Глава 1

Логические основы

В этой главе рассматриваются исходные положения теории относительности. Мы начнем с обсуждения измерительных процедур, которые необходимо провести, чтобы согласовать единицы длины и времени, используемые различными наблюдателями. Отдельно будут рассмотрены неподвижные относительно друг друга наблюдатели и наблюдатели, находящиеся в различных инерциальных системах отсчёта.

Ключевой раздел главы – "*Преобразования Лоренца*". Приведенный в нём вывод не является общеизвестным, хотя он и известен более 100 лет. При помощи преобразований Лоренца будет получен закон сложения скоростей и выяснен смысл фундаментальной константы c. Для полноты картины рассматривается также традиционный вывод, основанный на постулате (на самом деле теореме) о постоянстве скорости света.

После этого мы перейдем к общим вопросам аксиоматического основания физических теорий, происхождению фундаментальных констант и сформулируем *принцип параметрической неполноты.*

Кроме преобразований Лоренца, важную роль в теории играют выражения для релятивистской энергии и импульса. Мы получим их из достаточно общих соображений, проанализировав понятие инертной массы.

Чтобы ощутить возможную ограниченность теории относительности, стоит прочитать раздел "*За границей известного*", хотя в дальнейшем он нам не понадобится. Последние три раздела главы носят исторический характер и, при желании, могут быть пропущены.

1.1 Неподвижные наблюдатели

• Физические процессы происходят в пространстве и во времени. Для определения этих понятий необходимы некоторые измерительные процедуры, которые позволят перейти от ощущений к числам. Это непросто и требует привлечения множества явных или неявных предположений. Нам постоянно придётся говорить о наблюдателях, активных "участниках" физической теории. Хотя окружающий мир является объективным, физика, в конечном счёте, создаётся для объяснения и максимального снижения "субъективности" человеческих ощущений. Поэтому появление в теории подобных "виртуальных" реализаций нашего "Я", скорее всего, неизбежно. Естественно, эти "Я" могут быть представлены и некоторыми приборами.

Восприятие времени формируется благодаря человеческой *памяти*, фиксирующей окружающие изменения. Эти же изменения служат мерой измерения времени. Наиболее удобны для этого повторяющиеся процессы, временная длительность которых может быть принята одинаковой. Поиск "правильных" часов происходит на протяжении всей истории человечества. Однако что такое правильные часы, и откуда мы знаем, что временная длительность повторяющихся процессов одинакова? При ответе на этот непростой вопрос наиболее конструктивным оказывается *принцип простоты*:

> Время определено таким образом, чтобы движение выглядело простым. [53]

Например, мы не станем строить модели, объясняющие сложное поведение тел из-за неравномерного вращения Земли. Мы просто объявим солнечные часы плохими и будем искать другой, более подходящий, равномерный процесс (например, в микромире).

Наиболее простым является движение с постоянной скоростью (в том числе и с нулевой). В соответствии с первым законом Ньютона это происходит, когда объект достаточно удалён от остальных и можно считать, что на него не оказывается внешних воздействий. Это *равномерное* движение должно согласовываться с *равномерным* ходом часов. Кроме этого, скорость объекта измеряется относительно наблюдателя, который сам не должен быть подвержен внешним воздействиям. В этом случае его называют инерциальным. Неравномерность движения может возникать из-за "плохих" часов, неинерциальности наблюдателя или воздействия на объект неких сил. Таким образом, часы, движение и система отсчёта – это три единые стороны одной медали.

Мы не будем конкретизировать устройство часов, используемых для измерения времени. Было бы удобным объявить эти часы атомными, сняв вопросы, связанные с согласованием единиц измерения времени между наблюдателями. Однако тогда мы вынуждены привлечь *принцип тождественности* микрообъектов, т.е. постулат из другой теории. Такая “смесь” теорий не очень хороша с аксиоматической точки зрения. Поэтому будем считать, что устройство часов различных наблюдателей может отличаться. Тем не менее они таковы, что свободные тела движутся относительно свободных наблюдателей с постоянной скоростью.

В дальнейшем часто будет идти речь о событиях, происходящих в данный *момент* времени в некоторой *точке* пространства. Поэтому, кроме равномерности хода, мы наделяем часы свойством точечности и способностью бесконечно быстро “тикать”. Это идеализация и необходимо быть готовым к тому, что на микроуровне понятие “момент времени” перестанет соответствовать реальности. Однако эта проблема будет игнорироваться. Также будет игнорироваться факт воздействия на объекты в процессе измерения (что всегда происходит в квантовом мире). Наконец, игнорируется обратное воздействие на наблюдателя в процессе его взаимодействия с объектами. Например, наблюдатель может изменить скорость объекта, оставшись в “той же” точке пространства.

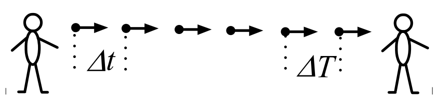
Пространственные отношения можно измерять, если есть эталон, который по определению имеет неизменную длину. Как мы увидим в дальнейшем, жёсткие линейки возможны только в некотором приближении. Это создаёт известную трудность, однако сейчас мы не будем на этом останавливаться. Пусть линейка всегда неподвижна, неизменна и расположена в непосредственной близости от наблюдателя.

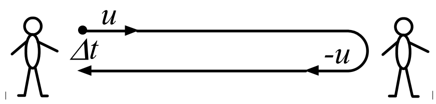
Имея часы и линейку, можно измерять скорость и ускорение движущегося объекта. Для измерения скорости $v = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$ необходимо провести два отсчёта времени в двух точках пространства. Ускорение потребует три таких измерения, и т.д. В принципе все эти измерения можно проводить и при помощи одних часов. В этом случае они располагаются между двумя детекторами, которые посылают к часам некоторые сигналы при пролёте мимо них объекта. Даже если скорости этих сигналов неизвестны (и, возможно, различны), уменьшением расстояния между детекторами эту неопределённость можно делать сколь угодно малой. С математической точки зрения скорость – это величина, определённая в данной точке пространства и времени, возникающая в результате предельного перехода. Впрочем, это ещё одна идеализация, без которой мы не можем судить о равномерности движения.

• Представим пространство, заполненное множеством наблюдателей. Некоторые из них неподвижны относительно друг друга и образуют *систему отсчёта*. Если скорости объектов, не подверженных внешнему воздействию, относительно наблюдателей постоянны, то такая система отсчёта называется *инерциальной*. “Благодаря” наблюдателям в каждой точке системы отсчёта находятся “часы” и “линейка”. Для получения единой картины происходящих в пространстве событий наблюдатели должны согласовать единицы измерений. Начнём с единиц скорости.

Пусть каждый из наблюдателей последовательно определяет скорость равномерно движущегося объекта, пролетающего мимо. Наблюдатели могут договориться, что эта скорость равна 1 м/с. В результате измерений получается общая единица скорости. Соответственно, неподвижный объект по определению имеет нулевую скорость. Предполагается, что повторение в дальнейшем подобных экспериментов с объектами, имеющими другие скорости, приводит к совпадению результатов измерений различных наблюдателей. Если этого не происходит, необходимо пересмотреть методы измерения длины, времени, или искать причину изменения скорости.

Как теперь согласовать по отдельности эталоны длины и времени? Можно переместить их в пространстве, обменявшись копиями эталонов. Однако хотелось бы избежать такой процедуры из-за потенциальной деформации приборов при изменении их скорости, возникающей при “переноске”. Простейший способ согласования единиц времени в рамках механики – это посылка объектов с одинаковыми скоростями от одного наблюдателя ко второму с некоторой периодичностью. Период посылки может быть принят за единицу времени (левый рисунок):



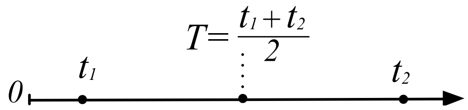


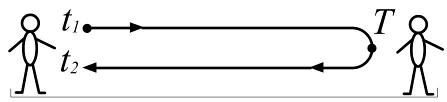
Если единицы скорости и времени согласованы, наблюдатели получают в свое распоряжение и одинаковые единицы длины. Естественно, они должны убедиться, что находятся в одной системе отсчета, т.е. что расстояние между ними неизменно. Для этого они могут использовать “*радиолокационный метод*”. Первый наблюдатель отправляет в направлении второго объект с постоянной скоростью u (правый рисунок выше). Получив его, второй наблюдатель отправляет объект обратно с *той же* скоростью (с обратным знаком). Первый наблюдатель измеряет промежуток времени Δt между отправлением объекта и получением его обратно. Если при повторении этого эксперимента Δt будет неизменным, то расстояние между наблюдателями можно считать постоянным.

Заметим, что *изотропность* (одинаковость всех направлений) пространства при этих экспериментах не используется, хотя подразумевается инерциальность системы. Скорость отправляемого обратно объекта контролируется как вторым, так и первым наблюдателем. Поэтому дополнительная гипотеза о равенстве скоростей "туда" и "обратно" не требуется. Необходимо только их постоянство.

Можно провести этот же эксперимент в "перевернутом" виде, когда его начинает второй наблюдатель, а первый отправляет объект обратно. Второй наблюдатель должен *по договорённости* получить такую же временную длительность $\Delta T = \Delta t$ от отправки объекта до его получения. Это ещё один способ согласования единиц времени, который должен привести к тем же результатам, что и периодическая посылка объектов.

Кроме единиц длины и времени, наблюдателям необходима синхронизация начала отсчёта времени. Для этого можно повторить предыдущий эксперимент, но при этом измерять не только интервал времени, но и абсолютные временные значения каждого события. Пусть по часам первого наблюдателя отправление объекта произошло в момент времени t_1. Этот объект, имея скорость u, достигает второго наблюдателя в момент времени T по его локальным часам. Объект, отправляемый обратно с той же скоростью, прибывает к первому наблюдателю в момент t_2. По определению скорости и в предположении относительной неподвижности наблюдателей длительность движения объекта в обе стороны должна быть одинаковой, поэтому:



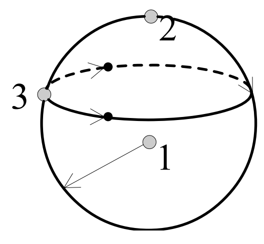


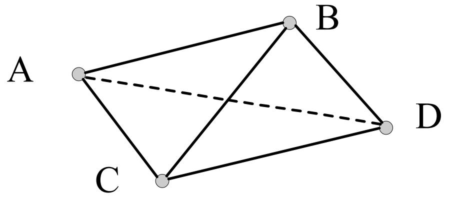
Соотношение $T = (t_1 + t_2)/2$ позволит наблюдателям выбрать начало отсчета времени единым образом. Отметим, что *значение* скорости u объекта, используемого для синхронизации часов, *роли не играет.* Следуя Эйнштейну, для подобной процедуры используются световые сигналы. Однако, как мы видим, коль уж наблюдатели умеют измерять скорость, это не обязательно. Более того, все описанные выше процедуры имеют смысл, если они дают одинаковый результат при *любой* скорости объекта, а не только для некой выделенной.

Предполагается, что процедуры согласования единиц длины и времени, а также синхронизация начала отсчёта времени обладают *свойством транзитивности.* Если наблюдатель A согласовал свои приборы с B, а B затем провёл аналогичное согласование с C, то A и C также оказываются согласованными. В результате все наблюдатели в данной системе отсчета имеют единое время и единицы длины (скорости).

• Чтобы измерять скорость объектов, наблюдателям необходима линейка. Однако мы предполагаем, что она сколь угодна малая (наблюдатель в данной точке пространства мыслится как точечный). Для измерения больших расстояний проще всего использовать “радиолокационный метод” с посылкой и возвращением некого объекта с постоянной скоростью u. Её значение роли не играет, однако должно быть известным. Если путешествие туда и обратно длится время Δt, то пройденное объектом расстояние в одну сторону по определению равно $L = u\,\Delta t/2$. Напомним, что неизменность во времени этого расстояния является свидетельством относительной неподвижности наблюдателей.

Различные пары наблюдателей могут измерить подобным образом расстояния друг между другом. Множество значений этих расстояний не может быть произвольным и определяется геометрическими свойствами пространства. Ключевым свойством является *размерность пространства*. Для её измерения можно проделать следующую процедуру. Рассмотрим множество точек, равноудалённых от данной. Это *поверхность* (сфера), и по определению предполагается, что её размерность на единицу меньше, чем размерность всего пространства. На этой поверхности мы снова можем выбрать фиксированную точку и рассмотреть множество точек *на поверхности*, равноудалённых от центральной точки. Получится окружность. Её размерность снова на единицу меньше, чем у сферы. Считается, что даже на микроуровне подобная процедура рано или поздно заканчивается и финальное множество точек будет конечным. Число выполненных итераций и равняться размерности пространства:





Мы постулируем, что проведение подобного измерения размерности пространства в различных его точках будет приводить к одинаковым результатам. Другими словами, размерность пространства является его глобальной характеристикой. Как известно, наше пространство трёхмерно.

Кроме способа, описанного выше, возможно совместное изучение геометрии пространства и его размерности. Например, если на евклидовой *плоскости* (2-мерное пространство) есть 4 точки, не лежащие на одной прямой, то расстояния между ними не могут быть произвольными. Выше расстояние AD зависит от остальных пяти расстояний. Если же эти точки лежат не в плоскости, то подобной связи уже не возникает.

Второе важное свойство "пустого" пространства – его *однородность*. Любые эксперименты, проводящиеся в различных точках пространства (различными наблюдателями), должны приводить к одинаковым результатам.

Третье свойство пространства – это его *изотропность*. Измеряя скорость некоторого объекта, наблюдатели получают не только её величину, но и направление (вектор). Мы будем считать, что "выделенных направлений" в пространстве нет, т.е. все они равноправны.

В силу изотропности пространства окружность можно разделить на равное число "секторов", введя понятие угла. При этом полный угол окружности в радианах принимается за 2π. Углы и расстояния позволяют изучать свойства геометрии пространства. Например, если сумма углов треугольника, образованного тремя наблюдателями, равна 2π, то такое пространство является *евклидовым*.

На самом деле однородное и изотропное пространстве может обладать тремя видами геометрии, отличающимися знаком *кривизны пространства*. Если сумма углов в треугольнике больше 2π, то это пространство положительной кривизны, а если меньше – отрицательной. В силу однородности и изотропности треугольники с одинаковыми сторонами будут иметь одинаковое отклонение от 2π, т.е. кривизна постоянна в разных направлениях и точках пространства. Наглядный пример однородного изотропного пространства постоянной положительной кривизны – это 2-мерное пространство на поверхности сферы.

В первых главах мы будем считать наше пространство 3-мерным и евклидовым. В дальнейшем будет рассмотрен более общий случай. В евклидовом пространстве можно ввести декартову систему координат. Для этого один из наблюдателей объявляется находящимся в "начале" системы отсчета. С каждым наблюдателем связывается тройка чисел $\{x, y, z\}$, которые называются *координатами*. Они задают его положение в пространстве. Эти три числа "нумеруют" наблюдателей (или точки пространства, в которых они находятся).

В евклидовом пространстве подобную нумерацию можно выбрать таким образом, что квадрат расстояния между любыми двумя точками $\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\{x_2, y_2, z_2\}$ будет равен:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Значения координат начала системы отсчёта принимаются нулевыми. Добавление к координатам момента времени $\{t, x, y, z\}$ позволяет полностью идентифицировать любое *событие*, происходящее в некоторой точке пространства $\{x, y, z\}$ в данный момент времени t.

1.2 Инерциальные системы отсчёта

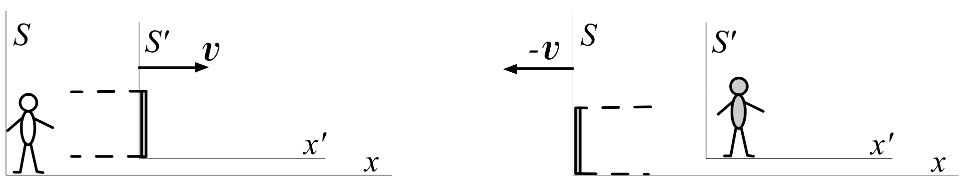
• Перейдём теперь к наблюдателям в *различных* инерциальных системах отсчёта. Для простоты будем говорить о двух таких системах, обозначая одну буквой S, а вторую S'. Нас интересует связь между значениями координаты и момента времени некоторого события, наблюдаемого из каждой системы отсчета. Рассматривая одномерный случай, обозначим координату и время события для наблюдателей в S как $\{x, t\}$, а для наблюдателей в S', соответственно, как $\{x', t'\}$. Связь означает существование некоторой функциональной зависимости:

$$x' = f(x, t, v), \qquad\qquad t' = g(x, t, v). \tag{1.1}$$

Заметим, что наличие такой связи является аксиомой теории. Если угодно – Аксиомой Познаваемости Мира. Результаты наблюдений, проведенные в различных системах, должны быть между собой как-то связаны. Предполагается, что функции $f(x, t, v)$ и $g(x, t, v)$ зависят от относительной скорости систем v. Вообще говоря, в эту связь могла бы попасть, например, температура каждого из наблюдателей, однако в кинематике мы считаем, что для полного описания некоторого события достаточно измерения его координаты и момента времени, а единственный параметр, отличающий инерциальные системы, – это их относительная скорость.

Чтобы сравнение результатов измерений имело смысл, наблюдатели в разных системах отсчета, как и в одной, должны согласовать свои единицы длины и времени.

Начнем снова с единиц скорости. Представители двух систем отсчета могут договориться считать одинаковой их *относительную скорость* v. Если оси систем направлены в одну сторону, то для наблюдателя в S (см. левый рисунок) скорость системы S' будет равна v, а для наблюдателя в S' скорость S, соответственно, $-v$ (правый рисунок):



Подчеркнем, что это не постулат, а именно способ согласования единиц скорости. Хотя в нём заложена идея об эквивалентности всех инерциальных систем отсчета.

Для согласования единиц длины наблюдатели могут разместить свои линейки перпендикулярно движению (вдоль оси y) и совместить их друг с другом. Образно говоря, это означает, что наблюдатель, например, системы S', пролетая мимо "забора", расположенного в системе S, проводит на нём две линии, параллельные оси x, высотою в один метр, оставляя тем самым информацию о своей единице длины. Вместо забора можно, конечно, использовать две летящие параллельно оси x частицы. Кратчайшее расстояние между их траекториями в обеих системах может быть принято за единичное. Обратим внимание, что подобная процедура возможна только в пространстве с размерностью большей единицы.

Согласовав перпендикулярные к движению единицы длины, наблюдатели могут считать, что между ними согласованы и любые линейки. Их уверенность основана на *изотропности* пространства в каждой системе отсчета и возможности "медленного" поворота линеек без их деформации.

Имея согласованные единицы скорости и длины, наблюдатели тем самым согласовывают и единицы времени. Начало отсчета времени можно привязать к некоторому событию, например, совпадению начал систем $x = x' = 0$, считая, что в этот момент $t = t' = 0$:

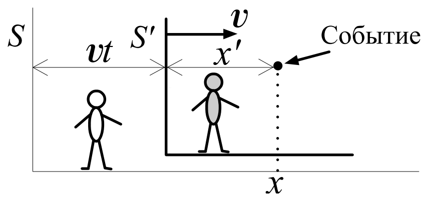
$$f(0, 0, v) = g(0, 0, v) = 0.$$

Сформулируем теперь важное свойство функций $f(x, t, v)$ и $g(x, t, v)$. Если разрешить уравнения (1.1) относительно x и t, мы получим обратную связь (от штрихованных величин к нештрихованным). При этом функции *должны* оказаться *теми же самыми*, а скорость – изменить знак:

$$x = f(x', t', -v) \qquad\qquad t = g(x', t', -v).$$

Это достаточно сильное требование, и оно имеет глубокий смысл. Исходные преобразования (1.1) можно интерпретировать с позиции наблюдателя в системе S. Он измеряет координаты и время некоторого события (x, t) и при помощи преобразований "выясняет", каковы значения измерений того же события в системе S', движущейся относительно него со скоростью v. Обратные преобразования решают эту же задачу, но с позиции наблюдателя в S'. Однако, в силу сонаправленности осей x и x', для него скорость системы S будет равна "$-v$". Поэтому штрихованные и нештрихованные величины меняются местами и совершается замена $v \mapsto -v$. Во всём остальном *функциональная форма* преобразований должна быть эквивалентной. Это является отражением принципа относительности (тождественности всех инерциальных систем отсчета).

