# Квантовый мир

## II. Скалярное поле

Сергей С. Степанов

---

**Квантовый мир**

**Сергей С. Степанов**

Эта книга находится в процессе создания. Её последняя версия и другие материалы находятся на сайте: http://synset.com. Там же можно найти первый том: **I. Механика**
Замеченные ошибки и вопросы просьба присылать по адресу: steps137, затем собачка и gmail.com.

(c) 2015. Печать: 2 июля 2017 г.

# Оглавление

**0 Введение** **7**
I Структура и элементарность . . . . . 8
II Почему теория поля? . . . . . 10
III Система единиц . . . . . 14
IV Краткое содержание книги . . . . . 16

**1 Релятивистские классические поля** **17**
1 Теория относительности . . . . . 18
2 Уравнения Лагранжа . . . . . 22
3 Тензор энергии-импульса . . . . . 24
4 Действительное скалярное поле . . . . . 26
5 Комплексное скалярное поле . . . . . 30
6 Симметрии и законы сохранения . . . . . 34
7 Момент импульса поля . . . . . 36
8 Неоднозначность законов сохранения . . . . . 40

**2 Квантование свободных полей** **45**
1 Каноническое квантование . . . . . 46
2 Кванты поля . . . . . 48
3 Нормировка векторов состояния . . . . . 52
4 Функция Паули-Йордана . . . . . 54
5 Пропагатор . . . . . 58
6 Вакуум свободного квантового поля . . . . . 60
7 Теоремы Вика . . . . . 64

**3 Взаимодействие полей** **71**
1 Лагранжиан взаимодействия . . . . . 72
2 Скалярное поле с $\varphi^4$ самодействием . . . . . 76
3 Энергия вакуума и одночастичного состояния . . . . . 78
4 Временные представления . . . . . 82
5 Адиабатическая гипотеза . . . . . 84

**4 Сечение рассеяния** **87**
1 Столкновение частиц . . . . . 88
2 Сечение рассеяния . . . . . 92
3 Сечение и амплитуда рассеяния . . . . . 96
4 Рассеяние скалярных частиц . . . . . 100
5 Редукционная формула . . . . . 102

**5 Функции Грина** **107**
1 Точные функции Грина . . . . . 108
2 Двухточечная функция Грина по теории возмущений . . . 112

3 Четырёхточечная функция Грина . . . . . 116
4 Импульсное представление для функций Грина . . . . . 120
5 Как получать симметрийные множители * . . . . . 124
6 Топология диаграмм . . . . . 126

**6 Вершинные функции 131**
1 Функция собственной энергии . . . . . 132
2 Вершинные функции . . . . . 134
3 Суммирование циклов * . . . . . 138
4 Уравнения Дайсона . . . . . 140
5 Уравнения Дайсона для вершинных функций . . . . . 144
6 Немного картинок . . . . . 146

**7 Регуляризация 151**
1 Вычитание бесконечностей . . . . . 152
2 Обрезание импульса . . . . . 154
3 Размерная регуляризация . . . . . 156
4 Вершинная функция . . . . . 158
5 Функция собственной энергии . . . . . 162
6 Подсчёт расходимостей . . . . . 166

**8 Перенормировка 171**
1 Затравочные и перенормированные величины . . . . . 172
2 Перенормировка во втором порядке по $\lambda$ . . . . . 176
3 Контрчлены . . . . . 178
4 Диаграммы Фейнмана для контрчленов . . . . . 182
5 Функция собственной энергии . . . . . 186
6 Вершинная функция . . . . . 188

**9 Ренормгруппа 193**
1 Произвол в выборе точки нормировки . . . . . 194
2 Ренормгрупповое уравнение . . . . . 196
3 Функция Гелл-Манна–Лоу . . . . . 200
4 Бегущая константа связи . . . . . 202

**10 Функциональные методы 205**
1 Функциональные производные . . . . . 206
2 Производящий функционал для функций Грина . . . . . 208
3 Связные функции Грина . . . . . 212
4 Вершинные функции . . . . . 214
5 Уравнение Швингера . . . . . 218
6 Функциональный интеграл . . . . . 220

I Классические поля . . . 225
II Функции Грина . . . 226
III Регуляризация . . . 229
IV Теория симметрии . . . 230

**Интегралы** **235**
I.1 Теорема Коши . . . 236
I.2 Многозначные функции . . . 240
I.3 Различные интегралы . . . 244
I.4 Дисперсионные соотношения . . . 248
I.5 Поворот Вика . . . 250
I.6 Интегрирование по 4-мерной сфере . . . 252
I.7 Интегралы в $d$-мерном пространстве . . . 254
I.8 Фейнмановская параметризация . . . 256

**Специальные функции** **259**
F.1 Гамма-функция . . . 260
F.2 Функции Дирака и Хевисайда . . . 264
F.3 Функции Бесселя . . . 268
F.4 Функция Паули-Йордана . . . 270
F.5 Функции Грина . . . 274

**Теория групп** **279**
G.1 Теория групп . . . 280
G.2 Представления групп . . . 284
G.3 Линейные преобразования . . . 288
G.4 Группы $\mathbf{O}(3)$ и $\mathbf{SO}(3)$ . . . 292
G.5 Группа Лоренца . . . 296
G.6 Группа Пуанкаре . . . 300
G.7 Квантование полей . . . 302
G.8 Коммутаторы 4-импульса и момента поля . . . 306

# Глава 0

# Введение

Эта книга посвящена квантовой теории поля.

---

**Квантовый мир**

**Сергей С. Степанов**

Эта книга находится в процессе создания. Её последняя версия и другие материалы находятся на сайте: http://synset.com. Там же можно найти первый том: **I. Механика**
Замеченные ошибки и вопросы просьба присылать по адресу: steps137, затем собачка и gmail.com.

(c) 2015. Печать: 2 июля 2017 г.

## I Структура и элементарность

• До начала двадцатого века понятие структуры физической системы было достаточно простым. Любой объект состоит из других объектов, подобно дому из кирпичей. Приложив достаточно усилий (энергии) можно разобрать его на более элементарные составляющие. Вещество состоит из молекул, молекулы из атомов, атомы из ядер и электронов. Вопрос о том, является ли такое дробление объектов бесконечным или существуют неделимые, фундаментальные "атомы материи", долгое время относился к области философии, а не физики.

В двадцатом веке экспериментальная физика подошла вплотную к ответу на этот вопрос. Как это часто бывает, ответ оказался не совсем таким, каким он виделся философам. К 1932 г. были открыты электрон (Томсон, 1897), протон (Резерфорд, 1919) и нейтрон (Чедвик, 1932). Вместе с фотоном (Эйнштейн, 1905) – квантом электромагнитного излучения их было достаточно, для описания структуры атомов и, следовательно, всего разнообразия окружающего нас макроскопического мира. Однако, подобная простая картина просуществовала очень недолго.

Сейчас известны сотни частиц, которые считаются элементарными. Под этим понимается, что их нельзя "разобрать" на более мелкие кусочки в столкновениях друг с другом. При таких реакциях "просто" возникают новые частицы. Например, при столкновении протона и антипротона может появиться два протона и два антипротона:

$$p + \bar{p} \mapsto p + p + \bar{p} + \bar{p}.$$

Аналогично, в подобных столкновениях рождается множество частиц, отличных от исходных. Предположение о том, что все они находились внутри начальных частиц выглядит крайне сомнительным.

Поэтому сейчас мы называем частицу *элементарной*, если её нельзя разделить на другие частицы, которые можно было бы интерпретировать как "части" исходной частицы. При этом элементарность не означает бесструктурности. Протон и нейтрон имеют очень сложную *структуру*, однако считаются элементарными.

Нарушение арифметики числа частиц при столкновениях и невозможность разбить их на "кусочки" типичны для квантово-релятивистского мира. Как мы увидим в дальнейшем, при сильном взаимодействии в связанной системе число частиц не может быть измерено одновременно с массой системы (так же, как и импульс с координатой). Всё выглядит так, что вопрос "из чего состоит" в физике элементарных частиц начинает терять свой смысл.

• Бесструктурными в настоящее время считаются лептоны, кварки и кванты полей их взаимодействий (фотон, $W$-, $Z$-бозоны и глюоны). К лептонам относится электрон ($e^-$) и две его тяжёлых "копии" – мюон ($\mu^-$) и тау-лептон ($\tau^-$). Каждый из них имеет спутницу – нейтрино соответствующего типа: $\nu_e$, $\nu_\mu$, $\nu_\tau$.

При помощи шести кварков $(u, d, s, c, b, t)$ классифицируется обширный класс частиц, названный адронами. Адроны, в свою очередь, делятся на две группы – мезоны ("состоящие" из кварка и антикварка) и барионы ("состоящие" из трёх кварков). К барионам принадлежит протон и нейтрон, а самым лёгким представителем мезонов является тройка $\pi^\pm$, $\pi^0$ мезонов. Кварки не наблюдались в свободном состоянии и существуют основания считать, что это их принципиальная особенность, связанная с изменением понятий структуры и элементарности.

Каждая частица, кроме массы и заряда характеризуется набором других квантовых чисел, важнейшим из которых является спин. У всех лептонов и кварков спин равен $\hbar/2$. Спин барионов также полуцелый (иногда существенно больший, чем $\hbar/2$). Все мезоны имеют нулевое или целочисленное значение спина. Целый спин имеют также кванты полей взаимодействий.

Частицы с полуцелым спином называются *фермионами*, а с целым – *бозонами*. Их квантовомеханическое поведение качественно различается, и два одинаковых фермиона, в отличие от бозонов, не могут находиться в одном состоянии (т.е. иметь одну энергию, ориентацию спина и т.д.). В квантовой теории вектор состояния бозонов не меняется при перестановке частиц, а в случае фермионов он изменяет свой знак. Такое поведение отражает свойство *тождественности* элементарных частиц.

Все заряженные частицы (а иногда и нейтральные) имеют свои антиподы – античастицы, с той же массой и спином, но противоположным значением электрического заряда.

Шесть лептонов и шесть кварков лежат в основе *Стандартной модели* элементарных частиц. По-мимо гравитационного, мы выделяем ещё три вида взаимодействий – электромагнитное, сильное и слабое. Электромагнитное взаимодействие на классическом уровне описывается уравнениями Максвелла, а в квантовой теории – квантовой электродинамикой. Сильное взаимодействие или хромодинамика ответственно за силы, удерживающие кварки "внутри" адронов. Его квантами являются глюоны. Наконец, слабое взаимодействие (которое "переносят" $W$-, $Z$-бозоны) определяет многие распады и взаимодействия элементарных частиц не связанные с электромагнитным и сильным взаимодействиями.

## II Почему теория поля?

Физика элементарных частиц связана с очень небольшими объектами и огромными энергиями. Поэтому она должна описываться теорией, объединяющей в себе квантовую и релятивистскую механики. Такое объединение оказалось не тривиальным, как в физическом, так и в математическом отношении.

Хотя на первом этапе развития квантовой теории казалось, что её релятивистское обобщение будет достаточно простой задачей. Более того, первые шаги к квантовому миру были вполне релятивистскими. Так, объяснение Максом Планком (1900) спектра излучения чёрного тела и Альбертом Эйнштейном (1905) фотоэффекта, по сути, явились квантованием электромагнитного поля. Луи Де Бройль (1924) ввёл понятие волновых свойств частиц исходя из соображений релятивистской ковариантности, сравнивая волновой 4-вектор $\mathrm{k} = \{\omega, \mathbf{k}\}$ и 4-импульс частицы $\mathrm{p} = \{E, \mathbf{p}\}$. Наконец, Эрвин Шрёдингер (1926), развивая идеи Де Бройля, получил своё уравнение, опираясь на релятивистское соотношение между энергией и импульсом. Так как это уравнение не учитывало существование спина электрона, оно не вполне точно воспроизводило спектр атома водорода. Однако, когда Шрёдингер рассмотрел его нерелятивистское приближение, согласие с экспериментом и развитой ранее теорией Нильса Бора (1913), оказалось замечательно хорошим. Поэтому, Шрёдингер решил публиковать своё уравнение в нерелятивистской форме.

При движении электрона в магнитном поле возникает разделение пучка на два (опыт Штерна-Герлаха, 1921), что говорит о наличии у электрона магнитного момента. Это, вместе с особенностями расщепления энергетических уравнений в спектре атома водорода, привело Джорджа Уленбека и Сэмюэла Гаудсмита (1925) к гипотезе существования у электрона спина. Вольфганг Паули сначала негативно отнёсся к наличию у электрона вращательного момента. Его возражения также были связаны с релятивистской теорией. В то время электрон мыслился шариком, обладающим конечным радиусом (классический радиус электрона). Следующий из эксперимента угловой момент такого шарика должен был приводить к скорости вращения его поверхности, большей скорости света ($v \sim 1/\alpha$). Впрочем, в дальнейшем Паули снял свои возражения и обобщил (1927) уравнение Шрёдингера на случай дополнительной степени свободы, связанной со спином. В этом уравнении волновая функция становится двухкомпонентной $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$, что соответствует двум возможным проекциям спина электрона на произвольное направление.

• Уравнение Шрёдингера можно формально получить при помощи замен $E \mapsto \imath\partial/\partial t$, $\mathbf{p} \mapsto -\imath\nabla$ в выражении для энергии $E = \mathbf{p}^2/2m$ свободной нерелятивистской частицы, где $\mathbf{p}$ – её импульс ($\hbar = 1$):

$$\imath\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\Delta\Psi}{2m}. \tag{1}$$

Из него непосредственно следует уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\mathbf{j} = 0, \qquad \rho = \Psi^*\Psi, \qquad \mathbf{j} = -\frac{\imath}{2m}\,(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*).$$

При этом плотность вероятности $\rho$, как и положено для вероятности, является положительной величиной.

Замены, с помощью которых было "получено" уравнение Шрёдингера, имеют ковариантный вид и могут быть выражены на языке 4-векторов $p^\mu = \{E, \mathbf{p}\} \mapsto \imath\partial^\mu = \imath\{\partial/\partial t, -\nabla\}$. Так как $p^\mu p_\mu = m^2$, запишем релятивистски ковариантное дифференциальное уравнение второго порядка в следующем виде:

$$(\partial^2 + m^2)\Psi = 0 \tag{2}$$

Это уравнение было опубликовано Фоком и независимо Клейном, а затем Гордоном (1926), поэтому его называют уравнением Клейна-Гордона-Фока (иногда просто уравнением Клейна-Гордона).

Уравнение непрерывности для уравнения Шрёдингера имеет ковариантный вид: $\partial\mathrm{j} \equiv \partial_\mu j^\mu = 0$. Аналогичное уравнение должно быть верным и для релятивистского уравнения (2). При этом, j для скалярной функции $\Psi$ будет 4-вектором, если:

$$j^\mu = \frac{\imath}{2m}\,(\Psi^*\partial^\mu\Psi - \Psi\partial^\mu\Psi^*). \tag{3}$$

Несложно проверить, что из $(\partial^2 + m^2)\Psi = 0$ следует $\partial\mathrm{j} = 0$.

Пространственные компоненты этого 4-вектора совпадают с плотностью потока вероятности $\mathbf{j}$ уравнения Шрёдингера. А вот нулевая компонента $\rho = j^0$ (плотность вероятности) оказывается знакопеременной:

$$\rho = \frac{\imath}{2m}\Big(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\Big).$$

Есть у уравнения (2) ещё одна неприятность. Если искать его решение в виде $\Psi(t, \mathbf{x}) = \Psi_\mathbf{p}(\mathbf{x})\, e^{-\imath Et}$, где $\Psi_\mathbf{p}(\mathbf{x}) \sim e^{\imath\mathbf{px}}$ – собственная функция оператора импульса $\mathbf{p}$, то получается два значения энергии $E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Просто отбросить нефизические отрицательные значения мы не можем, так как полная система волновых функций должна содержать все собственные значения и векторы уравнения.

• Проблема с отрицательной вероятностью связана с наличием в уравнении (2) второй производной по времени. Чтобы её устранить, Поль Дирак (1928) ввёл 4 матрицы $\gamma^\mu = \{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}$, каждая из которых имеет размер 4x4 и удовлетворяет соотношениям:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \qquad (\gamma^\mu)^+ = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0, \tag{4}$$

где в правой части первого из них (алгебра матриц Дирака) опущена единичная матрица, а крестик – эрмитово сопряжение. При помощи этих матриц (их явный вид приведен в главе **??**), Дирак записал релятивистское уравнение, для 4-компонентной функции $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)^T$:

$$(\imath\gamma^\nu\partial_\nu - m)\,\Psi = 0. \tag{5}$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка. Действуя на него оператором $-\imath\gamma^\mu\partial_\mu$, получаем:

$$(\gamma^\mu\partial_\mu\gamma^\nu\partial_\nu + \imath m\gamma^\mu\partial_\mu)\,\Psi = \Big(\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)\partial_\mu\partial_\nu + m^2\Big)\Psi = (\partial^2 + m^2)\Psi = 0.$$

Беря эрмитово сопряжение уравнения (5) при помощи (4), можно проверить, что ток, удовлетворяющий уравнению $\partial \mathrm{j} = 0$, равен

$$j^\mu = \Psi^+\gamma^0\gamma^\nu\Psi \tag{6}$$

и имеет положительно определённую нулевую компоненту:

$$\rho = j^0 = \Psi^+\gamma^0\gamma^0\Psi = \Psi^+\Psi = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + |\Psi_3|^2 + |\Psi_4|^2. \tag{7}$$

Две компоненты функции $\Psi$ соответствуют двум состояниям частицы со спином $1/2$ (например, электрона). Ещё две степени свободы Дирак связал с античастицей (позитроном). Её обнаружение в 1932 г. стало триумфом теории Дирака.

Впрочем, уравнение (5) по-прежнему имеет решения с отрицательными энергиями. Их существование приводит к неустойчивости электрона, в том смысле, что, излучая, он скатываться ко всё более низким энергетическим состояниям. Для обхода этой проблемы, Дираку пришлось ввести понятие “моря Дирака” – вакуума в котором все состояния уже заполнены электронами с отрицательной энергией. Если один из этих электронов переходит в состояние с положительной энергией на “его месте” образуется “дырка”, которая интерпретируется как античастица.

Такая модель возможна только для фермионов, по два из которых (спин вверх и вниз) находятся на каждом отрицательном энергетическом уровне (принцип Паули). Для бозонов, она неприменима и не решает проблемы отрицательных энергий.

• В настоящее время, уравнения, подобные уравнению Клейна-Гордона-Фока или Дирака интерпретируются как уравнения поля (скалярного в первом случае и биспинорного во втором). Иными словами, функция $\Psi$ не считается волновой функцией, дающей плотность вероятности обнаружить частицу в той или иной точке пространства. Этот объект, называется *квантовым полем* и он является динамической переменной, подобной координате или импульсу в квантовой механике.

В квантовой теории поля мы отказываемся от понятия волновой функции, зависящей от координат частиц. Это связано с отмеченной ранее особенностью несохранения числа элементарных частиц в процессе их взаимодействий. Волновая функция $N$ частиц $\Psi(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N)$ в этом случае оказывается очень "неудобным" математическим объектом.

Есть и ещё более веская причина. В квантовой механике, говоря о волновой функции $\Psi(\mathbf{x})$, мы подразумеваем, что координата частицы может быть измерена сколь угодно точно. При этом, в силу соотношения неопределённости, её импульс и энергия оказываются произвольными. В том числе и сколь угодно большими. Однако, при большой энергии могут рождаться новые частицы. Пытаясь "зажать измерением" электрон в бесконечно малом объёме мы на столько сильно на него воздействуем, что при этом рождается множество других частиц и невозможно сказать где находится исходный электрон.

Если масса частицы равна $m$, то пара частица-античастица может родится при энергии порядка $2mc^2$ (закон сохранения энергии). При большой энергии $p \approx E/c = 2mc$. Следовательно, говорить о координате одночастичного состояния можно лишь с неопределённостью:

$$\Delta x \sim \frac{\hbar}{p} \sim \frac{\hbar}{mc}. \tag{8}$$

Величина $\hbar/mc$ называется комптоновской длиной волны частицы. Для электрона она в 1000 раз меньше, чем радиус боровской орбиты в атоме водорода. Пока мы игнорируем эффекты рождения частиц, применима обычная квантовая механика, основанная на волновой функции. Однако физика элементарных частиц требует выхода за эту математическую модель и наиболее подходящей оказывается квантовая теория поля.

Кроме этого, упомянутые в начале раздела квантовые свойства света, требуют построения последовательной теории квантования классического электромагнитного поля. В квантовой теории поля кванты (фотоны) такого поля рассматриваются равноправным образом вместе с квантами других полей, которые интерпретируются как "обычные" частицы.

## III Система единиц

• Скорость света и постоянная Планка являются фундаментальными физическими константами, определяющими масштабы эффектов в релятивистской квантовой теории:

$$\begin{aligned} c &= 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}, \\ \hbar &= 1.054\,572\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s} = 6.582\,119\cdot 10^{-22}\,\mathrm{MeV\cdot s}, \\ \hbar c &= 197.327\cdot 10^{-15}\,\mathrm{Mev\cdot m}. \end{aligned} \tag{9}$$

Выше использованы латинские обозначения для метра, секунды и джоуля (система СИ). Электронвольт $\mathrm{eV} = 1.602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$ равен энергии, затрачиваемой при переносе элементарного заряда между точками с разницей потенциалов в один вольт, а MeV означает $10^6\,\mathrm{eV}$ (мега электронвольт). Часто встречаются следующие приставки степеней десяти:

$$\begin{aligned} &10^6 : \mathrm{M}\ (\text{мега}), \quad 10^9 : \mathrm{G}\ (\text{гига}), \quad 10^{12} : \mathrm{T}\ (\text{тера}), \\ &10^{-6} : \mu\ (\text{микро}), \quad 10^{-9} : \mathrm{n}\ (\text{нано}), \quad 10^{-12} : \mathrm{p}\ (\text{пико}). \end{aligned}$$

Элементарный электрический заряд определяется безразмерной постоянной тонкой структуры:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137.035\,999\,074(44).$$

В физике элементарных частиц принята система единиц в которой $\hbar = c = 1$. В этой системе из соотношений (без $c$ и $\hbar$) $E^2 = p^2 + m^2$ и $\hat{p} = -\imath d/dx$ следует, что длина, время, энергия и импульс выражаются в единицах массы (которую принято измерять в электронвольтах):

$$t \sim x \sim M^{-1}, \qquad E \sim p \sim M.$$

Скорость, заряд $q^2 = Er$ является безразмерными (в единицах массы).

Чтобы восстановить в формулах фундаментальные константы, необходимо для времени, длины и массы сделать следующие замены:

$$t \mapsto \frac{c\,t}{\hbar}, \qquad x \mapsto \frac{x}{\hbar}, \qquad m \mapsto mc. \tag{10}$$

Подстановки остальных величин определяются их размерностями в классической механике (где нет констант $\hbar$ и $c$). Например, для энергии $E = mx^2/t^2$, импульса $p = mx/t$ и заряда $q^2 = Er$:

$$E \mapsto \frac{E}{c}, \qquad p \mapsto p, \qquad q^2 \mapsto \frac{q^2}{\hbar c}.$$

Замены для полей определяются из соображения отсутствия постоянной Планка $\hbar$ в их энергии (классические поля) и соответствии полевых коммутаторов квантовой механике.

• Приведём несколько характерных масштабов в физике элементарных частиц. Массы электрона и протона равны:

$$m_e = 0.511\,\mathrm{MeV},$$

$$m_p = 938\ \mathrm{MeV}\ =\ 1836\,m_e,$$

а для поколений лептонов ($\mu$-мезон, $\tau$-лептон):

$$m_\mu \approx 207\,m_e, \qquad m_\tau \approx 3477\,m_e = 17\,m_\mu.$$

Нейтрон чуть тяжелее протона, а дейтерий легче чем сумма масс протона и нейтрона из которых он состоит:

$$m_n = 1.0014\,m_p = m_p + 2.5\,m_e, \qquad m_d = m_p + m_n - 4.4\,m_e.$$

Для сравнения, боровская энергия электрона в атоме водорода равна $E_B/c^2 = m_e\,\alpha^2/2 = 2.7\cdot 10^{-5}\,m_e$. Самые лёгкие $\pi$-мезоны имеют массы:

$$m_{\pi^\pm} = 140\,\mathrm{MeV}, \qquad m_{\pi^0} = 135\,\mathrm{MeV} = m_{\pi^\pm} - 9\,m_e.$$

Масса тяжёлых мезонов (из известных) около $11\,000\,\mathrm{MeV}\ =\ 11\,\mathrm{GeV}$. Массы барионов, начинаются с тяжёлого (по сравнению с $\pi$ мезоном) протона растут несколько скромнее и достигают значений $6\,000\,\mathrm{MeV}$.

Характерный размер атомов и шага кристаллической решётки твёрдых тел составляет ангстремы. Один ангстрем равен $\mathrm{\AA} = 10^{-10}\,\mathrm{m}$. Другой важный масштаб длины называется ферми (в честь Энрико Ферми) и равен $\mathrm{fm} = 10^{-15}\,\mathrm{m} \approx 5/\mathrm{GeV}$, см. (9). Это значение определяет характерный размер протона и лёгких ядер атомов. Для электрона существуют следующие типичные масштабы длины: “классический радиус”, комптоновская длина и “радиус” боровской орбиты:

$$r_e = \frac{e^2}{m_e\,c^2} = 2.818\ \mathrm{fm}, \qquad \lambda_e = \frac{r_e}{\alpha} = 0.004\,\mathrm{\AA}, \qquad r_B = \frac{r_e}{\alpha^2} = 0.5\,\mathrm{\AA}.$$

Первая длина не зависит от постоянной Планка $\hbar$, вторая $\lambda_e = \hbar/m_e c$ не зависит от заряда $e$, а третья $r_B = \hbar^2/m_e e^2$ – от скорости света $c$.

Временные интервалы в физике элементарных частиц меняются в очень широких диапазонах. Время жизни свободного нейтрона ($n \mapsto p\,e^-\bar{\nu}_e$) составляет 880 секунд. Мезон $\pi^\pm \mapsto \mu\,\nu_\mu$ распадается за $2.6\cdot 10^{-8}$ сек, а $\pi^0 \mapsto 2\gamma$ за $8.5\cdot 10^{-17}$ сек. Большинство мезонов и барионов являются очень короткоживущими частицами. Их также называют *резонансами*. Время жизни $\tau = 1/\Gamma$ резонансов измеряется в энергетических единцах – ширинах распада $\Gamma$. Типичные значения ширин для резонансов составляют сотни мегаэлектронвольт: $6.6\cdot 10^{-22}$ сек $= \mathrm{MeV}^{-1}$, см. (9).

# IV Краткое содержание книги

# Глава 1

# Релятивистские классические поля

Основой квантовой теории поля является теория классических полей. Классическое поле – это функция координат и времени. Другими словами, поле определено, если в каждой точке 4-пространства задано число или набор чисел. Различные типы полей соответствуют разным трансформационным свойствам этих чисел при преобразованиях Лоренца. Наиболее важную роль в физике частиц играют скалярные, векторные и биспинорные поля.

При построении классической теории поля очень удобен лагранжев формализм, с рассмотрения которого мы начнём эту главу. Разнообразные симметрии лагранжиана приводят к сохранению физических величин, что является содержанием замечательной теоремы Эмми Нётер. Мы получим выражения для энергии-импульса, тока и полного момента импульса. Эти величины в дальнейшем будут играть ключевую роль.

В главе рассматриваются скалярные и массивные векторные поля. Электромагнитному и биспинорному полям посвящены главы **??** и **??**.

---

**Квантовый мир**

**Сергей С. Степанов**

Эта книга находится в процессе создания. Её последняя версия и другие материалы находятся на сайте: http://synset.com. Там же можно найти первый том: **I. Механика**
Замеченные ошибки и вопросы просьба присылать по адресу: steps137, затем собачка и gmail.com.

(c) 2015. Печать: 2 июля 2017 г.

# 1 Теория относительности

• В основе специальной теории относительности лежат преобразования Лоренца между двумя инерциальными системами отсчёта. Если в системе $S$ наблюдатели измеряют время и координаты некоторого события $\{t, \mathbf{x}\}$, то в системе $S'$, движущейся относительно $S$ вдоль оси $x$ со скоростью $v$, это же событие имеет время и координаты $\{t', \mathbf{x}'\}$. Эти измерения связаны между собой:

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}, \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z. \tag{1.1}$$

Если система $S'$ движется в произвольном направлении со скоростью $\mathbf{v}$, то преобразования Лоренца имеют вид:

$$t' = \gamma\,(t - \mathbf{vr}), \qquad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \gamma\mathbf{v}t + \frac{\gamma - 1}{v^2}\,\mathbf{v}\,(\mathbf{vr}), \tag{1.2}$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$ – называется лоренцевским фактором. Эти преобразования обобщают преобразования Галилея классической механики, переходя в последние при $v \to 0$. В теории относительности изменяются не только преобразования между системами отсчёта, но и зависимость энергии и импульса частицы от её скорости $\mathbf{u}$:

$$E = \frac{m}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}}, \qquad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}}. \tag{1.3}$$

Они переходят в классические выражения $E = m + m\mathbf{u}^2/2$, $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \to 0$ и связаны между собой следующим образом:

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2, \qquad \mathbf{p} = E\mathbf{u}. \tag{1.4}$$

В релятивистской теории для силы вводится следующее *определение*:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m\mathbf{a}}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} + \frac{m\mathbf{u}\,(\mathbf{ua})}{(1 - \mathbf{u}^2)^{3/2}}, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{u}}$ – ускорение частицы. Скалярное произведение скорости на силу равно изменению энергии движения (1.3) частицы:

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{uF}, \tag{1.6}$$

а при движении в центральном поле сохраняется момент импульса:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \tag{1.7}$$

где крестик – означает векторное произведение и $\mathbf{r}$ – радиус-вектор частицы, проведенный из центра поля.

