – символ Леви-Чевиты, а  $U^\alpha$  – суммарная 4-скорость системы частиц, определяемая при помощи суммарного 4-импульса  $P^\alpha = \{\mathcal{E}, \mathbf{P}\}$ :

$$U^\alpha = \frac{P^\alpha}{M} = \{U^0, \mathbf{U}\} = \frac{\{1, \mathbf{u}\}}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}},$$

где  $\mathbf{u}$  – 3-мерный вектор “суммарной скорости”, а

$$M = \sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathbf{P}^2}$$

масса системы частиц (без учёта энергии их взаимодействия).

Физический смысл классического спина становится ясным, если его определение (3.30) записать в 3-мерных обозначениях  $S^\alpha = \{S^0, \mathbf{S}\}$ .

$$S_0 = \varepsilon_{0231} L^{23} U^1 + \varepsilon_{0312} L^{31} U^2 + \varepsilon_{0123} L^{12} U^3 = L^1 U^1 + L^2 U^2 + L^3 U^3,$$

где приведены только слагаемые с различными индексами (для остальных символ Леви-Чевиты равен нулю). Коэффициент 1/2 сокращается, так как в суммах с  $L^{\alpha\beta}$  встречаются по два слагаемых с переставленными индексами:  $\varepsilon_{0231} L^{23} + \varepsilon_{0321} L^{32} = 2\varepsilon_{0231} L^{23}$  (в силу антисимметричности обоих тензоров). Значения символов Леви-Чевиты вычисляются приведением их к базовой последовательности индексов  $\varepsilon_{0123} = 1$  в результате парной перестановки индексов:  $\varepsilon_{0231} = -\varepsilon_{0213} = \varepsilon_{0123} = 1$ , и т.д.

Точно так же расписываются суммы для пространственных компонент 4-вектора. Например,

$$S_1 = \varepsilon_{1023} L^{02} U^3 + \varepsilon_{1032} L^{03} U^2 + \varepsilon_{1230} L^{23} U^0 = G^2 U^3 - G^3 U^2 - L^1 U^0,$$

Пространственные компоненты 4-спина  $S^\alpha$  с верхними индексами образуют 3-вектор  $\mathbf{S} = \{S^1, S^2, S^3\}$ . Они имеют обратный знак по сравнению с компонентами с нижними индексами:  $S^1 = -S_1$ , и т.д.

В результате:

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}U^0 - \mathbf{G} \times \mathbf{U}, \quad S^0 = \mathbf{L}\mathbf{U}.$$

Выразим суммарный вектор  $\mathbf{G}$  через энергию и импульс:  $\mathbf{G} = \mathcal{E}\mathbf{R} - t\mathbf{P}$ , и аналогично для 4-скорости:  $U^\alpha = \{U^0, \mathbf{U}\} = \{\mathcal{E}, \mathbf{P}\}/M$ . Окончательно:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathcal{E}}{M} (\mathbf{L} - \mathbf{R} \times \mathbf{P}), \quad S^0 = \frac{\mathbf{L}\mathbf{P}}{M} = \frac{\mathbf{S}\mathbf{P}}{\mathcal{E}} = \mathbf{u}\mathbf{S}. \quad (3.31)$$

Таким образом, 3-мерный вектор спина  $\mathbf{S}$  пропорционален разнице полного момента импульса  $\mathbf{L}$  и момента импульса движения системы как целого  $\mathbf{R} \times \mathbf{P}$  (произведение радиус-вектор центра энергии на суммарный импульс). Эта разница имеет смысл *собственного момента импульса* (из полного момента вычли момент движения системы как целого). Коэффициент пропорциональности  $\mathcal{E}/M$  делает его пространственной компонентой 4-вектора.

Нулевая компонента 4-спина полностью определяется 3-вектором спина и “суммарной скоростью” системы  $\mathbf{u} = \mathbf{P}/\mathcal{E}$ .

В силу антисимметричности символа Леви-Чевиты произведение 4-спина на 4-скорость в любой системе отсчёта равно нулю:

$$S \cdot U = S_\alpha U^\alpha = 0.$$

Поэтому в системе покоя  $U^\alpha = \{1, \mathbf{0}\}$  (или  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ ) спин обладает только векторными компонентами  $S^\alpha = \{0, \mathbf{S}\}$ . В этой системе 3-мерный вектор спина совпадает с моментом импульса  $\mathbf{S} = \mathbf{L}$ .

Для точечной частицы  $\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}$ , поэтому для неё спин всегда нулевой. В случае системы частиц суммарный момент импульса уже не пропорционален суммарному импульсу. Поэтому спин в общем случае не равен нулю.

Понятие спина возникло в квантовой механике, как динамическая переменная, описывающая *точечный* электрон (дополнительно к его координатам и импульсу). Поэтому иногда считают, что спин – это чисто квантовая физическая величина. Однако это не так. В той же квантовой механике можно говорить, например, о спине протона или ядра, которые заведомо не являются точечными объектами. В этом случае у спина должен быть соответствующий классический прототип. Аналогична ситуация с квантовыми энергией, импульсом или моментом импульса. Естественно, чтобы ввести неклассический спин для точечной частицы, требуется определённая изобретательность. Но для неточечных объектов, например, вращающегося гироскопа, понятие неклассического спина оказывается очень удобной характеристикой физической системы.