• Примером преобразований между двумя инерциальными системами служат преобразования Галилея. В классической механике мы предполагаем, что время имеет одинаковый темп хода для всех наблюдателей $t' = t$. Пусть две системы отсчета расположены так, что их оси x параллельны друг другу, и в момент времени $t' = t = 0$ начала систем совпадают. Тогда координаты и время некоторого события, наблюдаемого из каждой системы, связаны между собой следующим образом:



$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t. \end{cases} \tag{1.2}$$

Естественно, Галилей не записывал подобных преобразований. Они появились значительно позже. Однако ему принадлежит формулировка *принципа относительности*, изложенная в книге "Диалоги о двух главнейших системах мира – птоломеевой и коперниковой" (1632 г.). Мы приведем её с некоторыми сокращениями:

> Уединитесь с кем-либо из друзей в просторное помещение под палубой какого-нибудь корабля, запаситесь мухами, бабочками и другими подобными мелкими летающими насекомыми; подвесьте, далее, наверху ведерко, из которого вода будет падать капля за каплей в другой сосуд с узким горлышком, подставленный внизу. Пока корабль стоит неподвижно, наблюдайте прилежно, как мелкие летающие животные с одной и той же скоростью движутся во все стороны помещения; все падающие капли попадут в подставленный сосуд, и вам, бросая какой-нибудь предмет, не придется бросать его с большей силой в одну сторону, чем в другую, если расстояния будут одни и те же. Заставьте теперь корабль двигаться с любой скоростью, и тогда (если только движение будет равномерным и без качки в ту и другую сторону) во всех названных явлениях вы не обнаружите ни малейшего изменения и ни по одному из них не сможете установить, движется ли корабль или стоит неподвижно. [3]

Часто говорят, что принцип относительности Галилея сформулирован только для механических систем, тогда как Эйнштейн распространил его на все физические явления. Это не совсем верно. Как мы видим, Галилей считал, что в инерциальных системах отсчета одинаковым образом протекают все явления, *даже биологические* $\ddot{\smile}$. Он не разделял физику на механику и прочие явления. Для него, по всей видимости, не было даже физики. Он просто размышлял о природе Мира.

• Преобразования Галилея обладают *групповыми свойствами*. Это означает, что существует единичное преобразование, обратное, и композиция преобразований снова является преобразованием.

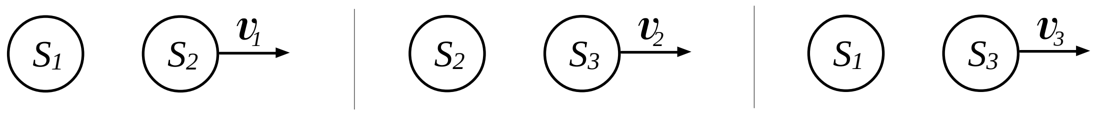
Единичное преобразование соответствует $v = 0$. В этом случае $x' = x$ и $t' = t$, т.е. две системы отсчета совпадают.

Обратное преобразование несложно записать, обратив уравнения (1.2):

$$\begin{cases} x = x' + vt' \\ t = t'. \end{cases}$$

В результате, как и должно быть, получаются те же преобразования Галилея, но с заменой $v \mapsto -v$.

Чтобы определить композицию преобразований, рассмотрим три инерциальные системы отсчета S_1, S_2 и S_3. Пусть S_2 движется относительно S_1 со скоростью v_1, а S_3 относительно S_2 со скоростью v_2. Понятно, что в этом случае третья система движется относительно первой с некоторой скоростью v_3:



Преобразования Галилея между парами систем будут иметь вид:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - v_1 t_1 \\ t_2 = t_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = x_2 - v_2 t_2 \\ t_3 = t_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = x_1 - v_3 t_1 \\ t_3 = t_1. \end{cases}$$

Все эти соотношения, в *силу равноправия* систем отсчета, имеют одинаковый вид, различаясь лишь значением относительной скорости.

Подставляя первую систему во вторую и сравнивая с третьей, несложно убедиться, что скорость v_3 не произвольна, а связана с v_1 и v_2:

$$v_3 = v_1 + v_2.$$

Это простое правило сложения скоростей вытекает из преобразований Галилея. Его можно также получить, рассматривая только две системы и некоторый объект, летящий относительно них. В нашем случае в качестве такого объекта выступала третья система отсчета.

Групповые аксиомы являются очень сильными требованиями и при нескольких дополнительных предположениях позволяют найти явный вид функций $f(x, t, v)$ и $g(x, t, v)$ в достаточно общем случае. Этим мы сейчас и займемся.

1.3 Преобразования Лоренца

Чтобы найти общий вид функций f и g, связывающих результаты наблюдения события в двух инерциальных системах отсчета S и S':

$$x' = f(x,t,v), \qquad\qquad t' = g(x,t,v), \tag{1.3}$$

начнём задавать последовательность аксиом, которым они удовлетворяют. Начнем с наиболее общего утверждения:

> **Аксиома I.** *Преобразования* (1.3) *являются непрерывными, дифференцируемыми и взаимно-однозначными.*

Это требование является очень естественным и, хотя оно *сужает* класс возможных функций, тем не менее, оставляет его более чем широким.

> **Аксиома II.** *Если скорости двух свободных частиц равны в системе S, то они будут равны и в системе S'.*

Эта аксиома приводит к тому, что преобразования координат и времени должны быть линейными функциями:

$$x' = A\,x + B\,t, \qquad\qquad t' = D\,x + E\,t, \tag{1.4}$$

где коэффициенты A, B, D, E могут зависеть от относительной скорости систем отсчёта v, но не зависят от x и t. Строгое доказательство этого утверждения приведено на стр.622 ($\lessdot$ H_1), однако сейчас его можно пропустить, считая, что линейность преобразований связана с однородностью пространства и времени.

В преобразованиях (1.4) зафиксировано начало отсчета времени таким образом, чтобы при $t = t' = 0$ начала систем совпадали: $x = x' = 0$.

В силу процедуры согласования единиц скорости мы считаем, что точка $x' = 0$ системы S' движется относительно S по траектории: $x = vt$. Подставляя $x' = 0$, $x = v\,t$ в первое уравнение (1.4), получаем $B = -v\,A$. Аналогично, подставляя $x = 0$, $x' = -v\,t'$ в уравнения (1.4) и исключая времена, получаем $B = -v\,E$. Сравнивая с предыдущим соотношением, имеем $A = E$. Введём две функции относительной скорости

$$A = E = \gamma(v), \qquad\qquad \sigma(v) = -D/E$$

при помощи которых запишем преобразования в следующем виде:

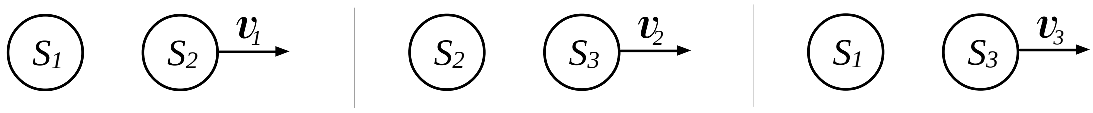
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' &=& \gamma(v)\,[x - v\,t], \\ t' &=& \gamma(v)\,[t - \sigma(v)\,x]. \end{array} \right. \tag{1.5}$$

Для определения функций $\gamma(v)$, $\sigma(v)$ нам потребуется дополнительная информация.

Третья аксиома выражает *принцип относительности* и является ключевой как в теории относительности, так и в классической механике:

Аксиома III. *Инерциальные системы отсчета равноправны.*

Рассмотрим три системы S_1, S_2 и S_3. Пусть S_2 движется относительно S_1 со скоростью v_1, а S_3 относительно S_2 со скоростью v_2.



Обозначим через x_1 и t_1 координату и время события, наблюдаемого в S_1, и аналогично для S_2 и S_3. Запишем преобразования:

$$\begin{cases} x_2 = \gamma_1 [x_1 - v_1 t_1] \\ t_2 = \gamma_1 [t_1 - \sigma_1 x_1] \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = \gamma_2 [x_2 - v_2 t_2] \\ t_3 = \gamma_2 [t_2 - \sigma_2 x_2], \end{cases}$$

где $\gamma_1 = \gamma(v_1)$, $\sigma_1 = \sigma(v_1)$, и т.д. Подставим (x_2, t_2) из первой системы во вторую:

$$\begin{cases} x_3 = \gamma_2\gamma_1 [(1 + v_2\sigma_1)\, x_1 - (v_1 + v_2)\, t_1] = \gamma_3 [x_1 - v_3 t_1] \\ t_3 = \gamma_2\gamma_1 [(1 + v_1\sigma_2)\, t_1 - (\sigma_1 + \sigma_2)\, x_1] = \gamma_3 [t_1 - \sigma_3 x_1]. \end{cases}$$

Вторые равенства в каждом уравнении представляют собой преобразование между системами отсчёта S_1 и S_3, которые движутся с относительной скоростью v_3. Эти уравнения должны выполняться при любых x_1 и t_1. Если приравнять коэффициенты при x_1 в первом уравнении системы и при t_1 во втором, то получаются следующие соотношения:

$$\begin{cases} \gamma_3 = (1 + v_2\sigma_1)\gamma_1\gamma_2 \\ \gamma_3 = (1 + v_1\sigma_2)\gamma_1\gamma_2, \end{cases} \tag{1.6}$$

из которых следует $1 + v_2\sigma_1 = 1 + v_1\sigma_2$, или:

$$\frac{\sigma(v_1)}{v_1} = \frac{\sigma(v_2)}{v_2} = \alpha = const. \tag{1.7}$$

Так как скорости v_1 и v_2 – произвольные *независимые* величины, то α – это некоторая константа, единая для всех инерциальных систем отсчета. Числовое значение константы α и её знак без дополнительных аксиом или экспериментов зафиксировать нельзя. Логически возможны три теории с $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ и $\alpha < 0$. Все они имеют право на существование и не содержат противоречий, хотя случай $\alpha < 0$ имеет довольно необычные физические следствия ($\lessdot$ C$_4$). Случай $\alpha \neq 0$ является более общим, чем $\alpha = 0$, так как содержит последний в пределе малых значений α.

Требование равноправия приводит также к тому, что переход от S к S' (1.5) будет таким же, как и от S' к S. Другими словами, обратное преобразование с точностью до замены $v \mapsto -v$ должно совпадать с прямым. Например, для координаты [см. первое уравнение (1.5)]:

$$x = \gamma(-v)[x' + v\,t'] = \gamma(-v)\gamma(v)[1 - \alpha\,v^2]\,x,$$

где во втором равенстве подставлено x', t' из прямого преобразования (1.5) и учтено, что $\sigma(v) = \alpha\,v$. В результате:

$$\gamma(-v)\gamma(v) = \frac{1}{1 - \alpha\,v^2}. \tag{1.8}$$

Для окончательного определения функции $\gamma(v)$ нам потребуется ещё одна аксиома:

> **Аксиома IV.** *Пространство в инерциальных системах отсчёта изотропно.*

Это означает, что при обращении осей обеих систем, т.е. $x \mapsto -x$ и $x' \mapsto -x'$, преобразования (1.5) не должны изменить своего вида. При таком обращении скорость меняет знак, $v \mapsto -v$, поэтому, для (1.5):

$$-x' = \gamma(-v)\,[-x + v\,t].$$

Оно снова перейдёт в (1.5), только если $\gamma(v)$ будет четной функцией скорости: $\gamma(-v) = \gamma(v)$. Это позволяет найти $\gamma(v) = 1/\sqrt{1 - \alpha\,v^2}$. Положительный знак при извлечении корня выбран, чтобы при нулевой скорости получались тождественные преобразования, т.е. $\gamma(0) = 1$.

В следующей главе мы рассмотрим эффект сокращения длины стержня при одновременном ($\Delta t = 0$) измерении координат его начала и конца. Результат этого измерения $\Delta x' = \gamma(v)\Delta x$ не должен зависеть от направления скорости, откуда также следует чётность функции $\gamma(v)$.

Таким образом, *функциональная форма* преобразования между наблюдателями двух инерциальных систем отсчёта полностью определяется с точностью до константы α. Выяснение её *значения* и *знака* – это уже вопрос экспериментальный. Фундаментальная константа α могла оказаться и нулевой, однако в нашем Мире она больше нуля. Поэтому удобно выразить "α" через константу "c", имеющую размерность скорости: $\alpha = 1/c^2$. В результате:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{1.9}$$

Эти преобразования удовлетворяют сформулированным выше четырем аксиомам и положительному выбору константы α.

Для аксиоматического задания значения константы *фундаментальной скорости* “c” необходимы дополнительные аксиомы. Так, классическая механика также опирается на аксиомы (I)-(IV), однако добавляет к ним следующее утверждение:

> **Аксиома V.** *Если два события одновременны в одной системе отсчета, то они будут одновременны и в любой другой.*

Одновременность событий ($\Delta t' = 0$, следовательно $\Delta t = 0$) приводит к значению $c = \infty$ (подробнее см. стр. 82) и преобразованиям Галилея:

$$x' = x - vt, \qquad t' = t.$$

Аксиомы (I)-(V) полностью определяют функции $f(x, t, v)$ и $g(x, t, v)$. Если мы отбросим пятую аксиому, то количество информации уменьшится и мы получим неполную теорию. Однако эта неполнота замечательным образом ограничивается только появлением неопределяемой константы “c”, т.е. приводит к *параметрически неполной теории.* В этом смысле пятая аксиома обладает минимальным количеством содержательной информации.

Заметим, что мы не только вывели преобразования Лоренца, но также продемонстрировали, что

> *теория относительности непротиворечива, если непротиворечива классическая механика.*

Это следует из того, что преобразования Лоренца и Галилея основаны на одинаковом подмножестве аксиом. Та или иная теорема (формула) теории всегда выводится из некоторой группы аксиом. Когда две теории используют одинаковое множество аксиом, то и теоремы, следующие из них, будут одинаковыми. Например, пусть из аксиом A_1 и A_2 следует некоторая теорема T_1. Так как другие аксиомы не используются, не важно, в рамках классической или релятивистской физики проводится этот вывод. Если любые подобные выводы в классической механике не приводят к противоречиям, то они тем более не будут приводить к противоречиям в теории относительности, которая использует меньше аксиом. Когда одна из теорий (классическая механика) *непротиворечивым образом* добавляет новую аксиому, то появляется возможность выводить новые теоремы которые уменьшают произвол исходной ограниченной системы (например, утверждают, что $c = \infty$).

Понимать *логическую непротиворечивость* теории относительности очень важно, так как выводы, которые мы будем из неё получать, окажутся очень непривычными. Тем не менее, логических противоречий они содержать не могут, так как непротиворечивы наши исходные постулаты.

• Фундаментальная скорость численно совпадает со скоростью света:

$$c = 299792458 \text{ м/с}.$$

Удобно так определить единицы времени, чтобы $c = 1$. Например, можно в качестве "новой секунды" выбрать 1/299792458 часть "обычной секунды" в системе СИ или СГС. Все формулы теории относительности в этой системе единиц будут выглядеть гораздо проще. Например, преобразования Лоренца, в которые добавлена неизменность перпендикулярной к движению координаты ("линии на заборе"), имеют вид:

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}, \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \qquad y' = y. \tag{1.10}$$

Если в некоторой формуле мы хотим "восстановить" константу "c", то величины, имеющие в своей размерности время в некоторой степени, должны умножаться на "c" в той же степени. Например, для времени t, скорости $u = dx/dt$ и ускорения $a = d^2x/dt^2$ совершаются следующие замены:

$$t \mapsto ct, \qquad u \mapsto \frac{u}{c}, \qquad a \mapsto \frac{a}{c^2}. \tag{1.11}$$

Далее мы будем придерживаться системы единиц, в которой $c = 1$. Для всех физических величин, которые будут появляться в процессе построения теории, оказываются справедливыми простые правила замены, подобные (1.11). За счёт подходящего выбора системы единиц мы существенно упростим математику, не "потеряв" при этом фундаментальной константы c, так как она может быть легко восстановлена при помощи правил (1.11) и им подобных (см. приложение S, стр.591).

Ещё одно упрощение связано с введением обозначений для релятивистских факторов:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \qquad \Gamma = \frac{\gamma - 1}{v^2}.$$

При $v = 0$ фактор γ равен единице, а при $v \to 1$ стремится к бесконечности. При малых скоростях γ и Γ могут быть разложены в ряд Тейлора:

$$\gamma \approx 1 + \frac{v^2}{2} + \frac{3v^4}{8} + ..., \qquad \Gamma \approx \frac{1}{2} + \frac{3v^2}{8} + \frac{15v^4}{16} + ...$$

С гамма-фактором часто придётся совершать различные алгебраические манипуляции, поэтому приведём некоторые тождества:

$$v^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}, \qquad \Gamma = \frac{\gamma^2}{1 + \gamma}, \qquad \gamma - \Gamma = \frac{\gamma}{\gamma + 1},$$

проверить которые предлагается в качестве несложного упражнения.

• Получим обобщение преобразований Лоренца для произвольного направления скорости. Пусть начало системы S' движется со скоростью $\mathbf{v}$ относительно инерциальной системы S (первый рисунок):

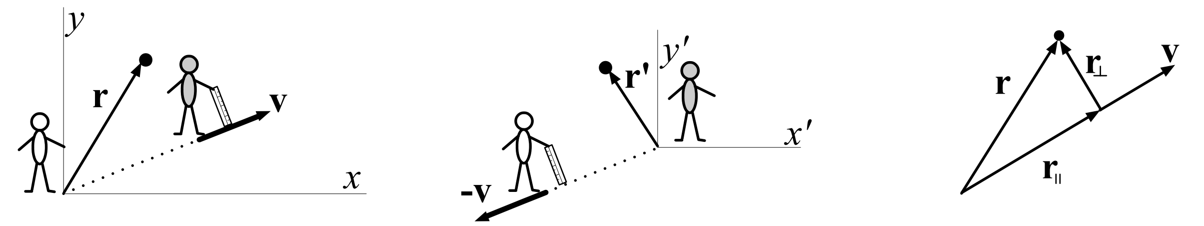


Рисунок выполнен в двумерии, но предполагается, что движение происходит в 3-мерном пространстве. Наблюдатели согласовывают единицы времени при помощи соглашения о равенстве модулей относительной скорости, а единицы длины – "сравнивая линейки" в перпендикулярном к скорости направлении. Фиксирование компонент $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ (проекций на оси) означает выбор определённой ориентации координатных осей [с точностью до вращения вокруг $\mathbf{v}$ ($\lessdot\, \mathrm{C}_2$)]). Для наблюдателя в S' компоненты скорости начала системы S имеют обратный знак.