• Время и координаты можно объединить в единый объект – 4-вектор $x^\mu = \{t, x, y, z\} \equiv \{t, \mathbf{x}\}$. Аналогично, в 4-вектор объединяются энергия и импульс $p^\mu = \{E, \mathbf{p}\}$, который называется *4-импульсом*. При этом нумерация индекса начинается с нуля. Мы используем греческие индексы $\alpha, \beta, \mu, \nu, ...$ для перечисления компонент 4-векторов, а латинские $i, j, k$ – для компонент 3-векторов. По повторяющимся индексам (если иное не оговорено) будет подразумеваться суммирование.

В трёхмерном векторном анализе жирным шрифтом обычно обозначаются 3-векторы: $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$. В четырёхмерном формализме 4-векторы будут обозначаться прямым шрифтом. Так, *4-вектор события* в пространстве-времени записывается как x, а 4-импульс как p. Компоненты этих 4-векторов в *данной* системе отсчёта равны $x^\mu$ и $p^\mu$.

Квадрат длины произвольного 4-вектора $\mathrm{A} = \{A^0, \mathbf{A}\}$ определяется следующим образом:

$$\mathrm{A}^2 = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2 = A^\mu A_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu,$$

где $g_{\mu\nu}$ имеет компоненты: $g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ и ноль в остальных случаях (*метрический тензор*). Различают верхние (контравариантные) $A^\mu$ и нижние (ковариантные) $A_\mu$ компоненты 4-векторов:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = g_{\mu 0}\, A^0 + g_{\mu 1}\, A^1 + g_{\mu 2}\, A^2 + g_{\mu 3}\, A^3 = \{A^0, -\mathbf{A}\}.$$

Квадрат 4-вектора является инвариантом преобразований Лоренца. Например, инвариантами будут: $\mathrm{x}^2 = t^2 - \mathbf{x}^2$ и $\mathrm{p}^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$. Аналогично определяется инвариантное скалярное произведение 4-векторов:

$$\mathrm{AB} = A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - \mathbf{AB}.$$

Кроме метрического тензора с нижними индексами $g_{\mu\nu}$, удобно ввести метрический тензор с верхними индексами $g^{\mu\nu}$, имеющий такие же компоненты (т.е. $g^{00} = 1$, $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$ и 0 в остальных случаях). Их свёртка (по $\alpha$ – сумма) друг с другом равна *символу Кронекера*:

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta^\nu_\mu = \begin{cases} 1 & \mu = \nu, \\ 0 & \mu \neq \nu. \end{cases}$$

При помощи метрического тензора $g_{\mu\nu}$ мы опускаем индексы, а при помощи $g^{\mu\nu}$ – поднимаем их. Если в некотором выражении есть несколько индексов (следим за их порядком по горизонтали), то, например:

$$g_{\alpha\mu} \Lambda^\mu{}_\nu = \Lambda_{\alpha\nu}, \qquad g^{\mu\alpha} \Lambda_{\nu\alpha} = \Lambda_\nu{}^\mu.$$

Хотя мы используем одну букву $\Lambda$, матрицы (два индекса) $\Lambda^\alpha{}_\beta$, $\Lambda_{\alpha\beta}$, $\Lambda_\alpha{}^\beta$ различны и получаются из $\Lambda^\alpha{}_\beta$ свёрткой с метрическим тензором.

• Преобразования между двумя системами отсчёта в общем случае включают в себя преобразования Лоренца и вращения декартовых осей:

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, A^{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{0}\, A^{0} + \Lambda^{\mu}{}_{1}\, A^{1} + \Lambda^{\mu}{}_{2}\, A^{2} + \Lambda^{\mu}{}_{3}\, A^{3}. \qquad (1.8)$$

Матрица $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ зависит от относительной скорости систем отсчёта $\mathbf{v}$ и трёх углов поворотов вокруг каждой оси системы координат. Эти матрицы образуют *группу Лоренца* (стр. 296). В случае преобразований Лоренца без вращения (*бустов*) из (1.2) следуют такие компоненты матрицы $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -v_x\gamma & -v_y\gamma & -v_z\gamma \\ -v_x\gamma & 1+\Gamma v_x^2 & \Gamma v_x v_y & \Gamma v_x v_z \\ -v_y\gamma & \Gamma v_y v_x & 1+\Gamma v_y^2 & \Gamma v_y v_z \\ -v_z\gamma & \Gamma v_z v_x & \Gamma v_z v_y & 1+\Gamma v_z^2 \end{pmatrix},$$

где $\Gamma = (\gamma-1)/v^2 = \gamma^2/(1+\gamma)$. Для бустов матрица $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ симметрична, но в общем случае это не так. Например, при композиции (последовательном преобразовании Лоренца от системы $S$ к $S'$ и затем к $S''$) итоговая матрица будет несимметрична, если скорости систем непараллельны.

По определению, скалярное произведение двух 4-векторов одинаково во всех системах отсчёта:

$$\mathrm{A}'\,\mathrm{B}' = g_{\alpha\beta}\, A'^{\alpha} B'^{\beta} = \underline{g_{\alpha\beta}\, \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu}}\, A^{\mu} B^{\nu} = \mathrm{A}\,\mathrm{B} = \underline{g_{\mu\nu}}\, A^{\mu} B^{\nu} = inv.$$

Это соотношение выполняется (векторы произвольны), если лоренцевская матрица удовлетворяет *условию ортогональности*:

$$g_{\alpha\beta}\, \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\, \Lambda^{\beta}{}_{\nu} = g_{\mu\nu}. \qquad (1.9)$$

В силу соглашения о поднятии и опускании индексов, это условие можно записать в эквивалентных формах:

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\, \Lambda_{\alpha\nu} = g_{\mu\nu}, \qquad \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\, \Lambda_{\alpha}{}^{\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}.$$

Сворачивая преобразование (1.8) по индексу $\mu$ с матрицей $\Lambda_{\mu}{}^{\alpha}$ и учитывая условие ортогональности (1.9), несложно найти обратное преобразование Лоренца, в котором свёртка идёт по первому индексу, а не по второму, как при прямом преобразовании:

$$A^{\alpha} = \Lambda_{\mu}{}^{\alpha}\, A'^{\mu}, \qquad A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, A^{\nu}. \qquad (1.10)$$

Повторяя рассуждения о инвариантности $g_{\mu\nu}\, A^{\mu} B^{\nu}$ для обратных преобразований, получаем условие ортогональности лоренцевской матрицы:

$$g^{\alpha\beta}\, \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\, \Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g^{\mu\nu}, \qquad (1.11)$$

в котором сворачиваются вторые по горизонтали индексы.

• Из компонент двух 4-векторов A и B можно составить 4 различных произведения с двумя индексами: $A^\alpha B^\beta$, $A_\alpha B_\beta$, $A^\alpha B_\beta$, $A_\alpha B^\beta$. Эти произведения будут преобразовываться при помощи двух лоренцевских матриц:

$$A'^\alpha B'^\beta = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \, A^\mu B^\nu, \qquad A'_\alpha B'_\beta = \Lambda_\alpha{}^\mu \Lambda_\beta{}^\nu \, A_\mu B_\nu,$$

и т.д. Назовём *тензором* типа $(n, m)$ величину, имеющую $n+m$ индексов, $n$ из которых находятся вверху, а $m$ – внизу, если она преобразуется, как произведение $n$ контравариантных и $m$ ковариантных компонент. Число $n + m$ называется *рангом* тензора. Например, для тензора $T^\gamma{}_{\alpha\beta}$ типа $(1, 2)$ *по определению* имеем:

$$T'^\gamma{}_{\alpha\beta} = \Lambda^\gamma{}_\sigma \, \Lambda_\alpha{}^\mu \, \Lambda_\beta{}^\nu \, T^\sigma{}_{\mu\nu}.$$

Так как для лоренцевских матриц выполняется условие ортогональности, то метрические коэффициенты $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ являются тензорами, компоненты которых не меняются при преобразованиях:

$$g'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \, g^{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}.$$

Аналогичным тензором является символ Кронекера $\delta^\alpha_\beta$.

*Скалярным полем* называют функцию $\varphi(\mathrm{x}) \equiv \varphi(t, \mathbf{x})$, *значения* которой, *по определению*, одинаковы во всех системах отсчёта:

$$\varphi'(\mathrm{x}') = \varphi(\mathrm{x}). \tag{1.12}$$

Это означает, что в каждой точке пространства-времени задано некоторое число. И это число не зависит от выбора системы отсчёта. При этом зависимость от координат и времени функции $\varphi(\mathrm{x})$ в различных системах отличается. Однако её значение, в данной точке неизменно.

*Векторное поле* – набор из 4-х функций, которые в данной точке 4-пространства имеют *различные значения* в различных системах отсчёта. Эти значения связаны при помощи преобразований Лоренца:

$$A'^\mu(\mathrm{x}') = \Lambda^\mu{}_\nu \, A^\nu(\mathrm{x}). \tag{1.13}$$

Аналогично определяется тензорное поле произвольного ранга.

Для производных полей по $x^\mu$ часто будет использоваться следующее обозначение:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad \partial^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x_\mu} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \tag{1.14}$$

где $\Delta = \nabla^2$ – оператор Лапласа. Дифференциальный оператор $\partial_\mu \partial^\mu$, как квадрат 4-вектора является инвариантом. В частности, действуя на скалярную функцию, он снова даёт скалярную функцию.

## 2 Уравнения Лагранжа

В классической механике для описания динамики частиц вводится функция Лагранжа. Движение происходит таким образом, что интеграл от функции Лагранжа по времени между начальной и конечной точками оказывается минимальным (в общем случае экстремальным). Этот формализм является исключительно удобным и в теории классического поля. При этом вывод соответствующих уравнений вполне аналогичен классической механике.

Напомним, что *функционалом* называется математический объект, который каждой функции ставит в соответствие некоторое число. Простейшим примером функционала является определённый интеграл. Рассмотрим функционал от функций, которые зависят от времени и точки в пространстве. Эти функции будут рассматриваться как динамические переменные и называться *полем*. Поле, в общем случае, имеет несколько компонент: $\Psi_k(t, \mathbf{x})$. Индекс $k$ может отсутствовать или пробегать четыре значения от 0 до 3. В первом случае говорят о *скалярном поле*, а во втором о *векторном* или *биспинорном* полях. Возможны и более сложные случаи. Не конкретизируя число компонент поля, запишем следующий *функционал действия*, зависящий от полей и их первых производных:

$$I[\Psi] = \int \mathcal{L}(\Psi_k, \partial_\alpha \Psi_k)\, d^4x = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{x}\, \mathcal{L}(\Psi_k, \partial_\alpha \Psi_k) = min, \qquad (1.15)$$

где производные обозначаем как: $\partial_\alpha \Psi_k \equiv \partial \Psi_k / \partial x^\alpha$. Это 4-кратный интеграл по 4-мерному объёму $d^4x = dt\, d^3\mathbf{x}$. Интегрирование по $d^3\mathbf{x}$ ведётся по всему 3-пространству. Предполагается, что поля и их производные на бесконечности ведут себя таким образом, что интеграл (1.15) имеет смысл (является конечным). В частности, это происходит, если они достаточно быстро убывают и $\Psi_k(t, \infty) = 0$. Интегрирование по времени в (1.15) ведётся между моментами $t_1$ и $t_2$, в которых поле фиксировано (*начальное* и *конечное* условия):

$$\Psi_k(t_1, \mathbf{x}) = \Psi_k^{(1)}(\mathbf{x}), \qquad \Psi_k(t_2, \mathbf{x}) = \Psi_k^{(2)}(\mathbf{x}). \qquad (1.16)$$

Скалярная функция $\mathcal{L}$ полей и их производных называется *лагранжианом* (или более точно плотностью лагранжиана). Для данной динамической системы она фиксирована и считается заданной.

Поле в произвольный момент времени $t_1 < t < t_2$ должно меняться таким образом, чтобы функционал (1.15) был экстремальным, а в моменты времени $t_1$ и $t_2$ получались функции $\Psi_k^{(1)}(\mathbf{x})$ и $\Psi_k^{(2)}(\mathbf{x})$.

Найдём дифференциальные уравнения которым удовлетворяет поле. Пусть $\Psi_k(t,\mathbf{x})$ соответствует экстремуму функционала $I[\Psi_k]$. Введём *произвольные* функции $\phi_k = \phi_k(t,\mathbf{x})$ обращающиеся в ноль при $t = t_1$ и $t = t_2$. Функция $\Psi_k(t,\mathbf{x}) + \varepsilon\phi_k(t,\mathbf{x})$, где $\varepsilon$ – некоторый параметр, удовлетворяет краевым условиям (1.16). Однако, её подстановка в (1.15) приведёт к числу отличному от экстремума. Это число является функцией $\varepsilon$ и равно экстремуму при $\varepsilon = 0$. Поэтому, чтобы его найти, необходимо взять производную $I[\Psi_k]$ по $\varepsilon$ и приравнять её нулю:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int \mathcal{L}(\Psi_k+\varepsilon\phi_k, \partial_\alpha\Psi_k+\varepsilon\partial_\alpha\phi_k)d^4x = \int\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_k}\,\phi_k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\Psi_k)}\,\partial_\alpha\phi_k\right]d^4x = 0.$$

По индексам $k$ и $\alpha$ проводится суммирование. Так как мы положили $\varepsilon = 0$, лагранжиан после равенства равен $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Psi_k, \partial_\alpha\Psi_k)$. В последнем слагаемом можно выделить полную производную по $\partial_\alpha$, переписав условие экстремума следующим образом:

$$\int\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_k} - \partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\Psi_k)}\right)\right]\,\phi_k\,d^4x + \int\partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\Psi_k)}\,\phi_k\right)d^4x = 0. \quad (1.17)$$

Второй интеграл равен нулю, так как он имеет вид:

$$\int\partial_\alpha f^\alpha d^4x = \int d^3\mathbf{x}\int\limits_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{\partial f^0}{\partial t} + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt\int d^3\mathbf{x}\,\nabla\mathbf{f} = 0. \quad (1.18)$$

Первый интеграл в (1.18) обращается в ноль при интегрировании по $dt$ так как в моменты времени $t_1$ и $t_2$ функции $\phi_k$ равны нулю ($f \sim \phi_k$). Второй интеграл при интегрировании по пространству $d^3\mathbf{x}$, в силу интегральной теоремы Гаусса, заменяется на интеграл по поверхности "охватывающей всё пространство". На этой поверхности (на бесконечности) поля $\Psi_k$ равны нулю. Следовательно в (1.17) первый интеграл также равняется нулю. Так как функции $\phi_k$ произвольные, должно быть равно нулю выражение в квадратных скобках. В результате мы получаем *уравнения Лагранжа* для поля:

$$\partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha\Psi_k\right)}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_k}. \quad (1.19)$$

Их решения $\Psi_k(t,\mathbf{x})$ с начальными и конечными условиями (1.16) соответствуют экстремуму функционала (1.15).

Начиная строить теорию от лагранжиана мы часто упрощаем себе жизнь, так как необходимо выбрать *одну* скалярную функцию $\mathcal{L}(\Psi_k, \partial_\alpha\Psi_k)$ от полей и их производных. Затем, используя уравнения Лагранжа, можно получить *систему* ковариантных уравнений для всех компонент поля.

## 3 Тензор энергии-импульса

Важную роль в теории поля играют сохраняющиеся во времени величины. Обычно лагранжиан не зависит явно от 4-координат (только через полевые функции $\Psi_k = \Psi_k(\mathrm{x})$), поэтому:

$$\partial_\nu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_k}\,\partial_\nu \Psi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_k)}\,\partial_\nu(\partial_\mu \Psi_k), \tag{1.20}$$

где по всем повторяющимся индексам, включая индекс $k$, проводится суммирование. Подставим в первом слагаемом уравнения Лагранжа (1.19), а во втором переставим местами частные производные и выделим полную производную:

$$\partial_\nu \mathcal{L} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_k)} \right) \partial_\nu \Psi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_k)}\,\partial_\mu(\partial_\nu \Psi_k) = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_k)}\,\partial_\nu \Psi_k \right).$$

Это выражение можно записать в виде *уравнения непрерывности* для *тензора энергии-импульса*:

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0, \qquad T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_k)}\,\partial_\nu \Psi_k - \delta^\mu_\nu\,\mathcal{L}, \tag{1.21}$$

где $\delta^\mu_\nu$ – символ Кронекера, при помощи которого сделано преобразование $\partial_\nu \mathcal{L} = \delta^\mu_\nu \partial_\mu \mathcal{L}$. Используя метрический тензор $g^{\mu\nu}$, поднимем индекс $\nu$ вверх, переписав тензор энергии-импульса в виде:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \qquad T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_k)}\,\partial^\nu \Psi_k - g^{\mu\nu}\,\mathcal{L}. \tag{1.22}$$

Распишем уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial T^{0\nu}}{\partial t} + \nabla_i T^{i\nu} = 0$$

и проинтегрируем его по всему 3-пространству. Так как интеграл от $\nabla_i T^{i\nu}$ преобразуется по теореме Гаусса к поверхностному интегралу, а поля на бесконечности убывают, такой интеграл равен нулю. В результате не меняются со временем 4-вектор полной энергии-импульса поля:

$$\frac{dP^\nu}{dt} = 0, \qquad P^\nu = \{E, \mathbf{P}\} = \int T^{0\nu}\,d^3\mathbf{x}.$$

Подчеркнём, что интегралы от $T^{0\nu}$ по всему пространству от произвольного тензора $T^{\mu\nu}$ в общем случае не будут компонентами 4-вектора. Это произойдёт, *только*, если подобные интегралы не зависят от времени, т.е., если тензор $T^{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнению непрерывности. Рассмотрим этот важный вопрос подробнее.

Тензор $T^{\mu\nu}$, по определению и по сути своего построения, является локально ковариантной величиной. Это означает, что он преобразуется следующим образом (стр. 21):

$$T'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\, T^{\alpha\beta}(x). \tag{1.23}$$

Аргументы тензора, измеряемого в двух системах отсчёта, относятся к одной и той же точке пространства-времени. В этой точке "находятся" два наблюдателя из 2-х систем отсчёта, у каждого из которых "своё" время. Поэтому в левой части преобразований аргументы 4-тензора имеют штрих, а в правой стоят уже без штриха.

Когда мы переходим к интегральным величинам, суммируя тензорное поле по всему пространству, вступает в игру *относительность одновременности*. Забудем пока, что 4-тензор удовлетворяет уравнению непрерывности и вычислим для произвольного тензора интеграл:

$$P^{\nu}(t) = \int T^{0\nu}(t, \mathbf{x})\, d^3\mathbf{x}. \tag{1.24}$$

При интегрировании мы суммируем значения функции $T^{0\nu}(t, \mathbf{x})$, измеренные наблюдателями во всём пространстве в *данный* момент времени $t$ в *данной* "нештрихованной" системе отсчёта. Аналогичное выражение со штрихами соответствует интегральной величине, измеренной наблюдателями в момент времени $t'$ в другой инерциальной системе отчёта, движущейся относительно первой. В теории относительности мы не можем ввести синхронизированное во всём пространстве время, одновременно *в двух* различных системах отсчёта. Время в интегральном соотношении типа (1.24) связано с совокупностью всех наблюдателей данной системы. Оно не может быть сравнено с аналогичным "интегральным" временем $t'$ в другой системе отсчёта. Сравнить между собой величины $P^{\nu}(t)$ и $P'^{\nu}(t')$ можно только, если они сохраняются и от времён не зависят. В этом случае [1] $P'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, P^{\mu}$.

То, что тензор $T^{\mu\nu}$ мы связываем с энергией и импульсом, имеет ряд причин. Прежде всего, существует тесная аналогия с лагранжевым формализмом частиц. Так, для нулевых компонент $T^{00}$ можно написать

$$T^{00} = \Pi_k\, \partial^0 \Psi_k - \mathcal{L}, \qquad \Pi_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial^0 \Psi_k},$$

где $\Pi_k$ – является каноническим импульсом сопряженным к динамической переменной $\Psi_k$. Такое же выражение для энергии мы имеем и в классической механике. Кроме этого, в электродинамике, где поле взаимодействует с зарядами, подобное (1.22) уравнение непрерывности приводит к сохранению суммарной энергии частиц и поля.

## 4 Действительное скалярное поле

• Рассмотрим в качестве примера действительное скалярное поле $\varphi$. В данном случае поле $\Psi_k = \varphi(t, \mathbf{x})$ не содержит индекса $k$, являясь однокомпонентным. Кроме $\varphi$, инвариантом является $(\partial\varphi)^2 = (\partial_\nu\varphi)(\partial^\nu\varphi)$. Поэтому квадратичный по полям инвариантный лагранжиан можно записать следующим образом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2, \tag{1.25}$$

где $m$ – некоторая константа размерности массы. Подстановка лагранжиана в уравнения Лагранжа (1.19) даёт следующее линейное уравнение поля:

$$(\partial^2 + m^2)\varphi = 0, \tag{1.26}$$

где $\partial^2 = \partial_\mu\partial^\mu = \partial^2/\partial t^2 - \Delta$ – оператор Д'Аламбера.

*Тензор энергии-импульса* (1.22) скалярного поля имеет вид:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \qquad T^{\mu\nu} = \partial^\mu\varphi\,\partial^\nu\varphi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}. \tag{1.27}$$

Этот тензор приводит к следующей плотности энергии:

$$\mathcal{H} = T^{00} = \frac{1}{2}\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 \tag{1.28}$$

и импульсу поля (не путать с каноническим импульсом $\partial\mathcal{L}/\partial(\partial^0\varphi)$, который является парным к динамической переменной $\varphi$):

$$\mathcal{P}^i = T^{0i} = -\dot\varphi\nabla\varphi, \tag{1.29}$$

где точка – частная производная по времени. Интегралы от $\mathcal{H}$ и $\mathcal{P}$ по всему пространству равны полной энергии и импульсу поля.

При помощи уравнений движения (1.26) несложно непосредственно проверить сохранение тензора $T^{\mu\nu}$ :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = (\partial^2\varphi)\,\partial^\nu\varphi + (\partial^\mu\varphi)\,\partial_\mu\partial^\nu\varphi - \partial^\nu\mathcal{L}.$$

Беря производную лагранжиана (1.25), имеем:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = (\partial^2\varphi)\,\partial^\nu\varphi + (\partial^\mu\varphi)\,\partial_\mu\partial^\nu\varphi - (\partial^\mu\varphi)\,\partial^\nu\partial_\mu\varphi + m^2\varphi\,\partial^\nu\varphi = 0,$$

где ноль получается после подстановки значения $\partial^2\varphi$ из (1.26).

Обратим внимание, что тензор энергии-импульса скалярного поля симметричен: $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. Для произвольного поля тензор, определённый соотношением (1.22) может оказаться несимметричным, однако, как мы увидим позднее (стр. 42), всегда существует возможность его симметризации.

• Найдём решение уравнения скалярного поля (1.26). Для этого запишем фурье-разложение (стр. 266) по пространственным координатам:

$$\varphi(t,\,\mathbf{x}) = \int a(t,\,\mathbf{p})\, e^{\imath \mathbf{p}\mathbf{x}}\, \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}}$$

и подставим его в уравнение (1.26), приравняв нулю фурье-образ (для этого необходимо ($\lessdot \mathrm{H}_1$) умножить на $e^{\imath \mathbf{p}'\mathbf{x}}$ и проинтегрировать по $d^3\mathbf{x}$):

$$\frac{\partial^2 a(t,\,\mathbf{p})}{\partial t^2} + \omega_p^2\, a(t,\,\mathbf{p}) = 0,$$

где введено обозначение, которое далее часто будет встречаться:

$$\omega_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \tag{1.30}$$

Дифференциальное уравнение для $a(t,\,\mathbf{p})$ является уравнением второго порядка и имеет два линейно-независимых решения:

$$a(t,\,\mathbf{p}) = \frac{a(\mathbf{p})}{\sqrt{2\omega_p}}\, e^{-\imath\omega_p t} + \frac{b(\mathbf{p})}{\sqrt{2\omega_p}}\, e^{\imath\omega_p t}$$

(множители $1/\sqrt{2\omega_p}$ введены для сокращения последующих формул). Подставим это решение в фурье-разложение:

$$\varphi = \int \left(a(\mathbf{p})\, e^{-\imath\omega_p t + \imath\mathbf{p}\mathbf{x}} + b(\mathbf{p})\, e^{\imath\omega_p t + \imath\mathbf{p}\mathbf{x}}\right) \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}},$$

и сделаем во втором слагаемом в интеграле замену $\mathbf{p} \mapsto -\mathbf{p}$ ($\lessdot \mathrm{H}_2$):

$$\varphi = \int \left(a(\mathbf{p})\, e^{-\imath \mathrm{p}\cdot\mathrm{x}} + b(-\mathbf{p})\, e^{\imath \mathrm{p}\cdot\mathrm{x}}\right) \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}},$$

где $\mathrm{p}\cdot\mathrm{x} = \omega_p t - \mathbf{p}\mathbf{x}$ – свёртка 4-векторов $\mathrm{x} = \{t,\,\mathbf{x}\}$ и $\mathrm{p} = \{\omega_p,\,\mathbf{p}\}$. В силу действительности поля $\varphi^* = \varphi$ должно выполняться $b(-\mathbf{p}) = a^*(\mathbf{p})$ ($\lessdot \mathrm{H}_3$), поэтому окончательно:

$$\varphi(t,\,\mathbf{x}) = \int (a_{\mathbf{p}}\, e^{-\imath \mathrm{p}\mathrm{x}} + a^*_{\mathbf{p}}\, e^{\imath \mathrm{p}\mathrm{x}})\, \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}}, \tag{1.31}$$

где $a_{\mathbf{p}} \equiv a(\mathbf{p})$. Заметим, что каждое слагаемое под интегралом в (1.31) само по себе удовлетворяет уравнению поля $(\partial^2 + m^2)\,\varphi = 0$, т.к. квадрат 4-импульса равен $\mathrm{p}^2 = \omega_p^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$.

Таким образом, общее решение уравнения действительного скалярного поля полностью определяется функцией 3-импульса $a_{\mathbf{p}}$. Название “импульс” для фурье-переменной $\mathbf{p}$ связано с выражением для полного импульса поля, которое будет найдено ниже.

• Выразим функции $a_{\mathbf{p}}$ через поле и его производную по времени. Для этого умножим (1.31) на $e^{-\imath\mathbf{kx}}$ и проинтегрируем по $d^3\mathbf{x}/(2\pi)^{3/2}$:

$$\int \varphi(t,\mathbf{x})\, e^{-\imath\mathbf{kx}}\, \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}} = \int (a_{\mathbf{p}}\, e^{-\imath\omega_p t+\imath(\mathbf{p}-\mathbf{k})\,\mathbf{x}} + a^*_{\mathbf{p}}\, e^{\imath\omega_p t-\imath(\mathbf{p}+\mathbf{k})\,\mathbf{x}})\, \frac{d^3\mathbf{p}\, d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_p}}.$$

В силу интегрального представления функции Дирака (стр. 264):

$$\delta(\mathbf{p}) = \int e^{\imath\mathbf{px}}\, \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} \tag{1.32}$$

в первом слагаемом после интегрирования по $d^3\mathbf{x}$ получится $\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})$ и $\delta(\mathbf{p}+\mathbf{k})$ – во втором. Проинтегрируем с этими функциями по $d^3\mathbf{p}$:

$$\int \varphi(t,\mathbf{x})\, e^{-\imath\mathbf{kx}}\, \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\,(a_{\mathbf{k}}\, e^{-\imath\omega_k t} + a^*_{-\mathbf{k}}\, e^{\imath\omega_k t}). \tag{1.33}$$

Возьмём производную правой и левой части по времени:

$$\imath \int \frac{\partial\varphi(t,\mathbf{x})}{\partial t}\, e^{-\imath\mathbf{kx}}\, \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}} = \sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\,(a_{\mathbf{k}}\, e^{-\imath\omega_k t} - a^*_{-\mathbf{k}}\, e^{\imath\omega_k t}). \tag{1.34}$$

Из последних двух соотношений несложно выразить функции $a_{\mathbf{p}}$ через поле и его производную (меняем $\mathbf{k}$ на $\mathbf{p}$):

$$a_{\mathbf{p}} = \int \Big(\omega_p\, \varphi(t,\mathbf{x}) + \imath\frac{\partial\varphi(t,\mathbf{x})}{\partial t}\Big)\, \frac{e^{\imath\mathrm{px}}\, d^3\mathbf{x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}}. \tag{1.35}$$

Хотя в правой части поле и экспонента $e^{\imath\mathrm{px}}$ зависят от времени, при интегрировании любого *решения* уравнения (1.26) по формуле (1.35) получится независящая от времени функция $a_{\mathbf{p}} = a(\mathbf{p})$.