### 3.11 Ускоренное движение гироскопа \*\*

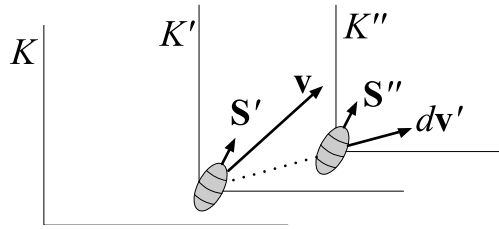
Во второй главе (стр. 116) мы рассмотрели ускоренное движение стержня, который при изменении своей скорости перемещается параллельно своему предыдущему положению с точки зрения наблюдателей в мгновенно сопутствующей инерциальной системе отсчёта. В релятивистской теории такой стержень при движении поворачивается относительно наблюдателей в неподвижной (лабораторной) системе отсчёта.

Аналогичный эффект возникает и со спином вращающейся системы. Пусть на гироскоп действует сила, изменяющая его скорость, но при этом отсутствует момент силы. В классической механике собственный момент вращения при этом должен остаться без изменения (хотя, возможно, изменится полный момент за счёт “орбитального движения”). В теории относительности в таких условиях собственный момент вращения (спин) в общем случае изменяется (прецессирует).

Введём три системы отсчёта  $K$ ,  $K'$  и  $K''$ . Пусть скорость системы  $K'$  относительно  $K$  равна  $\mathbf{v}$ , а скорость системы  $K''$  относительно  $K'$  равна  $d\mathbf{v}'$ . Соответственно, скорость  $K''$  относительно  $K$  равна  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ . Эти скорости связаны при помощи закона сложения скоростей (1.17), стр.34:

$$d\mathbf{v}' = \frac{(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - \gamma\mathbf{v} + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}(\mathbf{v} + d\mathbf{v}))}{\gamma(1 - \mathbf{v}(\mathbf{v} + d\mathbf{v}))} \approx \gamma d\mathbf{v} + \frac{\gamma^3\mathbf{v}(\mathbf{v}d\mathbf{v})}{\gamma + 1}, \quad (3.32)$$

где приближённое равенство записано с точностью до первого порядка малости по  $d\mathbf{v}$ .



Последующие рассуждения будут справедливы для любого 4-вектора  $S^\alpha$ , ортогонального в 4-пространстве к 4-скорости  $U^\alpha = \{\gamma_u, \mathbf{u}\gamma_u\}$ :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{S} = U^0 S^0 - \mathbf{U}\mathbf{S} = 0. \quad (3.33)$$

Из этого соотношения следует, что  $S^0 = \mathbf{u}\mathbf{S}$ . Запишем преобразования для 3-вектора спина (заменяя в (1.12)  $t \mapsto \mathbf{u}\mathbf{S}$  и  $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{S}$ ):

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} - \gamma\mathbf{v}(\mathbf{u}\mathbf{S}) + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{S}). \quad (3.34)$$

Обратное преобразование получается заменой скорости  $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}' + \gamma\mathbf{v}(\mathbf{u}'\mathbf{S}') + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{S}'), \quad (3.35)$$

так как в любой системе отсчёта  $S^0 = \mathbf{u}\mathbf{S}$ .



Если гироскоп неподвижен ( $\mathbf{u}' = 0$ ) относительно системы  $K'$ , то:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}' + \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{vS}'). \quad (3.36)$$

Обратное преобразование получается из соотношения (3.34) после подстановки  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ :

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \mathbf{v}(\mathbf{vS}). \quad (3.37)$$

Применим преобразование (3.36) между системами  $K'$  и  $K''$ . Пусть в системе  $K''$  находится неподвижный (но вращающийся) гироскоп со спином  $\mathbf{S}''$ . В этом случае в преобразовании (3.36) необходимо добавить всем величинам штрих и заменить  $\mathbf{v} \mapsto d\mathbf{v}'$ . В результате в первом приближении по  $d\mathbf{v}'$  спин остаётся в системе  $K'$  без изменений:  $\mathbf{S}' = \mathbf{S}''$ .

Рассмотрим теперь “точно такой же” гироскоп, неподвижный в системе  $K'$  со спином  $\mathbf{S}'$  (см. выше рисунок). Когда начала систем  $K'$  и  $K''$  совпадают, аналогично стержням (стр. 116) “совпадают” и гироскопы. Поэтому будем считать, что гироскоп системы  $K''$  получается при изменении на  $d\mathbf{v}'$  скорости гироскопа системы  $K'$ . Спин гироскопа  $K''$  в соответствии с (3.35) относительно  $K$  равен:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}' + \gamma \mathbf{v}(\mathbf{S}' d\mathbf{v}') + \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{vS}'). \quad (3.38)$$

Это выражение даёт значение спина гироскопа в момент времени  $t + dt$  после изменения им скорости на  $d\mathbf{v}'$  относительно системы  $K'$ . Вычитая из него значение спина (3.36) в момент времени  $t$ , получаем:

$$d\mathbf{S} = \gamma \mathbf{v}(\mathbf{S}' d\mathbf{v}') = \gamma^2 \mathbf{v}(\mathbf{S} d\mathbf{v}), \quad (3.39)$$

где во втором равенстве  $d\mathbf{v}'$  выражено через  $d\mathbf{v}$  при помощи (3.32), а вместо  $\mathbf{S}'$  подставлено выражение (3.37).