На третьем рисунке представлено разложение радиус вектора $\mathbf{r}$ по двум векторам $\mathbf{r}_{\parallel}$ и $\mathbf{r}_{\perp}$. Первый из них направлен вдоль скорости $\mathbf{v}$, а второй ей перпендикулярен:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}, \qquad\qquad \mathbf{r}_{\parallel} = \frac{(\mathbf{r}\mathbf{v})}{v^2}\,\mathbf{v}.$$

Длина вектора $\mathbf{r}_{\parallel}$ определяется проекцией $\mathbf{r}$ на единичный вектор $\mathbf{v}/v$ вдоль направления скорости. Он же задаёт направление $\mathbf{r}_{\parallel}$. Далее, $v = \sqrt{\mathbf{v}^2}$ – длина вектора относительной скорости. Подобное разложение позволяет записать преобразования Лоренца для каждой компоненты:

$$t' = \gamma\,(t - \mathbf{v}\mathbf{r}_{\parallel}), \qquad \mathbf{r}'_{\parallel} = \gamma\,(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t), \qquad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp},$$

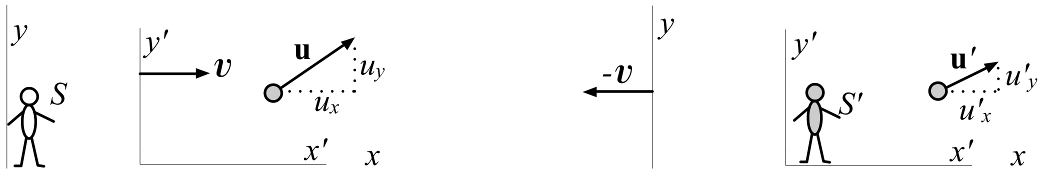
Действительно, $\mathbf{r}_{\parallel}$ направлен вдоль $\mathbf{v}$ и играет роль x в обычных преобразованиях Лоренца. Аналогично $\mathbf{r}_{\perp}$ перпендикулярен скорости и играет роль y. Учитывая, что $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp}$, заменяя $\mathbf{r}_{\perp}$ на $\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel}$, несложно записать преобразования Лоренца в виде:

$$t' = \gamma\,(t - \mathbf{v}\mathbf{r}), \qquad\qquad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \gamma\mathbf{v}t + \Gamma\,\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\mathbf{r}). \tag{1.12}$$

Можно проверить, что обратные преобразования получаются перестановкой штрихованных и нештрихованных величин местами и заменой $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$. Если $\mathbf{v} = \{v, 0, 0\}$, то из (1.12) следуют (1.10). Как мы увидим в следующей главе, совпадение относительных скоростей, вообще говоря, не означает параллельность осей координат обоих систем. Преобразования Лоренца в форме (1.12) лишь означают, что наблюдатели выполнили описанную выше процедуру согласования единиц измерения.

1.4 Сложение скоростей

• Рассмотрим две инерциальные системы отсчёта S и S'. Пусть их оси x и x' направлены параллельно к относительной скорости. Скорость системы S' относительно S равна v, а скорость S относительно S', соответственно, "$-v$":



Ключевым понятием кинематики является *событие*. Предполагается, что оно имеет сколь угодно малые длительность и локализацию в пространстве. Событие характеризуется положением $\{x, y\}$ и моментом времени t. Наблюдатели в каждой системе отсчета регистрируют подобное событие по своим приборам, получая значения $\{t, x, y\}$ для S и $\{t', x', y'\}$ для S'. Напомним, что наблюдатели способны проводить измерения только в своей непосредственной окрестности. Поэтому каждую систему отсчета мы представляем "заполненной" такими наблюдателями. Данное событие регистрируют два наблюдателя в S и S', которые находятся в том месте, где произошло событие. Благодаря процедурам синхронизации и согласования единиц времени полученные ими наблюдения будут непротиворечиво восприняты и другими собратьями из *их* систем отсчета. Стоит помнить, что эффекты теории относительности проявляются при больших скоростях, и для получения заметных отличий от классической кинематики часто потребуется изучать большие расстояния. Поэтому введение множества наблюдателей оказывается достаточно полезным.

Обычно представляет интерес сравнение наблюдений не единичного события, а некоторого процесса. Будем считать, что процесс состоит из двух последовательных событий: его начала в момент времени t_1 (в системе S) и конца в момент t_2. Соответственно, его локализация в пространстве также характеризуется двумя точками $\{x_1, y_1\}$ и $\{x_2, y_2\}$. Интервал времени между событиями и разности координат равны:

$$\Delta t = t_2 - t_1, \qquad \Delta x = x_2 - x_1, \qquad \Delta y = y_2 - y_1.$$

Для каждого из этих двух событий можно записать преобразования Лоренца и вычесть их друг из друга.

В силу линейности преобразований и постоянства скорости v для приращений справедливы преобразования лоренцевского вида:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - v\Delta x}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad \Delta y' = \Delta y. \tag{1.13}$$

Часто мы будем записывать все соотношения для 2-мерного пространства $\{x, y\}$, помня, что в силу симметрии связь проекций векторов на ось z будет такой же, как и на ось y.

Рассмотрим движущийся объект. Можно измерить его положение, т.е. координаты $\{x_1, y_1\}$ в момент времени t_1, а затем положение $\{x_2, y_2\}$ в момент времени t_2. По определению проекции его скорости $\mathbf{u} = \{u_x, u_y\}$ в системе S равны

$$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \qquad u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t},$$

и, аналогично, со штрихами в S'. Если скорость объекта постоянна, то величина интервала времени роли не играет. Для движения с переменной скоростью предполагается, что Δt сколь угодно мал (производная координаты по времени).

Из преобразований для приращений (1.13) несложно найти связь между скоростями объекта для наблюдателей в системе S и S':

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v}, \qquad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-v^2}}{1 - u_x v}. \tag{1.14}$$

Обратные преобразования скорости получаются прямыми вычислениями. Впрочем, в силу эквивалентности инерциальных систем отсчета можно сразу изменить знак у скорости v и переставить местами штрихованные и нештрихованные величины:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v}, \qquad u_y = \frac{u'_y\sqrt{1-v^2}}{1 + u'_x v}. \tag{1.15}$$

Если, например, мы стоим на перроне и $\mathbf{u}' = \{u'_x, u'_y\}$ – это скорость мухи относительно поезда, который движется со скоростью v, то скорость мухи относительно нас будет складываться из движения поезда и движения мухи. В классической механике это сложение имеет вид:

$$u_x \approx u'_x + v, \qquad u_y \approx u'_y.$$

В теории относительности подобные соотношения – лишь некоторое приближение, справедливое до тех пор, пока скорости поезда и мухи много меньше фундаментальной скорости $c = 1$. Чем быстрее движется муха или поезд, тем сильнее “сложение” их скоростей (1.15) отличается от классического.

• Попрактикуемся в восстановлении фундаментальной константы c. Для всех скоростей необходимо сделать замену $v \mapsto v/c$, поэтому преобразование скоростей, например, вдоль оси x принимает вид:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}.$$

Рассмотрим объект, движущийся вдоль оси x с фундаментальной скоростью $u_x = c$. Тогда в другой системе S' его скорость будет равна:

$$c' = \frac{c - v}{1 - cv/c^2} = c.$$

Таким образом, объект, движущийся со скоростью, равной "c", в одной системе отсчета, будет иметь ту же скорость и в любой другой системе. Поэтому "c" можно также назвать *инвариантной скоростью.*

При помощи преобразований (1.14) несложно ($\lessdot$ H_2) проверить, что квадрат длины скорости $\mathbf{u}^2 = u_x^2 + u_y^2$ преобразуется следующим образом:

$$1 - \mathbf{u}'^2 = \frac{\left(1 - \mathbf{u}^2\right)\,(1 - \mathbf{v}^2)}{(1 - \mathbf{u}\mathbf{v})^2}, \tag{1.16}$$

где $\mathbf{u}\,\mathbf{v} = u_x\,v$ – проекция скорости объекта $\mathbf{u}$ на скорость системы $\mathbf{v}$. Если в одной системе отсчета объект движется в произвольном направлении с фундаментальной скоростью $\mathbf{u}^2 = c^2 = 1$, то и в другой инерциальной системе $\mathbf{u}'^2 = 1$, поэтому "c" является инвариантной скоростью независимо от её направления.

Подобная инвариантность обычно в качестве постулата используется при выводе преобразований Лоренца (см. следующий раздел). Однако это, на самом деле, *следствие* теории относительности, причем одно из наиболее необычных и непривычных для нашего обыденного опыта.

Запишем при помощи векторных преобразований Лоренца (1.12), стр. 35, преобразование для скорости в векторном виде. Разделив $\Delta\mathbf{r}'$ на $\Delta t'$, получаем:

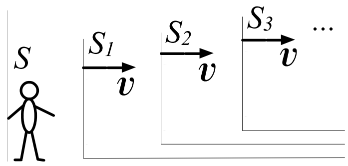
$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} - \gamma\mathbf{v} + \Gamma\,\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\mathbf{u})}{\gamma\,(1 - \mathbf{u}\mathbf{v})}. \tag{1.17}$$

При помощи двойного векторного произведения (тождество "бац минус цаб", стр.542) это преобразование можно переписать в таком виде:

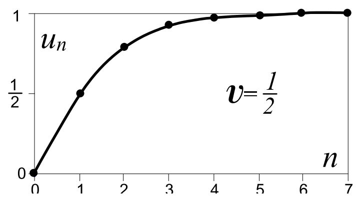
$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v} + [\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{u}]]\,\Gamma/\gamma}{1 - \mathbf{u}\mathbf{v}}. \tag{1.18}$$

Если скорость системы отсчёта S' параллельна скорости тела, то произведение $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = 0$ и (1.18) совпадает с одномерным преобразованием скорости вдоль оси x (1.14).

• Фундаментальная инвариантная скорость “c” является также предельно возможной скоростью движения “материального” объекта. В самом деле, пусть наблюдатель в системе S создаёт своего клона и отправляет его в полет со скоростью v (система S_1). Первый клон создает второго и “отправляет” его с той же скоростью *относительно себя* (система S_2), и т.д. до бесконечности. В классической физике n-тый клон относительно системы S имел бы скорость $u_n = n\,v$, которая при $n \to \infty$ также стремилась бы к бесконечности. В релятивистском мире скорость n-того и $(n-1)$-го клонов относительно системы отсчета S связаны следующим образом:



$$u_n = \frac{u_{n-1} + v}{1 + u_{n-1}\,v}$$



Если протабулировать это соотношение, начиная с $u_0 = 0$, $v = 1/2$, то получится график, приведенный на рисунке справа. Скорость u_n при $n \to \infty$ стремится к $c = 1$. Хотя u_n постоянно увеличивается, относительно наблюдателя в S каждая добавка становится всё меньше. При $n \to \infty$ можно положить $u_n = u_{n-1} = u_\infty$ и получить асимптотическое значение, не зависящее от v: $u_\infty = (u_\infty + v)/(1 + u_\infty\,v)$, откуда $u_\infty = 1$.

Найдём явную зависимость u_n от n. Используя закон сложения скоростей (1.15), несложно проверить справедливость следующего соотношения:

$$\frac{1+u_x}{1-u_x} = \frac{1+u'_x}{1-u'_x}\,\frac{1+v}{1-v}.$$

Вводя *гиперболический арктангенс* (стр. 574), имеем:

$$\mathrm{ath}(u_x) = \mathrm{ath}(u'_x) + \mathrm{ath}(v), \qquad \text{где} \quad \mathrm{ath}(v) = \frac{1}{2}\,\ln\frac{1+v}{1-v}.$$

Поэтому $\mathrm{ath}(u_n) = n\;\mathrm{ath}(v)$, или:

$$u_n = \frac{1-w^n}{1+w^n}, \qquad w = \frac{1-v}{1+v} < 1.$$

Понятно, что при $n \to \infty$, $u_n \to 1$. Формула сложения скоростей, записанная при помощи гиперболического арктангенса, имеет важный геометрический смысл, который мы обсудим при рассмотрении пространства Лобачевского (стр. 508).

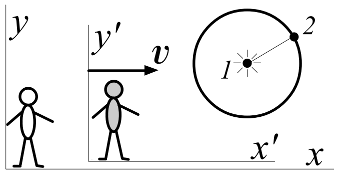
Кроме рассмотренного мысленного эксперимента с клонами, существуют также веские энергетические причины предельности скорости “c”, которые будут рассмотрены чуть позже.

• При помощи преобразований (1.13) несложно ($\lessdot$ H$_3$) проверить, что для любых двух событий следующая комбинация приращений имеет одинаковое значение для наблюдателей из различных инерциальных систем отсчета:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2.$$

Величина Δs называется *интервалом* между событиями и является *инвариантом* преобразований Лоренца.

Если в некоторой точке (x_1, y_1) произошла вспышка света, распространяющаяся в виде сферической волны (в плоскости – окружность) со скоростью $c = 1$, то за время Δt её радиус R станет равным Δt:



$$R^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta t)^2.$$

Следовательно, $(\Delta s)^2 = 0$, и такие интервалы называются *светоподобными*. Светоподобные интервалы возникают между событиями, которые можно связать распространяющимся с фундаментальной скоростью сигналом. Светоподобный интервал равен нулю для всех наблюдателей. Поэтому сферическая световая волна будет выглядеть сферической из любой инерциальной системы отсчета.

Если $(\Delta s)^2 > 0$, то интервал называется *времениподобным*. В частности, если $\Delta x = \Delta y = 0$, то Δs равен времени Δt, прошедшему на неподвижных в данной системе часах. События, связанные времениподобными интервалами, могут быть соединены сигналом, распространяющимся со скоростью $\mathbf{u}$, меньшей единицы ($c = 1$):

$$(\Delta s)^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 = (\Delta t)^2 \left(1 - \mathbf{u}^2\right) > 0,$$

где $\mathbf{u}^2$ – квадрат скорости перемещения на Δx, Δy за время Δt. Естественно, свойство времениподобности интервала является инвариантным свойством для всех наблюдателей.

Наконец, если $(\Delta s)^2 < 0$, то интервал называется *пространственноподобным*. Два события, для которых $(\Delta s)^2 < 0$, нельзя связать световыми сигналами или “обычными” частицами, имеющими скорость меньше фундаментальной.

Инвариантность интервала имеет глубокий геометрический смысл. Величина Δs является расстоянием в псевдоевклидовом 4-мерном пространстве - времени. Подробнее геометрические аспекты теории относительности мы рассмотрим в следующей главе, а сейчас сделаем ещё несколько замечаний общего характера.

• Объект, летящий со скоростью, сколь угодно близкой к фундаментальной скорости “c”, качественно отличается от объектов, имеющих в точности скорость “c”. Например, преобразования Лоренца при $v = c$ обращаются в бесконечность. Это приводит к тому, что с объектами, имеющими скорость “c”, нельзя связать инерциальную систему отсчета, наполненную наблюдателями, часами и линейками.

Наш мир вполне мог быть устроен так, что в нем вообще бы отсутствовали объекты, способные двигаться со скоростью “c”. На самом деле, это было бы более естественным. В таком мире “c” являлась бы предельной, но недостижимой никаким объектом скоростью. Однако, по-видимому, наш мир устроен иначе, и в нем существуют принципиально отличные от остальных объектов сущности, движущиеся с фундаментальной скоростью. Их самым важным представителем является свет. Он дает нам возможность изучать удалённые предметы, а благодаря свету, испускаемому Солнцем, существует жизнь на нашей планете. При высокой энергии мы воспринимаем свет, как частицы (фотоны), а при малой – как волны (электромагнитное излучение).

Кроме света, могут существовать и другие сущности, движущиеся с фундаментальной скоростью. Со скоростью света, по всей видимости, распространяется гравитационное взаимодействие, и т.д. Впрочем, долгое время считалось, что нейтрино (слабовзаимодействующая частица) является светоподобной. Однако, сравнительно недавно обнаружилось, что у неё есть малая, но отличная от нуля масса.

Принципиальное отличие светоподобных объектов от “обычных” в том, что, один раз родившись такими, они так и проживают всю свою “жизнь”. Их нельзя, не уничтожив, затормозить и остановить. Они не меняют свою скорость. Речь, конечно, идет о движении в вакууме. В веществе скорость света становится меньше. Однако фактически эта скорость является усреднением скорости *различных* фотонов, переизлучаемых (“с задержкой”) атомами вещества. Между атомами фотон движется со скоростью c. “Неквантовая” картина того же процесса строится на основе суммирования множества вторичных волн, возникающих при колебании заряженных частиц вещества электромагнитной волной.

Раз возможны светоподобные объекты, качественно отличающиеся от обычных, можно допустить и существование *тахионов*, способных двигаться быстрее фундаментальной скорости “c”. Как и свет, один раз таким родившись, тахион остаётся тахионом все время. Его скорость может приближаться к скорости “c” *сверху*, никогда её не достигая. Допущение существования тахионов приводит к очень необычным следствиям.

1.5 Аксиоматика Эйнштейна

Обсуждение логических основ теории относительности будет неполным без рассмотрения традиционного подхода, восходящего к Эйнштейну. Сам Эйнштейн в 1905 г. в статье "К электродинамике движущихся тел" сформулировал свои постулаты следующим образом [8]:

> 1. Законы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к которой из двух координатных систем, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, эти изменения состояния относятся.
>
> 2. Каждый луч света движется в "покоящейся" системе координат с определенной скоростью c независимо от того, испускается ли он покоящимся или движущимся телом.

Второй постулат часто понимают не совсем верно. Поэтому приведём пояснения самого Эйнштейна, которые он сделал в 1921 г. в лекциях "Сущность теории относительности":

> ...можно считать установленным, что свет, как это вытекает из уравнений Максвелла - Лоренца, распространяется в пустоте со скоростью c, по крайней мере, в определенной инерциальной системе координат K. В согласии со специальным принципом относительности мы должны считать, что этот принцип справедлив также и в любой другой инерциальной системе.

Сам по себе второй постулат является достаточно "безобидным". Эфирные теории как раз предполагали наличие такой покоящейся системы (ruhenden Koordinatensystem, по Эйнштейну). При этом проводилась аналогия с распространением звука в воздухе. Если наблюдатель неподвижен относительно воздуха, то скорость звука для него постоянна и не зависит от скорости источника звука. Существенным является выделенность системы отсчёта, связанной со средой. В любой другой системе скорость звука будет иной, зависящей от направления распространения звука.

Поэтому предполагалось существование некоторой среды (эфира), в которой распространяется свет (электромагнитные волны). Считалось, что уравнения Максвелла относятся к системе отсчёта, неподвижной относительно этой среды. Соответственно, значение скорости света, следовавшее из уравнений Максвелла, относилось к неподвижной системе отсчёта.

Таким образом, ключевым в аксиоматике Эйнштейна является объединение второго постулата и принципа относительности. Это приводит к совершенно новому и очень сильному утверждению:

Скорость света одинакова *во всех* системах отсчёта.

То есть независимо от того, каким образом световой импульс был создан, измерение его скорости различными наблюдателями (движущимися относительно друг друга) будет приводить к одному и тому же значению. Этот постулат противоречит "классической интуиции", воспитанной на галилеевом законе сложения скоростей. Тем не менее, он верен и, как мы видели выше, следует из значительно более естественных исходных положений, если отказаться от аксиомы абсолютности времени.

Объединение двух постулатов фактически означало отказ от эфира, как некой среды, в которой распространяется свет. Действительно, принцип относительности имеет смысл только для "пустого пространства", в котором нельзя установить выделенность той или иной инерциальной системы отсчёта. При движении в воздухе или эфире бессмысленно говорить о равноправии систем отсчёта. Особенно, когда основными объектами теории оказываются световые импульсы, распространяющиеся в этой среде.

Заметим, что в рамках аксиоматики Эйнштейна в принципе можно говорить не о скорости света, а о существовании максимально возможной скорости любых объектов в природе. Если эту скорость обозначить через "c" и считать, что эта фундаментальная константа едина для всех *равноправных* инерциальных систем отсчёта, то мы придём к "постулату постоянства" в его сильной формулировке.

До Эйнштейна и Лоренц, и Пуанкаре получали преобразования между системами отсчёта из соображений инвариантности уравнений Максвелла. Историческая важность работы Эйнштейна 1905 г. состояла в том, что он ограничился только одним фактом, следующим из электромагнитной теории: существуют электромагнитные волны, распространяющиеся со скоростью света. В этом смысле его построения были более общими. Когда мы говорим о фундаментальной константе максимальной скорости вместо скорости света, наши построения становятся ещё более общими. Мы не привязываемся к теории конкретного взаимодействия или конкретному агенту, движущемуся *в точности* с фундаментальной скоростью. Хотя, конечно, предполагается, что такой агент должен быть. Заметим, что в приведенном ранее способе вывода преобразований Лоренца такой агент не требовался. Он мог даже не существовать в принципе, если бы в мире не было безмассовых частиц.