Уравнение (1.26) является дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных. Для получения его решения необходимо задать значение поля $\varphi(0,\,\mathbf{x})$ и его первой производной по времени $\partial\varphi(0,\,\mathbf{x})/\partial t$ в начальный момент $t = 0$. Полагая в (1.35) $t = 0$, можно найти $a_{\mathbf{p}}$, а, следовательно, при помощи (1.31) значение поля в любой момент времени.

Отметим, что $\omega_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ нелинейно зависит от импульса $\mathbf{p}$. Поэтому волны, по которым разложено решение для свободного скалярного поля, обладают *дисперсией*. Это приводит к тому, что локализованный в пространстве пакет волн при $m \neq 0$ расплывается со временем. Действительно, $\mathbf{px} - \omega_p t = \mathbf{p}\,(\mathbf{x} - \mathbf{u}t)$, где скорость $\mathbf{u}$ равна $\mathbf{p}\,\omega_p/\mathbf{p}^2$. Волны с различной длиной волны $\lambda = 2\pi/|\mathbf{p}|$ будут двигаться с разной скоростью $\mathbf{u}$. Бездисперсионное решение с конечной энергией вида $\varphi(t,\,\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{u}t)$ возможно только при $m = 0$.

• Воспользуемся решением свободных уравнений в виде (1.31) для вычисления сохраняющихся величин. Начнём с полного импульса (1.29):

$$\mathbf{P} = -\int \dot{\varphi} \nabla \varphi \, d^3\mathbf{x}.$$

Подставляя в него (1.31), получаем:

$$\mathbf{P} = -\int (-\imath\omega_p \, a_\mathbf{p} e^{-\imath \mathrm{px}} + \imath\omega_p \, a^*_\mathbf{p} e^{\imath \mathrm{px}}) \, (\imath\mathbf{k} \, a_\mathbf{k} e^{-\imath \mathrm{kx}} - \imath\mathbf{k} \, a^*_\mathbf{k} e^{\imath \mathrm{kx}}) \, \frac{d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{k}}{2(2\pi)^3 \sqrt{\omega_p \omega_k}}.$$

Перемножим скобки. Интеграл по $d^3\mathbf{x}/(2\pi)^3$ от $e^{\pm\imath(\mathrm{p}-\mathrm{k})\mathrm{x}}$ даст функцию Дирака $\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})$, а от $e^{\pm\imath(\mathrm{p}+\mathrm{k})\mathrm{x}}$ – функцию $\delta(\mathbf{p}+\mathbf{k})\, e^{\pm 2\imath\omega_p t}$. Интегрируя с ними по $d^3\mathbf{k}$, имеем:

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{p} \left( a_\mathbf{p} a_{-\mathbf{p}} \, e^{-2\imath\omega_p t} + a^*_\mathbf{p} a^*_{-\mathbf{p}} \, e^{2\imath\omega_p t} + a_\mathbf{p} a^*_\mathbf{p} + a^*_\mathbf{p} a_\mathbf{p} \right) \frac{d^3\mathbf{p}}{2}.$$

При замене $\mathbf{p} \mapsto -\mathbf{p}$ первые два слагаемых образуют нечётные функции (множитель $\mathbf{p}$), поэтому интеграл от них равен нулю и окончательно:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \int \mathbf{p} \, (a^*_\mathbf{p} a_\mathbf{p} + a_\mathbf{p} a^*_\mathbf{p}) \, d^3\mathbf{p} = \int \mathbf{p} \, a^*_\mathbf{p} a_\mathbf{p} \, d^3\mathbf{p}. \tag{1.36}$$

Это выражение не зависит от времени, что отражает постоянство полного импульса поля.

Аналогично вычисляется полная энергия (1.28):

$$H = \frac{1}{2} \int \left( \dot{\varphi}^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2 \, \varphi^2 \right) d^3\mathbf{x}.$$

Можно несколько упростить вычисления, если заметить, что $(\nabla\varphi)(\nabla\varphi)$ эквивалентно $\nabla(\varphi\nabla\varphi) - \varphi\Delta\varphi$. Интеграл от $\nabla(\varphi\nabla\varphi)$ по теореме Гаусса равен поверхностному интегралу от $\varphi\nabla\varphi$, где поверхность окружает “всё пространство”. Будем считать, что на бесконечности поля равны нулю (иначе бы полная энергия расходилась). В силу этого, поверхностный член равен нулю и энергия равна:

$$H = \frac{1}{2} \int \left( \dot{\varphi}^2 + \varphi \left( -\Delta + m^2 \right) \varphi \right) d^3\mathbf{x}. \tag{1.37}$$

Оператор $-\Delta + m^2$, действуя под фурье-интегралом даёт $\mathbf{p}^2 + m^2 = \omega_p^2$. Интегрируя аналогично полному импульсу, снова получаем выражение не зависящее от времени:

$$H = \frac{1}{2} \int \omega_p \, (a^*_\mathbf{p} a_\mathbf{p} + a_\mathbf{p} a^*_\mathbf{p}) \, d^3\mathbf{p} = \int \omega_p \, a^*_\mathbf{p} a_\mathbf{p} \, d^3\mathbf{p}. \tag{1.38}$$

Таким образом, произведение $a^*_\mathbf{p} a_\mathbf{p}$ является интенсивностью гармоник фурье-разложения (1.31) с энергией $\omega_p$ и импульсом $\mathbf{p}$.

## 5 Комплексное скалярное поле

• Рассмотрим два скалярных поля $\Phi_1(\mathrm{x})$ и $\Phi_2(\mathrm{x})$, динамика которых описывается следующим лагранжианом ($m$ – константа):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\{(\partial_\mu \Phi_1)^2 + (\partial_\mu \Phi_2)^2\} - \frac{m^2}{2}\{\Phi_1^2 + \Phi_2^2\}, \tag{1.39}$$

уравнения движения для которого имеют вид:

$$(\partial^2 + m^2)\Phi_1 = 0, \qquad (\partial^2 + m^2)\Phi_2 = 0. \tag{1.40}$$

Лагранжиан *двухкомпонентного* скалярного поля (1.39) $\Phi_k = \{\Phi_1, \Phi_2\}$ инвариантен относительно поворотов в пространстве компонент поля:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \Phi_1' & = & \Phi_1 \cos\alpha & + & \Phi_2 \sin\alpha, \\ \Phi_2' & = & -\Phi_1 \sin\alpha & + & \Phi_2 \cos\alpha, \end{array} \right. \tag{1.41}$$

где $\alpha$ – произвольная константа (“угол поворота”).

Двухкомпонентное действительное скалярное поле может быть представлено как однокомпонентное комплексное поле, действительной и мнимой частью которого являются компоненты действительного поля:

$$\Psi = \frac{\Phi_1 + \imath\Phi_2}{\sqrt{2}}. \tag{1.42}$$

Несложно проверить, что лагранжиан, эквивалентный (1.39) имеет вид:

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \Psi^*)(\partial_\mu \Psi) - m^2\, \Psi^*\Psi, \tag{1.43}$$

где звёздочка – это комплексное сопряжение. Внешне в (1.43) функция стала одна. Однако она по-прежнему двухкомпонентна, поэтому все вычисления (получение уравнений движения, законов сохранения и т.д.) должны проводится так, будто $\Psi$ и $\Psi^*$ – это два независимых поля. В частности уравнения Лагранжа записываются следующим образом:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi}, \qquad \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi^*)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*}$$

и приводят к таким же уравнениям, как и для действительного поля:

$$(\partial^2 + m^2)\Psi = 0, \qquad (\partial^2 + m^2)\Psi^* = 0. \tag{1.44}$$

Несложно видеть, что они эквивалентны (1.40). Симметрия лагранжиана (1.41) на языке комплексного скалярного поля записывается в более компактном виде:

$$\Psi \mapsto \Psi' = e^{-\imath\alpha}\Psi \tag{1.45}$$

и аналогично для сопряжённого поля $\Psi^*$ с плюсом в экспоненте.

Тензор энергии импульса комплексного поля получается, как и в действительном случае, однако при взятии производной $\partial_\nu \mathcal{L}$ нужно суммировать производные по $\Psi$ и $\Psi^*$, что эквивалентно добавлению в $T^{\mu\nu}$ комплексно сопряженного члена:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi)}\,\partial^\nu \Psi + \partial^\nu \Psi^* \,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi^*)} - g^{\mu\nu}\mathcal{L}. \tag{1.46}$$

Подставляя лагранжиан (1.43), имеем:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \Psi^* \partial^\nu \Psi + \partial^\nu \Psi^*\, \partial^\mu \Psi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}.$$

Плотность энергии $\mathcal{H} = T^{00}$ и импульса $\mathcal{P}^i = T^{0i}$ для такого тензора равны (точка – производная по времени):

$$\mathcal{H} = \dot\Psi^* \dot\Psi + \nabla\Psi^* \nabla\Psi + m^2 \Psi^* \Psi, \qquad \mathcal{P}^i = -\dot\Psi^*\, \nabla\Psi - (\nabla\Psi^*)\, \dot\Psi. \tag{1.47}$$

Инвариантность лагранжиана относительно фазовых преобразований (1.45) приводит к сохраняющемуся току. Действительно, пусть в общем случае лагранжиан инвариантен относительно преобразований

$$\Psi(x) \mapsto \Psi'(x) = F(\Psi(x), \alpha_k),$$

где $\alpha_k$ – набор из $n$ параметров. Так как после преобразования лагранжиан имеет тот же вид (не зависит от $\alpha_k$), имеем:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\Psi',\, \Psi'^*)}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi'}\,\frac{\partial \Psi'}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Psi'}\,\frac{\partial(\partial_\mu \Psi')}{\partial \alpha_k} + \text{к.с.} = 0,$$

где “к.с” – комплексно сопряженные слагаемые. Подставляя в первом слагаемом уравнения Лагранжа и положив $\alpha_k = 0$, получаем ($\lessdot \mathrm{H}_4$) набор $k$ сохраняющихся токов:

$$\partial_\mu J^\mu_k = 0, \qquad J^\mu_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi)}\,\frac{\partial \Psi'}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi^*)}\,\frac{\partial \Psi'^*}{\partial \alpha_k}\Big|_{\alpha=0}. \tag{1.48}$$

Для лагранжиана (1.43) и фазовых преобразований (1.45) с единственным параметром, сохраняющийся, *действительный* ток имеет вид:

$$J^\mu = \imath \Psi^* \partial^\mu \Psi - \imath(\partial^\mu \Psi^*)\, \Psi. \tag{1.49}$$

Интеграл от его нулевой компоненты по всему пространству:

$$Q = \imath \int (\Psi^*\, \dot\Psi - \dot\Psi^*\, \Psi)\, d^3\mathbf{x} \tag{1.50}$$

называется *зарядом* комплексного скалярного поля. В качестве упражнения, стоит проверить выполнение уравнение $\partial_\mu J^\mu = 0$ для (1.49) непосредственно используя уравнения движения (1.44).

• Решения уравнений комплексного скалярного поля $(\partial^2 + m^2)\Psi = 0$ запишем сразу по аналогии с действительным полем:

$$\Psi = \int (a_{\mathbf{p}}\, e^{-\imath \mathrm{px}} + b^*_{\mathbf{p}}\, e^{\imath \mathrm{px}})\, \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}}, \tag{1.51}$$

где второй коэффициент разложения обозначен как $b^*_{\mathbf{p}}$. Его уже нельзя положить равным $a^*_{\mathbf{p}}$, т.к. поле не является действительным.

При помощи решения (1.51) энергия (1.47) комплексного скалярного поля находится как и в случае действительного поля:

$$H = \int \omega_p\, (a^*_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} + b^*_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}})\, d^3\mathbf{p}. \tag{1.52}$$

Аналогичное выражение получается для импульса поля:

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{p}\ (a^*_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} + b^*_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}})\ d^3\mathbf{p}. \tag{1.53}$$

В этих соотношениях мы сразу учли, что $b_{\mathbf{p}} b^*_{\mathbf{p}} = b^*_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}$. Для классического поля это преобразование тривиально, однако, как мы увидим дальше, это не совсем так в квантовой теории поля.

Вводя 4-вектор $p^\mu = \{\omega_p,\, \mathbf{p}\}$, выражения для энергии и импульса можно объединить в одно:

$$P^\mu = \int p^\mu\ (a^*_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} + b^*_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}})\ d^3\mathbf{p}. \tag{1.54}$$

Также как и в действительном случае $a^*_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}$ и $b^*_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}$ являются интенсивностью вклада в энергию и импульс поля величин $\omega_p,\, \mathbf{p}$.

Иное выражение получается для заряда комплексного поля (1.50):

$$Q = \int (a^*_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} - b^*_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}})\, d^3\mathbf{p}, \tag{1.55}$$

который, в отличии от энергии, знакопеременный. При этом $a^*_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}$ является плотностью положительного заряда, а $b^*_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}$ – плотностью отрицательного заряда. Независимо от знака заряда, они обладают одинаковой энергией $\omega_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ и импульсом $\mathbf{p}$. Термин “заряд” пока означает лишь некоторую сохраняющуюся величину. “Привычным” зарядом он станет после введения взаимодействия между полями.

Таким образом, импульсное представление имеет очень естественную интерпретацию и оказывается удобной основой для проведения процедуры квантования, которую мы рассмотрим в следующей главе.

• Простейшим обобщением комплексного поля может быть пара комплексных полей, так что $\Psi$ обозначает столбик $(\Psi_1 \;\; \Psi_2)^T$, а комплексное сопряжение понимается как эрмитово сопряжение:

$$\Psi^+\Psi = \begin{pmatrix}\Psi_1^* & \Psi_2^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_1 \\ \Psi_2\end{pmatrix} = \Psi_1^*\Psi_1 + \Psi_2^*\Psi_2.$$

Если лагранжиан такого поля имеет вид:

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu\Psi^+)(\partial_\mu\Psi) - m^2\,\Psi^+\Psi, \tag{1.56}$$

то он инвариантен не только относительно фазового преобразования (1.45), но и относительно более общего *унитарного* преобразования:

$$\Psi(x) \mapsto \Psi'(x) = U\,\Psi(x), \qquad U^+U = 1,$$

где $U$ – матрица 2x2 с комплексными элементами. Действительно, в матричных обозначениях:

$$\Psi'^+\Psi' = \Psi^+U^+U\Psi = \Psi^+\Psi.$$

Бесконечно малое унитарное преобразование можно записать в следующем виде:

$$U \approx 1 - \imath\alpha_0 - \imath\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\sigma},$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – эрмитовы ($\boldsymbol{\sigma}^+ = \boldsymbol{\sigma}$) матрицы Паули (стр. **??**) и параметры $\alpha_0$ и $\boldsymbol{\alpha}$ действительны. Несложно видеть ($\lessdot \mathrm{H}_5$) , что в первом порядке по параметрам выполняется условие унитарности $U^+U = 1$. Матрицы $U$ образуют группу $\mathbf{U}(2)$. Симметрия, связанная с параметром $\alpha_0$ приводит к сохраняющемуся заряду подобному обычному комплексному полю. Остальные три параметра дают сохраняющийся ток вида:

$$\mathbf{J}^\mu = \imath(\Psi^+\boldsymbol{\sigma}\partial^\mu\Psi - \partial^\mu\Psi^+\boldsymbol{\sigma}\Psi), \tag{1.57}$$

где при помощи жирного шрифта изображён вектор, компоненты которого соответствуют трём параметрам преобразования $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, т.е.: $\mathbf{J}^\mu = \{J_1^\mu,\, J_2^\mu,\, J_3^\mu\}$. Используя уравнения поля, аналогичные (1.44) можно проверить, что выполняется уравнение непрерывности $\partial_\mu\mathbf{J}^\mu = 0$. Соответственно сохраняются три дополнительных к "обычному" заряда.

Симметрии лагранжиана, связанные с преобразованием полей при которых координаты остаются неизменными, называют *внутренними симметриями*. Такие симметрии возникают благодаря уменьшению параметрического произвола в лагранжиане. Действительно, если бы массовый член в (1.56) имел вид $m_1\Psi_1^*\Psi_1 + m_2\Psi_2^*\Psi_2$ симметрия разрушилась бы и ток (1.57) не сохранялся.

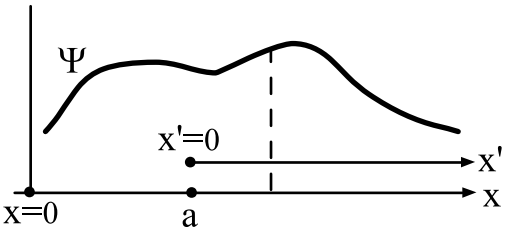
## 6 Симметрии и законы сохранения

Инвариантность лагранжиана относительно преобразований координат и полей приводит к законам сохранения. Этот замечательный факт был установлен Эмми Нётер в 1918 г.

Различают *непрерывные* и *дискретные* симметрии. Первые зависят от вещественных параметров, равенство нулю которых даёт тождественное (единичное) преобразование. При изменении этих параметров мы можем "непрерывным образом" получить любой элемент группы симметрии, соответствующей данному преобразованию. При непрерывных преобразованиях координат и полей всегда можно рассмотреть бесконечно малое преобразование в окрестности единичного преобразования. К дискретным преобразованиям относятся, например, инверсии времени и координат: $\mathrm{x} \mapsto \mathrm{x}' = -\mathrm{x}$. В этом случае бесконечно малых преобразований нет. Теорема Нётер формулируется для непрерывных преобразований.

Частным примером этой теоремы был вывод сохраняющегося тока для комплексного скалярного поля (стр. 31). Такая симметрия называется "*внутренней*" так как она меняет поле, но не затрагивает координат от которых зависит поле.

Наше пространство-время однородно (нет выделенной точки) и изотропно (нет выделенных направлений). Первая симметрия приводит к сохранению тензора энергии-импульса, а вторая – к сохранению момента импульса поля. Рассмотрим сначала однородность пространства. Соответствующие преобразования координат являются трансляциями (сдвигами) при которых физика должна оставаться неизменной:




$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{x}' = \mathrm{x} - \mathrm{a} \\ \mathrm{x} = \mathrm{x}' + \mathrm{a} \end{array} \right\} \qquad \Psi'_k(\mathrm{x}') = \Psi_k(\mathrm{x}).$$

По определению, поле $\Psi_k(\mathrm{x})$ задано в каждой точке 4-пространства. Точки пространства являются геометрическими сущностями и не зависят от способа их нумерации, для которой мы используем различные системы координат (в 4-пространстве в общем случае они называются системами отсчёта).

Если мы сдвигаем начало отсчёта координат $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ и начало отсчёта времени $t' = t - a^0$, значение поля (числа $\Psi_k$) в данной точке 4-пространства не изменятся. Это записывается в виде $\Psi'_k(\mathrm{x}') = \Psi_k(\mathrm{x})$.

Хотя значение поля не меняется, функциональная зависимость от $\mathrm{x}'$ становится другой, что помечается штрихом у функции $\Psi'_k$. Если сдвиг $a^\mu = \{a^0, \mathbf{a}\}$ бесконечно мал, функциональное изменение поля также мало. Раскладывая преобразование поля в ряд Тейлора, имеем:

$$\Psi'_k(\mathrm{x}') = \Psi_k(\mathrm{x}) = \Psi_k(\mathrm{x}' + \mathrm{a}) \approx \Psi_k(\mathrm{x}') + \partial'_\mu \Psi_k(\mathrm{x}')\, a^\mu = \Psi_k(\mathrm{x}') + \delta\Psi_k(\mathrm{x}'),$$

где $\delta\Psi_k = a^\mu \partial_\mu \Psi_k$. Таким образом, поправка к "исходной" функции $\Psi_k$ определяется её производной, свёрнутой с бесконечно малым смещением. Например, скалярная функция $\varphi(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2$, заданная таким образом в системе координат x, в системе координат $\mathrm{x}'$ будет иметь функциональную зависимость $\varphi'(\mathrm{x}') = (\mathrm{x}' + \mathrm{a})^2 \approx \mathrm{x}'^2 + 2\mathrm{x}'\mathrm{a}$.

Лагранжиан – это инвариант (скаляр), не зависящий явно от координат (только через полевые функции и их производные). Поэтому можно написать:

$$\mathcal{L}\big(\Psi'_k(\mathrm{x}'),\, \partial'_\mu \Psi'_k(\mathrm{x}')\big) = \mathcal{L}\big(\Psi_k(\mathrm{x}),\, \partial_\mu \Psi_k(\mathrm{x})\big), \tag{1.58}$$

где в правой и левой части стоит *одна и та же* функция $\mathcal{L}$. Эта инвариантность и приводит к закону сохранения энергии-импульса.

Действительно, подставим в (1.58) слева изменение функциональной зависимости, а справа перейдём от x к $\mathrm{x}'$ (чтобы в равенстве стояли одинаковые функции и переменные от которых они зависят):

$$\mathcal{L}\big(\Psi_k(\mathrm{x}') + \delta\Psi_k(\mathrm{x}'),\, \partial'_\mu \Psi_k(\mathrm{x}') + \partial'_\mu \delta\Psi_k(\mathrm{x}')\big) = \mathcal{L}\big(\Psi_k(\mathrm{x}' + \mathrm{a}),\, \partial_\mu \Psi_k(\mathrm{x}' + \mathrm{a})\big).$$

Так как $\mathrm{x}'$ – это просто обозначение переменной, штрих можно опустить, переобозначив $\mathrm{x}'$ как x. Величины a и $\delta\Psi_k \sim \mathrm{a}$ бесконечно малые, поэтому разложим по ним в ряд Тейлора левую часть равенства и перенеся вправо нулевое по $\delta\Psi_k$ приближение, получим:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_k}\,\delta\Psi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_k)}\,\partial_\mu \delta\Psi_k = \mathcal{L}\big(\Psi_k(\mathrm{x}+\mathrm{a}),\, \partial_\mu \Psi_k(\mathrm{x}+\mathrm{a})\big) - \mathcal{L}\big(\Psi_k(\mathrm{x}),\, \partial_\mu \Psi_k(\mathrm{x})\big).$$

В первом слагаемом слева подставим уравнение Лагранжа (1.19), стр. 23 и выделим полную производную. Правую часть разложим в ряд по $a^\mu$:

$$\partial_\mu \Big( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_k)}\, \partial_\nu \Psi_k\, a^\nu \Big) = a^\nu\, \partial_\nu \mathcal{L}.$$

Беря производную по $a^\nu$, получаем (1.20), стр. 24 а, следовательно, и закон сохранения тензора энергии-импульса.

## 7 Момент импульса поля

• Рассмотрим теперь инвариантность лагранжиана относительно поворотов в 4-пространстве (преобразования Лоренца и 3-мерные вращения):

$$x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu}\, x^\nu, \qquad \Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} + ...$$

Первое слагаемое $g_{\mu\nu}$ в разложении лоренцевой матрицы $\Lambda_{\mu\nu}$ соответствует единичному преобразованию. Второе слагаемое $\omega_{\mu\nu}$ будем считать бесконечно малым. Таким образом, рассматриваем следующие преобразования:

$$x'_\mu \approx x_\mu + \omega_{\mu\nu}\, x^\nu, \qquad x_\mu \approx x'_\mu - \omega_{\mu\nu}\, x'^\nu. \tag{1.59}$$

Обратное преобразование (второе соотношение) проверяется ($\lessdot \mathrm{H}_6$) подстановкой в прямые преобразования (первое соотношение) с точностью до первого порядка малости по $\omega_{\mu\nu}$. Параметры $\omega_{\mu\nu}$ антисимметричны:

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \tag{1.60}$$

Это непосредственно следует из инвариантности $\mathrm{x}'^2 = \mathrm{x}^2$ в первом порядке малости по $\omega_{\mu\nu}$:

$$\mathrm{x}'^2 = g^{\mu\nu}(x_\mu + \omega_{\mu\alpha}x^\alpha)(x_\nu + \omega_{\nu\beta}x^\beta) = \mathrm{x}^2 + 2\omega_{\nu\beta}\, x^\nu x^\beta + ... = \mathrm{x}^2.$$

Свёртка $\omega_{\nu\beta}\, x^\nu x^\beta$ с симметричным тензором $x^\nu x^\beta$ будет равна нулю, если $\omega_{\nu\beta}$ является антисимметричным тензором.

В случае лоренцевского буста (движения со скоростью $v$ вдоль оси $x$) и поворотов в плоскости $(x, y)$ на угол $\phi$ для 1+2 пространства $x^\mu = \{t, x, y\}$ параметры преобразования равны ($\lessdot \mathrm{H}_7$):

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -v & 0 \\ v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi \\ 0 & -\phi & 0 \end{pmatrix}.$$

В общем случае 6 независимых компонентов антисимметричного тензора $\omega_{\mu\nu}$ определяются тремя компонентами скорости и тремя углами поворота пространственных осей.

Скалярное поле $\varphi(\mathrm{x})$ является множеством чисел, заданных в точках 4-пространства. Эта функция не меняет своих *значений* при преобразованиях Лоренца. Однако, уже векторное поле $A^\mu(\mathrm{x})$ меняется, преобразуясь так-же как и 4-координаты:

$$\varphi'(\mathrm{x}') = \varphi(\mathrm{x}), \qquad A'_\mu(\mathrm{x}') \approx A_\mu(\mathrm{x}) + \omega_{\mu\nu}\, A^\nu(\mathrm{x}).$$

Возможны и более сложные случаи (например, спинорное поле, стр. **??**).

Поэтому запишем преобразование для произвольного поля $\Psi_k(\mathrm{x})$ в общем виде при помощи некоторой матрицы $U_{ij}$, зависящей от параметров преобразований Лоренца $\Lambda$:

$$\Psi'_i(\mathrm{x}') = U_{ij}(\Lambda)\,\Psi^j(\mathrm{x}) \;\approx\; \Psi_i(\mathrm{x}) - \frac{\imath}{2}\,\Sigma^{\mu\nu}_{ij}\,\omega_{\mu\nu}\,\Psi^j(\mathrm{x}), \tag{1.61}$$

где во втором равенстве эта матрица разложена в ряд по $\omega$ и $-\imath\Sigma^{\mu\nu}_{ij}$ – коэффициенты такого разложения. Смысл индексов $i, j$ зависит от трансформационных свойств поля. Для векторных полей – это обычные лоренцевы индексы, меняющиеся от 0 до 3. Так как $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$, по верхним индексам коэффициенты $\Sigma^{\mu\nu}_{ij}$ *антисимметричны* (симметричный тензор при свёртке с антисимметричным равен нулю).

В случае скалярного поля коэффициенты $\Sigma^{\mu\nu}_{ij}$ равны нулю. Для векторного поля:

$$-\imath\Sigma^{\mu\nu}_{ij} = \delta^\mu_i\delta^\nu_j - \delta^\mu_j\delta^\nu_i. \tag{1.62}$$

Несложно проверить, что в этом случае справедлив следующий коммутатор для матриц $(\mathbf{\Sigma}^{\alpha\beta})_{ij} = \Sigma^{\alpha\beta}_{ij}$:

$$[\mathbf{\Sigma}^{\alpha\beta},\,\mathbf{\Sigma}^{\mu\nu}] = \imath\,(g^{\alpha\mu}\,\mathbf{\Sigma}^{\nu\beta} - g^{\alpha\nu}\,\mathbf{\Sigma}^{\mu\beta} + g^{\beta\nu}\,\mathbf{\Sigma}^{\mu\alpha} - g^{\beta\mu}\,\mathbf{\Sigma}^{\nu\alpha}), \tag{1.63}$$

где произведение $(\mathbf{\Sigma}^{\alpha\beta}\mathbf{\Sigma}^{\mu\nu})_{ij}$ равно $\Sigma^{\alpha\beta}_{ik}\Sigma^{\mu\nu}_{kj}$ и мы не следим за высотой латинских индексов (хотя в случае векторного поля подразумеваем ковариантное суммирование).