Вводя вектор 3-мерного ускорения  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ , окончательно получаем:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \gamma^2 \mathbf{v}(\mathbf{aS}). \quad (3.40)$$

Если ускорение  $\mathbf{a}$  остаётся перпендикулярным вектору спина ( $\mathbf{aS} = 0$ ), то спин при таком движении не изменяется. В остальных случаях при ускоренном движении происходит изменение спина. Это изменение приводит как к повороту спина (прецессии), так и к изменению модуля вектора  $\mathbf{S}$ .

Обратим внимание на то, что уравнение (3.40) отличается от уравнения (2.36), стр.118, описывающего поворот “жесткого” стержня при криволинейном движении. Поэтому повороты стержня и спина различны.

- Уравнению (3.40) можно придать ковариантную форму:

$$\frac{dS^\alpha}{d\tau} = -V^\alpha A^\beta S_\beta, \quad (3.41)$$

где  $V^\alpha = \{\gamma, \mathbf{v}\gamma\}$  – 4-скорость, а  $A^\alpha$  – 4-ускорение (стр. 133):

$$A^\alpha = \frac{dV^\alpha}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} \{\gamma, \mathbf{v}\gamma\} = \{\gamma^4(\mathbf{v}\mathbf{a}), \gamma^2\mathbf{a} + \gamma^4\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{a})\} \quad (3.42)$$

и  $d\tau = \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} dt$  – собственное время системы  $K'$ . Действительно, свёртка 4-ускорения и 4-спина равна:

$$A^\beta S_\beta = A^0 S^0 - \mathbf{A}\mathbf{S} = \gamma^4(\mathbf{v}\mathbf{a})(\mathbf{v}\mathbf{S}) - \gamma^2(\mathbf{a}\mathbf{S}) - \gamma^4(\mathbf{v}\mathbf{S})(\mathbf{v}\mathbf{a}) = -\gamma^2(\mathbf{a}\mathbf{S}).$$

Дифференциальное уравнение (3.41) называется *уравнением переноса Ферми*. Оно может быть получено из следующих соображений. Пусть изменение спина в ковариантной форме может зависеть только от 4-скорости, 4-ускорения и 4-спина. Тогда из соображений ковариантности:

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\tau} = \lambda \mathbf{V} + \sigma \mathbf{A} + \kappa \mathbf{S}, \quad (3.43)$$

где  $\lambda, \sigma, \kappa$ , – некоторые коэффициенты. Будем считать, что в мгновенно сопутствующей инерциальной системе, в которой частица покоится ( $\mathbf{V} = \{1, \mathbf{0}\}$ ,  $\mathbf{A} = \{0, \mathbf{a}\}$ ,  $\mathbf{S} = \{0, \mathbf{S}\}$ ) изменение спина нулевое ( $d\mathbf{S}/dt = 0$ ), т.е. спин переносится параллельно своему предыдущему положению. В этом случае несложно видеть, что  $\sigma = \kappa = 0$ . Продифференцируем теперь условие ортогональности 4-спина и 4-скорости  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{V} = 0$ :

$$\frac{d(\mathbf{S} \cdot \mathbf{V})}{d\tau} = \frac{d\mathbf{S}}{d\tau} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{S} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{d\tau} = \lambda + \mathbf{S} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{d\tau} = 0,$$

где учтено, что квадрат 4-скорости равен единицы ( $\mathbf{V}^2 = 1$ ). Находя из этого уравнения  $\lambda$  и подставляя в (3.43), мы приходим к уравнению (3.41).

При переносе Ферми, в силу  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{S} = 0$ , остаётся без изменений квадрат 4-вектора спина:  $\mathbf{S}^2 = \text{const}$ , хотя квадрат 3-вектора спина  $\mathbf{S}^2$  изменяется, если спин не ортогонален скорости или ускорению.

Отметим также уравнение, описывающее изменение *модифицированного спина*  $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}M/\mathcal{E} = \mathbf{S}/\gamma$  относительно лабораторной системы отсчёта.

$$\frac{d\tilde{\mathbf{S}}}{dt} = \gamma^2 [\mathbf{a} \times [\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{S}}]]. \quad (3.44)$$

Модифицированный спин равен чистой разности полного момента импульса и момента импульса центра энергии:  $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{L} - \mathbf{R} \times \mathbf{P}$ .

При равноускоренном движении (стр. 119) из состояния покоя интегрирование уравнения прецессии (3.40) приводит к следующей зависимости продольной к скорости компоненты спина от времени:

$$S_x(t) = \frac{S_{x0}}{\sqrt{1 - v^2(t)}}, \quad S_y(t) = S_{y0}, \quad (3.45)$$

где  $S_{x0} = S_x(0)$  – начальное значение спина в системе, в которой его суммарный импульс был равен нулю. Это же соотношение следует также из преобразования (3.36). Таким образом, продольная компонента спина увеличивается при ускорении гироскопа, а поперечная компонента остаётся без изменений. На самом деле зависимость (3.45) получается не только при равноускоренном движении, но и при любом движении вдоль прямой, для которого уравнение (3.40) имеет вид:

$$\frac{dS_x}{S_x} = \frac{va dt}{1 - v^2(t)} = -\frac{1}{2} d[\ln(1 - v^2(t))].$$

Его интегрирование приводит к (3.45).