• Рассмотрим теперь вывод преобразований Лоренца, основанный на сильной версии постулата о постоянстве скорости света. Будем, следуя Эйнштейну, предполагать линейность преобразований, исходя из "*свойства однородности, которое мы приписываем пространству и времени*". Эйнштейн для согласования единиц длины между двумя системами отсчёта предполагает, что копия неподвижной жёсткой линейки системы S разгоняется до скорости v, становясь эталоном длины в системе S'. Заметим, что абсолютно жёстких линеек не бывает, и при ускорении они могут деформироваться. Проблема несколько упрощается, если линейка при разгоне располагается перпендикулярно вектору ускорения и все её точки *одновременно* получают одинаковое ускорение. После достижения необходимой скорости ускорение становится нулевым. В силу изотропности пространства в инерциальной системе отсчёта линейка может быть повёрнута вдоль любого направления.

Тем не менее, Эйнштейн предполагает, что координаты y' и y осей, которые перпендикулярны скорости, могут быть отличными:

$$y' = \eta(v)y,$$

где $\eta(v)$ – некоторая чётная (в силу изотропии) функция скорости. Так как наблюдатели равноправны, такое же соотношение должно быть справедливым и для обратного преобразования, поэтому:

$$y = \eta(-v)y' = \eta(-v)\eta(v)y \qquad => \qquad \eta(-v)\eta(v) = \eta^2(v) = 1.$$

Так как при $v = 0$ должно быть $\eta(0) = 1$, мы приходим к выводу о том, что $\eta = 1$, следовательно, координаты, перпендикулярные относительной скорости систем отсчёта, не изменяются.

Запишем линейные преобразования Лоренца в следующем виде:

$$t' = \gamma\,(t - \sigma\,x), \qquad x' = \gamma\,(x - vt), \qquad y' = y,$$

где $\gamma = \gamma(v)$, $\sigma = \sigma(v)$ – неизвестные функции скорости. Как и раньше, считаем, что начало системы S' (точка $x' = 0$) движется по траектории $x = vt$, а начало системы S, соответственно, по траектории $x' = -vt'$. В начальный момент времени $t' = t = 0$ начала систем отсчёта совпадают.

Предположим, что в момент $t' = t = 0$, например, в точке $x = x' = 0$, $y = y' = 0$ происходит вспышка света. Сферическая световая волна в каждой системе отсчёта будет иметь уравнения:

$$x^2 + y^2 = (ct)^2, \qquad x'^2 + y'^2 = (ct')^2.$$

В силу постулата постоянства скорости света радиусы обеих световых сфер (точнее, окружностей) увеличиваются с одинаковой скоростью c.

Подставим в уравнение световой сферы системы S' линейные преобразования координат и времени. Возводя их в квадрат, находим:

$$\gamma^2 x^2 - 2\gamma^2 vxt + \gamma^2 v^2 t^2 + y^2 = \gamma^2 (ct)^2 - 2\gamma^2 c^2 \sigma xt + \gamma^2 \sigma^2 c^2 x^2.$$

Чтобы получилось уравнение сферы в системе S, перекрёстные члены xt должны сократиться. Поэтому:

$$\sigma = \frac{v}{c^2}.$$

Собирая слагаемые при x^2, y^2 и t^2, имеем:

$$\gamma^2 (1 - v^2/c^2)\, x^2 + y^2 = \gamma^2 (1 - v^2/c^2)\, (ct)^2.$$

Учитывая уравнение световой сферы в системе S, приходим к следующему соотношению для функции γ:

$$\gamma^2\, (1 - v^2/c^2) = 1.$$

Так как при нулевой относительной скорости $\gamma(0) = 1$, при извлечении корня необходимо выбрать знак плюс. В результате получаются искомые преобразования Лоренца:

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z,$$

где мы добавили преобразования для второй перпендикулярной к направлению движения оси z. Рассуждения для неё совершенно аналогичны оси y.

Заметим, что при выводе преобразований Лоренца был принципиален учёт по крайней мере двух пространственных измерений. Если бы вместо световой сферы (или, как выше, окружности) мы рассмотрели движение светового импульса только вдоль оси x, удалось бы найти функцию $\sigma(v) = v/c^2$, но не $\gamma(v)$. Естественно, теория относительности может быть развита и для одномерного пространства. Однако в этом случае постулата постоянства скорости света самого по себе недостаточно. Необходимо использовать, в соответствии с принципом относительности, групповые соображения, подобно тому, как это было сделано в разделе "*Преобразования Лоренца*". В частности, для координат x, x' записывается обратное преобразование и после подстановки в него прямого получается вид функции γ. Однако вместо композиции преобразований для трёх систем отсчёта, которое дало нам в разделе 1.3 функцию σ, можно использовать постулат постоянства скорости света во всех инерциальных системах отсчёта.

1.6 Принцип параметрической неполноты

Трудно переоценить значение фундаментальных констант c и $\hbar$ в современной физике. Они определяют структуру основных формул релятивистской и квантовой теорий. Их числовые значения задают масштабы явлений, на которых оказываются существенными соответствующие поправки к классической механике. С фундаментальными константами связано множество вопросов, полные ответы на которые неизвестны:

- Почему мы не можем вычислить значения фундаментальных констант, не обращаясь к эксперименту?
- Почему фундаментальные константы появляются в более общих физических теориях, но отсутствуют в классической физике?
- Возможны ли фундаментальные константы, отличные от c и $\hbar$, и соответствующие им обобщения классической механики?
- Конечен ли набор возможных фундаментальных констант?
- Не изменяются ли “константы” со временем?

Уточним, что мы понимаем под фундаментальными физическими константами. В настоящее время физика состоит из трех тесно связанных между собой частей:

1) *Структура*: электрон, кварк, атом,...;
2) *Взаимодействие*: электромагнитное, сильное,...;
3) *Механика*: релятивистская, квантовая.

Под термином “механика” мы понимаем не “механические” явления классической физики, а общие свойства пространства и времени, влияние измерения на объекты и т.д., то есть всё то, что лежит в основе всех физических теорий. Механика задает законы, которым подчиняются любые структурные единицы и взаимодействия между ними. Она является фундаментом, на который опираются две другие части физического здания. Например, принципы теории относительности ограничивают класс возможных взаимодействий. Одно и то же взаимодействие возникает между различными структурными единицами, многообразие которых и составляет основу нашего Мира.

Условимся в дальнейшем понимать под фундаментальными константами те константы в физике, которые определяют структуру формул теорий, применимых ко всем формам материи и видам взаимодействий. Эти константы задают свойства механики.

Сейчас нам известны три такие константы: фундаментальная скорость c, постоянная Планка $\hbar$, и, по-видимому, константа гравитации $G_{\text{грав}}$. Заряд электрона, массы элементарных частиц и другие важнейшие параметры не являются фундаментальными *в указанном выше смысле.*

Так, к примеру, говоря о константе "c", обычно употребляют термин "скорость света". При этом под одним названием объединяют две принципиально различные константы: скорость распространения электромагнитных волн в вакууме "$c_{\text{эл/м}}$" и фундаментальную скорость "c", определяющую структуру теории относительности. То, что скорость электромагнитной волны "$c_{\text{эл/м}}$" совпадает по значению с фундаментальной скоростью "c", является свойством одного из существующих взаимодействий, тогда как константа "c" определяет релятивистскую теорию, справедливую для любых форм материи. В частности, чтобы измерить значение фундаментальной скорости, нет необходимости проводить электродинамические эксперименты. Достаточно сравнить результаты любых наблюдений в двух системах отсчета и из преобразований Лоренца определить значение "c". Даже если бы фотон имел отличную от нуля массу и не существовало других безмассовых частиц, теория относительности с константой "c" от этого бы не изменилась.

Мы будем называть параметр "c" фундаментальной физической константой. В то же время "$c_{\text{эл/м}}$", совпадая с ней численно, является лишь параметром одного из взаимодействий, связанным с нулевой массой фотона. В этом смысле "$c_{\text{эл/м}}$" фундаментальной не является. Естественно, определение "не фундаментальная" не должно умалять важности "$c_{\text{эл/м}}$".

В классической механике фундаментальные константы отсутствуют. Точнее, их значение тривиальным образом фиксировано (0 или ∞). Гравитационная константа $G_{\text{грав}}$, как и скорость света, присутствует в классической физике, но свой фундаментальный смысл приобретает только в современных теориях пространства и времени.

Механики, обобщающие классическую теорию, не отменяют, а лишь ограничивают область её применимости. Если фундаментальные константы устремить к их предельным значениям, то более общие теории переходят в классическую физику. В этом состоит смысл *принципа соответствия.* Он, естественно, не означает, что любое явление имеет свой классический аналог. Однако преемственность новых теорий достаточно высокая, и всегда можно сформулировать условия "плавного перехода" от новых концепций к старым. Формальное изменение значений фундаментальных констант (их уменьшение или увеличение) является основным инструментом такого перехода.

• Итак, почему возникают фундаментальные константы и соответствующие им более общие механики? Ответ на этот вопрос связан с аксиоматическим анализом оснований физических теорий. В математике аксиоматический метод используется со времен Евклида, однако вопросам аксиоматики стали уделять серьезное внимание только после появления неевклидовой геометрии и парадоксов в теории множеств.

Более двух тысячелетий продолжались попытки доказательства "пятой" аксиомы о параллельных в геометрии Евклида. Для этого выводилось множество теорем, не зависящих от этой аксиомы, – "идеальная геометрия" по терминологии Бояи. В результате возникла новая теория – неевклидова геометрия.

В отличие от геометрии Евклида, в ее формулах появляется константа λ – кривизна пространства, значение которой не может быть найдено из исходных аксиом. При $\lambda \to 0$ формулы неевклидовой геометрии переходят в соответствующие теоремы евклидовой теории. Более того, добавление пятой аксиомы автоматически фиксирует значение $\lambda = 0$.

Неевклидова геометрия оказалась, по-видимому, первой теорией, в которой фундаментальная константа λ, определяющая её структуру, возникла в результате уменьшения исходной аксиоматической информации. Абсолютно аналогична ситуация и в физике.

Система аксиом любой теории должна обладать тремя свойствами: быть *независимой*, *непротиворечивой* и *полной*. Полнота означает, что любое утверждение может быть доказано или опровергнуто при помощи исходных аксиом. В этих терминах классическая физика, по отношению к фундаментальным константам, является полной, тогда как релятивистская теория – нет. Действительно, утверждения типа c=299792458 м/с или $c = \infty$ дедуктивно нельзя ни доказать, ни опровергнуть (не ставя, конечно, соответствующего эксперимента). В то же время, в классической механике "теорема" $c = \infty$ следует из аксиомы абсолютности времени (пятая аксиома из раздела "*Преобразования Лоренца*").

То, что в теории возникает константа, значение которой невозможно вывести из исходных аксиом, мы называем *параметрической неполнотой теории.* Неполнота возникает потому, что в урезанной системе аксиом содержится меньше информации, чем в исходной. Уменьшение количества информации неизбежно приводит к неполноте в выводах теории. Эта неполнота может быть минимальна в том смысле, что все функциональные соотношения теории выводятся из исходных аксиом, и лишь конечный набор констант остаётся неопределяемым. Безусловно, термин "аксиоматическая информация" требует более аккуратного определения.

Классическая механика после аксиоматического описания основных понятий (Пространство, Время, Масса, Состояние, и т.д.) становится достаточно формальной математической теорией, система аксиом которой должна удовлетворять условию полноты.

Основываясь на классической механике, можно дедуктивным образом построить набор параметрически неполных теорий. Для этого необходимо отказаться от некоторого подмножества аксиом классической физики. В этих теориях (механиках) роль фундаментальных физических констант будут играть константы, происхождение которых связано с неполнотой, возникшей в результате уменьшения исходной информации. При предельном значении этих констант мы снова приходим к классической теории. Получается как бы принцип соответствия наоборот:

> *из классической физики, отказываясь от некоторых аксиом, можно выводить новые, более общие теории.*

Подобный дедуктивный путь создания "новой физики" является исключительно заманчивым. Естественно, не все возможные выдуманные теории должны реализовываться в нашем Мире. Однако при помощи принципа параметрической неполноты можно строить теории, которые *уже содержатся* в аксиоматическом базисе классической физики (получаются из некоторого подмножества аксиом классической механики). Не исключено, что подобные "деформации" исходных логических структур неизбежно должны возникать в реальности и при достаточно точных измерительных возможностях рано или поздно будут обнаружены. Теория, которая удовлетворяет принципу соответствия, не может быть опровергнута. Эксперимент способен её только подтвердить. Изменением константы, лежащей в основе такой теории, всегда можно отодвигать её эффекты в область, находящуюся за пределами экспериментальной точности.

В последнее время широко распространился жаргонный термин "Теория Всего", под которым подразумевают создание единой теории, охватывающей все известные взаимодействия. Естественно, параллельно с этим необходимо строить "Теорию Всего" относительно фундамента физического здания, т.е. механик, ограничивающих свойства этих взаимодействий. С точки зрения принципа параметрической неполноты такая

Теория Всего будет построена из Ничего.

Этим "Ничего" является то, что остается в аксиоматике классической физики, когда все аксиомы, имеющие минимальную аксиоматическую информацию, отброшены, и все фундаментальные константы (в силу параметрической неполноты) возникли в такой обобщенной механики.

1.7 Инертная масса

• После пространства и времени масса – наиболее загадочное свойство, характеризующее объекты окружающего мира. Исаак Ньютон определил массу следующим образом:

> Количество материи (масса) есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности и объёму её. [4]

В дальнейшем это определение неоднократно подвергалось критике, так как более естественно выглядит определение плотности через массу и объём: $\rho = m/V$. Тем не менее, для тел одинаковой плотности вычисление массы через их *геометрические* характеристики выглядит достаточно привлекательным. Если бы существовали фундаментальные частицы, обладающие одинаковой массой, тогда вполне подошло бы определение, аналогичное определению Ньютона. Например, с зарядом ситуация обстоит именно таким образом. Однако пока не существует последовательных теорий, вводящих квантование масс частиц подобно квантованию их зарядов.

Масса в качестве коэффициента входит в различные соотношения классической механики. Так, если $\mathbf{u}$, $\mathbf{a}$ – это скорость и ускорение частицы, E, $\mathbf{p}$ – кинетическая энергия и импульс, а $\mathbf{F}$ – сила, которая действует на частицу, то возможны следующие "определения" инертной массы:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \qquad m\mathbf{u} = \mathbf{p}, \qquad m = 2E/\mathbf{u}^2.$$

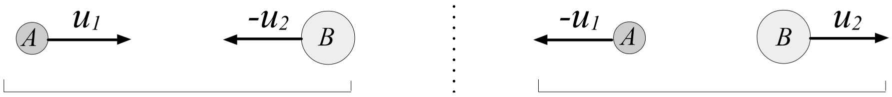
Скорость и ускорение сводятся к кинематике, а следовательно, к измерению длины и времени. Поэтому в динамике они являются "хорошо" определёнными величинами. Этого нельзя сказать о силе, импульсе и энергии. Скорее, *их* нужно определять при помощи массы. Можно попытаться исключить динамические величины из определения массы. Пусть существует эталонная сила, одинаково действующая на две различные массы m_1 и m_2. В качестве такой силы может быть выбрана сила воздействия первой частицы на вторую, равная с обратным знаком воздействию второй частицы на первую (3-й закон Ньютона). В результате законы Ньютона приводят к соотношению $m_1\mathbf{a}_1 = -m_2\mathbf{a}_2$, которое одновременно оказывается законом динамики и определением массы частицы.

Мы рассмотрим другой способ определения массы, основанный на задаче упругого соударения и соображениях симметрии. Инертные свойства массы проявляются при попытке изменить скорость объекта. Чтобы это произошло, необходимо некоторое воздействие со стороны других тел, например, в результате их столкновения.

Рассмотрим две различные частицы, которые сталкиваются, а затем разлетаются, двигаясь вдоль одной прямой. Если частицы после столкновения остались "теми же", то мы называем такое столкновение *упругим*.

> **Аксиома I.** При упругом столкновении двух различных частиц существует система отсчёта, в которой скорости частиц после столкновения меняют свой знак, но не абсолютную величину.

Действительно, если у частицы A в некоторой системе отсчёта до столкновения скорость $\bar{u}_1$, а после $-\bar{u}_2$, то, двигаясь относительно этой системы с подходящей скоростью v, можно уравнять эти скорости по модулю:



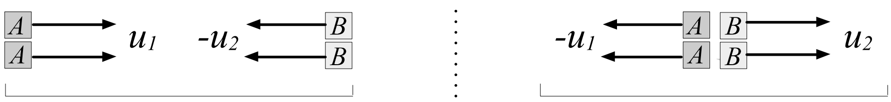
В такой системе, в силу симметрии, окажется неизменным и модуль скорости частицы B. Подобное свойство симметрии упругого столкновения можно связать с *обратимостью времени*. Действительно, если прокрутить в обратном направлении фильм об этом соударении, мы не заметим никакой разницы ни в скоростях, ни во "внешнем виде" частиц.

> **Аксиома II.** Каждая частица характеризуется вещественным скалярным параметром (массой). Эти параметры определяют скорости u_1, u_2 при упругом симметричном столкновении.

Если массы частицы A и B равны m_1 и m_2, то справедливо следующее *правило упорядочивания*:

$$
\begin{aligned}
m_1 < m_2, &\qquad \text{если} \qquad u_1 > u_2;\\
m_1 = m_2, &\qquad \text{если} \qquad u_1 = u_2;\\
m_1 > m_2, &\qquad \text{если} \qquad u_1 < u_2.
\end{aligned}
$$

Однако это *определение* не даёт измерительных инструкций для вычисления абсолютного значения массы. Необходимо задать некоторую функцию $m_2/m_1 = F(u_1, u_2)$, позволяющую получать отношение масс. То, что массы входят в виде отношения m_2/m_1, можно мотивировать (но не доказать) при помощи следующего мысленного эксперимента:



Пусть кубики с пометками A эквивалентны друг другу и отличны от кубиков B. Эти свойства устанавливаются при помощи правила упорядочивания. Столкновение верхних и нижних кубиков будет происходить одинаковым образом. С другой стороны, пары кубиков AA и BB можно рассматривать как единые объекты, имеющие вдвое больше "материи".

Поэтому будем считать, что справедлива

Аксиома III. Пропорциональное увеличение масс не изменяет значения скоростей частиц при их упругом столкновении.

Отношение масс двух частиц должно согласовываться с аналогичным отношением, полученным при столкновении с другими частицами. Поэтому потребуем, чтобы выполнялась *аксиома транзитивности*:

Аксиома IV.

$$\text{если}\quad \frac{m_2}{m_1} = F(u_1, u_2), \qquad \text{и} \qquad \frac{m_3}{m_2} = F(u_2, u_3), \qquad \text{то} \qquad \frac{m_3}{m_1} = F(u_1, u_3).$$

Первые два соотношения – это определения функции F. В третьем скорость u_3 *та же*, что и во втором отношении m_3/m_2. Это очень сильное требование ($\lessdot$ C_3), из которого следует, что

$$F(u_1, u_2)F(u_2, u_3) = F(u_1, u_3).$$

Массы в это соотношение не входят и скорость u_3 является произвольной (ей соответствует произвольная масса m_3). Она не зависит от u_1, u_2, поэтому для неё можно задать некоторое фиксированное значение, например, $u_3 = 0$. Следовательно, функция $F(u_1, u_2)$ является отношением двух одинаковых функций $F(u_1, 0)/F(u_2, 0)$, зависящих от u_1 и u_2:

$$\frac{m_2}{m_1} = F(u_1, u_2) = \frac{f(u_1)}{f(u_2)}. \tag{1.19}$$

В рамках классической механики для определения функции $f(u)$ достаточно потребовать, чтобы масса не зависела от единиц измерения скорости. Например, при любой скорости просмотра фильма о соударении частиц, уравнение (1.19) должно приводить к одному и тому же отношению m_2/m_1.