Коммутатор (1.63) справедлив для коэффициентов разложения любой матрицы $U_{ij}(\Lambda)$, связанной с преобразованиями Лоренца групповым образом так, что $\mathbf{U}(\Lambda_1)\mathbf{U}(\Lambda_2) = \mathbf{U}(\Lambda_1\Lambda_2)$ и $\mathbf{U}^{-1}(\Lambda) = \mathbf{U}(\Lambda^{-1})$. Наметим идею соответствующего доказательства (его можно пока опустить). Рассмотрим два независимых преобразования Лоренца $\Lambda$, $\bar\Lambda$ и следующую композицию преобразований полей в матричном виде:

$$\mathbf{U}^{-1}(\Lambda)\,\mathbf{U}(\bar\Lambda)\,\mathbf{U}(\Lambda) = \mathbf{U}(\Lambda^{-1}\bar\Lambda\,\Lambda). \tag{1.64}$$

Подставим бесконечно малое преобразование $\bar\Lambda = 1 + \bar\omega$, которому соответствует $\mathbf{U}(1+\bar\omega) = 1 - (\imath/2)\,\mathbf{\Sigma}^{\mu\nu}\bar\omega_{\mu\nu}$. В первом порядке малости ($\lessdot \mathrm{H}_8$):

$$\mathbf{U}^{-1}(\Lambda)\,\mathbf{\Sigma}^{\mu\nu}\,\mathbf{U}(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\alpha\,\Lambda^\nu{}_\beta\,\mathbf{\Sigma}^{\alpha\beta}. \tag{1.65}$$

Ещё раз подставим ($\lessdot \mathrm{H}_9$) бесконечно малое преобразование $\Lambda = 1 + \omega$:

$$\frac{\imath}{2}\,\omega_{\alpha\beta}\,[\mathbf{\Sigma}^{\alpha\beta},\,\mathbf{\Sigma}^{\mu\nu}] = \omega_{\alpha\beta}\,(g^{\mu\alpha}\,\mathbf{\Sigma}^{\beta\nu} + g^{\nu\alpha}\,\mathbf{\Sigma}^{\mu\beta}).$$

Антисимметризуя по $\alpha$, $\beta$ выражение в круглых скобках или беря производную по $\omega$ при помощи (1.70), получаем (1.63).

• Перейдём теперь собственно к теореме Нётер. Как и в случае с трансляцией, найдём изменение функциональной формы поля в штрихованной системе отсчёта:

$$\Psi'_i(\mathrm{x}') \approx \Psi_i(x'_\mu - \omega_{\mu\nu}\, x'^\nu) - \frac{\imath}{2}\,\Sigma^{\mu\nu}_{ij}\,\omega_{\mu\nu}\,\Psi^j(\mathrm{x}'),$$

где в первом слагаемом вместо x в (1.61) подставлены обратные бесконечно малые преобразования Лоренца. Во втором слагаемом в аргументе функции поставлен штрих, что возможно, так как мы удерживаем первый порядок малости по $\omega$, которые уже стоит множителем в этом слагаемом. Раскладывая в ряд Тейлора по $\omega$, имеем:

$$\Psi'_i(\mathrm{x}') \approx \Psi_i(\mathrm{x}') + \delta\Psi_i(\mathrm{x}'), \tag{1.66}$$

где функциональное изменение поля равно

$$\delta\Psi_i(\mathrm{x}') = -\omega_{\mu\nu}\, x'^\nu\, \partial'^\mu \Psi_i(\mathrm{x}') - \frac{\imath}{2}\,\Sigma^{\mu\nu}_{ij}\,\omega_{\mu\nu}\,\Psi^j(\mathrm{x}'). \tag{1.67}$$

Лагранжиан является скаляром относительно преобразований Лоренца:

$$\mathcal{L}\big(\Psi'_k(\mathrm{x}'),\, \partial'_\mu \Psi'_k(\mathrm{x}')\big) = \mathcal{L}\big(\Psi_k(\mathrm{x}),\, \partial_\mu \Psi_k(\mathrm{x})\big). \tag{1.68}$$

Переходя слева к функциям $\Psi(\mathrm{x}')$ (1.66), а справа к координатам $x_\mu = x'_\mu - \omega_{\mu\nu}x'^\mu$ и *опуская* штрихи у координат, имеем:

$$\mathcal{L}\big(\Psi_k(\mathrm{x}) + \delta\Psi_k(\mathrm{x}),\, \partial_\mu\Psi_k(\mathrm{x}) + \partial_\mu\delta\Psi_k(\mathrm{x})\big) = \mathcal{L}\big(\Psi_k(\mathrm{x}+\delta\mathrm{x}),\, \partial_\mu\Psi_k(\mathrm{x}+\delta\mathrm{x})\big),$$

где $\delta x_\mu = -\omega_{\mu\nu}x^\nu$. Величины $\delta\mathrm{x}$ и $\delta\Psi_k$ бесконечно малые, поэтому разложим по ним в ряд Тейлора левую часть равенства и перенеся вправо нулевое по $\delta\Psi_k$ приближение $\mathcal{L} = \mathcal{L}\big(\Psi_k(\mathrm{x}),\, \partial_\mu\Psi_k(\mathrm{x})\big)$, получим:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_k}\,\delta\Psi_k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi_k)}\,\partial_\mu\delta\Psi_k = \mathcal{L}\big(\Psi_k(\mathrm{x}+\delta\mathrm{x}),\, \partial_\mu\Psi_k(\mathrm{x}+\delta\mathrm{x})\big) - \mathcal{L}.$$

Подставим слева в первом слагаемом уравнения Лагранжа, выделив полную производную и разложим правую часть в ряд по $\delta\mathrm{x}$:

$$\partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi_k)}\,\delta\Psi_k\Big) = \delta x_\mu\,\partial^\mu\mathcal{L}. \tag{1.69}$$

Учитывая определение $\delta\Psi_k$ и $\delta x_\mu$ перепишем это уравнение в явном виде:

$$\omega_{\mu\nu}\,\partial_\lambda\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda\Psi_k)}\,x^\nu\partial^\mu\Psi_k\Big) + \frac{\imath}{2}\,\Sigma^{\mu\nu}_{ij}\,\omega_{\mu\nu}\,\partial_\lambda\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda\Psi_i)}\,\Psi_j\Big) = \omega_{\mu\nu}\,x^\nu\,\partial^\mu\mathcal{L}.$$

Возьмём теперь производную этого соотношения по $\omega_{\alpha\beta}$.

В силу антисимметричности тензора, производная равна

$$\frac{\partial \omega_{\mu\nu}}{\partial \omega_{\alpha\beta}} = \delta^\alpha_\mu\, \delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu\, \delta^\beta_\mu. \tag{1.70}$$

Действительно, $\partial\omega_{01}/\partial\omega_{01} = 1$. Но для $\partial\omega_{10}/\partial\omega_{01} = -\partial\omega_{01}/\partial\omega_{01} = -1$, что и учитывается в соотношении (1.70). В результате получаем:

$$\partial_\lambda\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda \Psi_k)}\,(x^\alpha\partial^\beta - x^\beta\partial^\alpha)\,\Psi_k\Big) - \partial_\lambda\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda \Psi_i)}\,\imath\Sigma^{\alpha\beta}_{ij}\,\Psi^j\Big) = (x^\alpha\partial^\beta - x^\beta\partial^\alpha)\,\mathcal{L}.$$

Правую часть равенства можно переписать в виде $\partial^\lambda\Big((x^\alpha\delta^\beta_\lambda - x^\beta\delta^\alpha_\lambda)\,\mathcal{L}\Big)$. Введём канонический тензор энергии-импульса (стр. 24):

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_k)}\,\partial^\nu \Psi_k - g^{\mu\nu}\,\mathcal{L}. \tag{1.71}$$

С его помощью определим *тензор полного момента* поля:

$$J^{\mu,\,\alpha\beta} = x^\alpha\, T^{\mu\beta} - x^\beta\, T^{\mu\alpha} - \imath\Sigma^{\alpha\beta}_{ij}\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_i)}\,\Psi^j, \tag{1.72}$$

который удовлетворяет уравнению непрерывности по первому индексу:

$$\partial_\mu J^{\mu,\,\alpha\beta} = 0. \tag{1.73}$$

Следовательно, $J^{0,\,\alpha\beta}$ являются плотностями сохраняющихся величин. Тензор $J^{\mu,\,\alpha\beta}$ антисимметричен по последним двум индексам, поэтому существует 6 сохраняющихся зарядов (по числу параметров преобразований $\omega_{\alpha\beta}$). Первые два слагаемых образуют *тензор углового момента*, а последнее слагаемое называют *спином* поля. Эти названия связаны со структурой компонент полного момента. Угловой момент явным образом зависит от 4-координат и возникает в результате преобразования аргументов полевых функций. Спиновая компонента от координат явным образом не зависит и возникает в результате преобразования собственно полевых функций при преобразованиях Лоренца.

Для скалярного поля $\Sigma^{\alpha\beta}_{ij} = 0$ и спиновая компонента момента равна нулю. Если поле $\Psi_k$ векторное, то спиновый момент не равен нулю и, так как $-\imath\Sigma^{\alpha\beta}_{ij} = \delta^\alpha_i\delta^\beta_j - \delta^\alpha_j\delta^\beta_i$, имеем:

$$J^{\mu,\,\alpha\beta} = x^\alpha\, T^{\mu\beta} - x^\beta\, T^{\mu\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_\alpha)}\,\Psi^\beta - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_\beta)}\,\Psi^\alpha. \tag{1.74}$$

Если $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$, то угловой и спиновый моменты сохраняются независимым образом (см. стр. 40). Для несимметричного тензора энергии-импульса сохраняющейся величиной является только полный момент, а не его составляющие по отдельности.

## 8 Неоднозначность законов сохранения

• Запишем ещё раз выражения для канонического тензора энергии-импульса (симметрия относительно трансляций в 4-пространстве):

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_k)}\,\partial^\nu \Psi_k - g^{\mu\nu}\,\mathcal{L}$$

и тензора полного момента импульса поля (симметрия относительно вращений в 4-пространстве):

$$J^{\mu,\alpha\beta} = L^{\mu,\alpha\beta} + S^{\mu,\alpha\beta},$$

где угловая и спиновая компоненты полного момента импульса равны:

$$L^{\mu,\alpha\beta} = x^\alpha\, T^{\mu\,\beta} - x^\beta\, T^{\mu\,\alpha}, \qquad S^{\mu,\alpha\beta} = -\imath\Sigma_{ij}^{\alpha\beta}\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_i)}\,\Psi^j.$$

По первому индексу тензор энергии-импульса и момент поля удовлетворяют уравнениям непрерывности

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_\mu J^{\mu,\alpha\beta} = 0. \tag{1.75}$$

Числа $\Sigma_{ij}^{\alpha\beta}$ в определении спиновой компоненты зависят от конкретных трансформационных свойств поля $\Psi_k$. Однако они всегда антисимметричны по верхним индексам, так как антисимметричны параметры бесконечно малых преобразований Лоренца $\omega_{\alpha\beta}$. Соответственно, тензор полного момента поля $J^{\mu,\alpha\beta}$ по последним двум индексам также антисимметричен (угловая часть момента антисимметрична явным образом).

Канонический тензор энергии-импульса, в общем случае, может оказаться несимметричным. Тем не менее, для скалярного и векторного поля с лагранжианом (**??**) он симметричен: $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. Если это так, то угловой и спиновый моменты сохраняются независимо друг от друга. Действительно:

$$\partial_\mu L^{\mu,\,\alpha\beta} = \partial_\mu(x^\alpha\, T^{\mu\beta} - x^\beta\, T^{\mu\alpha}) = \delta_\mu^\alpha\, T^{\mu\beta} - \delta_\mu^\beta\, T^{\mu\alpha} = T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha} = 0, \tag{1.76}$$

где сразу учтены уравнения непрерывности $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Если сохраняется угловой момент $L^{\mu,\alpha\beta}$, то, в силу сохранения полного момента $J^{\mu,\alpha\beta}$, будет сохраняться и спиновая компонента $S^{\mu,\alpha\beta}$. Для скалярного поля это тривиально, так как его спиновая компонента тождественно равна нулю. В случае векторного поля, мы имеем две независимые сохраняющиеся величины $L^{\mu,\alpha\beta}$ и $S^{\mu,\alpha\beta}$.

• Напомним (стр. 24), что законы сохранения в дифференциальной форме (1.75) сами по себе ещё не являются собственно законами сохранения. Чтобы перейти к величинам непосредственно не зависящим от времени, необходимо учесть граничные условия (убывание полей на бесконечности) и записать интегральные сохраняющиеся величины 4-импульса поля и его момента:

$$P^\nu = \int T^{0\nu}\, d^3\mathbf{x} = const, \qquad J^{\alpha\beta} = \int J^{0,\alpha\beta}\, d^3\mathbf{x} = const. \qquad (1.77)$$

Далее будет предполагаться, что интегрирование в этих соотношениях ведётся по всему пространству. В принципе, можно рассматривать и ограниченную область пространства. Однако 4-импульс и момент поля внутри этой области, вообще говоря, не сохраняются. Для рассмотрения таких задач в законе сохранения в интегральной форме необходимо дополнительно учитывать интегралы от потоков соответствующих величин по поверхности, охватывающей область пространства. Эти потоки ("втекаемые" или "вытекаемые" из области) меняют значения интегралов от $T^{0\nu}$ и $J^{0,\alpha\beta}$.

Так как "истинными" законами сохранения являются интегральные соотношения (1.77), плотности, входящие в дифференциальные уравнения непрерывности (1.75) определены неоднозначно. Действительно, к любому сохраняющемуся току $J^\mu$ можно прибавить некоторую комбинацию полей, которая, в свою очередь, удовлетворяет уравнению непрерывности. Понятно, что подобный модифицированный ток также будет сохранятся. Пусть $\Phi^{\mu\nu}$ – антисимметричный тензор: $\Phi^{\mu\nu} = -\Phi^{\nu\mu}$. Тогда

$$\partial_\mu(J^\mu + \partial_\nu \Phi^{\mu\nu}) = 0,$$

так как в силу перестановочности производных $\partial_\nu\partial_\mu = \partial_\mu\partial_\nu$ и антисимметричности $\Phi^{\mu\nu}$, имеем $\partial_\mu\partial_\nu\Phi^{\mu\nu} = 0$. Поэтому добавление к току величины $\partial_\nu\Phi^{\mu\nu}$ не нарушит дифференциального закона сохранения.

Подобная неоднозначность не сказывается на сохраняющихся величинах (интеграл от $J^0$ по $d^3\mathbf{x}$). Действительно, в силу антисимметричности $\Phi^{00} = 0$, поэтому $\partial_\nu\Phi^{0\nu} = \partial_i\Phi^{0i}$, где $i = 1, 2, 3$. Интеграл от такой дивергенции по 3-пространству, в силу теоремы Гаусса, равен поверхностному интегралу, по поверхности, охватывающей всё 3-пространство. Для убывающих на бесконечности функций он равен нулю.

Неоднозначность *плотностей* сохраняющихся величин можно использовать для придания им тех или иных свойств. В частности, всегда можно сделать тензор энергии-импульса симметричным. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

• Перейдём от канонических тензоров энергии-импульса и спина к новым тензорам энергии-импульса и спина при помощи тензора $\Phi^{\mu,\alpha\beta}$, который антисимметричен по последним двум индексам ($\Phi^{\mu,\alpha\beta} = -\Phi^{\mu,\beta\alpha}$):

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\partial_\gamma\,(\Phi^{\gamma,\mu\nu} - \Phi^{\mu,\gamma\nu} - \Phi^{\nu,\gamma\mu}), \qquad \tilde{S}^{\mu,\alpha\beta} = S^{\mu,\alpha\beta} - \Phi^{\mu,\alpha\beta}. \quad (1.78)$$

Тензор $\tilde{T}^{\mu\nu}$ по-прежнему удовлетворяет уравнению непрерывности:

$$\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\,\partial_\gamma\,(\Phi^{\gamma,\mu\nu} - \Phi^{\mu,\gamma\nu}) - \frac{1}{2}\,\partial_\mu\,\partial_\gamma\,\Phi^{\nu,\gamma\mu} = 0.$$

Первое слагаемое (член в круглых скобках) равен нулю, в силу явной антисимметрии по индексам $\mu$ и $\gamma$. Последний член равен нулю, так как тензор $\Phi^{\nu,\gamma\mu}$ антисимметричен по последним двум индексам.

Используя тензоры $\tilde{T}^{\mu\nu}$ и $\tilde{S}^{\mu,\alpha\beta}$ можно записать новый полный момент:

$$\tilde{J}^{\mu,\alpha\beta} = x^\alpha\,\tilde{T}^{\mu\,\beta} - x^\beta\,\tilde{T}^{\mu\,\alpha} + \tilde{S}^{\mu,\alpha\beta}.$$

Он как и канонический момент сохраняется. Действительно $\tilde{J}^{\mu,\alpha\beta}$ равен:

$$J^{\mu,\alpha\beta} + \frac{x^\alpha}{2}\,\partial_\gamma\,(\Phi^{\gamma,\mu\beta} - \Phi^{\mu,\gamma\beta} - \Phi^{\beta,\gamma\mu}) - \frac{x^\beta}{2}\,\partial_\gamma\,(\Phi^{\gamma,\mu\alpha} - \Phi^{\mu,\gamma\alpha} - \Phi^{\alpha,\gamma\mu}) - \Phi^{\mu,\alpha\beta}.$$

Беря производные по $\partial_\mu$ и учитывая, что $\partial_\mu J^{\mu,\alpha\beta} = 0$, получаем:

$$\partial_\mu \tilde{J}^{\mu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\partial_\gamma\,(\Phi^{\gamma,\alpha\beta} - \Phi^{\alpha,\gamma\beta} - \Phi^{\beta,\gamma\alpha}) - \frac{1}{2}\partial_\gamma\,(\Phi^{\gamma,\beta\alpha} - \Phi^{\beta,\gamma\alpha} - \Phi^{\alpha,\gamma\beta}) - \partial_\mu \Phi^{\mu,\alpha\beta},$$

где опущены производные от круглых скобок, равные, как мы видели при вычислении $\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu}$, нулю. Кроме этого проведены свёртки с $\partial_\mu x^\alpha = \delta^\alpha_\mu$ и $\partial_\mu x^\beta = \delta^\beta_\mu$. Приводя подобные слагаемые, получаем

$$\partial_\mu \tilde{J}^{\mu,\alpha\beta} = 0. \quad (1.79)$$

Если теперь выше выбрать $\Phi^{\mu,\alpha\beta} = S^{\mu,\alpha\beta}$, где $S^{\mu,\alpha\beta}$ – канонический спин (получаемый из теоремы Нётер), то новый тензор спина $\tilde{S}^{\mu,\alpha\beta}$ становится равным нулю ($\tilde{S}^{\mu,\alpha\beta} = 0$), а тензор энергии-импульса симметричным:

$$\tilde{J}^{\mu,\alpha\beta} = x^\alpha\,\tilde{T}^{\mu\,\beta} - x^\beta\,\tilde{T}^{\mu\,\alpha}, \qquad \tilde{T}^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\nu\mu}. \quad (1.80)$$

Симметричность $\tilde{T}^{\mu\nu}$ следует из того, что $\tilde{J}^{\mu,\alpha\beta}$ удовлетворяет уравнению непрерывности, поэтому справедливы вычисления подобные (1.76).

“Упрятывание” спиновой компоненты полного момента импульса поля в угловой момент с одновременной симметризацией тензора энергии-импульса называется *процедурой Белифанте*.

Подчеркнём, что всегда можно обнулить спиновую компоненту момента, сделав тензор энергии-импульса симметричным. Однако, в обратную сторону это, вообще говоря, не верно и система с симметричным тензором $T^{\mu\nu}$ может иметь отличную от нуля спиновую компоненту $S^{\mu,\alpha\beta}$. Примером этого является векторное поле с лагранжианом (**??**).

При квантовании поля спиновая компонента приводит к наличию у частиц (квантов поля) собственного момента, называемого спином. Может показаться странным, что объективно существующее в природе свойство частиц может быть "ликвидировано" при помощи процедуры Белифанте. Однако, конечно, это не так. Всё дело в определении спина частицы или спина системы частиц:

> Спином называется полный момент в системе отсчёта в которой суммарный импульс равен нулю.

Таким образом, тензором спина является $J^{\alpha\beta}$, когда $P^\mu = \{M, \mathbf{0}\}$, где $M$ – масса рассматриваемой физической системы и $J^{\alpha\beta}$, $P^\mu$ приведены в (1.77). Это определение не зависит от того, каким образом перераспределяются в плотности тензора момента $J^{\mu,\alpha\beta}$ его "угловая" и "спиновая" компоненты. Сохраняется и имеет измерительный смысл именно интеграл от $J^{0,\alpha\beta}$, а не сам по себе тензор $J^{\mu,\alpha\beta}$.

Спином в природе обладают как бесструктурные (на данном уровне знаний) частицы, так и составные системы. Примерами первых являются электрон или фотон. Их спин нельзя рассматривать как вращение чего либо и это их внутреннее свойство. Спин составных систем, например, ядер атомов, складывается из спина частиц из которых состоит система, плюс угловой момент их вращения относительно центра масса. В обоих этих случаях справедливо приведенное выше определение.

Например, скалярное поле не имеет спиновой компоненты момента. Это приводит к тому, что у одиночной скалярной частицы (кванта скалярного поля) нет спина. Однако, система скалярных частиц, благодаря их относительному движению, может уже обладать спином. Векторные частицы (кванты векторного поля) обладают спином сами по себе. Тоже относится и к спинорным частицам (квантам биспинорного поля), примером которых является электрон. Важно, что наличие спина у частицы, в конечном счёте, обусловлено трансформационными свойствами поля, квантом которого она является. Последние, в свою очередь, определяются константами $\Sigma_{ij}^{\alpha\beta}$ разложения матрицы преобразования поля $\Psi'_i = U_{ij}\Psi^j$.

# Глава 2

# Квантование свободных полей

В этой главе мы приступаем к собственно квантовой теории поля. Будет проведено квантование свободных полей, которые удовлетворяют линейным уравнениям. В квантовой теории классические поля становятся операторами, действующими на векторы состояний квантовой системы. Возможны различные подходы к квантованию поля, из которых важнейшим является интерпретация возбуждений поля, как частиц.

Будут изучены свойства функции Паули-Йордана и причинной функции Грина, играющих важную роль в математическом формализме теории. Вакуум квантового поля не является пустотой, о чём говорят, вычисленные далее средние значения полевых операторов. Завершается глава доказательством теорем Вика, которыми мы будем часто пользоваться при вычислениях в теории возмущений.

---

**Квантовый мир**

**Сергей С. Степанов**

Эта книга находится в процессе создания. Её последняя версия и другие материалы находятся на сайте: http://synset.com. Там же можно найти первый том: **I. Механика**
Замеченные ошибки и вопросы просьба присылать по адресу: steps137, затем собачка и gmail.com.

(c) 2015. Печать: 2 июля 2017 г.

## 1 Каноническое квантование

В квантовой теории энергии и импульсу должны соответствовать операторы. Эти операторы действуют на векторы гильбертового пространства, которые описывают состояния квантовой системы. Собственные значения операторов являются значениями соответствующих физических величин, получаемых в экспериментах.

В теории поля энергия и импульс зависят от полевых функций. Поэтому поля становятся операторами. Например, гамильтониан (оператор энергии) и оператор импульса скалярного поля (стр. 26) имеют вид:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int [\hat{\pi}^2 + (\nabla\hat{\varphi})^2 + m^2\hat{\varphi}^2]\, d^3\mathbf{x}, \qquad \hat{\mathbf{P}} = -\int \hat{\pi}\nabla\hat{\varphi}\, d^3\mathbf{x}, \tag{2.1}$$

где производная по времени обозначена следующим образом (не путать с числом $\pi = 3.14..$):

$$\hat{\pi}(t,\mathbf{x}) = \frac{\partial\hat{\varphi}(t,\mathbf{x})}{\partial t} \tag{2.2}$$

и называется *каноническим импульсом* сопряженным к динамической переменной $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(t,\mathbf{x})$. Это название связано с аналогией лагранжевого формализма классической механики:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i} = m\dot{x}_i, \qquad \pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}.$$

В операторе Гамильтона (2.1) над полевыми функциями мы поставили шляпки, чтобы подчеркнуть, что это тоже операторы. Эти операторы зависят от точки в пространстве, т.е. являются множеством операторов, "нумерующихся" при помощи различных значений $\mathbf{x}$.

В квантовой теории частиц операторы координаты и импульса коммутируют следующим образом: $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \imath\delta_{ij}$. Ключевым постулатом квантовой теории поля является продление этой аналогии. А именно, предполагается справедливость следующего коммутационного соотношения:

$$[\hat{\varphi}(t,\mathbf{x}),\, \hat{\pi}(t,\mathbf{y})] = \imath\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{2.3}$$

Соответственно, так как $[\hat{x}_i,\, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i,\, \hat{p}_j] = 0$, то операторы поля в один момент времени должны коммутировать друг с другом:

$$[\hat{\varphi}(t,\mathbf{x}),\, \hat{\varphi}(t,\mathbf{y})] = 0, \qquad [\hat{\pi}(t,\mathbf{x}),\, \hat{\pi}(t,\mathbf{y})] = 0. \tag{2.4}$$

Коммутаторы (2.3), (2.4) и им подобные для других полей, лежат в основе всей квантовой теории поля.

В квантовой механике эволюция во времени описывается уравнением Гейзенберга (стр. **??**). Полевые функции зависят от времени, поэтому естественно считать их операторами в представлении Гейзенберга. Для поля и сопряжённого ему импульса уравнения Гейзенберга имеют вид:

$$\imath\frac{\partial\hat{\varphi}(t,\mathbf{x})}{\partial t} = [\hat{\varphi}(t,\mathbf{x}),\, \hat{H}], \qquad \imath\frac{\partial\hat{\pi}(t,\mathbf{x})}{\partial t} = [\hat{\pi}(t,\mathbf{x}),\, \hat{H}]. \tag{2.5}$$

Вычислим правую часть второго уравнения при помощи коммутаторов (2.3), (2.4) для гамильтониана (2.1), который интегрированием по частям, перепишем в следующем виде

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int [\hat{\pi}^2 + \hat{\varphi}(-\Delta + m^2)\hat{\varphi}]\, d^3\mathbf{x}.$$

Так как канонические импульсы коммутируют, имеем:

$$[\hat{\pi}(t,\mathbf{x}),\, \hat{H}] = \frac{1}{2}\int [\pi_{\mathbf{x}},\, \hat{\varphi}_{\mathbf{y}} K_{\mathbf{y}} \hat{\varphi}_{\mathbf{y}}]\, d^3\mathbf{y}, \qquad K_{\mathbf{y}} = -\Delta_{\mathbf{y}} + m^2,$$

где $\hat{\varphi}_{\mathbf{x}} \equiv \hat{\varphi}(t,\mathbf{x})$ и далее $\delta_{\mathbf{xy}} \equiv \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. Коммутатор вычислим при помощи тождества $[\hat{A},\, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A},\, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A},\, \hat{C}]$:

$$[\hat{\pi}_{\mathbf{x}},\, \hat{\varphi}_{\mathbf{y}} K_{\mathbf{y}} \hat{\varphi}_{\mathbf{y}}] = [\hat{\pi}_{\mathbf{x}},\, \hat{\varphi}_{\mathbf{y}}]\, K_{\mathbf{y}}\hat{\varphi}_{\mathbf{y}} + \hat{\varphi}_{\mathbf{y}} K_{\mathbf{y}} [\pi_{\mathbf{x}},\, \hat{\varphi}_{\mathbf{y}}] = -\imath\delta_{\mathbf{xy}}\, K_{\mathbf{y}}\hat{\varphi}_{\mathbf{y}} - \imath\hat{\varphi}_{\mathbf{y}}\, K_{\mathbf{y}}\delta_{\mathbf{xy}}.$$

Интегрируя с функцией Дирака по $d^3\mathbf{y}$, имеем:

$$\partial_0\hat{\pi} = -(-\Delta + m^2)\,\hat{\varphi}$$

(напомним, что действие дифференциального оператора второго порядка $\Delta$ на функцию Дирака "перебрасывается" на подынтегральную функцию интегрированием по частям 2 раза). Аналогично, уравнение Гейзенберга для оператора поля $\hat{\varphi}$ даёт $\partial_0\hat{\varphi} = \hat{\pi}$. Их комбинация приводит к операторному уравнению:

$$(\partial^2 + m^2)\hat{\varphi} = 0, \tag{2.6}$$

которое совпадает с уравнением классического свободного поля.

Уравнения Гейзенберга (2.5) можно записать в ковариантном виде:

$$\imath\partial_\mu\hat{\varphi} = [\hat{\varphi}, \hat{P}_\mu], \qquad \imath\partial_\mu\hat{\pi} = [\hat{\pi}, \hat{P}_\mu], \tag{2.7}$$

где $\hat{P}^\mu = \{\hat{H}, \hat{\mathbf{P}}\}$ – оператор 4-импульса поля. При $\mu = 0$ они эквивалентны (2.5). Предлагается проверить, что они выполняются и при $\mu = i = 1,2,3$ (см. также стр. 303).

## 2 Кванты поля

Запишем решение уравнения свободного скалярного поля (стр. 27):

$$\hat{\varphi}(t, \mathbf{x}) = \int (\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-\imath \mathrm{px}} + \hat{a}^+_{\mathbf{p}} e^{\imath \mathrm{px}}) \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}}, \tag{2.8}$$

где, как и ранее, $\mathrm{p} = \{\omega_p,\ \mathbf{p}\}$ и $\omega_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Так как поле является оператором, операторами будут и его фурье-коэффициенты. Вместо звездочки комплексного сопряжения у оператора поставлен знак эрмитового сопряжения. Благодаря этому, действительная физическая величина (скалярное поле) становится *эрмитовым оператором*: $\hat{\varphi}^+ = \hat{\varphi}$, $\hat{\pi}^+ = \hat{\pi}$.