Можно рассмотреть равномерное движение центра энергии гироскопа по окружности. В этом случае поворот стержня и прецессия спина ведут себя схожим образом. При малых скоростях  $v$  при каждом обороте по окружности спин, как и стержень, поворачивается на небольшой угол, равный  $\pi v^2$  [39].

Аналогично спину получается уравнение, описывающее изменение полного момента импульса  $\mathbf{L}$  гироскопа, записанное относительно неподвижной (лабораторной) системы отсчёта. Так как проекции вектора  $\mathbf{L}$  являются компонентами 4-тензора, его трансформационные свойства отличаются от свойств спина. Поэтому результирующее уравнение также отличается от (3.40) и имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \gamma^2 \mathbf{v} \times [\mathbf{L} \times \mathbf{a}].$$

Если ускоренное движение происходит вдоль прямой (векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{a}$  параллельны), изменение компонент момента импульса совпадает с соответствующими преобразованиями Лоренца для мгновенно сопутствующей гироскопу инерциальной системы отсчёта.

Отметим, что исходная формула Томаса для прецессии спина отличалась от уравнения (3.40). Это было связано с тем, что Томас учёл только вигнеровское вращение, которое мы рассмотрим в 5-й главе. Однако это не единственный эффект, приводящий к прецессии векторов, связанных с неинерциальной системой отсчёта [39].

### 3.12 Нелокальность законов сохранения\*\*

В теории относительности сохранение момента импульса совокупности частиц в одной инерциальной системе отсчёта в общем случае не влечёт за собой его сохранения в других инерциальных системах. Для составных систем преобразования (3.28), (3.29), стр.183, являются лишь первым приближением. Этот факт, по-видимому, первым отметил В.А. Фок [15]. Действительно, постоянство момента импульса (и других сохраняющихся величин) в данной системе отсчёта выражается в терминах, синхронизированных во всём пространстве часов. Для системы частиц, находящихся в различных точках пространства, одновременные события в одной системе будут неодновременными в другой.

Чтобы получить преобразования Лоренца для момента импульса совокупности частиц (например, составляющих вращающийся гироскоп), необходимо просуммировать преобразования (3.28), (3.29) по всем частицам. Величины, находящиеся в правой части, соответствуют времени  $t'$ . Их сумма даст момент импульса и центр энергии в момент времени  $t'$ . Однако, если  $t'$  фиксировано, в левой части суммируемые величины  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{R}$  относятся к различным моментам времени. Для  $k$ -той частицы в силу преобразований Лоренца (1.12), стр.31, имеем:

$$t_k = \mathbf{v}\mathbf{r}_k + \frac{t'}{\gamma}.$$

Так как положения частиц  $\mathbf{r}_k$  вращающегося тела различны, то различными будут и времена  $t_k$ . Поэтому такая сумма не равна суммарному моменту импульса в момент времени  $t$ :

$$\sum \mathbf{L}_k(\mathbf{v}\mathbf{r}_k + t'/\gamma) = \sum \gamma(\mathbf{L}'(t') - \mathbf{v} \times \mathbf{R}'(t')) - \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{L}'(t')).$$

Аналогично можно зафиксировать время  $t$  в левой части суммарных преобразований. Тогда слагаемые в правой части будут относиться к различным моментам времени. В результате преобразования для суммарных величин выглядят существенно более сложными, чем уравнения (3.28), (3.29). Последние справедливы для одиночной частицы или как первое приближение по угловой скорости вращения. В общем случае оказывается, что, хотя  $\mathbf{L}'$  и  $\mathbf{R}'$  постоянны в системе  $S'$ , они будут изменяться со временем в системе  $S$ . И это относится не только к моменту импульса.

Во избежание недоразумений, подчеркнём, что речь идёт о механическом моменте, определённом как  $\mathbf{L} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . Его несохранение не означает, что нельзя построить некоторую величину (включающую в себя  $\mathbf{L}$ ), которая будет постоянна во всех инерциальных системах отсчёта.

Рассмотрим для примера два массивных шарика, соединённых лёгким стержнем. Пусть в системе  $S'$  такая гантелька вращается с угловой скоростью  $\omega_0$  в плоскости  $(x', y')$ . Центр вращения совпадает с центром масс и началом системы отсчёта. Траектория одного шарика равна

$$x' = r_0 \cos(\phi + \omega_0 t'), \quad y' = r_0 \sin(\phi + \omega_0 t'), \quad (3.46)$$

где  $\phi$ ,  $\omega_0$ ,  $r_0$  – константы. Второй шарик получается заменой  $\phi \mapsto \phi + \pi$  или  $r_0 \mapsto -r_0$ . Модули скорости шариков одинаковы и равны  $\omega_0 r_0$ . Момент импульса гантельки, перпендикулярный плоскости  $(x', y')$ , равен:

$$L_0 = \frac{\mu \omega_0 r_0^2}{\sqrt{1 - (\omega_0 r_0)^2}}, \quad (3.47)$$

где  $\mu = 2m$  – суммарная масса шариков.