Если в функции $f(u)$ нет никаких других параметров с размерностью времени (например, фундаментальной скорости c!), то справедлива:

Аксиома V.

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{f(\lambda\, u_1)}{f(\lambda\, u_2)},$$

где λ – произвольный параметр, не зависящий от скоростей и масс. Это условие полностью определяет вид функции $f(u)$.

Действительно, возьмём производную по λ от уравнения $m_1 f(\lambda\, u_1) = m_2 f(\lambda\, u_2)$ и разделим её на исходное уравнение:

$$\frac{f'(\lambda\, u_1)\, u_1}{f(\lambda\, u_1)} = \frac{f'(\lambda\, u_2)\, u_2}{f(\lambda\, u_2)}.$$

Выберем $\lambda = 1/u_2$ и введём обозначения $x = u_1/u_2$ и $a = f'(1)/f(1)$. Это даст следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a}{x} \qquad => \qquad f(x) = f_0\, x^a,$$

где f_0 – константа интегрирования. Следовательно:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{u_1^\alpha}{u_2^a}, \qquad \text{или} \qquad \frac{m_2^{1/a}}{m_1^{1/a}} = \frac{u_1}{u_2}.$$

Выбор парамера a произволен и сводится к *деформации шкалы масс*: $m \mapsto m^a$. В простейшем случае $a = 1$ получаем следующее определение:

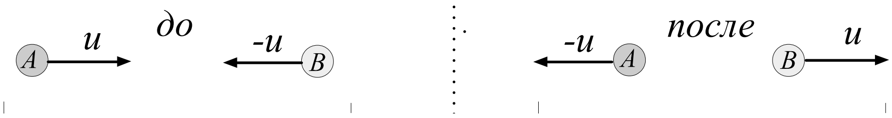
$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{u_1}{u_2}. \tag{1.20}$$

Таким образом, свойство транзитивности операции измерения массы и её независимость от единиц измерения скорости в классической физике полностью определяют (с точностью до степенной деформации) связь скоростей частиц и отношения их масс. Можно зафиксировать массу некоторой частицы как эталон. Тогда массы остальных частиц выражаются в долях эталонной массы при помощи симметричного столкновения и соотношения (1.20).

То, что любая частица "сопротивляется" изменению её скорости, является фундаментальным свойством нашего Мира. На данном уровне понимания его законов мы принимаем это свойство, как экспериментальный факт. Оно является таким же основополагающим, как и существование пространства и времени. Без массы механика оказывается достаточно бедной математической теорией, описывающей невзаимодействующие материальные точки.

Определение (1.20) является частным проявлением законов сохраения, которые играют важную роль, как в классической, так и релятивистской физике. В заключение этого раздела напомним основные особенности законов сохранения классических энергии и импульса.

• Рассмотрим случай симметричного столкновения двух *одинаковых* частиц:



Вообще говоря, соображения симметрии не запрещают частицам после столкновения синхронно увеличить свои скорости. Кроме обратимости времени (Аксиома I), существует ещё один способ "объяснения" почему этого не происходит. Предположим, что некоторая функция *квадрата* скорости при упругом соударении остаётся неизменной. Эта функция на заре её введения поэтично называлась живой силой, однако со временем стала более прозаично именоваться энергией. В силу изотропности пространства энергия должна зависеть от квадрата вектора скорости $E = E(\mathbf{u}^2)$ и, соответственно, быть скаляром. *Если* суммарная "живая сила" тел в процессе упругого симметричного столкновения сохраняется, то модули скоростей финальных частиц не изменятся.

Приняв определение $m_1 u_1 = m_2 u_2$ и *предположив*, что энергия частицы пропорциональна её массе $E = m\, g(\mathbf{u}^2)$, можно получить явный вид функции g при помощи преобразований Галилея и следующей аксиомы:

> **Аксиома VI.** Масса – это собственная характеристика частицы. Она одинаковая для всех инерциальных наблюдателей.

Рассмотрим закон сохранения энергии для симметричного упругого столкновения частиц с массами m_1 и m_2:

$$m_1\, g[u_1^2] + m_2\, g[(-u_2)^2] = m_1\, g[(-u_1)^2] + m_2\, g[u_2^2].$$

В системе, движущейся с *произвольной* скоростью $\mathbf{v}$, скорости частиц изменяются $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} - \mathbf{v}$, а массы – нет. Поэтому закон сохранения энергии имеет следующий вид:

$$m_1\, g[(u_1 - v)^2] + m_2\, g[(-u_2 - v)^2] = m_1\, g[(-u_1 - v)^2] + m_2\, g[(u_2 - v)^2].$$

Взяв производную по v и положив $v = 0$, с учётом $m_1\, u_1 = m_2\, u_2$ получаем:

$$m_1\, g'(u_1^2)\, u_1 = m_2\, g'(u_2^2)\, u_2 \qquad => \qquad g'(u_1^2) = g'(u_2^2) = const.$$

Так как массы сократились, в силу их произвольности u_1 и u_2 – также произвольные и независимые величины. Поэтому последнее соотношение выполняется только, если оно равно константе. Следовательно, функция $g(\mathbf{u}^2)$ линейна по квадрату скорости.

Закона сохранения энергии недостаточно для полного "объяснения" симметрии столкновения одинаковых тел. Так как E зависит от квадрата скорости, не запрещена ситуация, когда после столкновения обе частицы полетят в одну сторону. Поэтому требуется ещё одна сохраняющаяся величина – импульс, который уже зависит от направления скорости. Его вид можно получить из закона сохранения энергии при помощи преобразований Галилея и инвариантности массы. Запишем выражение для суммарной энергии нескольких частиц, движущихся со скоростями $\mathbf{u}_i$:

$$\sum_i m_i \frac{\mathbf{u}_i^2}{2} = const.$$

Выбор множителя при $m\mathbf{u}^2$ в случае упругого столкновения произволен, и он положен равным $1/2$. Для наблюдателя, движущегося со скоростью $\mathbf{v}$ относительно "неподвижной" системы отсчёта, в которой происходит столкновение, скорости всех частиц изменятся на величину $\mathbf{v}$. В силу равноправия инерциальных наблюдателей энергия должна сохраняться в любой системе отсчёта, поэтому:

$$\sum_i m_i \frac{(\mathbf{u}_i - \mathbf{v})^2}{2} = \sum_i m_i \frac{\mathbf{u}_i^2}{2} + \mathbf{v} \sum_i m_i \mathbf{u}_i + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \sum_i m_i = const. \tag{1.21}$$

Первый член после знака равенства является константой в силу закона сохранения энергии. Так как скорость $\mathbf{v}$ произвольна, должны также сохраняться суммарный импульс и масса системы:

$$\sum_i m_i \mathbf{u}_i = const, \qquad \sum_i m_i = const,$$

Для их вывода можно взять производную по $\mathbf{v}$ от закона сохранения (1.21). Приравнивая $\mathbf{v} = 0$, мы получим закон сохранения суммарного импульса. Ещё одна производная по $\mathbf{v}$ даст закон сохранения массы. Если бы энергия зависела от квадрата скорости нелинейным образом, то *при выполнимости* линейных преобразований Галилея у нас возникло бы не три закона сохранения, а больше.

В законах присутствует один и тот же параметр, характеризующий частицу, – её масса m. В частности, сохранение импульса при симметричном упругом столкновении приводит к полученному выше определению классической массы:

$$m_1 u_1 - m_2 u_2 = -m_1 u_1 + m_2 u_2 \qquad => \qquad \frac{m_2}{m_1} = \frac{u_1}{u_2}.$$

Закон сохранения энергии при этом выполняется автоматически *независимо* от явного вида функции $E(\mathbf{u}^2)$.

1.8 Релятивистские законы сохранения

• Перейдём теперь к релятивистской динамике, но зададимся сначала вопросом: "что происходит, если соударение *неупругое*?" Например, пусть две одинаковые частицы с массами m, движущиеся со скоростями u и $-u$, сталкиваются, образуя частицу массой M:

Из соображений симметрии следует, что скорость результирующей частицы M равна нулю. Нет оснований считать, что она должна начать двигаться влево или вправо. Это же следует из закона сохранения импульса в виде $\mathbf{p} = m\mathbf{u}\, g(\mathbf{u}^2)$, где g – произвольная функция.

С точки зрения классической механики, должна также сохраняться масса: $M = 2m$. Однако, так как финальная частица неподвижна, классическая кинетическая энергия не сохраняется. Начальные частицы движутся, обладая "живой силой", тогда как финальная частица в данной системе отсчёта никуда не двигается. При этом говорят, что энергия движения начальных частиц перешла во "внутреннюю" энергию тела M. Внутренняя энергия может характеризовать степень нагрева или деформации возникшего объекта. Для её конкретизации мы вынуждены строить некоторую *модель структуры* частиц. Например, считать, что тело состоит из множества маленьких частичек (атомов), находящихся в постоянном движении. При соударении скорость этого движения возрастает, и начальная "живая сила" как бы консервируется в виде повышения "живой силы" атомов.

Несмотря на то, что такая картина для большинства объектов нашего Мира абсолютно верна, хотелось бы, чтобы рассуждения не зависели от подобных деталей устройства частиц. Механика и законы сохранения универсальны и должны быть применимыми и к бесструктурным объектам, например, *точечным частицам*. В этом случае мы предполагаем, что в результате взаимодействия исходных точечных объектов они исчезают, а вместо них появляется новая частица M. Куда же в этом случае "уходит" живая сила?

Образовавшаяся частица с массой M может в дальнейшем участвовать в новых столкновениях, и накопленная в ней энергия исходных компонент должна некоторым образом проявляться. До сих пор мы считали, что энергия тем больше, чем больше скорость частицы и её масса. Выражение типа $E = mf(\mathbf{u}^2)$ при монотонно растущей функции f является математической записью этого утверждения.

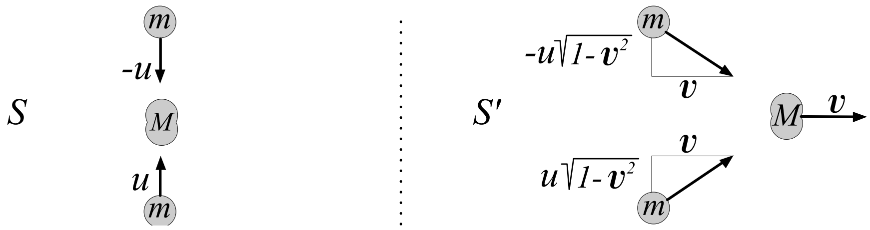
Массивная частица имеет бóльшую энергию. Почему бы “потерянной” жизненной силе не переходить в массу тела? Сейчас мы должны сделать решительный шаг и спросить: “откуда известно, что при неупругом столкновении масса сохраняется?” Никакие аргументы общего плана к этому не ведут. Более того, образовавшуюся в процессе удара частицу, очевидно, нельзя рассматривать, как простое сложение двух начальных частиц. Возник новый объект, и его масса *может* отличаться от суммы масс исходных частиц.

Если это так, то мы можем “спасти” закон сохранения энергии при неупругом столкновении, считая, что кинетическая энергия не исчезает, а приводит к увеличению массы, что проявляется в дальнейших экспериментах с новой частицей. Напомним, что в функции энергии нет ничего априорного. Мы ввели её, чтобы объяснить неизменность скорости после упругого симметричного столкновения частиц. Эта функция квадрата скорости достаточно произвольна $E = mf(\mathbf{u}^2)$. В частности, ничто не запрещает её *ненулевого значения* при $\mathbf{u} = 0$. В этом случае, в силу произвольности единиц измерения энергии и массы, можно положить, например, $f(0) = c^2$. В системе единиц $c = 1$, в которой мы работаем, энергия неподвижной частицы будет равна её массе $E = m$. Именно в эту *энергию покоя* превратились “живые силы” исходных частиц. Формула $E = m$ или, точнее, $E = mc^2$, стала символом науки двадцатого века. Её последствия грандиозны. Вся энергетика (и не только атомная), в конечном счёте, обусловлена этим соотношением.

Таким образом, будем далее считать устройство нашего мира таковым, что масса частицы, возникающей при неупругих столкновениях, увеличивается. Другими словами, энергия движения никуда не исчезает, а повышает инертные свойства нового объекта. В настоящее время это выглядит более чем естественно. Хотя легко быть умным, когда правильный ответ уже известен. Сложнее, если его никто не знает. Настоящая же сила мысли проявляется, когда ответ известен, является общепринятым, абсолютно привычным, и при этом неверным.

Найдём общее выражение для энергии $E = mf(\mathbf{u}^2)$ с позиции теории относительности. Единственное, что мы будем требовать от функции f – это её ненулевое значение при нулевой скорости: $f(0) = 1$. Кроме этого, мы, конечно, считаем справедливыми релятивистский закон сложения скоростей и аксиому *инвариантности* массы. Напомним, что параметр m является характеристикой частицы и должен быть одинаков для всех инерциальных наблюдателей. Для установления вида функции f проведём несколько мысленных экспериментов.

• Рассмотрим неупругое столкновение двух одинаковых частиц с массами m, которые движутся со скоростями u навстречу друг другу. Пусть это движение происходит вдоль оси y (первый рисунок ниже). Это же столкновение рассмотрим в системе отсчёта S', движущейся *влево* со скоростью "$-v$" (второй рисунок):



В движущейся системе все частицы приобретают горизонтальную составляющую скорости v, а вертикальная у исходных частиц изменяется в соответствии с правилом сложения скоростей (1.14), стр. 37. Так как в неподвижной системе $u_x = 0$, $u_y = \pm u$, то $u'_y = \pm u\sqrt{1-v^2}$ и $u'_x = v$.

Предположим, что существует сохраняющаяся величина, пропорциональная массе тела, умноженной на некоторую функцию квадрата скорости $E = m\, f(\mathbf{u}^2)$. Учитывая, что $\mathbf{u}^2 = u_x^2 + u_y^2$, запишем закон сохранения энергии в движущейся системе S':

$$2mf(v^2 + u^2(1-v^2)) = Mf(v^2).$$

В неподвижной системе ($v = 0$) имеем $M = 2mf(u^2)$. Подставляя массу M и обозначая $x = u^2$, $y = v^2$, приходим к следующему функциональному уравнению:

$$f(x + y - xy) = f(x)f(y).$$

Для его решения возьмём производную по y и положим $y = 0$. Введя константу $a = f'(0)$, получим дифференциальное уравнение ($\lessdot$ H$_4$):

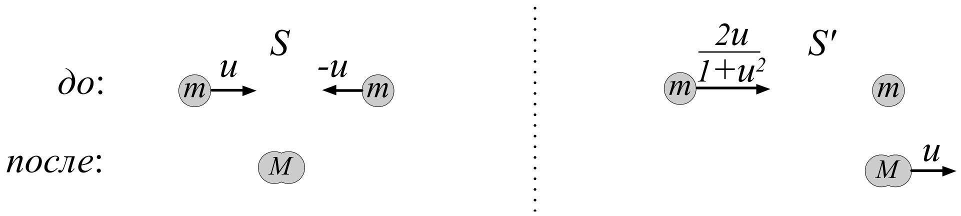
$$f'(x)\,(1-x) = a\,f(x) \qquad => \qquad f(x) = \frac{1}{(1-x)^a},$$

где для выбора константы интегрирования учтено, что $f(0) = 1$. Таким образом, энергия, как функция скорости, имеет вид:

$$E = \frac{m}{(1-\mathbf{u}^2)^a}. \tag{1.22}$$

Для определения значения a мы должны будем ещё раз покрутиться вокруг сталкивающихся частиц.

Пусть скорости частиц направлены вдоль оси x, а движущаяся влево система отсчёта S' имеет скорость $v = -u$:



В движущейся системе S' скорость правой частицы будет равна нулю. Для левой частицы из правила сложения $u'_x = (u - v)/(1 - uv)$ с $v = -u$ имеем $2u/(1 + u^2)$. Поэтому, с учётом (1.22), закон сохранения энергии в системе S' принимает вид:

$$\frac{m}{[1 - 4u^2/(1 + u^2)^2]^a} + m = \frac{M}{(1 - u^2)^a} = \frac{2m}{(1 - u^2)^{2a}},$$

где во втором равенстве для M снова подставлено выражение для закона сохранения в неподвижной системе отсчёта $M = 2mf(u^2)$. Проводя элементарные алгебраические преобразования, получаем:

$$(1 + u^2)^{2a} + (1 - u^2)^{2a} = 2.$$

Это выражение для произвольной скорости u выполняется, только если $a = 1/2$ (достаточно положить $u = 1$).

Таким образом, окончательное выражение для энергии имеет вид:

$$E = \frac{m}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}}. \tag{1.23}$$

Описанное выше столкновение вдоль оси x можно также рассмотреть в системе отсчёта, которая движется вдоль оси x с произвольной скоростью v. В качестве упражнения ($\lessdot$ H$_5$) предлагается найти функциональное уравнение и его решение для этого случая.

Обратим внимание, что при $\mathbf{u} = 0$ энергия тела равна его массе. Если же скорость стремится к единице (фундаментальной скорости), то энергия стремится к бесконечности. Это представляет собой энергетическую причину невозможности достижения “обычными” частицами скорости света. В классической механике энергия движения $E = m\mathbf{u}^2/2$ при увеличении скорости неограниченно растёт, однако всегда остаётся конечной. Релятивистское выражение для энергии, как и преобразования Лоренца, сингулярно (бесконечно) при $|\mathbf{u}| = 1$. Это означает, что для разгона массивной частицы до фундаментальной скорости потребовалось бы бесконечное количество энергии.

• Воспользовавшись формулой (1.16), стр. 38, запишем выражение для энергии в системе отсчёта S', движущейся со скоростью $\mathbf{v}$:

$$E' = \frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{u}'^2}} = \frac{m\,(1-\mathbf{u}\,\mathbf{v})}{\sqrt{1-\mathbf{u}^2}\,\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}.$$

Введя обозначение

$$\mathbf{p} = \frac{m\,\mathbf{u}}{\sqrt{1-\mathbf{u}^2}}, \tag{1.24}$$

выражение для энергии в системе S' можно записать в более компактном виде:

$$E' = \frac{E - \mathbf{v}\mathbf{p}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}. \tag{1.25}$$

Пусть у нас есть множество сталкивающихся частиц. В силу принципа относительности энергия должна сохраняться в любой инерциальной системе отсчёта:

$$\sum_i E'_i = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}\sum_i E_i - \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}\sum_i \mathbf{p}_i = const.$$

До и после столкновения значение этого выражения не изменяется. Сумма энергий E_i в системе S также сохраняется. Чтобы эти два закона одновременно выполнялись, необходимо, в силу *произвольности* скорости $\mathbf{v}$, выполнение закона сохранения импульса:

$$\sum_i \mathbf{p}_i = const.$$

Таким образом, из закона сохранения энергии и преобразований Лоренца следует закон сохранения импульса.

Закон сохранения массы при столкновениях в релятивистском мире отсутствует, так как его “поглощают” закон сохранения энергии и понимание массы, как энергии тела в системе, где оно покоится. Естественно, по-прежнему возможны упругие столкновения, при которых массы частиц не изменяются. Однако при неупругих столкновениях энергия сталкивающихся частиц может переходить в массу результирующих. Для упругого симметричного столкновения, рассмотренного в предыдущем разделе, сохранение импульса приводит к следующему релятивистскому обобщению определения массы:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{u_1/\sqrt{1-u_1^2}}{u_2/\sqrt{1-u_2^2}}.$$

Обратим ещё раз внимание на то, что масса частицы является её “личным” параметром и одинакова для всех наблюдателей, независимо от их относительной скорости.