Найдём коммутатор операторов $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ и $\hat{a}^+_{\mathbf{k}}$. Учитывая (1.35), стр. 28 и коммутаторы (2.3), (2.4), имеем:

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}},\, \hat{a}^+_{\mathbf{k}}] = \int \frac{d^3\mathbf{x}\, d^3\mathbf{y}\, e^{\imath \mathrm{px} - \imath \mathrm{ky}}}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_p \omega_k}} [\omega_p\, \hat{\varphi}_{\mathbf{x}} + \imath \hat{\pi}_{\mathbf{x}},\, \omega_k\, \hat{\varphi}_{\mathbf{y}} - \imath \hat{\pi}_{\mathbf{y}}] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}).$$

Аналогично, коммутатор между $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ и $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ равен нулю. Таким образом:

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}},\ \hat{a}^+_{\mathbf{k}}] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}), \qquad [\hat{a}_{\mathbf{p}},\ \hat{a}_{\mathbf{k}}] = [\hat{a}^+_{\mathbf{p}},\ \hat{a}^+_{\mathbf{k}}] = 0. \tag{2.9}$$

Запишем выражения для операторов энергии и импульса поля (стр. 29):

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int \omega_p\, (\hat{a}^+_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}^+_{\mathbf{p}})\, d^3\mathbf{p}, \qquad \hat{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \int \mathbf{p}\, (\hat{a}^+_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}^+_{\mathbf{p}})\, d^3\mathbf{p}. \tag{2.10}$$

Так как операторы $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$ и $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ не коммутируют, их классическое произведение при переходе к квантовой теории необходимо симметризовать: $AB \mapsto (\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})/2$. Переставим операторы во вторых слагаемых в соответствии с коммутатором (2.9): $\hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}^+_{\mathbf{k}} = \hat{a}^+_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k})$:

$$\hat{H} = \int \omega_p \left\{ \hat{a}^+_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \delta(\mathbf{0}) \right\} d^3\mathbf{p}, \qquad \hat{\mathbf{P}} = \int \mathbf{p}\, \hat{a}^+_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}\, d^3\mathbf{p}. \tag{2.11}$$

В операторе энергии появилась бесконечная константа (в операторе импульса её нет, так как множитель $\mathbf{p}$ делает подынтегральную функцию нечётной и интеграл от $\mathbf{p}\, \delta(\mathbf{0})$ равен нулю). Сдвинем отсчёт энергии таким образом, чтобы убрать из $\hat{H}$ бесконечную константу:

$$\hat{\mathrm{P}} = \int \mathrm{p}\, \hat{a}^+_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}\, d^3\mathbf{p}, \tag{2.12}$$

где $\mathrm{p} = \{\omega_p, \mathbf{p}\}$ – 4-вектор импульса, а $\hat{\mathrm{P}} = \{\hat{H}, \hat{\mathbf{P}}\}$.

Несложно видеть, что компоненты оператора 4-импульса между собой коммутируют, поэтому имеют общие собственные векторы $|\mathrm{P}\rangle \equiv |E, \mathbf{P}\rangle$. Запишем соответствующее уравнение на собственные значения в безиндексном виде:

$$\hat{\mathrm{P}}\,|\mathrm{P}\rangle = \mathrm{P}\,|\mathrm{P}\rangle. \tag{2.13}$$

Вычислим коммутатор оператора $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$ и оператора полного 4-импульса поля:

$$[\hat{a}^+_{\mathbf{p}},\, \hat{\mathrm{P}}] = \int \mathrm{k}\,[\hat{a}^+_{\mathbf{p}},\, \hat{a}^+_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}]\,d^3\mathbf{k} = \int \mathrm{k}\,\hat{a}^+_{\mathbf{k}}[\hat{a}^+_{\mathbf{p}},\, \hat{a}_{\mathbf{k}}]\,d^3\mathbf{k} = -\mathrm{p}\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}},$$

где в последнем равенстве операторы в коммутаторе переставлены местами (со знаком минус) и вместо коммутатора подставлена $\delta$-функция Дирака (2.9), которая убирает интеграл по $\mathbf{k}$. Аналогично вычисляется коммутатор с $a_{\mathbf{p}}$ (можно просто взять эрмитово сопряжение). В результате:

$$[\hat{\mathrm{P}},\, \hat{a}^+_{\mathbf{p}}] = \mathrm{p}\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}}, \qquad [\hat{\mathrm{P}},\, \hat{a}_{\mathbf{p}}] = -\mathrm{p}\,\hat{a}_{\mathbf{p}}. \tag{2.14}$$

Подействуем первым коммутатором на собственный вектор оператора 4-импульса (2.13):

$$(\hat{\mathrm{P}}\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}} - \hat{a}^+_{\mathbf{p}}\,\hat{\mathrm{P}})\,|\mathrm{P}\,\rangle = (\hat{\mathrm{P}} - \mathrm{P})\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}}|\mathrm{P}\,\rangle = \mathrm{p}\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}}|\mathrm{P}\,\rangle$$

и перепишем это соотношение в следующем виде:

$$\hat{\mathrm{P}}\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\,|\mathrm{P}\,\rangle = (\mathrm{P} + \mathrm{p})\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\,|\mathrm{P}\,\rangle\,. \tag{2.15}$$

Из него следует, что оператор $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$, действуя на собственный вектор $|\mathrm{P}\rangle$, снова даёт собственный вектор оператора $\hat{\mathrm{P}}$, который соответствует 4-импульсу P, увеличенному на $\mathrm{p} = \{\omega_p,\, \mathbf{p}\}$. Аналогично проверяется, что оператор $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ на эти же значения уменьшает 4-импульс.

Энергия и импульс релятивистской частицы с массой $m$ связаны следующим образом $\omega_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Поэтому такие увеличения энергии и импульса можно интерпретировать как рождение частицы (*кванта поля*), движущейся с импульсом $\mathbf{p}$ и энергией $\omega_p$. Соответственно, оператор $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$ называется *оператором рождения* частицы, а оператор $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ – *оператором уничтожения* частицы.

Хотя термины “рождение” и “уничтожение” являются общепринятыми, в данном случае они не вполне удачны. Пока мы не ввели взаимодействия между полями, говорить о рождении частиц преждевременно. Полученные результаты свидетельствуют только о том, что если есть вектор $|\mathrm{P}\rangle \equiv |E, \mathbf{P}\rangle$, то при помощи оператора $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$ из него можно получить состояние $|\mathrm{P}+\mathrm{p}\rangle \equiv |E+\omega_p,\, \mathbf{P}+\mathbf{p}\rangle$ с большими значениями энергии и импульса.

• Состояние с наинизшей энергией называется *вакуумом* и обозначается пустыми скобками $|\,\rangle$. По определению, энергию вакуума уменьшить нельзя, поэтому действие на это состояние оператора уничтожения не должно приводить к новым состояниям:

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}|\,\rangle = 0. \tag{2.16}$$

Соответственно $\hat{\mathrm{P}}|\,\rangle = 0$, т.е. вакуум имеет нулевую энергию системы (после вычитания бесконечной константы) и нулевой импульс.

При действии на вакуум оператором рождения мы создаём *одночастичное состояние* с определённым импульсом и энергией:

$$|\,\mathbf{p}\,\rangle = \hat{a}^+_{\mathbf{p}}|\,\rangle\,. \tag{2.17}$$

Повторное действие оператором рождения дает *двухчастичное состояние*, которое описывает две частицы, с импульсами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$:

$$|\,\mathbf{k},\mathbf{p}\,\rangle = \hat{a}^+_{\mathbf{k}}\hat{a}^+_{\mathbf{p}}|\,\rangle\,.$$

Так как оператор $\hat{a}^+_{\mathbf{k}}$ коммутирует с $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$, то $|\,\mathbf{k},\mathbf{p}\,\rangle = |\,\mathbf{p},\mathbf{k}\,\rangle$, т.е. при перестановке частиц местами состояние не меняется. Такая тождественность частиц соответствует *статистике Бозе*, а кванты скалярного поля являются *бозонами*.

Произвольное состояние $|\Psi\rangle$ можно записать как суперпозицию $n$-частичных состояний:

$$|\Psi\rangle = |\,\rangle + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^3\mathbf{p}_1 ... d^3\mathbf{p}_n\, f(\mathbf{p}_1,...,\mathbf{p}_n)\, a^+_{\mathbf{p}_1}...a^+_{\mathbf{p}_n}|\,\rangle. \tag{2.18}$$

Факториал поставлен для удобства нормировки функций $f(\mathbf{p}_1,...,\mathbf{p}_n)$, которые являются симметричными относительно перестановки их аргументов ($n!$ возможностей).

Введём также *оператор числа частиц*:

$$\hat{N} = \int \hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}\, d^3\mathbf{p}.$$

Он коммутирует с энергией и импульсом *свободного* поля, при этом

$$\hat{N}\,|\mathbf{p}\rangle = |\mathbf{p}\rangle, \qquad \hat{N}\,|\mathbf{p},\,\mathbf{k}\rangle = 2|\mathbf{p},\,\mathbf{k}\rangle.$$

Если бы гамильтониан зависел от оператора $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ не квадратично (это происходит при наличии взаимодействия), оператор числа частиц с ним бы не коммутировал $[\hat{N},\,\hat{H}] \neq 0$. В этом случае, в состоянии с фиксированной энергией число частиц не определено. Таким образом, в квантовой теории поля понятие составной системы (взаимодействующие частицы) претерпевает существенные изменения.

• Аналогично строится квантовая теория комплексного поля:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x},\, t) = \int (\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-\imath \mathrm{px}} + \hat{b}^{+}_{\mathbf{p}} e^{\imath \mathrm{px}})\, \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}}. \tag{2.19}$$

Для него возникает две пары операторов рождения и уничтожения коммутирующие следующим образом:

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}},\ \hat{a}^{+}_{\mathbf{k}}] = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}), \qquad [\hat{b}_{\mathbf{p}},\ \hat{b}^{+}_{\mathbf{k}}] = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}). \tag{2.20}$$

Остальные коммутаторы $[\hat{a}_{\mathbf{p}},\ \hat{a}_{\mathbf{k}}]$, $[\hat{a}_{\mathbf{p}},\ \hat{b}_{\mathbf{k}}]$ и т.д. равны нулю. Эти соотношения можно вывести при помощи канонического квантования аналогично действительному скалярному полю. Канонический импульс равен

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} = \dot{\Psi}^*$$

и аналогично для комплексно сопряжённых величин. Поэтому должно выполняться следующее коммутационное соотношение:

$$[\hat{\Psi}(t, \mathbf{x}),\, \partial_0 \hat{\Psi}^{+}(t, \mathbf{y})] = \imath \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{2.21}$$

Остальные коммутаторы равны нулю или получаются из этого эрмитовым сопряжением. Повторя вычисления на стр. 48, приходим к согласию коммутаторов (2.20) и (2.21).

Операторы 4-импульса $\hat{\mathrm{P}} = \{\hat{H},\, \hat{\mathbf{P}}\}$ комплексного скалярного поля

$$\hat{\mathrm{P}} = \int \mathrm{p}\, \{\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{b}^{+}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}}\}\, d^3\mathbf{p} \tag{2.22}$$

и его заряда (бесконечная константа при этом сокращается):

$$\hat{Q} = \int \{\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} - \hat{b}^{+}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}}\}\, d^3\mathbf{p} \tag{2.23}$$

коммутируют друг с другом и имеют общие собственные функции. Собственное значение заряда для одночастичного состояния $\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}}\big|\ \big\rangle$ равно $Q = 1$, а для состояния $\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}}\big|\ \big\rangle$ – $Q = -1$:

$$\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}}\big|\ \big\rangle \sim |E = \omega_p,\, \mathbf{P} = \mathbf{p},\, Q = +1\big\rangle, \qquad \hat{b}^{+}_{\mathbf{p}}\big|\ \big\rangle \sim |E = \omega_p,\, \mathbf{P} = \mathbf{p},\, Q = -1\big\rangle.$$

Поэтому оператор $\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}}$ является оператором рождения частицы с положительным зарядом, а $\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}}$ – оператором рождения частицы с такой же массой (энергией, импульсом), но отрицательным зарядом. Одну из этих частиц называют собственно частицей, а вторую античастицей (кто есть кто – вопрос соглашения). У действительного скалярного поля частицы и античастицы совпадают.

## 3 Нормировка векторов состояния

• Выше, одночастичное состояние мы записывали в виде $|\,\mathbf{p}\,\rangle = \hat{a}^+_{\mathbf{p}}|\,\rangle$. На самом деле, оно определено с точностью до нормировочного множителя, который можно выбрать таким образом, чтобы придать выражению релятивистскую ковариантность:

$$|\,\mathbf{p}\,\rangle = \sqrt{2\omega_p}\;\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\,|\,\rangle\,. \tag{2.24}$$

Действительно, пусть вакуумный вектор во всех системах отсчёта нормирован на единицу: $\langle\,|\,\rangle = 1$. Беря вакуумное среднее от коммутатора (2.9) с учётом $\hat{a}_{\mathbf{p}}|\,\rangle = 0$, получаем $\langle\,|\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}\,|\,\rangle = \delta_{\mathbf{pk}}$, поэтому:

$$\langle\,\mathbf{k}\,|\,\mathbf{p}\,\rangle = 2\omega_p\;\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}). \tag{2.25}$$

Для доказательства ковариантности этого выражения рассмотрим преобразование Лоренца со скоростью $v$ вдоль оси $x$, при котором меняются энергия и импульс: $\omega' = \gamma\,(\omega - vp_x)$, $p'_x = \gamma\,(p_x - v\omega)$, где, как обычно, $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$. Так как проекции импульса на $y$ и $z$ не меняются, достаточно рассмотреть компоненту $p_x = p$:

$$\omega'_{p'}\,\delta(p'-k') = \gamma\,(\omega_p - vp)\,\delta\big(\gamma(p-v\omega_p) - \gamma(k-v\omega_k)\big).$$

Учитывая тождество (F.18), стр. 264 для функции Дирака, имеем:

$$\omega'_{p'}\,\delta(p'-k') = \omega_p\,\frac{\gamma\,(1-vp/\omega_p)}{\gamma\,(1-v\,d\omega_k/dk)}\,\delta(p-k) = \omega_p\,\delta(p-k), \tag{2.26}$$

где в знаменателе проведена замена $k \mapsto p$ ($\delta$-функция) и вычислена производная $d\omega_p/dp = d\sqrt{p^2+m^2}/dp = p/\omega_p$. В начале и конце цепочки (2.26) стоят одинаковые функции импульса, выраженные в штрихованной и нештрихованной системах отсчёта. Таким образом, мы доказали ковариантность выражения $\omega_p\,\delta(p-k)$ или в общем случае $\omega_p\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})$.

Аналогично доказывается ковариантность объёма в импульсном пространстве, делённого на энергию: $d^3\mathbf{p}/\omega_p$. Для этого необходимо учесть якобиан преобразований Лоренца:

$$d^3\mathbf{p}' = \det\Big|\frac{\partial p'_i}{\partial p_j}\Big|\,d^3\mathbf{p} = \gamma\left(1 - v\,\frac{d\omega}{dp_x}\right)d^3\mathbf{p} = \frac{\gamma\,(\omega - vp_x)}{\omega}\,d^3\mathbf{p} = \frac{\omega'}{\omega}\,d^3\mathbf{p},$$

где снова вычислена производная от $\omega_p$. В результате, мы приходим к выводу, что $d^3\mathbf{p}'/\omega'_p = d^3\mathbf{p}/\omega_p$.

• В нормировке (2.24) единичный оператор, построенный на базисе одночастичных состояний равен:

$$\hat{1} = \int |\,\mathbf{p}\,\rangle\langle\,\mathbf{p}\,| \,\frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_p}. \tag{2.27}$$

Его действие на любой вектор $|\,\mathbf{k}\,\rangle$, с учётом (2.25), снова даст этот же вектор.

Подчеркнём, что соотношение (2.27) имеет смысл единичного оператора только для одночастичных состояний. Как уже отмечалось (стр. 53), произвольное состояние записывается в виде суперпозиции вакуумного состояния, одночастичного, двухчастичного и т.д. состояний, что в ковариантной нормировке имеет вид:

$$|\Psi\rangle = |\,\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d^3\mathbf{p}_1 ... d^3\mathbf{p}_n}{\sqrt{2\omega_1}...\sqrt{2\omega_n}}\, f(\mathbf{p}_1, ...\mathbf{p}_n)\, a^+_{\mathbf{p}_1} ... a^+_{\mathbf{p}_n} |\,\rangle. \tag{2.28}$$

Множество векторов $n$-частичных состояний называется *пространством Фока*. Оно является базисом, по которому можно разложить произвольный вектор $|\Psi\rangle$.

Вычислим в нормировке (2.24) следующее среднее:

$$\langle\,|\hat{\varphi}(t,\mathbf{x})|\,\mathbf{p}\,\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2\omega_k}} \langle\,|(\hat{a}_{\mathbf{k}}\, e^{-\imath \mathrm{k}\cdot\mathrm{x}} + \hat{a}^+_{\mathbf{k}}\, e^{\imath \mathrm{k}\cdot\mathrm{x}})\hat{a}^+_{\mathbf{p}}|\,\rangle \sqrt{2\omega_p}.$$

Так как $\langle\,|\,\hat{a}^+_{\mathbf{k}} = 0$, что является эрмитовым сопряжением (2.16), второе слагаемое равно нулю, а в первом подставим $\hat{a}_{\mathbf{k}}\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}} = \hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})$. Интегрируя с функцией Дирака, получаем одночастичную *скалярную* волновую функцию квантовой механики:

$$\langle\,|\hat{\varphi}(t,\mathbf{x})|\,\mathbf{p}\,\rangle = \frac{e^{-\imath \mathrm{p}\cdot\mathrm{x}}}{(2\pi)^{3/2}}. \tag{2.29}$$

Может возникнуть искушение интерпретировать соотношение (2.29) в терминах нерелятивистской теории поля. А именно, считать, что оператор $\hat{\varphi}(t,\mathbf{x})$, действуя на вакуум (налево), создаёт состояние $\langle\mathbf{x}|$ ("рождает" частицу в точке $\mathbf{x}$) также, как и оператор $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$ формирует состояние $|\mathbf{p}\rangle$. Однако, в первой главе мы уже отмечали (стр. 13), что в квантовой теории поля локализация частицы в точке теряет свой смысл. Тогда в качестве аргумента выступало неизбежное множественное рождение частиц при такой локализации. Однако, оказывается, что принцип причинности приводит к аналогичному выводу и в случае свободных частиц (у которых нет взаимодействия, приводящего к рождениям других частиц). Рассмотрим этот вопрос подробнее.

## 4 Функция Паули-Йордана

• Учитывая фурье-разложения полевых операторов (2.8), стр. 48, вычислим вакуумное среднее их произведения:

$$\left\langle\, |\hat\varphi(\mathrm{x})\hat\varphi(\mathrm{y})|\,\right\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}\,d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3\,2\sqrt{\omega_p\,\omega_k}} \left\langle\, |\hat a_{\mathbf{p}}\,\hat a^+_{\mathbf{k}}|\,\right\rangle e^{-\imath \mathrm{px}+\imath \mathrm{ky}}.$$

Усреднение коммутатора (2.9) даёт следующее среднее произведения операторов рождения и уничтожения:

$$\left\langle\, |\hat a_{\mathbf{p}}\,\hat a^+_{\mathbf{k}}|\,\right\rangle = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}), \tag{2.30}$$

поэтому

$$D_0(\mathrm{x}-\mathrm{y}) = \left\langle\, |\hat\varphi(\mathrm{x})\hat\varphi(\mathrm{y})|\,\right\rangle = \int e^{-\imath\,\mathrm{p}\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{y})}\,\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p}. \tag{2.31}$$

При $\mathrm{y}=0$ имеем *функцию Паули-Йордана*:

$$D_0(\mathrm{x}) = \left\langle\, |\hat\varphi(\mathrm{x})\hat\varphi(0)|\,\right\rangle = \int e^{\imath\,\mathbf{px}-\imath\,t\,\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}}\,\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3\,2\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}}. \tag{2.32}$$

Несмотря на то, что её фурье-образ выглядит просто, зависимость от 4-координат $\mathrm{x}=\{t,\,\mathbf{x}\}$ достаточно сложная. В приложении (стр. 270) интеграл (2.32) выражен через функции Бесселя:

$$D_0(\mathrm{x}) = -\frac{\imath s(t)}{4\pi}\,\delta(\mathrm{x}^2)\,+ \tag{2.33}$$

$$+\frac{m\,\theta(-\mathrm{x}^2)}{4\pi^2\sqrt{-\mathrm{x}^2}}\,K_1(m\sqrt{-\mathrm{x}^2}) + \frac{m\,\theta(\mathrm{x}^2)}{8\pi\sqrt{\mathrm{x}^2}}\,\{N_1(m\sqrt{\mathrm{x}^2}) + \imath\,s(t)\,J_1(m\sqrt{\mathrm{x}^2})\},$$

где, кроме функции Дирака от квадрата 4-вектора $\delta(\mathrm{x}^2)$ и функции Хэвисайда от его знака $\theta(\pm\mathrm{x}^2)$, введена функция знака времени $s(t)=\mathrm{sign}(t)$, равная 1 при $t>0$ и $-1$ при $t<0$. Если же $t=0$, то $s(0)=0$.

На световом конусе ($\mathrm{x}^2=0$) функция Паули-Йордана существенно сингулярна, а внутри ($\mathrm{x}^2>0$) и вне ($\mathrm{x}^2<0$) его поведение функции качественно отличается. Модифицированная функция Бесселя $K_1(z)$ монотонно убывает с ростом своего аргумента (стр. 268), а функции Бесселя $J_1(z)$ и $N_1(z)$ убывая, осциллируют, меняя свой знак. Кроме этого внутри светового конуса функция $D_0(\mathrm{x})$ комплексная, а вне его – действительная. Обратим внимание, что (2.33), из-за первого слагаемого, зависящего от $t$ не является лоренц-инвариантом.

• Через функцию Паули-Йордана выражается коммутатор двух полей (без усреднения), зависящих от различных точек пространства-времени:

$$[\hat{\varphi}(\mathrm{x}),\, \hat{\varphi}(\mathrm{y})] = \int [(\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-\imath \mathrm{px}} + \hat{a}^{+}_{\mathbf{p}} e^{\imath \mathrm{px}}), (\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-\imath \mathrm{ky}} + \hat{a}^{+}_{\mathbf{k}} e^{\imath \mathrm{ky}})] \, \frac{d^3\mathbf{p}\, d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_p \omega_k}}.$$

Вычисляя коммутаторы и интегрируя с $\delta$-функцией, имеем:

$$[\hat{\varphi}(\mathrm{x}),\, \hat{\varphi}(\mathrm{y})] = \int (e^{-\imath \mathrm{p}\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{y})} - e^{-\imath \mathrm{p}\cdot(\mathrm{y}-\mathrm{x})}) \, \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p}$$

или:

$$[\hat{\varphi}(\mathrm{x}),\, \hat{\varphi}(\mathrm{y})] = D_0(\mathrm{x}-\mathrm{y}) - D_0(\mathrm{y}-\mathrm{x}). \tag{2.34}$$

В один момент времени $x^0 = y^0$ операторы поля коммутируют между собой (стр. 46), поэтому должно выполнятся соотношение:

$$D_0(0, \mathbf{x}) = D_0(0, -\mathbf{x}),$$

которое непосредственно следует из интегрального представления:

$$D_0(0,\, \mathbf{x}) = \int e^{\imath\, \mathbf{px}} \, \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p}.$$

Действительно, замену $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$ можно провести одновременно с заменой переменной интегрирования $\mathbf{p} \mapsto -\mathbf{p}$, которая вернёт интеграл к исходному выражению. Это же свойство следует из (2.33).

Функция $D_0(t,\, \mathbf{x})$ чётна относительно $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$ при любом $t$, но не обладает такой симметрией при $t \mapsto -t$. Поэтому коммутатор $[\hat{\varphi}(\mathrm{x}),\, \hat{\varphi}(\mathrm{y})]$, равный $D_0(t, \mathbf{r}) - D_0(-t, \mathbf{r})$, где $t = x^0 - y^0$, $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ отличен от нуля и операторы поля в различные моменты времени, вообще говоря, не коммутируют. Однако, вне светового конуса функция Паули-Йордана чётная относительно изменения знака 4-вектора: $D_0(\mathrm{x}) = D_0(-\mathrm{x})$. Действительно, из (2.33) следует, что при $\mathrm{x}^2 < 0$ отлично от нуля только слагаемое с $K_1$, не зависящее от $t$ и чётное при $\mathrm{x} \mapsto -\mathrm{x}$. Поэтому, даже при различных временах $x^0 \neq y^0$ из (2.34) следует, что:

$$[\hat{\varphi}(\mathrm{x}),\, \hat{\varphi}(\mathrm{y})] = 0, \qquad (\mathrm{x}-\mathrm{y})^2 < 0, \tag{2.35}$$

Это коммутационное соотношение отражает причинность квантовой теории поля. В соответствии с соотношением неопределённости, одновременно измерить две физические величины мы можем, только, если соответствующие им операторы коммутируют друг с другом. Равенство нулю коммутатора (2.35), означает, что события, разделённые пространственно подобным интервалом независимы. Другими словами, измерения значения поля, в точках, не связанных световым сигналом, могут быть выполнены без “влияния” друг на друга.

• Вернёмся теперь к соотношению (2.29). Пусть

$$\left\langle\, |\hat{\varphi}(t,\mathbf{x})|\, \mathbf{p}\,\right\rangle = \frac{e^{-\imath \mathrm{p}\cdot \mathrm{x}}}{(2\pi)^{3/2}} = \left\langle \mathbf{x}, t|\mathbf{p}\right\rangle \tag{2.36}$$

имеет смысл волновой функции, т.е., измеряя у частицы импульс $\mathbf{p}$, мы имеем амплитуду вероятности обнаружить её спустя время $t$ в точке пространства $\mathbf{x}$. Тогда среднее

$$\left\langle \mathbf{x},\, t|\mathbf{x}=\mathbf{0},\, t=0\right\rangle = \left\langle\, |\hat{\varphi}(\mathrm{x})\hat{\varphi}(0)|\,\right\rangle = D_0(\mathrm{x})$$

можно было бы интерпретировать как амплитуду вероятности перехода частицы за время $t$ из начала координат $\mathbf{x}=0$ в точку с координатой $\mathbf{x}$.

Возьмём для функции Бесселя асимптотическое приближение при больших значениях аргументов (F.35), стр. 269 и запишем среднее (2.33) вне светового конуса ($\mathrm{x}^2 = t^2 - \mathbf{x}^2 < 0$):

$$\left\langle\, |\hat{\varphi}(t,\,\mathbf{x})\hat{\varphi}(0)|\,\right\rangle = D_0(\mathrm{x}) \to \left(\frac{m}{32\pi^3}\right)^{1/2} \frac{e^{-m\sqrt{\mathbf{x}^2-t^2}}}{(\mathbf{x}^2-t^2)^{3/4}}. \tag{2.37}$$

Отличие такой амплитуды от нуля вне светового конуса, означает, что мы способны обнаружить частицу в точке, в которую она могла попасть только двигаясь быстрее скорости света. Такая возможность означает нарушение *принципа причинности*.

Посмотрим на проблему с другой стороны. В квантовой механике при $t=0$ векторы оператора координаты ортогональны: $\left\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}_0\right\rangle = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$. Это собственно и означает, что при помощи измерения координаты со значением $\mathbf{x}_0$, мы создаём полностью локализованное состояние (вероятность обнаружить частицу в точке отличной от $\mathbf{x}_0$ равна нулю). Выражение же (2.37) при $t=0$ имеет распределение вероятности в пространстве, убывающее тем быстрее, чем больше масса $m$. Характерная ширина этого распределения определяется комптоновской длиной волны $\hbar/mc$ частицы (8), стр. 13.

Мы снова приходим к выводу, что нельзя измерить сколь угодно точно координату кванта даже для свободного поля. Именно эта начальная неопределённость измерения "нарушает" причинность. На самом деле, нарушения нет, так как частица как бы "размазана" по всему пространству (а не локализована в одной точке) и может быть обнаружена сколь угодно далеко от $\mathbf{x}=0$ при $t=0$, а, следовательно, и в дальнейшем.

Тем не менее, при больших массах частицы степень её "нелокальности" невелика и можно считать, что вектор $\left|\mathbf{x}\right\rangle = \varphi(0,\mathbf{x})|\rangle$ описывает состояние, связанное с положением частицы в окрестности точки $\mathbf{x}$.