Найдём, как выглядит эта же гантелька для неподвижных наблюдателей в системе  $S$ , относительно которой  $S'$  движется со скоростью  $v$  вдоль оси  $x$ . Подставим в траекторию (3.46) преобразования Лоренца:

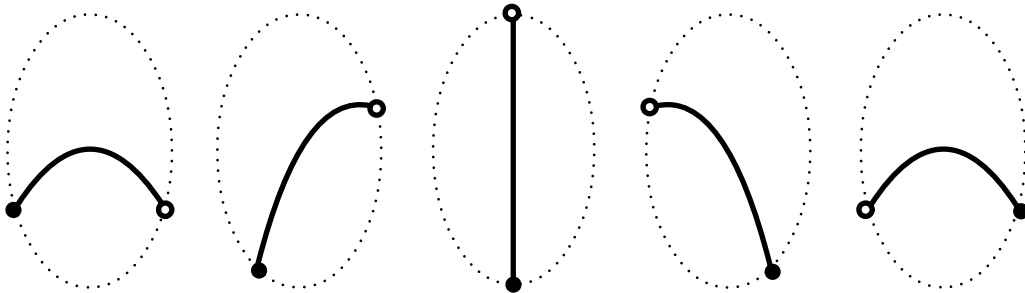
$$\gamma [x - vt] = r_0 \cos(\phi + \omega_0 \gamma [t - vx]), \quad y = r_0 \sin(\phi + \omega_0 \gamma [t - vx]). \quad (3.48)$$

Введём координату  $\tilde{x} = x - vt$  относительно начала системы отсчёта  $S'$ :

$$\gamma \tilde{x} = r_0 \cos(\phi + \omega t - \omega_0 v \gamma \tilde{x}), \quad y = r_0 \sin(\phi + \omega t - \omega_0 v \gamma \tilde{x}), \quad (3.49)$$

где  $\omega = \omega_0 / \gamma$  – круговая частота в системе  $S$ . Первое трансцендентное уравнение позволяет найти  $\tilde{x}$ . Второе уравнение даёт  $y$ .

Ниже на рисунке изображены положения шариков и стержня в различные моменты времени. При вращении стержень изгибается, что связано с относительностью одновременности.



Когда в системе  $S'$  стержень расположен вертикально, то оба шарика находятся на оси  $y'$ . Эти два события имеют одинаковые координаты  $x'$ , поэтому будут одновременны и для наблюдателей в  $S$ . Поэтому в этот момент вид стержня в обеих системах отсчёта совпадает. Иначе выглядит ситуация, когда в системе  $S'$  стержень занимает горизонтальное положение и шарик пересекает ось  $x'$ . Эти события будут неодновременны в системе  $S$ , где правый шарик ось  $x$  ещё не пересёк, а левый это уже сделал.

Дифференцируя (3.48), получаем скорость  $\mathbf{u} = \{u_x, u_y\}$  шарика:

$$u_x = \frac{v - \omega_0 y}{1 - v\omega_0 y}, \quad u_y = \frac{\omega_0 \tilde{x}}{1 - v\omega_0 y},$$

для которой фактор Лоренца равен:

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - u_x^2 - u_y^2}} = \frac{\gamma(1 - v\omega_0 y)}{\sqrt{1 - (r_0\omega_0)^2}},$$

где  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ . При помощи вектора  $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t = \{\tilde{x}, y\}$  можно в суммарном моменте импульса относительно начала координат системы  $S$  выделить момент относительно мгновенного положения начала системы  $S'$ , который мы будем пометать тильдой:

$$\mathbf{L} = \sum m\gamma_u [\mathbf{r} \times \mathbf{u}] = \tilde{\mathbf{L}} + [\mathbf{v} \times \mathbf{P}]t, \quad (3.50)$$

где “мгновенный” момент и суммарный импульс равны:

$$\tilde{\mathbf{L}} = \sum m\gamma_u [\tilde{\mathbf{r}} \times \mathbf{u}], \quad \mathbf{P} = \sum \mathbf{p}.$$

Вектор  $\tilde{\mathbf{L}}$  направлен вдоль оси  $z$  и имеет длину:

$$\tilde{L} = \gamma L_0 - \sum \frac{m\gamma(\omega_0 v^2 \gamma^2 \tilde{x}^2 + v y)}{\sqrt{1 - (r_0\omega_0)^2}}, \quad (3.51)$$

где  $L_0$  – момент вращения (3.47) в системе  $S'$ . Слагаемое  $\gamma L_0$  соответствует преобразованию момента в соответствии с соотношением (3.28), не учитывающим относительность одновременности для распределённой системы. Аналогично при помощи  $\tilde{\mathbf{r}}$  можно разделить на две части вектор  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{R} = \sum (E\mathbf{r} - \mathbf{p}t) = (\mathbf{v}\mathcal{E} - \mathbf{P})t + \sum E\tilde{\mathbf{r}}, \quad (3.52)$$

где  $\mathcal{E} = \sum E$  – суммарная энергия движения. Последний член будем пометать тильдой. Его отношение к  $\mathcal{E}$  даёт радиус-вектор центра энергии относительно мгновенного положения системы  $S'$ . Компоненты суммарного вектора  $\tilde{\mathbf{R}}$  имеют вид:

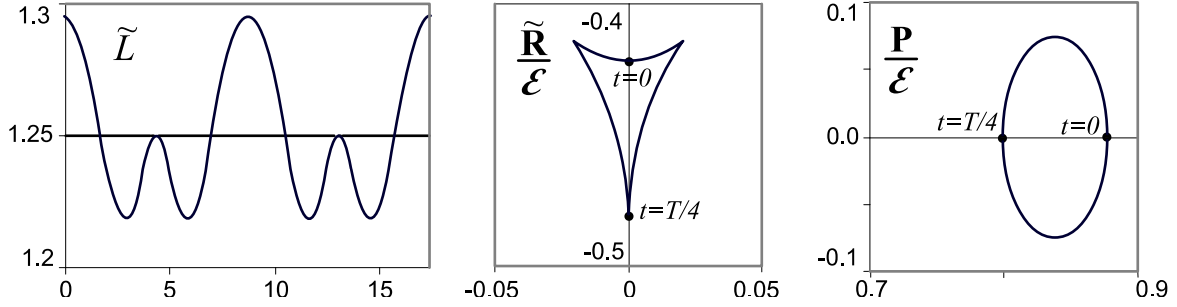
$$\tilde{\mathbf{R}} = \sum E\tilde{\mathbf{r}} = \sum \frac{m\gamma\{\tilde{x} - v\omega_0 y\tilde{x}, y - v\omega_0 y^2\}}{\sqrt{1 - (r_0\omega_0)^2}}. \quad (3.53)$$

Запишем также выражения для суммарной энергии и импульса:

$$\mathcal{E} = \sum \frac{m\gamma(1 - v\omega_0 y)}{\sqrt{1 - (r_0\omega_0)^2}}, \quad \mathbf{P} = \sum \frac{m\gamma\{v - \omega_0 y, \omega_0 \tilde{x}\}}{\sqrt{1 - (r_0\omega_0)^2}}. \quad (3.54)$$

Для гантели в этих соотношениях суммы содержат по два слагаемых для каждого из шариков.

Ниже на рисунке представлена зависимость от времени мгновенного момента импульса  $\tilde{L}$  и траектория на плоскости  $x, y$  мгновенного центра энергии  $\tilde{\mathbf{R}}/\mathcal{E}$  относительно начала системы  $S'$  и суммарного импульса. При этом  $v = 0.8$ ,  $w_0 = 0.6$ ,  $m = r_0 = 1$ . Время изменяется от 0 до  $\pi/\omega$ .



Колебания момента импульса в неподвижной системе отсчёта связаны с быстрым вращением шариков в системе  $S'$ . Раскладывая косинус в уравнении (3.49) в ряд по  $\omega_0 v \gamma \tilde{x}$ , а затем  $\tilde{x}$  в ряд по  $\omega_0$ , имеем:

$$\gamma \tilde{x} \approx r_0 c + r_0^2 \omega_0 v s c + O(\omega^2 r_0^3), \quad y \approx r_0 s - r_0^2 \omega_0 v c^2 + O(\omega^2 r_0^3).$$

где  $c = \cos(\phi + \omega t)$ ,  $s = \sin(\phi + \omega t)$ . При суммировании в (3.51) нечётные степени  $r_0$  сокращаются, так как для одного шарика будет “ $r_0$ ”, а для второго – “ $-r_0$ ”. Поэтому момент в этом приближении постоянен:

$$\tilde{L} \approx \gamma L_0 + O(\omega_0^2 r_0^3).$$

Поправка к результату преобразования (3.28) совершает осцилляторные колебания с частотой  $2\omega$ . Центр энергии относительно начала системы  $S'$  в ведущем приближении совпадает с результатом преобразования (3.29):

$$\frac{\tilde{\mathbf{R}}}{\mathcal{E}} \approx r_0^2 \gamma \omega_0 \{0, -v\}.$$

Суммарная энергия движения в системе  $S$  зависит от времени следующим образом:

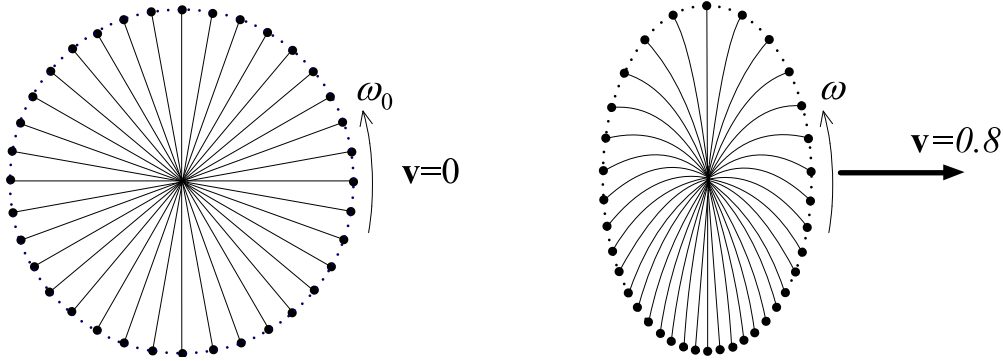
$$\frac{\mathcal{E}}{\mu \gamma} \approx 1 + \frac{r_0^2 \omega_0^2}{2} + r_0^2 \omega_0^2 v^2 \cos^2(\omega t) + \dots,$$

а суммарный импульс не равен  $\mathbf{v}\mathcal{E}$ :

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathcal{E}} \approx \mathbf{v} + \frac{\omega_0^2 r_0^2 v}{2\gamma^2} \left\{ 1 + \cos(2\omega t), \quad \gamma^2 \sin(2\omega t) \right\} + \dots,$$

что приводит не только к колебаниям вектора  $\mathbf{R}$  вслед за центром энергии, но и к увеличению его длины со временем (3.52). Все эти эффекты проявляются только при быстром вращении, когда параметр  $\omega_0$  велик. При малых  $\omega_0$  справедливы преобразования (3.28), (3.29).