• Аналогичное (1.25) преобразование можно записать и для импульса. Рассмотрим движение системы S' вдоль оси x, так что $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$. Энергия (1.23) и импульс (1.24) связаны простым соотношением $\mathbf{p} = E\,\mathbf{u}$, поэтому для проекции импульса на ось x имеем:

$$p'_x = E'\,u'_x = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1-v^2}}\,\frac{u_x - v}{1 - u_x v} = E\,\frac{1 - vu_x}{\sqrt{1-v^2}}\,\frac{u_x - v}{1 - u_x v} = \frac{p_x - vE}{\sqrt{1-v^2}},$$

где мы сначала воспользовались преобразованием для энергии и x-компоненты скорости, затем дважды формулой $p_x = E\,u_x$. Точно так же находится преобразование проекции импульса на ось y:

$$p'_y = E'\,u'_y = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1-v^2}}\,\frac{u_y\sqrt{1-v^2}}{1 - u_x v} = E\,\frac{1 - vu_x}{1 - vu_x}\,u_y = p_y,$$

Таким образом, при относительном движении систем S и S' вдоль параллельных осей x и x' преобразования энергии и импульса имеют следующий вид:

$$E' = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad p'_x = \frac{p_x - vE}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad p'_y = p_y, \qquad p'_z = p_z. \tag{1.26}$$

Сравним их с преобразованиями Лоренца:

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z.$$

Как видно, существует замечательная симметрия, выражающаяся в том, что четвёрка $\{E, p_x, p_y, p_z\}$ преобразуется так же, как и $\{t, x, y, z\}$. Это совпадение не случайно. Энергия и импульс являются компонентами 4-вектора импульса $p^\nu = \{E, \mathbf{p}\}$. Подробнее мы рассмотрим этот вопрос в третьей главе.

По аналогии с векторными преобразованиями Лоренца (1.12), стр. 35, для энергии и импульса можно написать:

$$E' = \gamma\,(E - \mathbf{v}\mathbf{p}), \qquad \mathbf{p}' = \mathbf{p} - \gamma\mathbf{v}E + \Gamma\,\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\mathbf{p}). \tag{1.27}$$

Считая, что $\mathbf{p} = m\mathbf{u}\,f(\mathbf{u}^2)$ и импульс сохраняется, функцию $f(\mathbf{u}^2)$ можно также получить из релятивистского закона сложения скоростей. Для этого необходимо рассмотреть столкновение двух одинаковых частиц с их последующим слипанием. Закон сохранения импульса записывается из системы, движущейся перпендикулярно скоростям исходных частиц с некоторой произвольной скоростью v ($\lessdot$ H$_6$).

1.9 За границей известного

Картина без рамки – лишь кусок холста, свёрнутый в рулон. Более полное понимание физической теории возникает только тогда, когда становятся ясными границы её применимости. Мы используем неформальный аксиоматический подход к физическим теориям. Основываясь на нём, попробуем примерить к замечательной картине "Теория относительности" различные рамки.

Наблюдатели, описанные в первых разделах, являются "бестелесными". Они проводили измерения, не изменяя свойств частиц. На самом деле, это невозможно в принципе. Если объекты имеют очень маленькую энергию и импульс, то их свойства подчиняются квантовым (волновым) закономерностям. Объединение этих представлений с миром больших скоростей приводит к так называемой квантовой теории поля, лежащей в основе современных методов анализа микроструктуры Мира.

Однако даже в рамках этой теории в качестве основного принципа используется дифференцируемость величин, зависящих от x и t. Мы считаем, что пространство и время – непрерывные и "гладкие". Тем не менее, необходимо в любой момент быть готовым к ослаблению этого базового принципа, заложенного в Аксиому I (стр. 30).

Вторая аксиома, которую мы применили для вывода преобразований Лоренца, несмотря на свою очевидность, выглядит несколько искусственной. Она необходима для обоснования линейности преобразований, и её можно существенно усилить, заменив следующим утверждением:

> **Аксиома II'.** *Если частица движется равномерно в системе S, то её движение будет равномерным и в системе S'.*

Несложно видеть, что это не что иное, как *определение* инерциальных систем отсчёта. Удивительно, но только этой аксиомы достаточно для получения функциональной зависимости от x и t для преобразований между двумя инерциальными системами:

$$x' = \frac{A(v)\,x + B(v)\,t}{1 + a(v)\,x + b(v)\,t}, \qquad t' = \frac{D(v)\,x + E(v)\,t}{1 + a(v)\,x + b(v)\,t}.$$

Такие дробно-линейные преобразования с одинаковым знаменателем называются *проективными*. В геометрии это наиболее общие преобразования, переводящие уравнение прямой $x = x_0 + u\,t$ снова в прямую $x' = x'_0 + u'\,t'$ ($\lessdot$ H$_7$), стр.627. Они хорошо известны со времён создания проективной геометрии.

Групповой характер проективных преобразований отмечал Софус Ли, а в применении к задаче об инерциальных наблюдателях их впервые записали Филипп Франк и Герман Роте в 1911 г. [28]. Однако сингулярность, возникающая при обращении знаменателя в ноль, вынудила их отказаться от дальнейшего анализа этой теории. Сейчас эволюция Вселенной и существование в ней выделенного момента времени, когда “Всё возникло”, стали основой наших космологических представлений. Поэтому наличие сингулярности является, на самом деле, достоинством таких преобразований.

Сравнительно недавно ([60],[61]) при помощи аксиом, аналогичных тем, которые мы использовали в разделе 1.3, были получены явные выражения для функций скорости, входящих в дробно-линейные преобразования, и проанализирован их физический смысл. При этом, кроме фундаментальной скорости c, возникла ещё одна константа λ:

$$t' = \frac{\gamma\,(t - vx/c^2)}{1 + \gamma\lambda\, xv/c - (\gamma-1)\lambda\, ct}, \qquad x' = \frac{\gamma\,(x - vt)}{1 + \gamma\lambda\, xv/c - (\gamma-1)\lambda\, ct},$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. В числителе этих соотношений находятся преобразования Лоренца, а знаменатель обращается в единицу при стремлении λ к нулю. Это же происходит при относительно малых расстояниях и временах, удалённых от точки начальной синхронизации часов $x = x' = 0$ при $t = t' = 0$. Однако, когда мы переходим к космологическим масштабам, знаменатель начинает играть существенную роль.

Физический смысл подобного обобщения стандартной релятивистской теории достаточно прост. До сих пор мы предполагали, что наше пространство плоское (евклидово). Однако базовые геометрические принципы однородности и изотропии допускают возможность существования пространств с постоянной кривизной. Если в таком пространстве получить преобразования между инерциальными наблюдателями, то они окажутся дробно-линейными, а константа λ будет иметь смысл кривизны пространства [62].

В пространстве с постоянной кривизной время, даже для *неподвижных* относительно друг друга наблюдателей, течёт различным образом. Это приводит к тому, что частота испущенного света становится тем меньше, чем дальше источник находится от наблюдателя. Учитывая известный эмпирический закон красного смещения Хаббла и определённые сложности стандартной космологической модели, такое простое свойство проективной теории относительности требует пристального изучения. Мы вернёмся к этим вопросам при обсуждении космологии во второй части книги.

• Даже в рамках линейных преобразований возможны различные варианты обобщения преобразований Лоренца. Например, отказавшись от аксиомы изотропности, можно получить ($\lessdot$ H$_8$), стр.627 следующие соотношения:

$$x' = \left(\frac{c+v}{c-v}\right)^{\mu} \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad t' = \left(\frac{c+v}{c-v}\right)^{\mu} \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

где μ - новая фундаментальная безразмерная константа, характеризующая неизотропность пространства. Её происхождение также связано с уменьшением аксиоматической информации. Хотя большинство наблюдательных фактов свидетельствует в пользу изотропности, иногда появляются сообщения о возможной слабой неизотропности нашей Вселенной. Если они подтвердятся, имеет смысл детальнее проанализировать параметрически неполные обобщения преобразований Лоренца, возникающие при отказе от аксиомы изотропности. В частности, этим преобразованиям можно придать ковариантный трёхмерный вид с вектором выделенного направления. Вообще, рассмотрение 3-мерного пространства существенно расширяет возможности получения более общих преобразований Лоренца.

Однако даже для одномерного случая все возможности не исчерпаны. Например, стоит обратить внимание на используемую нами процедуру согласования единиц скорости. Требование $v' = -v$ является естественным, но не единственно возможным. Отказ от него и от изотропности пространства приводит к следующим преобразованиям:

$$x' = \gamma\,(x - vt), \qquad t' = \gamma\,\big([1 + 2\varepsilon(v/c)]\,t - vx/c^2\big),$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon(v/c) - (v/c)^2}} \left[\frac{c + (\varepsilon + \sqrt{1+\varepsilon^2})\,v}{c + (\varepsilon - \sqrt{1+\varepsilon^2})\,v}\right]^{\mu},$$

а ε – третья фундаментальная константа. Если она отлична от нуля, то скорость системы S относительно S' равна:

$$v' = \frac{-v}{1 + 2\varepsilon v/c}.$$

Этот результат получили уже упоминавшиеся выше Франк и Роте. В таких обобщённых преобразованиях возникают две выделенные инвариантные скорости c_1 и c_2, равные $c_{1,2} = c\,(\varepsilon \pm \sqrt{1+\varepsilon^2})$ и совпадающие с “c” при $\varepsilon = 0$. Отказ от $v' = -v$ делает наблюдателей “несимметричными” и должен обязательно сопровождаться новым определением согласования единиц измерения скорости.

Наш мир релятивистский, поэтому с определённой точностью преобразования Лоренца в нём однозначно выполняются. В силу принципа соответствия они переходят в преобразования Галилея при малых скоростях или при $c \to \infty$. Однако, в силу того же принципа соответствия, возможны более общие теории со своими фундаментальными константами. При стремлении этих констант к некоторым предельным значениям *должны* возникать преобразования Лоренца. Нарушение принципа соответствия является сильным эвристическим мотивом отказа от некоторых теорий. Например, нет ничего невозможного в существовании выделенной системы отсчета – абсолютного пространства. Однако эта абсолютность должна быть "маленькой" и проявляться только в предельных случаях. Поэтому вполне допустим анализ следствий, возникающих при отбрасывании или ослаблении принципа относительности (третья аксиома). Главное, чтобы в результате выполнялся принцип соответствия и при предельном значении соответствующей фундаментальной константы получались преобразования Лоренца, а затем и Галилея.

Теория относительности в своей базовой формулировке – это теория плоского 3-мерного евклидового пространства и одномерного линейного времени, дополненных принципом относительности. Кривизна пространства, а точнее, кривизна объединённых пространства и времени может возникать при воздействии на него массивных объектов. Свободные частицы в таком пространстве по-прежнему движутся по кратчайшим путям, однако теперь, в силу кривизны, эти пути оказываются "изогнутыми", т.н. *геодезическими* линиями. Поэтому "пробные" частицы в окрестности массивного тела движутся по траекториям, нерелятивистский предел которых соответствует теории гравитации Ньютона. Эта красивая теория, построенная Альбертом Эйнштейном и, независимо от него, Давидом Гильбертом, получила название "Общая теория относительности" (ОТО). Подробнее она рассматривается во второй части книги. До этого момента наше пространство считается плоским евклидовым пространством, а время – одномерным, однородным и изотропным.

Мы будем в дальнейшем избегать термина "ОТО", называя её теорией гравитации Эйнштейна. Также редко на страницах этой книги встретится термин "Специальная теория относительности" (СТО), так как в него обычно вкладывают слишком узкий смысл. В частности, считается, что СТО не может описывать неинерциальные системы отсчёта, и только ОТО позволяет это сделать. Мы постараемся развеять это заблуждение в 6-й главе.

1.10 Немного истории

• Исторические основы теории относительности изложены во множестве книг. Из русскоязычных источников можно порекомендовать, например, [5],[6]. Существуют также сборники основополагающих работ по теории относительности [7],[8]. Поэтому наш исторический обзор будет очень кратким. Кроме общеизвестных фактов, мы коснемся вопросов, которые обычно недостаточно освещены в литературе.

Возникновение и становление теории относительности было связано с размышлениями о природе света. Это и понятно, так как свет является самой быстро распространяющейся субстанцией, доступной непосредственному восприятию. Долгое время считалось, что его скорость бесконечна. Для этого были веские аргументы. Траектория стремительно летящей стрелы более “прямая”, чем “изогнутая” траектория брошенного камня. Лучи света имеют вид идеальных прямых, поэтому их скорость мыслилась очень большой и, вполне возможно, бесконечной.

Тем не менее, уже Галилео Галилей пытался (правда, безуспешно) измерить скорость света. Удалось это только Олафу Рёмеру (1676 г.) в результате наблюдения изменения видимого периода обращения спутников Юпитера при движении Земли вокруг Солнца. Фактически это было первое проявление эффекта Доплера, в котором в качестве частоты сигнала выступало изменение темпа периода обращения спутников. Аналогичное значение скорости света получил Джеймс Брэдли (1727 г.) из анализа аберрации (смещения) положения звезд в процессе того же движения Земли. Подробнее об эффекте аберрации и эффекте Доплера будет идти речь во второй главе. Прямое лабораторное измерение скорости света впервые было проведено Арманом Ипполитом Луи Физо (1849 г.), установку которого мы рассмотрим в следующем разделе.

Непросто было понять и “внутреннее устройство” светового сигнала. Долгое время конкурировали корпускулярная и волновая гипотезы. Испускание светящимися телами “световых корпускул”, летящих со скоростью света, отлично укладывалось в принципы геометрической оптики. Световой луч мыслился “траекторией” множества таких корпускул. Однако в 1818 г. Огюстен Френель, основываясь на волновой гипотезе и более ранних результатах Христиана Гюйгенса (1679 г.) и Томаса Юнга (1800 г.), объяснил явление дифракции, которое в рамках корпускулярной теории объяснить было проблематично. Было показано, что законы геометрической оптики также могут быть успешно получены из волновых представлений.

Спустя полвека Джеймс Максвелл (1861 г.) облёк в математическую форму результаты экспериментов Майкла Фарадея (1831 г.). Из его уравнений следовало, что такие различные явления, как электризация расчески и притяжение металлов магнитной рудой, являются проявлениями одного электромагнитного взаимодействия. Оказалось также, что уравнения Максвелла допускают решения в виде электромагнитной волны, распространяющейся со скоростью света. Подобное объединение столь различных явлений и объяснение природы света периодическими колебаниями электромагнитного поля было самым замечательным теоретическим достижением со времен работ Исаака Ньютона по теории гравитации. Волновая природа света стала общепринятой.

Распространение волн на воде или в виде звуковых колебаний в воздухе было хорошо известно и изучено. Скорость волнового "сигнала" относительно среды (вода, воздух) постоянна и определяется только физическими свойствами среды. Эта скорость не зависит от скорости источника сигнала, но зависит от движения наблюдателя (приёмника сигнала) *относительно среды*. Это существенно отличает распространение волн в средах от корпускулярных сигналов, скорость которых зависит от движения и источника, и приемника.

Эти аналогии привели к возникновению концепции *Мирового эфира* – среды, в которой распространяется свет. Аналогично ветру при движении в воздухе, ожидали обнаружить эфирный ветер при движении Земли сквозь эту субстанцию. Многочисленные эксперименты, проведенные Альбертом Майкельсоном и Эдвардом Морли, эфирный ветер обнаружить не смогли. Это было странно, так как Земля достаточно быстро движется в пространстве, по крайней мере, обращаясь вокруг Солнца.

Для объяснения этих результатов было предпринято множество усилий. Например, предполагалось, что эфир, подобно воздуху внутри самолета, увлекается при движении Земли в пространстве, поэтому неподвижен относительно экспериментаторов на её поверхности. Для проверки этой идеи экспериментальные установки поднимались в горы, однако даже лёгкого эфирного ветерка обнаружить не удалось. Концепция Мирового эфира тесно связана с существованием выделенной системы отсчета. На Земле, благодаря воздуху, мы имеем критерий "абсолютного покоя". С мировым эфиром также можно связать выделенную неподвижную систему отсчета. Подобная выделенность воздуха обусловлена существованием самой Земли, относительно которой он неподвижен. В случае с эфиром не очень понятно, что обусловливает его выделенность, т.е. *относительно чего* и *почему* неподвижен эфир ($\lessdot$ C_1).

• Кроме экспериментов и размышлений философского характера о природе Мирового эфира, началась работа по математическому анализу уравнений Максвелла. Любые уравнения физики, например, электромагнитного взаимодействия, зависят от свойств пространства и времени. Конечно, осознание этого факта происходило очень постепенно.

В 1900 г. Джозефом Лармором и в 1904 г. Хендриком Лоренцем были получены преобразования координат, времени и электромагнитного поля, которые оставляли уравнения Максвелла неизменными (ковариантными). Эти преобразования, с подачи Анри Пуанкаре, стали называть *преобразованиями Лоренца.* Сам Лоренц был приверженцем теории Мирового эфира. Например, сокращение длины, которое следовало из его теории, он интерпретировал, как реальное сжатие линейки в результате электромагнитного взаимодействия её атомов с эфиром.

Пуанкаре, по-видимому, первый четко осознал физический смысл этих преобразований и сформулировал принцип относительности и инвариантности скорости света относительно различных инерциальных систем отсчета. Кроме этого, он интерпретировал преобразования, как повороты в 4-мерном пространстве-времени, предвосхитив это понятие, введенное позднее Германом Минковским (1908 г.). Тем не менее, работы Пуанкаре носили характер усовершенствования электромагнитной теории Лоренца и были достаточно сложными в математическом плане.

В 1905 г. в Annalen der Physik вышла знаменитая работа Альберта Эйнштейна "К электродинамике движущихся тел". Несмотря на "электродинамическое" название, в стартовом разделе "Кинематическая часть" преобразования Лоренца были получены без явной ссылки на уравнения Максвелла. Вывод был очень прост и имел форму аксиоматического подхода:

> "Дальнейшие соображения опираются на принцип относительности и на принцип постоянства скорости света" [7].

Такая простота и общность была легко воспринята многими современниками и фактически означала рождение новой теории пространства и времени. Релятивистская физика явилась первым примером обобщения механики Ньютона. С 1905 г., в рамках парадигмы, предложенной Эйнштейном, теория относительности начинает быстро развиваться. Фундаментальность скорости света $c = 299792458\,\text{м/с}$ со временем стала настолько очевидна, что с 1983 года её значение было принято как точное. Теперь единица длины определяется, как расстояние, на которое распространяется свет за единицу времени, связанную с частотой излучения в атоме цезия (всё того же света).

• Расскажем теперь историю, которая не столь широко известна. 21 сентября 1910 года на собрании немецких натуралистов и врачей Владимир Игнатовский сообщает о выводе преобразований Лоренца, основанном на групповых соображениях [26]. В следующем году в Annalen der Physik публикуется аналогичная работа Филиппа Франка и Германа Роте [28], обобщающая результаты Игнатовского. Они обратили внимание, что наиболее общий вид преобразований между двумя инерциальными наблюдателями имеет дробно-линейный вид, и получили явный вид обобщённых преобразований в классе линейных функций.

К 1910 году авторитет Эйнштейна становится очень велик и работы, в которых, по сути, строится верная аксиоматика теории относительности, остаются практически незамеченными. Единственное упоминание о них в популярных учебниках можно найти у Вольфганга Паули в "Теории относительности" [14]. Однако он несколько снижает значимость работ Игнатовского, Франка и Роте и пишет:

> Относительно знака, величины и физического смысла α сказать на основе высказанных положений ничего нельзя. Таким образом, из теоретико-групповых соображений можно получить лишь внешний вид формул преобразования, но не их физическое содержание.

Понятно, что это не так, и, найдя из полученных преобразований закон сложения скоростей, несложно выяснить смысл константы $c = 1/\sqrt{\alpha}$, как максимально возможной и инвариантной скорости. То, что эта скорость является скоростью света, из групповых соображений, конечно, не следует, но *она ею и не является*. Знак α и её величина действительно служат предметом экспериментальных исследований. Фактически, существуют две физические возможности с $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$. В нашем Мире реализовалась первая возможность, хотя вторая также не содержит в себе никаких противоречий ($\lessdot$ C$_4$) и вполне могла бы иметь место.