• Рассмотрим теперь комплексное скалярное поле, для которого существует различие между частицами и античастицами:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x},\, t) = \int (\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-\imath \mathrm{px}} + \hat{b}^{+}_{\mathbf{p}} e^{\imath \mathrm{px}})\, \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_p}}. \tag{2.38}$$

Оператор рождения $\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}}$ создаёт состояние с частицей, имеющей импульс $\mathbf{p}$, а оператор $\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}}$ создаёт аналогичное состояние с античастицей. Вычислим соответствующие "волновые функции":

$$\big\langle\, |\hat{\Psi}(\mathrm{x})\, \hat{a}^{+}_{\mathbf{p}}|\, \big\rangle \sqrt{2\omega_p} = \frac{e^{-\imath \mathrm{px}}}{(2\pi)^{3/2}}, \qquad \big\langle\, |\hat{\Psi}^{+}(\mathrm{x})\, \hat{b}^{+}_{\mathbf{p}}|\, \big\rangle \sqrt{2\omega_p} = \frac{e^{-\imath \mathrm{px}}}{(2\pi)^{3/2}}.$$

При этом

$$\big\langle\, |\hat{\Psi}(\mathrm{x})\, \hat{b}^{+}_{\mathbf{p}}|\, \big\rangle = \big\langle\, |\hat{\Psi}^{+}(\mathrm{x})\, \hat{a}^{+}_{\mathbf{p}}|\, \big\rangle = 0.$$

Из этих соотношений можно сделать вывод (с оговорками на нелокальность), что оператор $\hat{\Psi}(\mathrm{x})$, действуя налево на вакуум создаёт состояние с частицей, находящейся в точке x:

$${}_a\big\langle \mathrm{x}| = \big\langle\, |\hat{\Psi}(\mathrm{x}), \qquad |\mathrm{x}\big\rangle_{\,a} = \hat{\Psi}^{+}(\mathrm{x})|\, \big\rangle,$$

а оператор $\hat{\Psi}^{+}(\mathrm{x})$ создаёт аналогичное состояние с античастицей:

$${}_b\big\langle \mathrm{x}| = \big\langle\, |\hat{\Psi}^{+}(\mathrm{x}), \qquad |\mathrm{x}\big\rangle_{\,b} = \hat{\Psi}(\mathrm{x})|\, \big\rangle,$$

где индексами $a$ и $b$ помечены состояния для частицы и античастицы. Теперь можно сказать, что амплитуды перехода частицы из точки 4-пространства "$\mathrm{x}_1$" в точку "$\mathrm{x}_2$" (времена $\mathrm{x}^0_1 < \mathrm{x}^0_2$) и аналогично для античастицы равны:

$${}_a\big\langle \mathrm{x}_2|\mathrm{x}_1\big\rangle_{\,a} = \big\langle \hat{\Psi}(\mathrm{x}_2)\hat{\Psi}^{+}(\mathrm{x}_1)\big\rangle, \qquad {}_b\big\langle \mathrm{x}_2|\mathrm{x}_1\big\rangle_{\,b} = \big\langle \hat{\Psi}^{+}(\mathrm{x}_2)\hat{\Psi}(\mathrm{x}_1)\big\rangle.$$

При этом

$${}_a\big\langle \mathrm{x}_2|\mathrm{x}_1\big\rangle_{\,b} = \big\langle \hat{\Psi}(\mathrm{x}_2)\hat{\Psi}(\mathrm{x}_1)\big\rangle = 0,$$

т.е. создав состояние с античастицей $b$, мы не сможем (в свободной теории) обнаружить вместо неё частицу.

Соответствующие амплитуды, как и в случае с действительным скалярным полем, выражаются через функцию Паули-Йордана:

$$\big\langle\, |\hat{\Psi}(\mathrm{x})\hat{\Psi}^{+}(\mathrm{y})|\, \big\rangle = \big\langle\, |\hat{\Psi}^{+}(\mathrm{x})\hat{\Psi}(\mathrm{y})|\, \big\rangle = D_0(\mathrm{x}-\mathrm{y}) \tag{2.39}$$

(из её фурье-представления сразу следует соотношение $D^{*}_0(\mathrm{x}) = D_0(-\mathrm{x})$).

## 5 Пропагатор

• При помощи $D_0(\mathrm{x})$ введём ещё одну важную функцию, которую будем называть *пропагатором*:

$$D(\mathrm{x}) = \theta(x^0)\, D_0(\mathrm{x}) + \theta(-x^0)\, D_0(-\mathrm{x}),$$

где $\theta(t)$ – ступенчатая функция Хевисайда (стр. 265). Пропагатор связан с причинной функцией Грина (стр. 277) $D(\mathrm{x}) = -\imath\Delta_c(\mathrm{x})$ и имеет следующее интегральное представление:

$$D(\mathrm{x}) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \frac{\imath}{\mathrm{p}^2 - m^2 + \imath\epsilon}\, e^{-\imath \mathrm{p}\cdot\mathrm{x}}. \tag{2.40}$$

Подынтегральная функция имеет два полюса. В комплексной плоскости $p^0$ первый полюс $p^0 = \omega_p - \imath\epsilon$ смещён вниз, а второй: $p^0 = -\omega_p + \imath\epsilon$ вверх.

Пропагатор удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$(\partial^2 + m^2)\, D(\mathrm{x}) = -\imath\delta(\mathrm{x}),$$

где в правой части стоит 4-мерная функция Дирака. Функция $D$ является *функцией Грина* с ядром $\partial^2 + m^2$, в том смысле, что:

$$(\partial^2 + m^2)\hat{\varphi}(\mathrm{x}) = j(\mathrm{x}) \qquad => \qquad \hat{\varphi}(\mathrm{x}) = \hat{\varphi}_0(\mathrm{x}) + \frac{1}{\imath}\int D(\mathrm{x}-\mathrm{y})\, j(\mathrm{y})\, d^4\mathrm{y},$$

где $j(\mathrm{x})$ – произвольная фиксированная скалярная функция (неоднородное уравнение Клейна-Гордона), а $\hat{\varphi}_0(\mathrm{x})$ – решение однородного уравнения $(\partial^2 + m^2)\hat{\varphi}_0 = 0$.

Пропагатор $D(\mathrm{x}-\mathrm{y})$ является средним значением по вакууму от хронологически упорядоченного произведения двух полевых операторов:

$$D(\mathrm{x}-\mathrm{y}) = \big\langle T\hat{\varphi}(\mathrm{x})\hat{\varphi}(\mathrm{y})\big\rangle, \tag{2.41}$$

Операция $T$ переставляет операторы в порядке убывания времён от которых они зависят:

$$T\big\{\, \hat{\varphi}(\mathrm{x})\hat{\varphi}(\mathrm{y})\,\big\} = \begin{cases} \hat{\varphi}(\mathrm{x})\hat{\varphi}(\mathrm{y}), & x^0 > y^0, \\ \hat{\varphi}(\mathrm{y})\hat{\varphi}(\mathrm{x}), & y^0 > x^0. \end{cases}$$

Аналогично определяется хронологическое произведение произвольного числа операторов $T\big\{\, \hat{\varphi}(\mathrm{x})\hat{\varphi}(\mathrm{y})\hat{\varphi}(\mathrm{z})...\,\big\}$. Под знаком $T$ операторы можно переставлять местами, так как операция хронологического произведения их всегда поставит в порядке убывания времени.

Для комплексного скалярного поля хронологическое произведение определяется аналогичным образом:

$$T\{\hat{\Psi}(\mathrm{x})\hat{\Psi}^{+}(\mathrm{y})\} = \theta(x^0 - y^0)\,\hat{\Psi}(\mathrm{x})\hat{\Psi}^{+}(\mathrm{y}) + \theta(y^0 - x^0)\,\hat{\Psi}^{+}(\mathrm{y})\hat{\Psi}(\mathrm{x}).$$

Учитывая (2.39), сразу получаем:

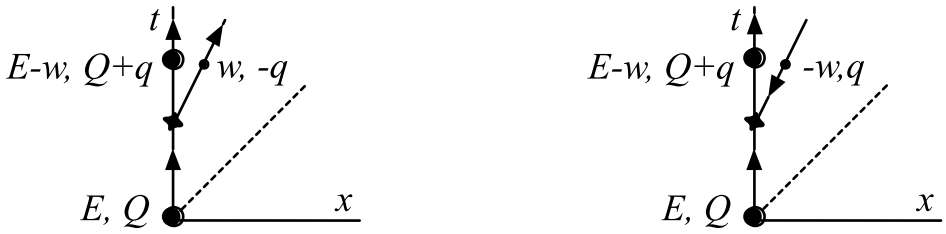
$$\left\langle T\hat{\Psi}(\mathrm{x})\hat{\Psi}^{+}(\mathrm{y})\right\rangle = D(\mathrm{x}-\mathrm{y}), \qquad \left\langle T\hat{\Psi}(\mathrm{x})\hat{\Psi}(\mathrm{y})\right\rangle = 0. \tag{2.42}$$

При этом, в обозначениях предыдущего раздела, можно также написать:

$$\left\langle T\hat{\Psi}(\mathrm{x})\hat{\Psi}^{+}(\mathrm{y})\right\rangle = \theta(x^0 - y^0)\;{}_a\left\langle \mathrm{x}|\mathrm{y}\right\rangle_a + \theta(y^0 - x^0)\;{}_b\left\langle \mathrm{y}|\mathrm{x}\right\rangle_b, \tag{2.43}$$

т.е. первое слагаемое имеет смысл амплитуды перехода *частицы* из точки “y” в точку “x” при $y^0 < x^0$, а второе – равно амплитуде перехода *античастицы* из точки “x” в точку “y” при $x^0 < y^0$. Для действительного скалярного поля интерпретация аналогична, однако частицы и античастицы в этом случае совпадают.

В связи с соотношением (2.43) стоит упомянуть необычную идею, принадлежащую Штюкельбергу (1941) и Фейнману (1948). Они предложили интерпретировать античастицы с отрицательным зарядом $-q < 0$ и положительной энергией $\omega > 0$, как частицы, которые имеют положительный заряд $q > 0$ и отрицательную энергию $-\omega < 0$ и при этом движутся в *обратном* направлении по времени. Ниже приведена иллюстрация этой идеи на примере испускания системой (большой кружок) с энергией $E$ и зарядом $Q$ античастицы с энергией $\omega$ и зарядом $-q$ (первый рисунок):




Пунктирная линия – это световой конус, внутри которого движутся частицы со скоростями, меньшими скорости света. При испускании античастицы энергия системы уменьшается, а её заряд увеличивается. На втором рисунке этот же результат (для системы) изображен в случае процесса поглощения частицы с отрицательной энергией, движущейся в обратном направлении по времени, что помечено стрелкой на её мировой линии. Таким образом, с точки зрения системы эти два процесса неразличимы.

На самом деле, подобные интерпретации для получения физических величин не существенны и пропагатор будет возникать при построении теории возмущений, которой мы займёмся в следующей главе.

## 6 Вакуум свободного квантового поля

• Гамильтониан действительного скалярного поля

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int \left\{\dot{\hat{\varphi}}^2 + (\nabla\hat{\varphi})^2 + m^2\hat{\varphi}^2\right\} d^3\mathbf{x}, \tag{2.44}$$

при помощи операторов рождения и уничтожения частиц, записывается следующим образом:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int \omega_p\{\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\}\, d^3\mathbf{p} = \int \omega_p\, \hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}\, d^3\mathbf{p} + \frac{\delta_p(\mathbf{0})}{2}\int \omega_p\, d^3\mathbf{p},$$

где индекс "$p$" у функции Дирака подчёркивает, что это функция от импульсов. Ранее мы отбрасывали бесконечную константу, считая, что отсчёт энергии поля идёт от нуля: $\hat{H}|\,\rangle = 0$. Для интерпретации возбуждённых состояний (квантов поля) это было не существенно, так как, обычно, измеряется изменение энергии, а не её абсолютное значение. Однако, наличие этой бесконечной константы свидетельствует о том, что вакуум (отсутствие частиц) не является простой пустотой как это было в классической (да и нерелятивистской квантовой) механике.

Прежде чем обсуждать свойства вакуумного состояния, необходимо регуляризовать (сделать конечными) возникающие в теории бесконечности. Существуют бесконечности двух разновидностей. Первая связана с бесконечностью 3-мерного пространства. Выше, значение функции Дирака от нуля как раз имеет смысл объёма 3-пространства:

$$\delta_p(\mathbf{0}) = \int e^{\imath\mathbf{x}\mathbf{0}}\frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} = \frac{V}{(2\pi)^3}.$$

Если не вычитать из гамильтониана бесконечную энергию вакуума, то получится следующее уравнение на собственные значения для основного (вакуумного) состояния:

$$\hat{H}\,|\,\rangle = E_0\,|\,\rangle, \qquad \frac{E_0}{V} = \frac{1}{2}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \tag{2.45}$$

Отношение $E_0/V$ равно *плотности энергии* (энергия в единице объёма). В бесконечном пространстве плотность энергии может быть конечной, тогда как полная энергия $E_0$ при $V \to \infty$ будет бесконечной. Впрочем, в (2.45) для плотности энергии всё равно получается бесконечный результат, так как импульсное пространство (как и обычное) не ограничено и интеграл по $d^3\mathbf{p}$ расходится. Это бесконечность второго типа. Для её регуляризации необходимо тем или иным способом устранить вклад от больших импульсов.

• Конечность объёма координатного пространства приводит к дискретности импульсов (дискретному фурье-разложению). Действительно, будем считать, что все пространство помещается внутри куба со стороной $L$. Пусть поле на границах куба является периодическим, с периодом $L$. Рассмотрим плоскую волну $e^{\imath px}$ вдоль оси $x$. Условие её периодичности на границах куба: $e^{\imath pL/2} = e^{-\imath pL/2}$ или $e^{\imath pL} = 1$ приводит к дискретным значениям импульса $p = (2\pi/L)\, n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ и аналогично для оставшихся двух осей. Наименьшее изменение импульса равно $\Delta p = 2\pi/L$, поэтому мы должны интегрирование по импульсу заменить на суммирование:

$$\int d^3\mathbf{p} \quad \mapsto \quad \frac{(2\pi)^3}{V} \sum_{\mathbf{p}}, \tag{2.46}$$

где $V = L^3$ – объём куба и сумма по $\mathbf{p}$ означает перебор всех целых чисел $\mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\} = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ для $\mathbf{p} = (2\pi/L)\, \mathbf{n}$.

Аналогично можно рассмотреть конечное импульсное пространство в диапазоне от $-Q$ до $Q$. Это приведёт к дискретности координатного пространства с равномерным шагом $\pi/Q$. Впрочем, расходящиеся интегралы по импульсам имеют сферическую симметрию, поэтому для их регуляризации будет удобнее ограничивать модуль импульса $|\mathbf{p}| < Q$ (для сферического импульсного пространства конечность его радиуса приведёт к неравномерной дискретности координатного пространства). Плотность энергии вакуума в такой регуляризации имеет вид:

$$\frac{E_0}{V} = \frac{4\pi}{2\,(2\pi)^3} \int_0^Q p^2 \sqrt{p^2 + m^2}\, dp = \frac{Q^4}{16\pi^2} \Big\{ 1 + \frac{m^2}{Q^2} + ... \Big\}, \tag{2.47}$$

где сделана замена $p = m\, \mathrm{sh}\, t$ и интеграл разложен по $1/Q$ (при $m = 0$ интеграл вычисляется элементарно и его нам будет достаточно). Таким образом, плотность энергии расходится как $Q^4$. Аналогично можно регуляризовать функцию Паули-Йордана, равную бесконечности в нуле (квадратичная расходимость):

$$D_0(0) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p} = \frac{Q^2}{8\pi^2} \{ 1 - \frac{m^2}{Q^2} \ln \frac{Q}{m} + ... \}. \tag{2.48}$$

Наконец, функция Дирака от координат в нуле равна:

$$\delta_x(\mathbf{0}) = \int e^{\imath \mathbf{p} \mathbf{0}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = \frac{Q^3}{6\pi^2}, \tag{2.49}$$

где в качестве объёма импульсного пространства взята сфера $(4\pi Q^3/3)$.

• Разберёмся, что происходит с полем в вакуумном состоянии. Так как $\langle\, |\hat{a}^+_{\mathbf{p}}|\,\rangle = \langle\, |\hat{a}_{\mathbf{p}}|\,\rangle = 0$, из разложения (2.8), стр. 48 следует, что:

$$\langle\, |\hat{\varphi}(\mathrm{x})|\,\rangle = 0. \tag{2.50}$$

Стоит проверить, что это же справедливо и для среднего по $n$-частичным возбуждённым состояниям. Соотношение (2.50), однако, не означает, что поле в вакууме отсутствует. Действительно, среднее квадрата поля (2.31) равно:

$$\langle\, |\hat{\varphi}^2(\mathrm{x})|\,\rangle = D_0(0). \tag{2.51}$$

Эта величина не зависит от координат и бесконечна (при $Q \to \infty$). Также как мы находили функцию Паули-Йордана, можно вычислить средние значения квадрата скорости изменения поля и его градиента:

$$\langle\, |(\partial_0\hat{\varphi})^2|\,\rangle = \frac{E_0}{V}, \qquad \langle\, |(\nabla\hat{\varphi})^2|\,\rangle = \frac{E_0}{V} - m^2 D_0(0).$$

В отличие от вычитания энергии вакуума, устранить эти средние так просто нельзя. Действительно, оператор поля и его производная по времени удовлетворяют коммутационным соотношениям (2.3), стр. 46. В силу соотношения неопределённостей (стр. **??**), это означает, что

$$\langle\, |(\partial_0\hat{\varphi})^2|\,\rangle \langle\, |\,\hat{\varphi}^2\,|\,\rangle \geqslant \frac{\delta_x^2(\mathbf{0})}{4} \tag{2.52}$$

(для оператора $\hat{A}$ дисперсия $\langle(\hat{A}-\bar{A})^2\rangle = \langle\hat{A}^2\rangle - \bar{A}^2$ равна $\langle\hat{A}^2\rangle$ при нулевых средних значениях). Используя выражения (2.47)-(2.49), несложно проверить, что это неравенство выполняется:

$$\frac{Q^4}{16\pi^2}\,\frac{Q^2}{8\pi^2} \geqslant \frac{Q^6}{4\cdot 36\,\pi^4}.$$

Отметим, также связь среднего значения квадрата поля и производной энергии вакуума по $m^2$:

$$\frac{\partial E_0}{\partial m^2} = \frac{1}{2}\int \langle\, |\hat{\varphi}^2(\mathrm{x})|\,\rangle\, d^3\mathbf{x} = \frac{V}{2}\,\langle\, |\hat{\varphi}^2(0)|\,\rangle = \frac{V}{2}\,D_0(0),$$

которая следует из формулы Геллмана-Фейнмана для дифференцирования энергии по параметру $\lambda$ от которого зависит гамильтониан:

$$\frac{\partial E_n}{\partial\lambda} = \langle E_n|\frac{\partial\hat{H}}{\partial\lambda}|E_n\rangle. \tag{2.53}$$

Эту формулу несложно доказать, беря производную $E_n = \langle E_n|\hat{H}|E_n\rangle$ по параметру $\lambda$ (векторы тоже зависят от $\lambda$).

Таким образом, вакуум не является пустотой. В нём нет частиц (квантов поля), но есть отличные от нуля вакуумные возбуждения поля.

• Вычислим средние значения квадрата поля в одночастичном состоянии $|\mathbf{p}\rangle = \hat{a}^+_{\mathbf{p}}|\,\rangle$. Представляя $\hat{\varphi}^2$ в виде произведения интегралов (2.8) по $d^3\mathbf{k}$ и $d^3\mathbf{q}$, и опуская временно экспоненты, получим:

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{p}}(\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^+_{\mathbf{k}})(\hat{a}_{\mathbf{q}} + \hat{a}^+_{\mathbf{q}})\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\rangle = \langle \hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^+_{\mathbf{q}}\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\rangle + \langle \hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}^+_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{q}}\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\rangle$$

(остальные два слагаемых равны нулю). Перенося операторы уничтожения вправо к вакуумному вектору: $\langle \hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}^+_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{q}}\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\rangle = \langle \hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}^+_{\mathbf{k}}(\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{q}} + \delta_{\mathbf{qp}})\rangle = \delta_{\mathbf{kp}}\delta_{\mathbf{qp}}$ и т.д. приходим к выражению:

$$\langle \mathbf{p}|\hat{\varphi}^2|\mathbf{p}\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}\,d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_k\omega_q}}\Big\{e^{-\imath\mathrm{x}(\mathrm{k}-\mathrm{q})}(\delta_{\mathbf{pp}}\delta_{\mathbf{kq}} + \delta_{\mathbf{pk}}\delta_{\mathbf{pq}}) + e^{\imath\mathrm{x}(\mathrm{k}-\mathrm{q})}\delta_{\mathbf{pk}}\delta_{\mathbf{pq}}\Big\}$$

или, интегрируя с функциями Дирака:

$$\langle \mathbf{p}|\hat{\varphi}^2|\mathbf{p}\rangle = \delta_p(\mathbf{0})\,D_0(0) + \frac{(2\pi)^{-3}}{\omega_p}.$$

Это соотношение необходимо разделить на норму $\langle \mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle = \delta_p(\mathbf{0})$ вектора $|\mathbf{p}\rangle$, который, в отличии от вакуумного вектора, не нормирован на единицу. В результате, имеем:

$$\frac{\langle \mathbf{p}|\hat{\varphi}^2|\mathbf{p}\rangle}{\langle \mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle} = \langle\,|\,\hat{\varphi}^2\,|\,\rangle + V^{-1}\frac{1}{\omega_p}. \tag{2.54}$$

Аналогично вычисляется среднее для квадрата производной по времени:

$$\frac{\langle \mathbf{p}|(\partial_0\hat{\varphi})^2|\mathbf{p}\rangle}{\langle \mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle} = \langle\,|\,(\partial_0\hat{\varphi})^2\,|\,\rangle + V^{-1}\,\omega_p \tag{2.55}$$

и квадрата градиента:

$$\frac{\langle \mathbf{p}|(\nabla\hat{\varphi})^2|\mathbf{p}\rangle}{\langle \mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle} = \langle\,|\,(\nabla\hat{\varphi})^2\,|\,\rangle + V^{-1}\frac{\mathbf{p}^2}{\omega_p}. \tag{2.56}$$

Подстановка этих средних в гамильтониан (2.44) приводит к ожидаемому выражению для энергии одночастичного состояния: $E = E_0 + \omega_p$.

Таким образом, квант поля увеличивает вакуумные средние квадратов поля. Эти изменения очень малы (на фоне больших "флуктуаций" поля в вакууме), однако именно они приводят к регистрируемым на опыте свободным релятивистским квантовым частицам.

В главе **??** мы вернёмся к вопросу вакуумной энергии и покажем как можно измерить её изменение даже в отсутствии фотонов (квантов электромагнитного поля). Этот эффект, предсказанный Казимиром, имеет своё экспериментальное подтверждение.

## 7 Теоремы Вика

Вычисление средних по вакууму от произведения большого числа различных операторов свободного поля достаточно громоздки. Рассмотрим ряд приёмов, которые их упрощают.

Каждый полевой оператор в импульсном представлении равен сумме операторов рождения и уничтожения. Например, для скалярного поля:

$$\varphi(\mathrm{x}) = \varphi^-(\mathrm{x}) + \varphi^+(\mathrm{x}), \qquad \varphi^\pm(\mathrm{x}) = \int a^\pm_{\mathbf{p}} e^{\pm \imath \mathrm{xp}} \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2\varepsilon_p}},$$

где $a^+_{\mathbf{p}}$ – оператор рождения, а $a^-_{\mathbf{p}} \equiv a_{\mathbf{p}}$ – оператор уничтожения и для краткости далее будем опускать шляпки у операторов.

Введём операцию *нормального порядка*, которая операторы рождения ставит всегда левее операторов уничтожения:

$$\mathrm{N}\{\varphi^-_{\mathrm{x}}\varphi^+_{\mathrm{y}}\} = \varphi^+_{\mathrm{y}}\varphi^-_{\mathrm{x}}, \quad \mathrm{N}\{\varphi^+_{\mathrm{x}}\varphi^-_{\mathrm{y}}\} = \varphi^+_{\mathrm{x}}\varphi^-_{\mathrm{y}}, \quad \mathrm{N}\{\varphi^-_{\mathrm{x}}\varphi^+_{\mathrm{y}}\varphi^-_{\mathrm{z}}\} = \varphi^+_{\mathrm{y}}\varphi^-_{\mathrm{x}}\varphi^-_{\mathrm{z}}$$

и т.д. Иногда нормальный порядок обозначают также при помощи двух двоеточий: $\mathrm{N}\{AB\} \equiv :AB:$ . При квантовании свободного поля нормальный порядок фактически использовался для устранения бесконечной константы в энергии поля:

$$\mathrm{N}\{\, H\,\} = \frac{1}{2}\int \omega_p\, \mathrm{N}\{a^+_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}}a^+_{\mathbf{p}}\}\, d^3\mathbf{p} = \int \omega_p\, a^+_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}\, d^3\mathbf{p}.$$

Оператор уничтожения, действуя направо на вакуумный вектор даёт ноль, как и оператор рождения, действующий налево. Это приводит к тому, что вакуумное среднее любого нормально упорядоченного произведения операторов также равняется нулю:

$$\big\langle\, \mathrm{N}\{\varphi_{\mathrm{x}}\varphi_{\mathrm{y}}\varphi_{\mathrm{z}}...\}\, \big\rangle = 0 \tag{2.57}$$

(далее для краткости среднее по вакууму $\big\langle\, |...|\, \big\rangle$ записывается как $\big\langle ... \big\rangle$, т.е. без вертикальных линий). Введём обозначение для коммутатора:

$$\underbrace{\varphi_{\mathrm{x}}\,\varphi_{\mathrm{y}}} = [\varphi^-_{\mathrm{x}},\, \varphi_{\mathrm{y}}\,] = [\varphi^-_{\mathrm{x}},\, \varphi^+_{\mathrm{y}}] = D_0(\mathrm{x}-\mathrm{y}), \tag{2.58}$$

где во втором равенстве учтено, что $[\varphi^-_{\mathrm{x}},\, \varphi^-_{\mathrm{y}}] = 0$ и функция $D_0$ определена на стр.54. Скобки, соединяющие снизу два оператора, будем называть их *спариванием*. Таким образом, соотношения:

$$\varphi^-_{\mathrm{x}}\,\varphi_{\mathrm{y}} = \varphi_{\mathrm{y}}\,\varphi^-_{\mathrm{x}} + \underbrace{\varphi_{\mathrm{x}}\,\varphi_{\mathrm{y}}}, \qquad \varphi^-_{\mathrm{x}}\,\varphi^+_{\mathrm{y}} = \varphi^+_{\mathrm{y}}\,\varphi^-_{\mathrm{x}} + \underbrace{\varphi_{\mathrm{x}}\,\varphi_{\mathrm{y}}} \tag{2.59}$$

определяют правило “переноса” оператора $\varphi^-_{\mathrm{x}}$ через $\varphi_{\mathrm{x}}$ или $\varphi^+_{\mathrm{y}}$.

Перемножая разложения на операторы уничтожения и рождения

$$\varphi_{\rm x}\,\varphi_{\rm y} = \big(\varphi_{\rm x}^- + \varphi_{\rm x}^+\big)\big(\varphi_{\rm y}^- + \varphi_{\rm y}^+\big) = \varphi_{\rm x}^-\varphi_{\rm y}^- + \varphi_{\rm x}^-\varphi_{\rm y}^+ + \varphi_{\rm x}^+\varphi_{\rm y}^- + \varphi_{\rm x}^+\varphi_{\rm y}^+$$

и меняя $\varphi_{\rm x}^-\varphi_{\rm y}^+$ местами, получаем:

$$\varphi_{\rm x}\,\varphi_{\rm y} = {\rm N}\{\varphi_{\rm x}\;\varphi_{\rm y}\} + \underbrace{\varphi_{\rm x}\,\varphi_{\rm y}}. \tag{2.60}$$

Так как среднее по вакууму от нормального порядка равно нулю, можно также написать (см. также стр. 54):

$$\big\langle\,\varphi_{\rm x}\,\varphi_{\rm y}\big\rangle = \underbrace{\varphi_{\rm x}\,\varphi_{\rm y}}. \tag{2.61}$$

Вычислим теперь вакуумное среднее от произведения трёх операторов (вместо координат, пишем индекс: $\varphi_{{\rm x}_1} \equiv \varphi_1$ и т.д.):

$$\big\langle\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3\big\rangle = \big\langle\varphi_1^-\,\varphi_2\,\varphi_3\big\rangle = \big\langle(\varphi_2^-\varphi_1^- + \underbrace{\varphi_1\,\varphi_2})\,\varphi_3\big\rangle = \big\langle\varphi_2^-\varphi_1^-\varphi_3\big\rangle + \underbrace{\varphi_1\,\varphi_2}\,\big\langle\varphi_3\big\rangle.$$

В первом равенстве $\varphi_1 = \varphi_1^- + \varphi_1^+$ заменён на $\varphi_1^-$, так как $\varphi_1^+$, действуя на вакуум слева даёт ноль. Затем оператор $\varphi_1^-$ начинает переноситься направо. Когда он достигает вакуумного вектора, получится ноль. Так, во втором равенстве $\varphi_1^-$ переставлен с $\varphi_2$ и для него снова оставлена только компонента $\varphi_2^-$. Спаривание (функция $D_0$) является числом (не оператором), поэтому его можно вынести за среднее. В последнем равенстве второе слагаемое равно нулю, так как $\big\langle\varphi_3\big\rangle = 0$. Теперь переставим местами $\varphi_1^-$ и $\varphi_3$, а затем $\varphi_2^-$ и $\varphi_3$. В результате приходим к выводу, что

$$\big\langle\varphi_1\varphi_2\varphi_3\big\rangle = 0. \tag{2.62}$$

Среднее значение произведения произвольного *нечётного* числа операторов скалярного поля всегда равно нулю, так как в этом произведении присутствует непарное число операторов рождения и уничтожения.