Полученные соотношения для гантели позволяют найти суммарные величины, характеризующие вращающееся кольцо или диск. Пусть кольцо состоит из множества “гантелек”, равномерно заполняющих плоскость кольца в системе  $S'$ . В системе  $S$  внешний вид этого диска в любой момент времени изображён на рисунке 20.



Внешний вид кольца не меняется со временем, и всегда наблюдается сгущение масс в нижней части кольца в направлении векторного произведения  $\mathbf{v} \times \mathbf{L}$ , где момент импульса  $\mathbf{L}$  перпендикулярен рисунку.

Уравнения (3.49) для определения  $\tilde{x}$  и  $y$  трансцендентны:

$$\frac{\gamma \tilde{x}}{r_0} = \cos\left(\phi + \omega t - \alpha \frac{\gamma \tilde{x}}{r_0}\right), \quad \frac{y}{r_0} = \sin\left(\phi + \omega t - \alpha \frac{\gamma \tilde{x}}{r_0}\right),$$

где  $\alpha = \omega_0 v r_0$ . При суммировании вклада каждого шарика необходимо перейти к интегрированию по углу  $\phi$  (“усреднению”):

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi. \quad (3.55)$$

Можно показать [39], что для нечётных степеней  $\tilde{x}$  средние равны нулю:

$$\langle \tilde{x} \rangle = \langle \tilde{x} y \rangle = 0,$$

а ненулевые значения имеют вид:

$$\langle y \rangle = -\frac{\omega_0 v r_0^2}{2}, \quad \langle \tilde{x}^2 \rangle = \frac{r_0^2}{2\gamma^2}, \quad \langle y^2 \rangle = \frac{r_0^2}{2}.$$

При помощи этих соотношений несложно найти момент импульса и центр энергии летящего в системе  $S$  вращающегося кольца. Все суммы в соотношениях (3.51), (3.53), (3.54) заменяются на интеграл по углу  $\phi$ .



Суммарная масса кольца должна равняться  $\mu$ , так что:

$$\sum m \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu d\phi = \mu.$$

Суммарная энергия и импульс кольца равны:

$$\mathcal{E} = \frac{\mu\gamma}{\sqrt{1 - (\omega_0 r_0)^2}} + \frac{\gamma L_0 v^2 \omega_0}{2}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{v}\mathcal{E} + \mathbf{v} \frac{L_0 \omega_0}{2\gamma}.$$

В отличие от гантели, они не зависят от времени. Однако релятивистская связь  $\mathbf{P} = \mathbf{v}\mathcal{E}$  для суммарных величин не выполняется.

Усредняя (3.51), приходим к выводу, что суммарный момент импульса совпадает с результатом преобразований (3.28):

$$L = \tilde{L} = \gamma L_0.$$

Момент вращения симметричного кольца будет постоянным в обеих системах отсчёта. Это же будет справедливо и для диска, ось вращения которого перпендикулярна относительной скорости. Заметим, что этот результат справедлив, только когда угловая скорость вращения перпендикулярна скорости  $\mathbf{v}$ . В общем же случае момент импульса линейно увеличивается со временем [39]. При этом член, зависящий от времени, имеет второй порядок малости по угловой скорости вращения кольца.

Вектор  $\tilde{\mathbf{R}}$  соответствует преобразованию (3.29), а исходный вектор  $\mathbf{R}$  без тильды линейно растёт со временем:

$$\tilde{\mathbf{R}} = L_0 \gamma v \{0, -1\}, \quad \mathbf{R} = L_0 \gamma v \left\{ -\frac{\omega_0 t}{2\gamma^2}, -1 \right\},$$

Изменение вектора  $\mathbf{R}$  со временем связано с тем, что суммарный импульс не равен суммарной энергии, умноженной на скорость:  $\mathbf{P} \neq \mathbf{v}\mathcal{E}$ . В результате, хотя центр энергии относительно начала системы  $S'$  постоянен, вектор  $\mathbf{R}$ , в силу (3.52), будет линейно увеличиваться со временем.

Тем не менее при малых угловых скоростях с точностью до первого порядка малости по  $\omega_0$  можно считать, что векторы  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{L}$  имеют постоянные компоненты. В этом приближении эффект относительности одновременности можно не учитывать и пользоваться преобразованиями (3.28), (3.29) и для суммарных величин. В рамках этого приближения найдём уравнение, описывающее изменение момента импульса вращающегося гироскопа, если он изменяет свою скорость поступательного движения.