Идея о том, что преобразования Лоренца могут быть получены только из принципа относительности, без использования второго постулата Эйнштейна, многократно переоткрывалась [29]-[36]. Особо необходимо отметить книги [17],[15]. Вообще, получение из общих соображений новых теорий является очень увлекательной задачей. В 1999 г. в работах [60],[61] было найдено обобщение преобразований Лоренца в результате дальнейшего уменьшения числа аксиом и прояснён их физический смысл. Эти преобразования естественным образом возникают в пространстве постоянной кривизны [62] и приводят к любопытным космологическим следствиям.

1.11 Теория и эксперимент

• Физические теории создаются для описания реального мира. Какой бы красивой ни была теория, без экспериментальных подтверждений она лишь остаётся теорией. На заре своего возникновения теория относительности подтверждалась лишь небольшим числом экспериментов, связанных с измерением скорости света в различных условиях. За исключением самого релятивистского объекта – электромагнитной волны – любые другие доступные скорости были слишком маленькими, чтобы подтвердить эффекты новой теории.

Сейчас ситуация иная. Теория относительности фактически стала инженерной наукой. Благодаря развитию ускорительной техники появилась возможность разгонять очень лёгкие частицы, такие как электрон, протон, ядра атомов до ультрарелятивистских скоростей. Эти эксперименты являются рутинными, ежедневно выполняющимися на ускорителях во многих научных центрах. Ни в одном из них не было обнаружено никаких отклонений от основных следствий теории.

Прежде всего это относится к релятивистской динамике. Соотношения для энергии и импульса выполняются с огромной точностью. С их помощью происходит расчёт треков (траекторий) микрочастиц в электромагнитных полях. На основе этих расчётов определяются технические параметры ускорителей, массы частиц и другие их характеристики. Релятивистские законы сохранения позволяют объяснять множество реакций, происходящих при взаимодействии элементарных частиц.

Ускорители являются также полигоном по проверке и практическому использованию непосредственных следствий преобразований Лоренца. Высокие скорости, достигаемые в ускорителях, с высокой точностью подтверждают такое необычное следствие теории относительности, как замедление времени в движущейся системе отсчёта (стр. 83). Многие частицы имеют очень короткое среднее время жизни, однако оно увеличивается в точном соответствии с предсказанием теории, если частицы быстро движутся [54]. Другой эффект – “сжатие” объекта в направлении движения (стр. 96) – требуется для объяснения процесса столкновения ядер, которые при высоких скоростях приобретают “блинообразную” форму.

Не стоит забывать и о научном символе XX-века, выраженном в формуле $E = mc^2$. Вся энергетика, в конечном счёте, основана на этом соотношении. Огромная энергия, “хранящаяся” в массах частиц, имеет как мирную, так и военную реализацию в форме атомного и водородного оружия.

Важно понимать, что не существует “главного”, критического эксперимента, подтверждающего теорию относительности. Тем более такими экспериментами не являются исторически важные опыты конца XIX-го, начала XX-го века. Наша вера в справедливость теории относительности основывается на самосогласованности огромного числа экспериментов и теорий, которые возникли на базе релятивистской физики.

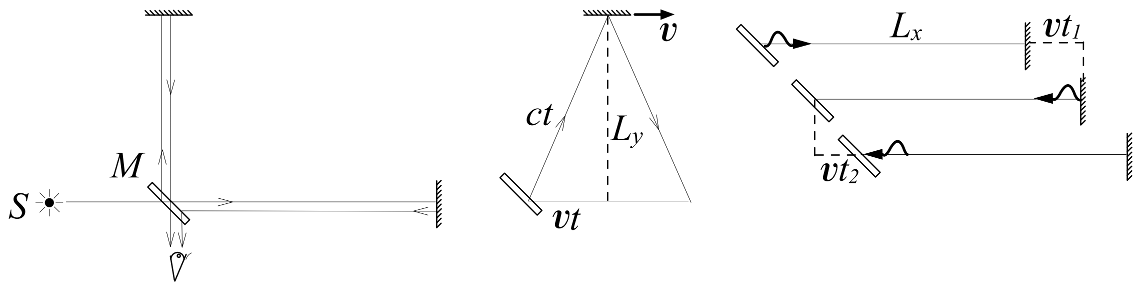
Например, объединение теории относительности, квантовой механики и электродинамики Максвелла привело к созданию *квантовой электродинамики*. Её свойства определяются тремя физическими константами – скоростью света “c”, постоянной Планка “$\hbar$” и зарядом электрона “e”. Их безразмерное отношение называется *постоянной тонкой структуры*:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137.035\,999\,679(94).$$

Предсказания этой теории подтверждаются на эксперименте с фантастической точностью. Приведём лишь один пример. Большинство элементарных частиц обладает спином – собственным моментом вращения. Если частица заряжена, то у неё возникает магнитный момент, т.е. она становится маленьким магнитом. Взаимодействие магнитного момента с внешним магнитным полем позволяет его измерить. Без учёта эффектов квантовой электродинамики можно достаточно легко рассчитать значение магнитного момента. Такой расчёт немного отличается от измеренного значения, поэтому возник термин *аномальный магнитный момент*. Использование квантовой электродинамики при помощи теории возмущения по константе α позволяет уточнить теоретические расчёты. При этом согласие теории и эксперимента происходит на уровне относительной ошибки 10^{-12}. И в этом, в конечном счёте, заслуга релятивистской теории, лежащей в основе квантовой электродинамики! Аналогично, благодаря теории относительности, успешно развиваются астрофизика и космология. Эффекты теории относительности учитываются в системах спутникового позиционирования, и т.д., и т.п.

Всё это, конечно, не означает, что теория относительности является истиной в последней инстанции. Наоборот, крайне интересно обнаружить пределы её применимости, за которыми, возможно, скрывается новая, ещё более интересная физика. Однако в доступной пока экспериментальной области теория относительности отлично работает, и не существует другой теории, которая так же успешно могла бы объяснить *всё множество* накопленных к настоящему моменту экспериментальных данных. Рассмотрим несколько экспериментов, сыгравших важную историческую роль при возникновении и становлении теории относительности.

• Одним из самых знаменитых опытов, проводимых на заре создания теории относительности, был эксперимент Альберта Абрахама Майкельсона (1881 г). В то время господствовала теория эфира и стояла задача определения скорости Земли относительно системы, в которой эфир покоился. В опыте Майкельсона луч света при помощи полупрозрачного зеркала M разделяется на два луча. Они проходят примерно одинаковые пути в двух перпендикулярных направлениях, отражаясь от зеркал, возвращаются обратно, после чего снова складываются. Приведём расчёт этого опыта с точки зрения системы, связанной с "эфиром".



Пусть скорость света равна c, а установка (*интерферометр Майкельсона*) летит через эфир со скоростью v в горизонтальном направлении. По теореме Пифагора луч света в "вертикальном" направлении ("туда-обратно") движется в течение времени t_y (вторая картинка выше):

$$(ct)^2 = L_y^2 + (vt)^2 \qquad => \qquad t_y = 2t = \frac{2L_y/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

При движении в горизонтальном направлении луч света по ходу движения Земли проходит больший путь (зеркало от него "убегает"), а против хода – меньший:

$$\begin{array}{l} ct_1 = L_x + vt_1, \\ ct_2 = L_x - vt_2 \end{array} \qquad => \qquad t_x = t_1 + t_2 = \frac{2L_x/c}{1-v^2/c^2}.$$

Земля движется, по крайней мере, вокруг Солнца со скоростью $v = 30$ км/с. Поэтому отношение $v/c \sim 10^{-4}$ мало, и знаменатели в выражениях для t_x и t_y можно разложить в ряд. Так как $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$, а $1/(1-x) \approx 1 + x$, для разности времён $\Delta t = t_x - t_y$ имеем:

$$\Delta t \approx \frac{2L_x}{c}\Bigl(1+\frac{v^2}{c^2}\Bigr) - \frac{2L_y}{c}\Bigl(1+\frac{v^2}{2c^2}\Bigr) = \frac{2(L_x-L_y)}{c} + \frac{2L_x - L_y}{c}\,\frac{v^2}{c^2}.$$

"Горизонтальная" часть максимума световой волны приходит к наблюдателю на Δt позже, чем "вертикальная" часть. При их сложении возникает определённая интерференционная картина.

Если установку медленно вращать, так, чтобы вертикальное и горизонтальное плечо менялись местами, должно происходить изменение интерференционной картины, которое позволяет вычислить скорость v. Однако эксперимент привёл к отрицательным результатам, т.е. скорость v в пределах экспериментальных ошибок оказалась равной нулю.

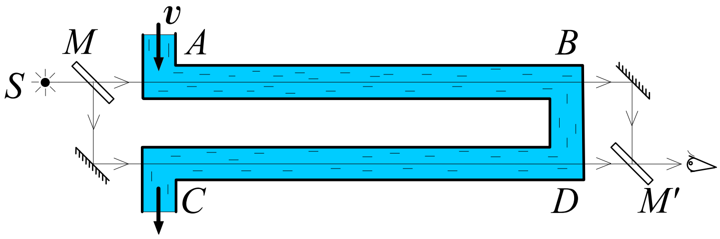
С точки зрения теории относительности эксперимент объясняется следующим образом. Как мы увидим в следующей главе, относительно "эфира" (точнее неподвижного наблюдателя) длина горизонтального (в направлении движения) плеча интерферометра сокращается в $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ раз, тогда как перпендикулярное плечо не изменяет свою длину. Если заменить $L_x \mapsto L_x\sqrt{1 - v^2/c^2}$, то зависимость времён прохождения плеч интерферометра станет одинаково зависеть от скорости и вращение не изменит интерференционной картины. В системе же отсчёта, связанной с интерферометром, скорость света по каждому пути одинакова.

Сжатие тел в направлении движения ввёл как гипотезу Фиджеральд, чтобы объяснить отрицательный результат опыта Майкельсона. В теории Лоренца это сжатие возникало в результате электромагнитного взаимодействия заряженных частиц вещества и эфира. В теории же относительности подобное свойство является кинематическим эффектом, который отражает очень общие свойства пространства и времени.

Описанный выше опыт в дальнейшем повторялся Майкельсоном и Морли (1887 г.), Морли и Миллером (1902-1904 г) и неизменно приводил к отрицательному результату. Правда, ещё позже (1928 г.) Миллер объявил о существовании "эфирного ветра". Однако его скорость $v = 10$ м/с *не зависела* от скорости движения Земли и была направлена перпендикулярно к плоскости орбиты. Анализ его установки выявил наличие систематических ошибок, а повторения этого опыта на более точной аппаратуре Кенеди, Иоосом и другими эффекта не выявили.

Отрицательные результаты опыта Майкельсона-Морли можно было бы объяснить при помощи корпускулярной (баллистической) модели света, в которой скорость "световых корпускул" складывается со скоростью установки и имеет относительно неё постоянное значение. Однако эта модель противоречит наблюдению двойных звезд (аргумент Виллема де-Ситтера, 1913г.). При классическом сложении скоростей вращающиеся вокруг общего центра звезды, приближаясь, испускают "корпускулы" света со скоростью $c + v$, а удаляясь – со скоростью $c - v$. На больших расстояниях более позднее, но быстрое "изображение" может обогнать более раннее, но медленное. В результате видимое поведение двойных звезд было бы очень странным, однако этого не наблюдается.

• Первым наблюдением релятивистского закона сложения скоростей стал опыт Армана Ипполита Луи Физо в 1851 г. На рисунке ниже представлена схема опыта. Луч света от источника S при помощи полупрозрачного зеркала M разделяется на два луча. Один из них проходит путь AB по течению воды, а второй – путь CD против течения. Вода, имея скорость v около 7 м/с, бежит по стеклянной трубке.



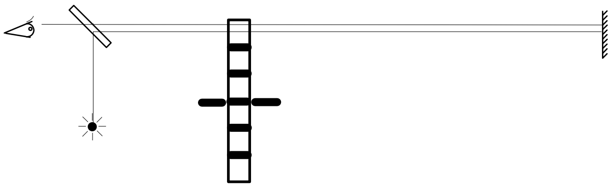
Скорость света в неподвижной воде меньше, чем в вакууме $u' = c/n$, где $n > 1$ – показатель преломления. Происходит это в результате многократного переизлучения света атомами вещества. Скорость света относительно лабораторной системы отсчёта определяется релятивистским законом сложения скоростей, увеличиваясь по течению и уменьшаясь против течения. В первом порядке по v она равна:

$$u = \frac{u' \pm v}{1 \pm u'v/c^2} \approx \big(u' \pm v\big)\big(1 \mp \frac{u'v}{c^2}\big) \approx u' \pm \big(1 - \frac{u'^2}{c^2}\big)v = \frac{c}{n} \pm \big(1 - \frac{1}{n^2}\big)\, v,$$

где приближённое равенство получено после разложения знаменателя $[1/(1+x) \approx 1-x]$, так как скорость воды $v/c \approx 2 \cdot 10^{-8}$ очень небольшая. Именно такая зависимость скорости света от n и v наблюдалась на эксперименте. Измерялась, естественно, не сама скорость. Любой максимум световой волны делится в M на два. Далее они движутся с различными скоростями. Пройдя одинаковый путь, один из максимумов чуть отстаёт от другого, что и наблюдается на интерференционной картине после сложения лучей полупрозрачным зеркалом M'.

Сам Физо и другие учёные долго считали, что этот опыт свидетельствует о *частичном* увлечении светового эфира водой, и при выполнении классического правила сложения скоростей скорость света c/n увеличивается не на v, а на $(1-1/n^2)v$. Подобные свойства эфира, конечно, объясняют опыт Физо. Однако тут же встаёт новый вопрос: как объяснить само свойство такого частичного увлечения эфира водой? Заметим, что теория Френеля, а затем электронная теория Лоренца достаточно далеко продвинулись в ответе на этот вопрос. Это вообще стандартная ситуация с “объяснением” тех или иных экспериментов *без* теории относительности. В каждом случае можно придумать ту или иную теорию, однако она рано или поздно начинает противоречить другим экспериментам и постоянно требует новых “заплаток” для своего сохранения.

• С именем Физо связано также первое лабораторное измерение скорости света (1849 г.). Он использовал быстро вращающееся колесо с зубцами. Луч света проходил сквозь промежуток между зубцами, отражался от зеркала и возвращался обратно. Если за время движения колесо успевало повернуться на пол зубца, свет в приёмник не попадал.



В опыте Физо расстояние до зеркала составляло 8.633 км. Колесо имело 720 зубцов. Исчезновение света произошло на скорости 12.6 об/с. Увеличение скорости вращения в 2 раза снова привело к появлению света, и т.д. В результате скорость света составила

$$2 \cdot 8.633 \text{ км } \cdot 720 \cdot 2 \cdot 12.6/c \approx 313000 \text{ км}/c.$$

В современных установках подобного типа используется не механический "прерыватель" света, а электрический – так называемая *ячейка Керра*. Некоторые жидкости при приложении к ним электрического поля превращают плоско поляризованную электромагнитную волну, которая через них проходит, в эллиптически поляризованную. Если же поля нет, поляризация не изменяется. Пусть на пути света до входа в жидкость и на выходе находятся поляризаторы с перпендикулярными осями. Если внешнее поле отключено, такая система оказывается непрозрачной, так как первый поляризатор отрезает все волны за исключением, например, вертикально поляризованных. Второй, соответственно, пропускает только горизонтально поляризованные волны. Когда поле включается, плоско поляризованная волна превращается в эллиптически поляризованную, и второй поляризатор её пропускает. Ячейка Керра становится прозрачной. Такой прерыватель света, в отличие от механического колеса, может иметь очень высокую частоту, до $10^9 \div 10^{12}$ переключений в секунду.

Если относительная ошибка в опыте Физо составила 5%, то спустя 100 лет при помощи ячейки Керра ошибка измерений уменьшилась на 5 порядков. В абсолютных величинах ошибка составляет менее 1 км/с. Использование современных стандартов частоты уменьшает ошибку измерения света ещё на три порядка, до 1 м/с. Так как Земля в течение суток меняет свою ориентацию, фактически эти измерения являются ещё одним способом измерения "скорости эфирного ветра", которую поэтому можно считать меньшей 1 м/с.

1.12 Пространство и Время Ньютона

Современная физика отказалась от концепции абсолютного пространства и времени классической физики Ньютона. Релятивистская теория продемонстрировала, что пространство и время относительны. Нет, повидимому, фраз, повторяемых более часто в работах по истории физики и философии. Однако все не так просто, и подобные утверждения требуют определенных уточнений (правда, достаточно лингвистического толка). Тем не менее, обращение к истокам иногда оказывается очень полезным для понимания современного состояния науки.

Время, как известно, можно измерить при помощи равномерного периодического процесса. Однако, не имея времени, откуда мы знаем, что процессы *равномерны*? Очевидны логические трудности в определении подобных первичных понятий. Равномерность хода часов должна постулироваться и называться равномерным течением времени. Например, определяя время при помощи равномерного и прямолинейного движения, мы тем самым превращаем первый закон Ньютона в определение равномерного хода времени. Часы идут равномерно, если тело, на которое не действуют силы, движется прямолинейно и равномерно (по этим часам). При этом движение мыслится относительно инерциальной системы отсчета, которая для своего определения также нуждается в первом законе Ньютона и равномерно идущих часах.

Другая трудность связана с тем, что два одинаково равномерных на данном уровне точности процесса могут оказаться относительно неравномерными при более точном измерении. И мы постоянно оказываемся перед необходимостью выбора все более надежного эталона равномерности хода времени.

Как уже отмечалось, процесс считается равномерным и измерение времени с его помощью приемлемым до тех пор, пока все другие явления описываются максимально просто. Очевидно, что требуется определенная степень абстрагирования при подобном определении времени. Постоянный поиск правильных часов связан с нашим убеждением в некотором объективном свойстве времени обладать равномерным темпом хода.

Ньютон отлично понимал существование подобных трудностей. Более того, в своих "Началах" он и ввел понятия абсолютного и относительного времени, чтобы подчеркнуть необходимость абстрагирования, определения на основе относительного (обыденного, измеряемого) времени его некоторой математической модели – времени абсолютного. И *в этом* его понимание сущности времени не отличается от современного, хотя из-за *различия в терминологии* возникла определённая путаница.

Обратимся к “Математическим Началам Натуральной Философии” (1687 г.) [4]. Сокращённые формулировки определения Ньютоном абсолютного и относительного времени звучат следующим образом:

> Абсолютное (математическое) время без всякого отношения к чему-либо внешнему протекает равномерно. Относительное (обыденное) время есть мера продолжительности, постигаемая чувствами при посредстве какого-либо движения.

Соотношение между этими двумя понятиями и необходимость в них ясно видна из следующего пояснения:

> Абсолютное время различается в астрономии от обыденного солнечного времени уравнением времени. Ибо естественные солнечные сутки, принимаемые при обыденном измерении времени за равные, на самом деле между собою не равны. Это неравенство и исправляется астрономами, чтобы при измерениях движений небесных светил применять более правильное время. Возможно, что не существует (в природе) такого равномерного движения, которым время могло бы измеряться с совершенною точностью. Все движения могут ускоряться или замедляться, течение же абсолютного времени изменяться не может.

Относительное время Ньютона есть время измеряемое, тогда как время абсолютное есть его математическая модель со свойствами, выводимыми из относительного времени при помощи абстрагирования.

Вообще, говоря о времени, пространстве и движении, Ньютон постоянно подчеркивает, что они постигаются нашими чувствами и тем самым являются обыденными (относительными):

> Относительные количества не суть те самые количества, коих имена им обычно придаются, а суть лишь результаты измерений сказанных количеств (истинные или ложные), постигаемые чувствами и принимаемые обычно за сами количества.