Вычислим ещё среднее значение от произведения четырёх операторов, начиная также переносить самый левый оператор уничтожения вправо:

$$\big\langle\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\big\rangle = \big\langle\varphi_1^-\,\varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_4\big\rangle = \big\langle(\varphi_2\varphi_1^- + \underbrace{\varphi_1\varphi_2})\,\varphi_3\varphi_4\big\rangle.$$

Раскрывая скобки и продолжая перенос $\varphi_1^-$ через $\varphi_3$, имеем:

$$= \underbrace{\varphi_1\varphi_2}\,\big\langle\varphi_3\varphi_4\big\rangle + \big\langle\varphi_2\varphi_1^-\,\varphi_3\varphi_4\big\rangle = \underbrace{\varphi_1\varphi_2}\,\underbrace{\varphi_3\varphi_4} + \big\langle\varphi_2(\varphi_3\varphi_1^- + \underbrace{\varphi_1\varphi_3})\,\varphi_4\big\rangle.$$

Раскрывая скобки и переставляя $\varphi_1^-$ и $\varphi_4$, получаем ноль и ещё одно спаривание: Поэтому окончательно:

$$\big\langle\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\big\rangle = \underbrace{\varphi_1\varphi_2}\,\underbrace{\varphi_3\varphi_4} + \underbrace{\varphi_1\varphi_3}\,\underbrace{\varphi_2\varphi_4} + \underbrace{\varphi_1\varphi_4}\,\underbrace{\varphi_2\varphi_3}, \tag{2.63}$$

т.е. сумму всех возможных спариваний операторов в произведении.

• В общем случае справедлива *теорема Вика* для среднего от произведения произвольного числа операторов:

$$\left\langle\, \varphi_1\varphi_2...\varphi_n \,\right\rangle = \sum_{i=2}^{n} \left\langle\, \underbrace{\varphi_1\varphi_2...\varphi_i}...\varphi_n \,\right\rangle. \tag{2.64}$$

Доказывается она по алгоритму вычисления среднего от четырёх операторов. Берём "отрицательную" компоненту $\varphi_1^-$ и начинаем переносить её вправо, пока не получим $\varphi_1^-|\rangle = 0$. По пути она спарится с каждым из операторов в произведении и возникнет сумма (2.64). Так как спаривания – это *числа*, их можно вынести из средних и рекурсивно применить формулу (2.64). В результате получится сумма всех возможных спариваний:

$$\left\langle\, \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4... \,\right\rangle = \underbrace{\varphi_1}\underbrace{\varphi_2}\underbrace{\varphi_3}\underbrace{\varphi_4}... + \underbrace{\varphi_1\varphi_2}\underbrace{\varphi_3}\underbrace{\varphi_4}... + \underbrace{\varphi_1}\underbrace{\varphi_2}\underbrace{\varphi_3}\underbrace{\varphi_4}... + ... \tag{2.65}$$

Заметим, что в соотношении (2.64) можно записывать спаривание со всеми операторами любого оператора $\varphi_k$, стоящего в произведении, а не только первого. Например, для $\varphi_2$:

$$\left\langle \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 \right\rangle = \left\langle \varphi_1(\varphi_2^- + \varphi_2^+)\varphi_3\varphi_4 \right\rangle = \left\langle \varphi_1\varphi_2^-\varphi_3\varphi_4 \right\rangle + \left\langle \varphi_1\varphi_2^+\varphi_3\varphi_4 \right\rangle.$$

Перенося $\varphi_2^-$ вправо, получим спаривания $\varphi_2$ с $\varphi_3$ и $\varphi_4$, а перенесение $\varphi_2^+$ влево даст оставшееся спаривание с $\varphi_1$.

Аналогично формулируется теорема Вика для среднего от групп нормально упорядоченных операторов. При этом необходимо спаривать только операторы из различных нормальных порядков, так как внутри одного операторы уничтожения уже прижаты вправо. Например:

$$\left\langle\, \mathrm{N}\{\varphi_1\varphi_2\}\, \mathrm{N}\{\varphi_3\varphi_4\} \,\right\rangle = \left\langle\, \mathrm{N}\{\underbrace{\varphi_1}\underbrace{\varphi_2}\}\, \mathrm{N}\{\underbrace{\varphi_3}\underbrace{\varphi_4}\} \,\right\rangle + \left\langle\, \mathrm{N}\{\underbrace{\varphi_1}\underbrace{\varphi_2}\}\, \mathrm{N}\{\underbrace{\varphi_3}\underbrace{\varphi_4}\} \,\right\rangle$$

или вынося спаривания за среднее:

$$\left\langle\, \mathrm{N}\{\varphi_1\varphi_2\}\, \mathrm{N}\{\varphi_3\varphi_4\} \,\right\rangle = \underbrace{\varphi_1}\underbrace{\varphi_3}\ \underbrace{\varphi_2}\underbrace{\varphi_4} + \underbrace{\varphi_1}\underbrace{\varphi_4}\ \underbrace{\varphi_2}\underbrace{\varphi_3}. \tag{2.66}$$

Например, если расписать левую часть (2.66), то останется только одно ненулевое слагаемое $\left\langle \varphi_1^-\varphi_2^-\varphi_3^+\varphi_4^+ \right\rangle$, равное спариваниям (2.66) справа.

Для дальнейших вычислений нам достаточно теоремы Вика в форме (2.64). Тем не менее, приведём её формулировку в более общем виде без усреднения по вакууму:

$$\varphi_1...\varphi_n = \mathrm{N}\{\varphi_1...\varphi_n\} + \mathrm{N}\{...\underbrace{\varphi_i}...\underbrace{\varphi_j}...\} + ... + \mathrm{N}\{...\underbrace{\varphi_i}...\underbrace{\varphi_k}...\underbrace{\varphi_j}...\underbrace{\varphi_l}...\} + ...,$$

где сначала стоит нормальное произведение, затем все спаривания одной пары операторов, затем двух пар и т.д. до слагаемых со всеми возможными спариваниями. Вакуумное среднее этого соотношения даст (2.65).

• Введём ещё одно обозначение (*хронологическое спаривание*) для среднего по вакууму от произведения операторов в хронологическом порядке:

$$D(\mathrm{x}-\mathrm{y}) = \langle\, \mathrm{T}\{\, \varphi_\mathrm{x}\varphi_\mathrm{y} \,\} \,\rangle = \overbrace{\varphi_\mathrm{x}\varphi_\mathrm{y}}.$$

В силу определения хронологического порядка и (2.61):

$$\overbrace{\varphi_\mathrm{x}\varphi_\mathrm{y}} = \theta(x^0-y^0)\ \underbrace{\varphi_\mathrm{x}\varphi_\mathrm{y}}\ +\ \theta(y^0-x^0)\ \underbrace{\varphi_\mathrm{y}\varphi_\mathrm{x}} = \begin{cases} \underbrace{\varphi_\mathrm{x}\varphi_\mathrm{y}}, & x^0 > y^0, \\ \underbrace{\varphi_\mathrm{y}\varphi_\mathrm{x}}, & y^0 > x^0. \end{cases}$$

Как под хронологическим произведением можно переставлять операторы: $\mathrm{T}\{\, \varphi_\mathrm{x}\varphi_\mathrm{y} \,\} = \mathrm{T}\{\, \varphi_\mathrm{y}\varphi_\mathrm{x} \,\}$, так и хронологическое спаривание (в отличие от обычного) симметрично.

Пусть времена упорядочены в порядке убывания: $x_1^0 > x_2^0 > \ldots > x_n^0$. Тогда хронологическое произведение операторов равно обычному и справедлива теорема (2.64):

$$\langle\, \mathrm{T}\{\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n\} \,\rangle = \langle\, \varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n \,\rangle = \sum_{i=2}^{n} \underbrace{\varphi_1\varphi_i} \langle\, \varphi_2\ldots\varphi_{i-1}\varphi_{i+1}\ldots\varphi_n \,\rangle.$$

В среднем времена по-прежнему упорядочены и можно поставить символ хронологического порядка, а "обычное" спаривание заменить на хронологическое:

$$\langle\, \mathrm{T}\{\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n\} \,\rangle = \sum_{i=2}^{n} \overbrace{\varphi_1\varphi_i} \langle\, \mathrm{T}\{\varphi_2\ldots\varphi_{i-1}\varphi_{i+1}\ldots\varphi_n\} \,\rangle.$$

Если мы возьмём другой порядок времён, возникнет аналогичное соотношение, в котором можно взять $\varphi_1$ (возможно стоящее не первым) и спарить с оставшимися операторами. Затем поставить символ T в среднем и хронологические спаривания вместо обычных. В результате получаем хронологическую теорему Вика:

$$\langle\, \mathrm{T}\{\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n\} \,\rangle = \sum_{i=2}^{n} \langle\, \mathrm{T}\{\overbrace{\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_i}\ldots\varphi_n\} \,\rangle \tag{2.67}$$

или, повторяя рекурсивно, сумму по всем возможным хронологическим спариваниям:

$$\langle\, \mathrm{T}\{\, \varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\ldots\} \,\rangle = \overbrace{\varphi_1\varphi_2}\,\overbrace{\varphi_3\varphi_4}\ldots + \overbrace{\varphi_1\overbrace{\varphi_2\varphi_3}\varphi_4}\ldots + \overbrace{\varphi_1\overbrace{\varphi_2\varphi_3}\varphi_4}\ldots + \ldots$$

Если под хронологическим произведением стоят группы нормально упорядоченных операторов, тогда необходимо спаривать только операторы из различных групп:

$$\langle\, \mathrm{T}\{\, \mathrm{N}\{\varphi_1\varphi_2\}\, \mathrm{N}\{\varphi_3\varphi_4\}\, \} \,\rangle = \overbrace{\varphi_1\varphi_3}\,\overbrace{\varphi_2\varphi_4} + \overbrace{\varphi_1\varphi_4}\,\overbrace{\varphi_2\varphi_3}, \tag{2.68}$$

что эквивалентно (2.66), за исключением верхнего спаривания.

• Пользуясь полученными на стр. ?? правилами дифференцирования хронологических произведений, найдём уравнение, которому удовлетворяет хронологический порядок произведения произвольного числа скалярных полей. Начнём с двух полей, зависящих от $\mathrm{x} = \{t, \mathbf{x}\}$ и $\mathrm{x}_1 = \{t_1, \mathbf{x}_1\}$. Производная по $t$ будет равна:

$$\partial_t \,\mathrm{T}\{\varphi_\mathrm{x}\varphi_1\} = \mathrm{T}\{\dot\varphi_\mathrm{x}\,\varphi_1\} + \delta_{t1}\,[\varphi_\mathrm{x},\,\varphi_1],$$

где точка – производная по времени. Последнее слагаемое равно нулю. Действительно, либо $t \neq t_1$ и тогда $\delta(t-t_1) = 0$, либо $t = t_1$, но тогда полевые операторы в один момент времени перестановочны и коммутатор равен нулю. Оставляя только первое слагаемое, возьмём от него ещё одну производную по времени:

$$\partial_t^2 \,\mathrm{T}\{\varphi_\mathrm{x}\varphi_1\} = \mathrm{T}\{\ddot\varphi_\mathrm{x}\,\varphi_1\} + \delta_{t1}\,[\dot\varphi_\mathrm{x},\,\varphi_1].$$

Теперь коммутатор уже отличен от нуля. Производная полевого оператора по времени равна сопряжённому импульсу: $\dot\varphi_\mathrm{x} = \pi_\mathrm{x}$. При совпадении времён $t = t_1$ имеем:

$$\delta(t-t_1)\,[\dot\varphi_\mathrm{x},\,\varphi_1] = \delta(t-t_1)\,[\dot\varphi(t,\mathbf{x}),\,\varphi(t,\mathbf{x}_1)] = -\imath\,\delta(t-t_1)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1),$$

см. (2.3), стр. 46. Поэтому, "пронесение" второй производной через знак хронологического произведения приводит к выражению:

$$\partial_t^2 \,\mathrm{T}\{\varphi_\mathrm{x}\varphi_1\} = \mathrm{T}\{\ddot\varphi_\mathrm{x}\varphi_1\} - \imath\,\delta_{\mathrm{x}\mathrm{x}_1},$$

где $\delta_{\mathrm{x}1} \equiv \delta(\mathrm{x}-\mathrm{x}_1)$ – 4-мерная функция Дирака. В отличие от производной по времени, производную по 3-координатам можно вносить под знак хронологического произведения. Поэтому для оператора $\partial_\mathrm{x}^2 = \partial_t^2 - \Delta$ имеем:

$$\imath(\partial_\mathrm{x}^2 + m^2)\,\mathrm{T}\{\varphi_\mathrm{x}\varphi_1\} = \mathrm{T}\{\imath(\partial_\mathrm{x}^2 + m^2)\varphi_\mathrm{x}\,\varphi_1\} + \delta_{\mathrm{x}1}. \tag{2.69}$$

Свободные поля удовлетворяют линейному уравнению: $(\partial^2 + m^2)\,\varphi = 0$. В этом случае:

$$\imath(\partial_\mathrm{x}^2 + m^2)\,\mathrm{T}\{\varphi_\mathrm{x}\varphi_1\} = \delta_{\mathrm{x}1}. \tag{2.70}$$

Усреднение (2.70) по вакууму, даёт уравнение для пропагатора (стр. 58):

$$\imath(\partial_\mathrm{x}^2 + m^2)\,\big\langle \mathrm{T}\varphi_\mathrm{x}\varphi_1\big\rangle = \delta_{\mathrm{x}1}. \tag{2.71}$$

Впрочем, операторное уравнение (2.70) является более общим и его среднее по *любым* состояниям удовлетворяет (2.71).

Аналогично получим производную от произведения трёх операторов:

$$\partial_t \mathrm{T}\{\varphi_\mathrm{x}\varphi_1\varphi_2\} = \mathrm{T}\{\dot\varphi_\mathrm{x}\varphi_1\varphi_2\} + \delta_{t1}\,[\varphi_\mathrm{x},\,\varphi_1]\,\varphi_2 + \delta_{t2}\,\varphi_1\,[\varphi_\mathrm{x},\,\varphi_2].$$

Коммутаторы при совпадающих временах равны нулю и для второй производной имеем:

$$\partial_t^2\,\mathrm{T}\{\varphi_\mathrm{x}\varphi_1\varphi_2\} = \mathrm{T}\{\ddot\varphi_\mathrm{x}\varphi_1\varphi_2\} + \delta_{t1}\,[\dot\varphi_\mathrm{x},\,\varphi_1]\,\varphi_2 + \delta_{t2}\,\varphi_1\,[\dot\varphi_\mathrm{x},\,\varphi_2].$$

Отсюда несложно получить уравнение:

$$\imath(\partial_\mathrm{x}^2 + m^2)\,\mathrm{T}\{\varphi_\mathrm{x}\varphi_1\varphi_2\} = \mathrm{T}\{\imath(\partial_\mathrm{x}^2 + m^2)\varphi_\mathrm{x}\varphi_1\varphi_2\} + \delta_{\mathrm{x}1}\varphi_2 + \delta_{\mathrm{x}2}\varphi_1. \quad (2.72)$$

В общем случае, уравнение для $\mathrm{T}\{\varphi_\mathrm{x}\varphi_1...\varphi_n\}$ будет иметь в правой части $n$ слагаемых, в каждом из которых "вычеркнут" один полевой оператор $\varphi_k$ и вместо него поставлена функция Дирака $\delta_{\mathrm{x}k} \equiv \delta(\mathrm{x} - \mathrm{x}_k)$:

$$\begin{aligned}\imath(\partial_\mathrm{x}^2 + m^2)\,\mathrm{T}\{\varphi_\mathrm{x}\,\varphi_1...\varphi_\mathrm{n}\} \;&=\; \mathrm{T}\{\imath(\partial_\mathrm{x}^2 + m^2)\,\varphi_\mathrm{x}\,\varphi_1...\varphi_\mathrm{n}\} \\ &+\; \sum_{k=1}^{n} \delta_{\mathrm{x}\mathrm{x}_k}\,\mathrm{T}\{\varphi_1...\varphi_{\mathrm{k}-1}\varphi_{\mathrm{k}+1}...\varphi_\mathrm{n}\}.\end{aligned} \quad (2.73)$$

Остался совсем небольшой шаг для получения бесконечной ($n = 1, 2, ...$) системы *уравнений Дайсона* для $n$-точечных функций Грина. В случае взаимодействующих полей, эти уравнения в принципе позволяют найти функции Грина, хотя на практике приходится пользоваться тем или иным приближенным методом. Подробнее мы рассмотрим эти уравнения в главе 5.

Для свободных полей первое слагаемое в правой части (2.73) равно нулю. В таком виде это соотношение будет лежать в основе редукционной формулы (стр. 102), связывающей амплитуду рассеяния частиц и функции Грина. Отметим также, что для свободных полей (2.73) обобщает теорему Вика. Действительно, спарим в среднем $\varphi_\mathrm{x}$ со всеми остальными операторами и подействуем оператором $\imath(\partial_\mathrm{x}^2 + m^2)$:

$$\imath(\partial_\mathrm{x}^2 + m^2)\big\langle\,\mathrm{T}\varphi_x\varphi_1\varphi_2...\varphi_n\,\big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \imath(\partial_\mathrm{x}^2 + m^2)\overbrace{\varphi_\mathrm{x}\varphi_k}\big\langle\,\mathrm{T}\varphi_k...\varphi_{k-1}\varphi_{k+1}...\varphi_n\,\big\rangle.$$

Хронологическое спаривание равно пропагатору, удовлетворяющему уравнению (2.71). Поэтому это соотношение эквивалентно усреднению уравнения (2.73).

# Глава 3

# Взаимодействие полей

В главе 2 рассматривались свободные квантовые поля, лагранжианы которых были квадратичны, а динамические уравнения линейны. Благодаря этому, можно было получить общее решение уравнений поля и легко построить квантовую теорию. Однако, на практике, основной интерес представляют не свободные частицы, а их взаимодействие друг с другом, которое описывается нелинейными уравнениями.

Начнём мы с уточнения понятия взаимодействия полей и принципа калибровочной инвариантности, лежащей в основе Стандартной модели элементарных частиц. Затем, будет вычислена энергия вакуума и одночастичного состояния для действительного скалярного поля при наличии взаимодействия. Во второй части главы рассматривается представление взаимодействия, которое является основным инструментом при получении сечений рассеяния частиц в рамках теории возмущений.

---

**Квантовый мир**

**Сергей С. Степанов**

Эта книга находится в процессе создания. Её последняя версия и другие материалы находятся на сайте: http://synset.com. Там же можно найти первый том: **I. Механика**
Замеченные ошибки и вопросы просьба присылать по адресу: steps137, затем собачка и gmail.com.

(c) 2015. Печать: 2 июля 2017 г.

## 1 Лагранжиан взаимодействия

• Рассмотрим классическую электродинамику, в которой заряды являются частицами и взаимодействуют при помощи векторного поля $A_\mu$. Уравнения Максвелла в ковариантных обозначениях имеют вид:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{3.1}$$

где $J^\nu = \{\rho, \mathbf{j}\}$ – плотность 4-тока частиц. Эти уравнения могут быть получены из лагранжиана следующего вида:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A^\mu J_\mu = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}. \tag{3.2}$$

Первое слагаемое $\mathcal{L}_0$ является лагранжианом свободного электромагнитного поля, а второе $\mathcal{L}_{\text{int}} = -A^\mu J_\mu$ – описывает его взаимодействие с зарядами (заряды порождают поле и поле изменяет их траектории).

Плотность заряда *точечной* частицы, движущейся по траектории $\mathbf{x}_1(t)$ записывается при помощи функции Дирака: $\rho(t, \mathbf{x}) = e\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1(t))$, где $e$ – заряд частицы. Для $N$ частиц, с траекториями $\mathbf{x}_1(t), ..., \mathbf{x}_N(t)$, плотность заряда равна сумме $N$ функций Дирака, а плотность 4-тока

$$J^\mu = \sum_{a=1}^{N} e_a \frac{dx_a^\mu}{dt}\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(t)).$$

При больших энергиях частицы могут рождаться и уничтожаться. Их число $N$ не сохраняется и более адекватным становится описание частиц на языке квантовой теории поля. В зависимости от типа частиц (например, наличие у них спина), они могут описываться полями с различными трансформационными свойствами относительно преобразований Лоренца. Если частицы не имеют спина им соответствует комплексное скалярное поле. Плотность его 4-тока (стр. 31), умноженная на константу *элементарного заряда* $e$, равна:

$$J_\mu = \imath\, e\,(\Psi^* \partial_\mu \Psi - \Psi \partial_\mu \Psi^*). \tag{3.3}$$

Соответственно, *лагранжиан взаимодействия* можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -A^\mu J_\mu = -\imath\, e\, A^\mu\,(\Psi^* \partial_\mu \Psi - \Psi \partial_\mu \Psi^*). \tag{3.4}$$

Он перестаёт быть квадратичным по полям, а уравнения поля в квантовой теории становятся нелинейными.

• Таким образом, свободным полем мы называем модель с лагранжианом, который от полей и их первых производных зависит квадратичным образом. Если в лагранжиан добавляются слагаемые, имеющие неквадратичный характер, говорят о наличии взаимодействия. Обычно рассматривают поля, имеющие заданные трансформационные свойства относительно преобразований Лоренца: скалярные, векторные и спинорные (глава **??**). Кроме этого, они могут иметь дополнительные индексы, связанные с внутренней симметрией лагранжиана (например, пара комплексных полей, рассмотренных на стр. 33). Взаимодействие может происходить между полями различной природы, как в примере (3.4). Возможен также неквадратичный лагранжиан, зависящий только от поля одного типа. В следующих нескольких главах математические методы квантовой теории поля будут иллюстрироваться на примере "простой" нелинейной модели действительного скалярного поля с *самодействием*:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4. \tag{3.5}$$

Константа $m$ размерности массы и безразмерная константа $\lambda$ являются *параметрами* этой модели. Первые два квадратичных по $\varphi$ слагаемых образуют лагранжиан свободного поля. Последнее слагаемое, пропорциональное $\varphi$ в четвёртой степени, ответственно за взаимодействие скалярного поля самого с собой. В квантовой электродинамике заряженные частицы взаимодействуют при помощи дополнительного электромагнитного поля, квантами которого являются фотоны. В модели (3.5) скалярные частицы взаимодействуют друг с другом непосредственно.

Задание неквадратичного члена в лагранжиане, в некотором смысле, эквивалентно заданию потенциала взаимодействия частиц в классической механике. В последней, потенциал может быть измерен непосредственно в эксперименте. В физике элементарных частиц измерять лагранжианы или уравнения поля мы не можем. Поэтому приходится сначала задавать лагранжиан, затем получать из него, например, сечение рассеяния частиц (глава 4) и, сравнив его с экспериментом, делать вывод о правильности выбранной модели.

Такой подход может несколько обескуражить, так как число возможных нелинейных обобщений огромно. К счастью, существуют общие принципы, построения лагранжианов реальных взаимодействий, которым, по всей видимости, следует и Создатель. Одним из таких принципов является *принцип калибровочной инвариантности*. Мы подробно изучим его при построении Стандартной модели, а сейчас продемонстрируем соответствующую идею на примере комплексного скалярного поля.

• Лагранжиан свободного, скалярного, комплексного поля записывается однозначно. Мы требуем чтобы он был релятивистски инвариантным, действительным, квадратичным по полям и не содержал производных более первого порядка:

$$\mathcal{L}_0 = (\partial_\mu \Psi^*)(\partial^\mu \Psi) - m^2\, \Psi^* \Psi. \tag{3.6}$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно преобразования $\Psi \mapsto e^{-\imath\omega}\Psi$ где $\omega = const$. Такая *глобальная калибровочная инвариантность* приводит к сохранению тока (стр. 31). Потребуем, чтобы также выполнялась *локальная калибровочная инвариантность*, когда параметр преобразования $\omega$ является произвольной функцией точки в 4-пространстве:

$$\Psi \mapsto \Psi' = e^{-\imath\omega(\mathrm{x})}\Psi. \tag{3.7}$$

Очевидно, что исходный лагранжиан $\mathcal{L}_0$ не инвариантен относительного такого преобразования, так как:

$$\partial_\mu \Psi' = \partial_\mu (e^{-\imath\omega}\Psi) = e^{-\imath\omega}(\partial_\mu - \imath\partial_\mu\omega)\Psi. \tag{3.8}$$

Добавим в лагранжиан $\mathcal{L}_0$ действительное векторное поле $A_\mu$, "удлинив" в (3.6) производную:

$$\partial_\mu \mapsto \partial_\mu + \imath g A_\mu,$$

где $g$ – некоторая константа. Другими словами, заменим (3.6) на

$$\mathcal{L} = \{(\partial_\mu + \imath g A_\mu)\Psi\}^* \{(\partial^\mu + \imath g A^\mu)\Psi\} - m^2\, \Psi^* \Psi. \tag{3.9}$$

Чтобы скомпенсировать слагаемое $\imath\partial_\mu\omega$ в (3.8), потребуем, чтобы при преобразовании (3.7) векторное поле менялось следующим образом:

$$g A_\mu \mapsto g A'_\mu = g A_\mu + \partial_\mu \omega. \tag{3.10}$$

Тогда:

$$(\partial_\mu + \imath g A'_\mu)\Psi' = e^{-\imath\omega}(\partial_\mu - \imath\partial_\mu\omega + \imath g A_\mu + \imath\partial_\mu\omega)\Psi = e^{-\imath\omega}(\partial_\mu + \imath g A_\mu)\Psi$$

и лагранжиан (3.9) оказывается инвариантным. Если раскрыть скобки в (3.9) ($\imath^* = -\imath$), то получится следующее выражение:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \imath g\, (\Psi^* \partial^\nu \Psi - \Psi \partial^\nu \Psi^*)\, A_\mu + g^2 A^\mu A_\mu \Psi^* \Psi. \tag{3.11}$$

Для полного описания динамики необходимо к лагранжиану (3.11) добавить лагранжиан свободного поля $A_\mu$, построенного при помощи инвариантного относительно преобразования (3.10) тензора $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Второе слагаемое в (3.11) – это стандартный для электродинамики член взаимодействия тока и 4-потенциала поля. Требование калибровочной инвариантности привело также к появлению ещё одного слагаемого, которое соответствует модификации массового члена $m^2 \mapsto m^2 - g^2\mathrm{A}^2$ свободного лагранжиана. Если бы вместо комплексного скалярного поля было взято биспинорное поле (глава **??**), получилось бы только взаимодействие вида $J^\mu A_\mu$.

Построение теории взаимодействия при помощи принципа калибровочной инвариантности на первом этапе требует определиться с выбором поля (скалярное, векторное, биспинорное) и числом его компонент. Затем записывается квадратичный лагранжиан (невзаимодействующее поле). При этом, такой лагранжиан должен обладать *внутренней симметрией* (симметрией не связанной с координатами). В рассмотренном выше примере, это преобразование $\Psi \mapsto e^{-\imath\omega}\Psi$, которое образует группу $\mathbf{U}(1)$. В главе 1 мы рассматривали лагранжиан двухкомпонентного комплексного скалярного поля $\Psi = (\Psi_1 \;\; \Psi_2)^T$, который был инвариантен относительно более общего *унитарного* преобразования (стр. 33):

$$\Psi(x) \;\mapsto \Psi'(x) = U\,\Psi(x), \qquad\qquad U^+U = 1.$$

Требуя, чтобы параметры матрицы $U$ такого преобразования были функциями координат (локальная инвариантность) мы приходим к необходимости удлинения производной. Вводимое при этом *калибровочное поле* $A^a_\mu$, кроме лоренцевского индекса $\mu$ должно иметь ещё один индекс, связанный с внутренней симметрией исходного лагранжиана (матрицей $U$).

Таким образом, вместо "угадывания" лагранжиана взаимодействия, мы должны угадать внутреннюю симметрию свободного лагранжиана, а затем, при помощи принципа калибровочной инвариантности, получить взаимодействие. Возможных (по крайней мере простых) симметрий не так много, поэтому можно существенно ограничить типы взаимодействий.