### III Релятивистская динамика

- **H<sub>22</sub>** *Максимум угла рассеяния* (стр. 148)

Обозначим  $E'_1 = x$  и найдём максимум выражения:

$$F = \frac{(E_1 + m_2)x - (m_1^2 + E_1 m_2)}{p_1 \sqrt{x^2 - m_1^2}}.$$

Беря производную и приравнивая её нулю:

$$F' = \frac{E_1 + m_2}{p_1 \sqrt{x^2 - m_1^2}} - \frac{(E_1 + m_2)x - (m_1^2 + E_1 m_2)}{p_1 (x^2 - m_1^2)^{3/2}} x = 0,$$

откуда:

$$x = \frac{m_1^2 (E_1 + m_2)}{m_1^2 + E_1 m_2}, \quad \text{или} \quad \sqrt{x^2 - m_1^2} = \frac{p_1 m_1 \sqrt{m_1^2 - m_2^2}}{m_1^2 + E_1 m_2},$$

где учтено, что  $E_1^2 - m_1^2 = p_1^2$ . Подставляя  $x$  и  $\sqrt{x^2 - m_1^2}$  в  $F$ , получаем:

$$F_{max} = \frac{\sqrt{m_1^2 - m_2^2}}{m_1} = (\cos \theta_1)_{max}.$$

Учитывая  $\sin^2 \theta_1 = 1 - \cos^2 \theta_1$ , получаем значение максимального синуса.

- **H<sub>23</sub>** *Решение уравнения реактивного движения* (стр. 153)

Запишем ещё раз дифференциальное уравнение с разделёнными переменными:

$$\frac{df}{f} = \frac{v dv}{1 - v^2} - \frac{1}{2u_0} \left( \frac{dv}{1 - v} + \frac{dv}{1 + v} \right).$$

Интегрируя, в левой части получаем  $\ln(f/f_0)$ , где  $f_0$  – константа интегрирования. В правой части, для первого слагаемого делаем замену  $v^2 = z$ ,  $2v dv = dz$  и получаем логарифм. Для второго и третьего слагаемых логарифм получается сразу:

$$\ln \frac{f}{f_0} = -\frac{1}{2} \ln(1 - v^2) - \frac{1}{2u_0} [-\ln(1 - v) + \ln(1 + v)],$$

откуда:

$$\frac{f}{f_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \cdot \left( \frac{1 - v}{1 + v} \right)^{1/(2u_0)}.$$

Учитывая теперь, что  $f(v) = M(v)/\sqrt{1 - v^2}$ , несложно записать релятивистскую формулу Циолковского.

- **Н<sub>24</sub>** *Нерелятивистский предел формулы Циолковского* (стр. 153)

Найдём нерелятивистский предел соотношения (3.9), стр.153, в которой восстановим скорость света:

$$\frac{M}{M_0} = \left( \frac{1 - v/c}{1 + v/c} \right)^{c/(2u_0)} \approx \left( 1 - \frac{2v}{c} \right)^{c/(2u_0)}.$$

Приближённое равенство записано для малых скоростей, для которых  $(1 + v/c)^{-1} \approx 1 - v/c$  и при перемножении скобок сохранён только первый порядок по  $v/c$ . Воспользуемся пределом, возникающим при определении числа Эйлера и экспоненциальной функции:

$$e^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha x)^{1/\alpha}.$$

Обозначим  $\alpha = 2u_0/c$  и  $x = -v/u_0$ . Нерелятивистский предел соответствует  $c \rightarrow \infty$  или  $\alpha \rightarrow 0$ , поэтому получаем:

$$\frac{M}{M_0} = e^{-v/u_0}.$$

Таким образом, масса ракеты экспоненциально уменьшается с ростом скорости.

- **Н<sub>25</sub>** *Инварианты антисимметричного тензора* (стр.183)

Подставим в выражения  $\mathbf{a}'^2 - \mathbf{b}'^2$  преобразования Лоренца для векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  (такие же как и для тензора момента импульса  $L^{\alpha\beta} = (\mathbf{G}, \mathbf{L})$ ). Учитывая, что  $[\mathbf{v} \times \mathbf{a}]^2 = \mathbf{v}^2 \mathbf{a}^2 - (\mathbf{va})^2$  и аналогично для вектора  $\mathbf{b}$ , имеем:

$$\begin{aligned} & \gamma^2 (\mathbf{a}^2 + \mathbf{v}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{vb})^2) + 2[\mathbf{v} \times \mathbf{b}]\mathbf{a} + (\Gamma^2 \mathbf{v}^2 - 2\gamma\Gamma) (\mathbf{va})^2 \\ & - \gamma^2 (\mathbf{b}^2 + \mathbf{v}^2 \mathbf{a}^2 - (\mathbf{va})^2) - 2[\mathbf{v} \times \mathbf{a}]\mathbf{b} + (\Gamma^2 \mathbf{v}^2 - 2\gamma\Gamma) (\mathbf{vb})^2. \end{aligned}$$

Векторные произведения сокращаются, так как по правилу выталкивания:

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{b}]\mathbf{a} = \mathbf{v}[\mathbf{b} \times \mathbf{a}] = -\mathbf{v}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}], \quad [\mathbf{v} \times \mathbf{a}]\mathbf{b} = \mathbf{v}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}].$$

Поэтому выражение  $\mathbf{a}'^2 - \mathbf{b}'^2$  равно:

$$\gamma^2(1 - v^2) (\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2) + ((\mathbf{va})^2 - (\mathbf{vb})^2)(\gamma^2 - 2\gamma\Gamma + \Gamma^2 v^2) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2,$$

где поставлено выражение для  $\Gamma$  и сделаны преобразования:

$$\gamma^2 - 2\gamma\Gamma + \Gamma^2 v^2 = \frac{\gamma^2 - 1 - 2\gamma(\gamma - 1) + (\gamma - 1)^2}{v^2} = 0.$$