Необходимость построения модели этих понятий требует введения математических (абсолютных) объектов, неких идеальных сущностей, не зависящих от неточности приборов. Утверждение Ньютона о том, что “абсолютное время протекает равномерно без всякого отношения к чему-либо внешнему” обычно истолковывают в смысле независимости времени от движения. Однако, как видно из приведенных выше цитат, Ньютон говорит о необходимости абстрагирования от возможных неточностей равномерного хода любых часов. Для него абсолютное и математическое время являются синонимами!

Ньютон нигде не обсуждает вопрос о том, что скорость течения времени может отличаться в различных относительных пространствах (системах отсчета). Безусловно, классическая механика подразумевает одинаковую равномерность хода времени для всех систем отсчета. Однако это свойство времени кажется настолько очевидным, что Ньютон, очень точный в своих формулировках, не обсуждает его и не формулирует как одно из определений или законов своей механики. Именно это свойство времени было отброшено теорией относительности. Абсолютное же время *в понимании Ньютона* по-прежнему присутствует в парадигме современной физики.

Перейдём теперь к физическому пространству Ньютона. Если понимать под абсолютным пространством существование некоторой выделенной, привилегированной системы отсчета, то излишне напоминать, что в классической механике его нет. Блестящее описание Галилеем невозможности определить абсолютное движение корабля – яркий тому пример. Таким образом, релятивистская теория и не могла отказаться от того, что в классической механике отсутствовало.

Тем не менее, у Ньютона вопрос о соотношении абсолютного и относительного пространства недостаточно ясен. С одной стороны, и для времени, и для пространства термин "относительный" используется в смысле "измеряемая величина" (постигаемая нашими чувствами), а "абсолютный" – в смысле "её математическая модель":

> Абсолютное пространство по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным. Относительное есть его мера или какая-либо ограниченная подвижная часть, которая определяется нашими чувствами по положению его относительно некоторых тел, и которое в обыденной жизни принимается за пространство неподвижное.

С другой стороны, в тексте присутствуют рассуждения о моряке на корабле, которые можно истолковать и как описание выделенной системы отсчета:

> Если же и сама Земля движется, то истинное абсолютное движение тела найдется по истинному движению Земли в неподвижном пространстве и по относительным движениям корабля по отношению к Земле и тела по кораблю.

Таким образом, вводится понятие абсолютного движения, которое противоречит принципу относительности Галилея.

Тем не менее, абсолютное пространство и движение вводятся, чтобы тут же поставить под сомнение их существование:

> Однако совершенно невозможно ни видеть, ни как-нибудь иначе различать при помощи наших чувств отдельные части этого пространства одну от другой, и вместо них приходится обращаться к измерениям, доступным чувствам. По положениям и расстояниям предметов от какого-либо тела, принимаемого за неподвижное, определяем места вообще. Невозможно также определить истинный их (тел) покой по относительному их друг другу положению.

Возможно, необходимость рассмотрения абсолютного пространства и абсолютного движения в нем связана с анализом соотношения инерциальных и неинерциальных систем отсчета. Обсуждая опыт с вращающимся ведром, которое наполнено водой, Ньютон показывает, что движение вращения является абсолютным в том смысле, что его можно определить, не выходя за рамки системы ведро-вода, по форме вогнутой поверхности воды. В этом отношении его точка зрения также совпадает с современной.

Недоразумение, выраженное в фразах, приведенных в начале раздела, возникло из-за заметных отличий в семантике употребления терминов “абсолютное” и “относительное” Ньютоном и современными физиками. Сейчас, говоря об абсолютной сущности, мы подразумеваем, что она описывается одинаковым образом для различных наблюдателей. Относительные вещи могут выглядеть по-разному для различных наблюдателей. Вместо же *ньютоновского* “абсолютного пространства и времени” мы сегодня говорим “математическая модель пространства и времени”.

> Поэтому воистину насилуют смысл священного писания те, кто эти слова истолковывают в нем.

Математическая структура как классической механики, так и релятивистской теории хорошо известна. Свойства, которыми наделяют эти теории пространство и время, однозначно следуют из этой структуры. Туманные же (философские) рассуждения об устаревшей “абсолютности” и революционной “относительности” вряд ли приближают нас к разгадке Главной Тайны.

Теория относительности по праву носит это название, так как действительно продемонстрировала, что многие вещи, кажущиеся абсолютными при малых скоростях, таковыми не являются при больших.

I Логические основы

• $\mathbf{H}_1$ *Линейность преобразований Лоренца* (стр.30)

Найдём зависимость координат и времени некоторого события измеренного наблюдателями в двух инерциальных системах отсчёта:

$$x' = f(x,t), \qquad\qquad t' = g(x,t).$$

Дифференциалы величин записываются стандартным образом:

$$dx' = f_x\,dx + f_t\,dt, \qquad\qquad dt' = g_x\,dx + g_t\,dt,$$

где f_x – это частная производная функции $f = f(x,t)$ по x, и т.д. Рассмотрим некоторое тело, равномерно движущееся вдоль оси x. Его скорость, измеренная наблюдателями в системе S будем считать равной u, а в системе S', соответственно u'. Эти два значения между собой связаны:

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{f_x\,dx + f_t\,dt}{g_x\,dx + g_t\,dt} = \frac{f_x\,u + f_t}{g_x\,u + g_t}.$$

Мы считаем, что скорость $u = dx/dt$ является произвольной *константной*. Эта же скорость измеренная в S', в силу второй аксиомы (стр. 30), не должна зависеть от того, в какой точке системы S находится тело. Это означает, что правая часть выражения для u' не зависит от x и t. Поэтому возьмём производную по x и приравняем её нулю:

$$\frac{f_{xx}\,u + f_{tx}}{g_x\,u + g_t} - \frac{(f_x\,u + f_t)(g_{xx}\,u + g_{tx})}{(g_x\,u + g_t)^2} = 0.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем:

$$u^2 \cdot (f_{xx}g_x - g_{xx}f_x) + u \cdot (f_{xx}g_t + f_{tx}g_x - g_{tx}f_x - g_{xx}f_t) + (f_{tx}g_t - g_{tx}f_t) = 0.$$

Функции преобразования $f(x,t)$, $g(x,t)$ зависят от относительной скорости наблюдателей v, но, естественно, не зависят от скорости u некоторого тела летящего в пространстве. Поэтому, в силу произвольности u, уравнение будет выполняться, если равны нулю коэффициенты при её степенях (можно положить $u = 0$, получив коэффициент при u^0 равным нулю; затем взять производную по u, и т.д.):

$$f_{xx}\,g_x = g_{xx}\,f_x \qquad (X_1)$$
$$f_{xx}\,g_t + f_{tx}\,g_x = g_{tx}\,f_x + g_{xx}\,f_t \qquad (X_2)$$
$$f_{tx}\,g_t = g_{tx}\,f_t. \qquad (X_3)$$

Совершенно аналогично, беря производную u' по времени t, получаем:

$$\frac{f_{xt}\,u + f_{tt}}{g_x\,u + g_t} - \frac{(f_x\,u + f_t)(g_{xt}\,u + g_{tt})}{(g_x\,u + g_t)^2} = 0.$$

Снова приводя к общему знаменателю, и приравнивая коэффициенты при степенях произвольной скорости u, получаем:

$$f_{xt}\,g_x = g_{xt}\,f_x \tag{T_1}$$
$$f_{xt}\,g_t + f_{tt}\,g_x = g_{tt}\,f_x + g_{xt}\,f_t \tag{T_2}$$
$$f_{tt}\,g_t = g_{tt}\,f_t. \tag{T_3}$$

Вычитая из уравнения (X_2) уравнение (T_1), а из (T_2) – (X_3), имеем:

$$f_{xx}\,g_t = g_{xx}\,f_t \tag{F_1}$$
$$f_{tt}\,g_x = g_{tt}\,f_x. \tag{F_2}$$

Умножим теперь (X_1) на f_t, а (F_1) на f_x, и вычтем их:

$$(g_x f_t - g_t f_x) \cdot f_{xx} = 0.$$

Выражение в круглых скобках является якобианом преобразования которой должен быть отличным от нуля. Поэтому $f_{xx} = 0$. Аналогично, умножая (T_3) на f_x, а (F_2) на f_t, приходим к равенству нулю второй производной по времени от f:

$$(g_x f_t - g_t f_x) \cdot f_{tt} = 0.$$

Учитывая $f_{xx} = f_{tt} = 0$, не сложно найти $f_{xt} = g_{xt} = 0$. От сюда следует, что функции преобразования должны быть линейными.

• $\mathbf{H}_2$ *Преобразование квадрата скорости* (стр. 38)

Воспользовавшись преобразованиями для компонент скорости (1.14) стр. 37, имеем:

$$\mathbf{u}'^2 = u_x'^2 + u_y'^2 = \frac{(u_x - v)^2 + (1 - v^2/c^2)u_y^2}{(1 - u_x v/c^2)^2},$$

откуда:

$$1 - \frac{\mathbf{u}'^2}{c^2} = \left(1 + \frac{\mathbf{u}^2\,v^2}{c^4} - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\right)(1 - u_x v/c^2)^{-2} = \frac{(1 - \mathbf{u^2}/c^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 - u_x v/c^2)^2}.$$

• $\mathbf{H}_3$ *Инвариантность интервала* (стр. 40)

Используя преобразования для приращений (1.13), стр 37, имеем:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 = \frac{(\Delta t - v\Delta x)^2 - (\Delta x - v\Delta t)^2}{1 - v^2} - (\Delta y)^2.$$

Возводя в квадрат приходим к инвариантности интервала:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2.$$

Таким образом, в штрихованных и не штрихованных величинах интервал имеет одно и тоже значение.

• **H**$_4$ *Функциональное уравнения для энергии* (стр. 58)

Возьмём производную по y от уравнения $f(x+y-xy) = f(x)f(y)$:

$$f'(x+y-xy)\cdot(1-x) = f(x)f'(y).$$

Положив $y = 0$, и введя $a = f'(0)$ приходим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными:

$$f'(x)\cdot(1-x) = af(x) \qquad => \qquad \frac{df}{f} = \frac{a\,dx}{1-x} \qquad => \qquad \ln\frac{f}{f_0} = -a\ln(1-x),$$

где f_0 – константа интегрирования. Таким образом, $f(x) = f_0/(1-x)^a$, и с учётом условия $f(0) = 1$, имеем $f_0 = 1$.

• **H**$_5$ *Сохранение энергии в одномерном случае* (стр. 59)

Рассмотрим столкновение двух одинаковых частиц с массами m, движущихся со скоростями u навстречу друг другу. После столкновения получается неподвижная частица, масса которой равна M:

В отличие от рассуждений на стр. 58, функцию f удобнее выбрать так, что $E = mf(u)$. Естественно мы по-прежнему считаем, что функция f – чётна: $f(-u) = f(u)$, и $f(0) = 1$.

Столкновение происходит в *системе центра масс*. Рассмотрим другую инерциальную систему отсчёта, движущуюся *влево* со скоростью v. Закон сохранения энергии в этой системе будет иметь вид:

$$mf\left(\frac{v+u}{1+uv}\right) + mf\left(\frac{v-u}{1-uv}\right) = Mf\,(v)\,.$$

Положим $v = 0$, и, учитывая симметричность функции f, для финальной частицы имеем $M = 2mf(u)$. Подставляя эту массу в закон сохранения при произвольной скорости v, получим следующее функциональное уравнение:

$$f\left(\frac{v+u}{1+uv}\right) + f\left(\frac{v-u}{1-uv}\right) = 2f(u)\,f(v).$$

Для решения функционального уравнения перейдём к гиперболическим тангенсам $v = \mathrm{th}(x)$ и $u = \mathrm{th}(y)$.

При помощи легко проверяемого тождества:

$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad => \qquad \mathrm{th}(x+y) = \frac{\mathrm{th}(x) + \mathrm{th}(y)}{1 + \mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y)}$$

функциональное уравнение можно записать в более простом виде:

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y),$$

где $g(x) = f(\mathrm{th}(x))$. Это уравнение рассматривал ещё в 1769 г. Жан д'Аламбер при обосновании сложения сил по закону параллелограмма. Возьмём первую производную правой и левой части по y:

$$g'\,(x+y) - g'\,(x-y) = 2g(x)\,g'\,(y).$$

Положив $y = 0$ получаем, что как и должно быть для чётной функции $g'(0) = 0$. Ещё одна производная даёт:

$$g''(x+y) + g''(x+y) = 2g(x)\,g''(y).$$

Снова положив $y = 0$, и учитывая, что $g''(0) = a$, получаем:

$$g''(x) = a\,g(x).$$

Ищем решение в виде $g(x) = Ae^{\alpha x}$. Подставляя его в уравнение, получаем $\alpha^2 = a$, или $\alpha = \pm a$. Общее решение линейного уравнения является суммой независимых частных решений с произвольными коэффициентами:

$$g(x) = A\,e^{ax} + B\,e^{-ax}.$$

Воспользовавшись условиями $g(0) = 1$ и $g'(0) = 0$, получаем уравнения: $A + B = 1$, $A - B = 0$. Поэтому $A = B = 1/2$, и окончательно:

$$g(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} = \mathrm{ch}(ax) = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{th}^2(ax)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Учитывая, что $\mathrm{th}(x) = u$, имеем

$$y = \mathrm{th}(ax), \qquad x = \frac{1}{a}\,\mathrm{ath}(y) = \frac{1}{2a}\ln\frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}.$$

Выражая y через u, получаем следующее выражение:

$$E = \frac{m}{2}\,\frac{(1+u)^a + (1-u)^a}{(1-u^2)^{a/2}}.$$

Значение $a = 1$ приводит к обычному релятивистскому выражению.

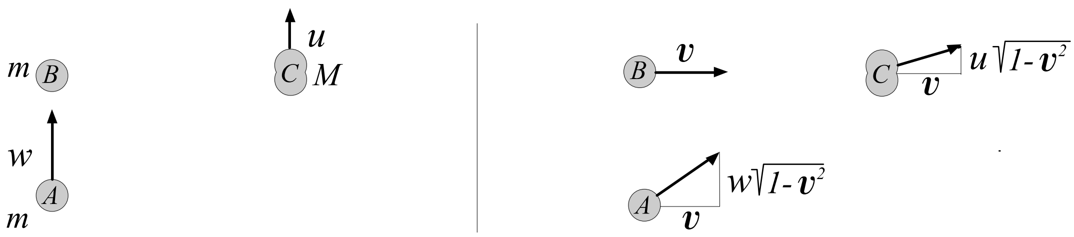
• $\mathbf{H}_6$ *Вывод выражения для импульса* (стр. 61)

Считая, что $\mathbf{p} = m\mathbf{u}\, f(\mathbf{u}^2)$, и импульс сохраняется, получим функцию $f(\mathbf{u}^2)$ из релятивистского закона сложения скоростей. Рассмотрим столкновение двух одинаковых частиц, с их последующим слипанием. В системе центра масс финальная частица имела нулевую скорость. Если наблюдатель со скоростью $v = -u$ движется *влево*, он увидит, что вторая частица неподвижна. В силу сложения скоростей $u'_x = (u_x - v)/(1 - u_x v)$, первая частица налетает на неё слева со скоростью $u'_x = w = 2u/(1+u^2)$:

Закон сохранения импульса для этого наблюдателя имеет вид:

$$m\, w\, f\left(w^2\right) = M u\, f(u^2). \tag{31}$$

Перевернём картинку. Пусть частица со скоростью $w = 2u/(1+u^2)$ врезается в такую же неподвижную частицу снизу вверх. Результат слипания, также полетит вверх со скоростью u. Запишем закон сохранения импульса с точки зрения наблюдателя в системе S' движущейся относительно "неподвижной" S *влево* со скоростью v вдоль оси x:



Все частицы в S' имеют горизонтальную составляющую скорости равную v. Так как в системе S она равнялась нулю, то в силу закона сложения скоростей (1.14), стр. 37: $u'_y = u_y\sqrt{1-v^2}$. Запишем закон сохранения проекции импульса на ось x, с учётом того, что $\mathbf{u}^2 = u_x^2 + u_y^2$:

$$\underbrace{mvf\left(v^2 + w^2\,(1-v^2)\right)}_{A} + \underbrace{mvf\left(v^2\right)}_{B} = \underbrace{Mvf\left(v^2 + u^2(1-v^2)\right)}_{C}.$$

Сократим v, а *затем* положим его равным нулю $v = 0$ и разделим на уравнение (31):

$$\frac{f(0)}{f\left(w^2\right)} = \frac{w}{u} - 1.$$

Выражая u через $w = 2u/(1+u^2)$, получаем $u = (1 - \sqrt{1-w^2})/w$, откуда приходим к $f(w^2) = f(0)/\sqrt{1-w^2}$, и, следовательно, к выражению для релятивистского импульса.

• $\mathbf{H}_7$ *Проективное сохранение уравнения прямой* (стр. 62)

Подставим в уравнение $x' = x'_0 + u'\,t'$ проективные преобразования:

$$\frac{A\,x + B\,t}{1 + a\,x + b\,t} = x'_0 + u'\,\frac{D\,x + E\,t}{1 + a\,x + b\,t}.$$

Умножая правую и левую части на знаменатель, получаем:

$$x = x_0 + u \cdot t,$$

где $x_0 = x'_0/(A - x'_0\,a - u'\,D)$, $u = (x'_0\,b + u'\,E - B)/(A - x'_0\,a - u'\,D)$. Таким образом, снова получается линейная зависимость координаты от времени с новыми константами x_0 и u.

• $\mathbf{H}_8$ *Неизотропные преобразования Лоренца* (стр. 64)

В (1.8), стр. 32 введём новую функцию скорости:

$$\gamma(-v)\gamma(v) = \frac{1}{1 - \alpha\,v^2}, \qquad \gamma(v) = \frac{f(v)}{\sqrt{1 - \alpha\,v^2}}.$$

Откуда, $f(-v)\,f(v) = 1$. Возьмём первое уравнение в системе последовательных преобразований записанных на странице 31, и подставим в него $\sigma(v) = \alpha\,v$:

$$x_3 = \gamma_2\gamma_1 \cdot [(1 + \alpha\,v_1 v_2)\,x_1 - (v_1 + v_2)\,t_1\ ] \ = \ \gamma_3 \cdot [x_1 - v_3\,t_1].$$

Приравняем коэффициенты при x_1: $\gamma_3 = (1 + \alpha v_1 v_2)\gamma_1\gamma_2$ и запишем это уравнение при помощи функции $f(v)$:

$$\frac{f_3}{\sqrt{1 - \alpha\,v_3^2}} = (1 + \alpha\,v_1 v_2)\,\frac{f_1\,f_2}{\sqrt{1 - \alpha\,v_1^2}\sqrt{1 - \alpha\,v_2^2}}.$$

Подставляя v_3 в левую часть, имеем $f_3 = f_1\,f_2$. В результате:

$$f\left(\frac{v_1 + v_2}{1 + \alpha\,v_1 v_2}\right) = f(v_1)f(v_2).$$

Так как скорости v_1 и v_2 независимые, возьмём производную по v_2:

$$f'\left(\frac{v_1 + v_2}{1 + \alpha\,v_1 v_2}\right)\,\frac{1 - \alpha v_1^2}{(1 + \alpha\,v_1 v_2)^2} = f(v_1)f'(v_2)$$

и положим $v_2 = 0$:

$$f'(x)\,(1 - \alpha x^2) = a\,f(x),$$

где $x = v_1$, а константа $a = f'(0)$. Решение этого уравнения не представляет труда. Пусть $\alpha = 1/c^2 > 0$, тогда:

$$\int \frac{df}{f} = \int \frac{c^2\,a\,dx}{c^2 - x^2} = \frac{a\,c}{2}\int \left[\frac{1}{c - x} + \frac{1}{c + x}\right] dx = \frac{a\,c}{2} \cdot \ln\frac{c + x}{c - x} = \ln\frac{f}{f_0}.$$

Вводя константу $\mu = a\,c/2$, и учитывая, что $\gamma(0) = 1$ (системы S и S' совпадают), получаем требуемые преобразования.