Ещё одно ограничение на выбор взаимодействия связано с требованием *перенормируемости*. При вычислениях в квантовой теории поля постоянно возникают расходящиеся (бесконечные) величины. Существует процедура, названная *перенормировкой*, которая "прячет" все эти бесконечности в параметры модели (массу частицы $m$, константу связи и т.д.). Эту процедуру можно проделать не для всех лагранжианов. Поэтому, если мы хотим получать физически осмысленные результаты, необходимо ограничится только классом взаимодействий, которые могут быть перенормированы (глава 8).

## 2 Скалярное поле с $\varphi^4$ самодействием

Пусть лагранжиан действительного скалярного поля содержит член четвёртой степени поля:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4, \tag{3.12}$$

где $m$ и $\lambda$ – параметры модели. Операторное уравнение поля (уравнение Гейзенберга), соответствующее этому лагранжиану, имеет вид:

$$(\partial^2 + m^2)\hat{\varphi} = -\frac{\lambda}{3!}\hat{\varphi}^3. \tag{3.13}$$

Гамильтониан $\hat{H}$ системы (3.12) разбивается на свободную часть (квадратичную по полям) и взаимодействие ($\hat{\pi} = \partial_0\hat{\varphi}$):

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\int(\hat{\pi}^2 + (\nabla\hat{\varphi})^2 + m^2\hat{\varphi}^2)\,d^3\mathbf{x} + \frac{\lambda}{4!}\int\hat{\varphi}^4\,d^3\mathbf{x}. \tag{3.14}$$

Он коммутирует с оператором полного импульса:

$$\hat{\mathbf{P}} = -\int\hat{\pi}\nabla\hat{\varphi}\,d^3\mathbf{x}, \qquad [\hat{H},\,\hat{\mathbf{P}}] = 0, \tag{3.15}$$

поэтому они имеют общие собственные векторы:

$$\hat{\mathrm{P}}\,|\mathrm{P}\rangle = \mathrm{P}\,|\mathrm{P}\rangle, \qquad |\mathrm{P}\rangle \equiv |E, \mathbf{P}\rangle, \tag{3.16}$$

а их собственные значения составляют 4-вектор $\mathrm{P} = \{E, \mathbf{P}\}$. Вакуум полного гамильтониана $\hat{H}|0\rangle = E_0|0\rangle$ отличается от вакуума свободного гамильтониана $|\,\rangle$. Энергия вакуума $E_0$ (если не вычитать из неё константы), как и у свободного поля бесконечна, а импульс $\mathbf{P}$ равен нулю.

В силу трансляционной инвариантности теории, среднее значение произведения полевых операторов по вакууму (и любому собственному вектору 4-импульса) зависит от разности 4-координат. Это можно показать, пользуясь решением ковариантного уравнения Гейзенберга (стр. 303):

$$\imath\partial_\mu\hat{\varphi}(\mathrm{x}) = [\hat{\varphi}(\mathrm{x}),\,P_\mu] \qquad => \qquad \hat{\varphi}(\mathrm{x}) = e^{\imath\hat{\mathrm{P}}\mathrm{x}}\,\hat{\varphi}(0)\,e^{-\imath\hat{\mathrm{P}}\mathrm{x}}. \tag{3.17}$$

Отсюда следует, что:

$$\langle\mathrm{P}|\,\hat{\varphi}(\mathrm{x})\hat{\varphi}(\mathrm{y})\,|\mathrm{P}\rangle = e^{\imath\mathrm{P}\,(\mathrm{x}-\mathrm{y})}\,\langle\mathrm{P}|\,\hat{\varphi}(0)\,e^{-\imath\hat{\mathrm{P}}\,(\mathrm{x}-\mathrm{y})}\,\hat{\varphi}(0)\,|\mathrm{P}\rangle. \tag{3.18}$$

В частности, среднее значение любой степени поля не зависит от координат: $\langle\mathrm{P}|\,\hat{\varphi}^n(\mathrm{x})\,|\mathrm{P}\rangle = \langle\mathrm{P}|\,\hat{\varphi}^n(0)\,|\mathrm{P}\rangle$. Эти рассуждения применимы и к хронологическому среднему. В дальнейшем часто будет встречаться вакуумное среднее $\langle 0|\,\mathrm{T}\hat{\varphi}(\mathrm{x})\hat{\varphi}(\mathrm{y})\,|0\rangle = \mathrm{G}(\mathrm{x}-\mathrm{y})$, которое называться *точной двухточечной функцией Грина* или *точным пропагатором.*

• Далее будем считать, что, если записано среднее без указания состояния, подразумевается усреднение по собственному вектору $|\mathrm{P}\rangle$. Усредним по такому состоянию уравнение (3.13):

$$m^2 \langle \hat{\varphi}_\mathrm{x} \rangle + \frac{\lambda}{6} \langle \hat{\varphi}_\mathrm{x}^3 \rangle = -\partial^2 \langle \hat{\varphi}_\mathrm{x} \rangle = 0, \tag{3.19}$$

где учтено, что среднее значения операторов поля постоянно.

Для свободного поля ($\lambda = 0$) среднее $\langle\, \hat{\varphi}_\mathrm{x} \,\rangle = \langle\, \hat{\varphi}_0 \,\rangle = 0$, где $\hat{\varphi}_0 \equiv \hat{\varphi}(0)$. Ноль получается и в случае полного гамильтониана (3.14). Он инвариантен при замене $\varphi \mapsto -\varphi$, поэтому, средние нечётных степеней поля должны равняться нулю. Этот же результат, в дальнейшем, мы получим в рамках теории возмущений.

Уравнение (3.17) выполняется не только для $\hat{\varphi}(\mathrm{x})$, но и для $\hat{\pi}(\mathrm{x}) = \partial_0 \hat{\varphi}(\mathrm{x})$ и $\nabla\hat{\varphi}(\mathrm{x})$, так как производные $\partial_0$ и $\nabla$ перестановочны с $\partial_\mu$. Более того, оно справедливо для любого произведения $\hat{\varphi}$, $\hat{\pi}$ и $\nabla\hat{\varphi}$ (стоит проверить, что $\imath\partial_\mu(\hat{A}\hat{B}) = [\hat{A}\hat{B},\, \hat{H}]$, если $\hat{A}$ и $\hat{B}$ удовлетворяют уравнению Гейзенберга).

Пусть $\hat{A}$ это $\hat{\varphi}$, $\hat{\pi}$, $\nabla\hat{\varphi}$ или их произведение. Усредняя уравнение Гейзенберга, имеем:

$$\imath\langle \partial_\mu \hat{A} \rangle = \langle \mathrm{P}|\hat{A}\,\hat{P}_\mu - \hat{P}_\mu \hat{A}|\mathrm{P}\rangle = \langle \hat{A} \rangle\, P_\mu - P_\mu \langle \hat{A} \rangle = 0.$$

Это соотношение позволяет получать различные связи между средними. Например, выберем в качестве $\hat{A}$ оператор $\hat{\varphi}$:

$$\langle \partial_\mu \hat{\varphi}_\mathrm{x} \rangle = 0 \qquad => \qquad \langle \hat{\pi}_\mathrm{x} \rangle = 0, \qquad \langle \nabla\hat{\varphi}_\mathrm{x} \rangle = 0. \tag{3.20}$$

Выбор $\hat{A} = \hat{\varphi}\,\partial^\mu\hat{\varphi}$, даёт:

$$\langle \partial_\mu(\hat{\varphi}\,\partial^\mu\hat{\varphi}) \rangle = \langle \hat{\varphi}\,\partial^2\hat{\varphi} + (\partial\hat{\varphi})^2 \rangle = 0$$

или, учитывая операторные уравнения (3.13), находим связь среднего значения квадрата канонического импульса со средними поля:

$$\langle \hat{\pi}^2 \rangle = \langle (\nabla\hat{\varphi})^2 \rangle + m^2 \langle \hat{\varphi}^2 \rangle + \frac{\lambda}{6} \langle \hat{\varphi}^4 \rangle. \tag{3.21}$$

Используя это соотношение, можно записать плотность энергии поля $\hat{H}\,|\mathrm{P}\rangle = E\,|\mathrm{P}\rangle$ в виде:

$$\frac{E}{V} = \langle (\nabla\hat{\varphi}_0)^2 \rangle + m^2 \langle \hat{\varphi}_0^2 \rangle + \frac{\lambda}{8} \langle \hat{\varphi}_0^4 \rangle = \langle \hat{\pi}_0^2 \rangle - \frac{\lambda}{4!} \langle \hat{\varphi}_0^4 \rangle, \tag{3.22}$$

где полевые операторы взяты в точке $\mathrm{x} = 0$ (что позволило вынести средние за интеграл по $d^3\mathbf{x}$, заменив его на объём 3-пространства $V$). Это соотношение является аналогом *вириальной теоремы* в квантовой механике.

## 3 Энергия вакуума и одночастичного состояния

• Найдём энергию скалярного поля с самодействием $(\lambda/4!)\,\varphi^4$. Будем считать параметр $\lambda$ малым так, что применима теория возмущений. В качестве нулевого приближения по $\lambda$ рассмотрим два случая: вакуум и одночастичное состояние (один квант свободного поля). Мы ограничимся вычислением первой поправки по $\lambda$. Для этого достаточно воспользоваться только формулой Геллмана-Фейнмана (стр. 62). Для ненормированных на единицу состояний (таковым является одночастичное состояние) её необходимо записать следующим образом:

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\,\frac{\langle \mathrm{P}|\hat{H}|\mathrm{P}\rangle}{\langle \mathrm{P}|\mathrm{P}\rangle} = \frac{\langle \mathrm{P}|\frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda}|\mathrm{P}\rangle}{\langle \mathrm{P}|\mathrm{P}\rangle}. \tag{3.23}$$

Стоит проверить справедливость этого соотношения, беря производную по параметру $\lambda$, как от гамильтониана, так и от векторов состояний $|\mathrm{P}\rangle$ полного 4-импульса системы. Дифференцируя по параметру $\lambda$ в $\varphi^4$ теории, имеем:

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \frac{1}{4!}\int \frac{\langle \mathrm{P}|\varphi^4(\mathrm{x})|\mathrm{P}\rangle}{\langle \mathrm{P}|\mathrm{P}\rangle}\,d^3\mathbf{x} = \frac{V}{4!}\,\frac{\langle \mathrm{P}|\hat{\varphi}_0^4|\mathrm{P}\rangle}{\langle \mathrm{P}|\mathrm{P}\rangle}, \tag{3.24}$$

где во втором равенстве учтена трансляционная инвариантность теории $\hat{\varphi}_0^4 \equiv \hat{\varphi}^4(0)$ и $V$ – объём 3-пространства. Пусть энергия $E$ полной теории может быть разложена в ряд по степеням $\lambda$:

$$E = E^{(0)} + E^{(1)}\,\lambda + \ldots \tag{3.25}$$

Средние значения от полевых операторов зависят от $\lambda$ и для них также запишем степенной ряд. Например:

$$\langle \mathrm{P}|\hat{\varphi}^4|\mathrm{P}\rangle = \langle \mathrm{P}|\hat{\varphi}^4|\mathrm{P}\rangle_0 + \langle \mathrm{P}|\hat{\varphi}^4|\mathrm{P}\rangle_1\,\lambda + \ldots \tag{3.26}$$

Подставляя эти разложения в (3.24) и приравнивая коэффициенты при нулевой степени $\lambda$, несложно выразить первую поправку к энергии через среднее от оператора поля:

$$E^{(1)} = \frac{V}{4!}\,\frac{\langle \mathrm{P}|\hat{\varphi}_0^4|\mathrm{P}\rangle_0}{\langle \mathrm{P}|\mathrm{P}\rangle_0}. \tag{3.27}$$

Индекс ноль в правой части у кет-векторов означает, что среднее и норма вектора вычисляются в нулевом приближении, т.е. для свободной теории с $\lambda = 0$.

• Рассмотрим состояние с наименьшей энергией (вакуум). Для полной теории обозначим его как $|0\rangle$. Вакуум же свободной теории ($\lambda = 0$), будем, как и раньше, обозначать пустыми скобками: $|\,\rangle$. Первая поправка к вакуумной энергии свободного поля $E_0^{(0)}$ в соответствии с (3.27) равна

$$E_0^{(1)} = \frac{V}{4!}\,\langle\,|\hat{\varphi}_0^4|\,\rangle. \tag{3.28}$$

Нижний индекс "0" у энергии подчёркивает, что мы вычисляем вакуумную энергию. Кроме этого, предполагается, что $\langle\,|\,\rangle = 1$.

Среднее в правой части (3.28) можно вычислить, подставив интегральное представление свободного поля через операторы рождения и уничтожения. Однако, проще сразу воспользоваться теоремой Вика (стр. 66):

$$\langle\,|\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_3\hat{\varphi}_4|\,\rangle = \langle\,|\underbrace{\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_2}\underbrace{\hat{\varphi}_3\hat{\varphi}_4} + \underbrace{\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_3}\hat{\varphi}_4 + \hat{\varphi}_1\underbrace{\hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_3\hat{\varphi}_4}|\,\rangle.$$

При одинаковых аргументах операторов среднее равно $3D_0^2(0) = 3D_0^2$, где

$$D_0 = \underbrace{\varphi_0\,\varphi_0} = \langle\,\varphi_0\,\varphi_0\,\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3\,2\omega_p} \;\sim\; \frac{Q^2}{8\pi^2} \tag{3.29}$$

и в конце определения записано регуляризованное выражение (2.48), стр. 61 с обрезанным 3-импульсом на значении $Q$.

Плотность энергии свободного вакуума (если не вычитать из неё константы) равна (стр. 61):

$$\frac{E_0^{(0)}}{V} = \frac{1}{2}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\,\omega_p \;\sim\; \frac{Q^4}{16\pi^2}. \tag{3.30}$$

В соответствии с (3.28) эта плотность энергии при наличии самодействия увеличивается на ещё одну бесконечную константу:

$$\frac{E_0}{V} = \frac{E_0^{(0)}}{V} + \frac{\lambda}{8}\,D_0^2 + \ldots \tag{3.31}$$

Подставляя регуляризованные выражения, это соотношение можно также записать в виде:

$$\frac{E_0}{V} = \frac{Q^4}{16\pi^2}\left(1 + \frac{\lambda}{32\pi^2} + \ldots\right). \tag{3.32}$$

Таким образом, плотность энергии увеличивается в $1 + \lambda/32\pi^2$ раз. Естественно, такое утверждение корректно только при наличии регуляризации (когда энергия свободного вакуума $E_0^{(0)}$ – конечна).

• Интерпретация возбуждённых состояний как частиц (квантов поля) была введена при рассмотрении свободного поля. Можно предположить, что и для неквадратичных лагранжианов так же существуют решения, которые соответствуют одночастичным состояниям. Эта убеждённость основана на физическом факте наблюдения свободных частиц, находящихся на большом расстоянии друг от друга. Для $\varphi^4$-теории наличие самодействия должно приводить к тому, что свойства подобных скалярных частиц будут отличаться от квантов свободного поля. В частности, их массы оказываются различными. Продемонстрируем это, проведя вычисления по теории возмущений, взяв в качестве нулевого приближения не вакуумное, а одночастичное состояние с импульсом $\mathbf{p}$. В этом случае, в формуле (3.27) вектором $|\mathrm{P}\rangle$ является $|\mathbf{p}\rangle = \hat{a}^+_{\mathbf{p}}|\,\rangle$. Найдём среднее по этому состоянию:

$$\langle \mathbf{p}|\hat{\varphi}^4|\mathbf{p}\rangle = \langle\, |\hat{a}_{\mathbf{p}}\,\hat{\varphi}^4\hat{a}^+_{\mathbf{p}}|\,\rangle = 4\,\hat{a}_{\mathbf{p}}\,\hat{\varphi}\,\langle\, |\hat{\varphi}^3\hat{a}^+_{\mathbf{p}}|\,\rangle + \hat{a}_{\mathbf{p}}\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\,\langle\, |\hat{\varphi}^4|\,\rangle$$

$$= 12\,\hat{a}_{\mathbf{p}}\,\hat{\varphi}\;\hat{\varphi}\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\,\langle\, |\hat{\varphi}^2|\,\rangle + \hat{a}_{\mathbf{p}}\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\,\langle\, |\hat{\varphi}^4|\,\rangle.$$

В первой строке $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ по теореме Вика спаривается с четырьмя операторами $\hat{\varphi}$ (эти спаривания одинаковы, поэтому сразу ставим коэффициент 4) и с оператором $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$. Во второй строке, проведено спаривание $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$. Спаривание – это коммутатор, поэтому:

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}\,\hat{\varphi}_0 = [\hat{a}_{\mathbf{p}},\,\hat{\varphi}_0] = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3\,2\omega_p}},$$

и аналогично для $\hat{\varphi}_0$ с $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$. Спаривание операторов уничтожения и рождения равно

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}} = [\hat{a}_{\mathbf{p}},\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}}] = \delta_p(\mathbf{0}) = \frac{V}{(2\pi)^3},$$

где функция Дирака от импульсов в нуле пропорциональна объёму 3-пространства. В результате:

$$\langle \mathbf{p}|\hat{\varphi}^4|\mathbf{p}\rangle = \frac{3V}{(2\pi)^3}\,D_0^2 + \frac{12}{(2\pi)^3\,2\omega_p}\,D_0. \tag{3.33}$$

Среднее значение необходимо разделить на норму

$$\langle \mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle = \delta_p(\mathbf{0}) = \frac{V}{(2\pi)^3}, \tag{3.34}$$

где снова введен объём 3-пространства.

Энергия одночастичного состояния свободной частицы равна $\omega_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. К этой энергии необходимо прибавить энергию вакуума $E_0^{(0)}$. Поэтому, собирая всё вместе, получаем:

$$E_p = E_0^{(0)} + \omega_p + \left(\frac{V D_0^2}{8} + \frac{D_0}{4\,\omega_p}\right)\lambda + ... \tag{3.35}$$

Объединим первое слагаемое в круглых скобках с $E_0^{(0)}$, обозначив его как $E_0$. Это ни что иное как энергия вакуума (3.31) при наличии взаимодействия. Поэтому, окончательно:

$$E_p = E_0 + \omega_p + \frac{\lambda D_0}{4\,\omega_p} + ... \tag{3.36}$$

Это выражение содержит не только бесконечную константу вакуумной энергии $E_0$, но и первая поправка по $\lambda$, зависящая от импульса, оказывается бесконечной. Мы впервые сталкиваемся с необходимостью перенормировки физических величин. Введём новый параметр массы:

$$M^2 = m^2 + \frac{\lambda}{2}\,D_0. \tag{3.37}$$

Будем игнорировать бесконечный характер константы $D_0 = Q^2/8\pi^2$, считая, что она регуляризована и поэтому конечна, см. (3.29). Тогда второе слагаемое в (3.37) можно считать малым (первый порядок теории возмущений по $\lambda$). В этом случае:

$$\sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} = \left(\mathbf{p}^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\,D_0\right)^{1/2} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + \frac{\lambda\,D_0}{4\,\omega_p} + O(\lambda^2).$$

Таким образом, энергия (3.36) возбуждённого состояния *перенормированной теории* равна

$$E_p = E_0 + \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}. \tag{3.38}$$

Это вполне согласуется с нашей интерпретацией возбуждений вакуума как релятивистских частиц. Однако, эти частицы, вообще говоря, имеют массу $M$, отличную от исходного параметра $m$ в лагранжиане. В некотором смысле, наличие взаимодействия как бы “одевает” частицу, “добавляя” ей массы. При рассмотрении рассеяния частиц будут введены диаграммы Фейнмана и понятие виртуальных частиц. Именно эти виртуальные частицы, окружая свободную “реальную” частицу, создают вокруг неё “шубу”. Эта шуба увеличивает массу частицы от её исходного (затравочного) значения $m$ в свободном лагранжиане.

## 4 Временные представления

*Представление Гейзенберга* в квантовой теории поля удобно тем, что соответствующие ему уравнения имеют явно ковариантный вид (стр. 47):

$$\imath\partial_\mu\hat{\varphi}(t,\,\mathbf{x}) = [\hat{\varphi}(t,\,\mathbf{x}),\,\hat{P}_\mu], \tag{3.39}$$

где $\hat{P}^\mu = \{\hat{H},\,\hat{\mathbf{P}}\}$ – оператор полного 4-импульса поля. Из этого уравнения получаются уравнения поля такого же вида, как и классические уравнения, следующие из лагранжиана.

Однако, как и в "обычной" квантовой механике, можно рассматривать различные представления операторов и векторов состояний. При этом, зависимость от времени перенося с операторов на векторы и наоборот.

Для $\mu = 0$ (3.39) имеет вид:

$$\imath\frac{\partial\hat{\varphi}(t,\,\mathbf{x})}{\partial t} = [\hat{\varphi}(t,\,\mathbf{x}),\,\hat{H}]. \tag{3.40}$$

Так как $\hat{H}$ не зависит от времени, его решение формально можно записать в следующем виде:

$$\hat{\varphi}(t,\,\mathbf{x}) = e^{\imath\hat{H}t}\,\hat{\varphi}(0,\,\mathbf{x})\,e^{-\imath\hat{H}t}. \tag{3.41}$$

Дифференцируя это выражение по времени $t$, мы получаем уравнение (3.40). Начальное значение оператора $\hat{\varphi}(0,\,\mathbf{x})$ в момент времени $t = 0$ называется оператором в *представлении Шрёдингера.*

Когда гамильтониан системы можно разбить на две части $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, удобно использовать *представление взаимодействия* (стр. **??**):

$$\hat{\varphi}_I(t,\,\mathrm{x}) = e^{\imath\hat{H}_0 t}\,\hat{\varphi}(0,\,\mathbf{x})\,e^{-\imath\hat{H}_0 t}. \tag{3.42}$$

В этом представлении оператор удовлетворяет уравнению:

$$\imath\frac{\partial\hat{\varphi}_I(t,\,\mathbf{x})}{\partial t} = [\hat{\varphi}_I(t,\,\mathbf{x}),\,\hat{H}_0], \tag{3.43}$$

Для скалярного поля это уравнение имеет вид: $(\partial^2 + m^2)\hat{\varphi}_I = 0$, поэтому операторы в представлении взаимодействия являются простыми математическими объектами. Связь операторов а представлениях взаимоействия и Гейзенберга $\hat{\varphi}(t,\,\mathbf{x})$ имеет вид:

$$\hat{\varphi}_I(t,\,\mathrm{x}) = e^{\imath\hat{H}_0 t}\,e^{-\imath\hat{H}t}\,\hat{\varphi}(t,\,\mathbf{x})\,e^{\imath\hat{H}t}\;e^{-\imath\hat{H}_0 t}. \tag{3.44}$$

Стоит проверить, что из этого соотношения и уравнений Гейзенберга (3.40) снова получается уравнение (3.43).

• Отметим, что связь (3.41) справедлива для *любых* операторов в представлениях Гейзенберга и Шрёдингера. Напомним, что, в силу перестановочности производных $\partial_\mu$ и $\partial_0$, $\nabla$, канонический импульс, сопряжённый оператору поля $\hat{\pi}(\mathrm{x}) = \partial_0\hat{\varphi}(\mathrm{x})$ и градиент поля $\nabla\hat{\varphi}(\mathrm{x})$ удовлетворяют уравнению (3.39). Поэтому, для них также справедливо и соотношение (3.41).

Энергия, импульс и другие величины в обоих представлениях выражаются через операторы поля одинаковым образом. Так,

$$\hat{\varphi}^2(t,\,\mathbf{x}) = e^{\imath\hat{H}t}\,\hat{\varphi}(0,\,\mathbf{x})\,e^{-\imath\hat{H}t}\ \cdot e^{\imath\hat{H}t}\,\hat{\varphi}(0,\,\mathbf{x})\,e^{-\imath\hat{H}t} = e^{\imath\hat{H}t}\,\hat{\varphi}^2(0,\,\mathbf{x})\,e^{-\imath\hat{H}t},$$

где экспоненты между полевыми операторами сократились и остались только вне $\hat{\varphi}^2$. Аналогичное выражение будет справедливо для любой степени операторов поля или любых произведений $\hat{\pi}$, $\hat{\varphi}$ и $\nabla\hat{\varphi}$. Например, пусть:

$$\hat{V}(t) = \int d^3\mathrm{x}\,\hat{\varphi}^4(t,\,\mathrm{x}) = \int d^3\mathrm{x}\,e^{\imath\hat{H}t}\,\hat{\varphi}^4(0,\,\mathrm{x})\,e^{-\imath\hat{H}t}.$$

Тогда, соответствующий ему оператор в представлении Шрёдингера имеет вид:

$$\hat{V}(0) = e^{-\imath\hat{H}t}\,\hat{V}(t)\,e^{\imath\hat{H}t} = \int d^3\mathrm{x}\,\hat{\varphi}^4(0,\,\mathrm{x}),$$

где уравнение (3.41) умножено слева на $e^{-\imath\hat{H}t}$, а справа на $e^{\imath\hat{H}t}$. Оператор $\hat{V}(0)$ не зависит от времени и выражается через полевой оператор в представлении Шрёдингера также, как и в представлении Гейзенберга.

Аналогично, несложно также проверить, что коммутатор поля и сопряжённого ему импульса (стр.46) сохраняет свой вид в представлении Шрёдингера:

$$[\hat{\varphi}(0,\mathbf{x}),\,\hat{\pi}(0,\mathbf{y})] = \imath\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{3.45}$$

Представление Шрёдингера является частным случаем решения уравнения (3.39) в виде: $\hat{\varphi}(\mathrm{x}) = e^{\imath\hat{\mathrm{P}}\mathrm{x}}\,\hat{\varphi}(0)\,e^{-\imath\hat{\mathrm{P}}\mathrm{x}}$. Выделение времени в (3.41) удобно тем, что в дальнейшем будет рассматриваться эволюция состояний во времени, например, при рассмотрении рассеяния частиц. Вероятность подобного рассеяния как раз даёт вектор состояния $\big|\Psi,\,t\big\rangle$, эволюционирующий от $t=-\infty$ (где находились исходные частицы) до $t=\infty$ (где оказались рассеянные частицы). В таких задачах время имеет выделенный характер и удобнее оказывается именно представление Шрёдингера или представление взаимодействия (см. ниже), являющееся в некотором смысле гибридом представлений Гейзенберга и Шрёдингера.

## 5 Адиабатическая гипотеза

• Рассмотрим нерелятивистскую квантовую механику с двухчастичным гамильтонианом:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m} + V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) = \hat{H}_0 + \hat{V}.$$

Пусть потенциал взаимодействия $V$ убывает с расстоянием. Тогда, если частицы при $t_0 = -\infty$ были удалены друг от друга, вполне естественно возникают состояния свободных частиц. Эти состояния $|\mathbf{p}_2,\, \mathbf{p}_1\rangle$ являются собственными векторами суммарного импульса и свободного гамильтониана $\hat{H}_0$ (строго говоря, при этом необходимо рассматривать локализованные волновые пакеты, построенные на этих состояниях).

В квантовой теории поля потенциал отсутствует и мы работаем в терминах полевых операторов. Для лагранжиана (3.12) нет естественной мотивировки к отключению взаимодействия. Наша вера в то, что такой лагранжиан (при наличии члена $\varphi^4$) может описывать свободные частицы, которые не взаимодействуют на больших расстояниях, скорее основана на опыте, чем на дедукции. В представлении взаимодействия можно записать решение уравнения $(\partial^2 + m^2)\hat{\varphi}_I = 0$:

$$\hat{\varphi}_I(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2\omega_p}} \Big\{ \hat{a}_{\mathbf{p}}\, e^{-\imath \mathrm{px}} + \hat{a}^+_{\mathbf{p}}\, e^{\imath \mathrm{px}} \Big\}, \qquad [\hat{a}_{\mathbf{p}},\, \hat{a}^+_{\mathbf{k}}] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}).$$

Однако, ни от куда не следует, что операторы $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}$ являются операторами рождения свободных частиц и существует вакуум $|\,\rangle$, соответствующий их отсутствию. Более того, несложно видеть, что подобное вакуумное состояние не является собственным вектором полного гамильтониана $\hat{H}$.

В квантовой теории поля частицы могут взаимодействовать не только непосредственно друг с другом, как это мы наблюдаем в экспериментах по их рассеянию, но и с вакуумом. Поэтому не очевидно, что масса свободной частицы окажется равной параметру $m$ в лагранжиане (3.12). Как мы видели (стр. 81), и увидим ещё не раз, возникающие в теории бесконечности, требуют выполнения процедуры перенормировки. В результате этой процедуры прийдётся заменить параметр $m$ на физическую массу, зависящую от $m$, $\lambda$ и некоторых бесконечных констант.

Тем не менее, в рамках *адиабатической гипотезы*, предполагается, что в бесконечно удалённом прошлом взаимодействие можно постепенно включать, а в удалённом будущем выключать, так, что в начальном и конечном состояниях находятся свободные частицы. Эта гипотеза позволяет получать осмысленные выражения для сечений рассеяния хорошо согласующиеся с экспериментом.

• Зная оператор эволюции, можно вычислять вероятности изменения импульсов частиц при их столкновениях. Например, пусть в отдалённом прошлом $t_0 = -\infty$ двигались две частицы с импульсами $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$. После взаимодействия их импульсы изменились и в момент времени $t = \infty$ стали равными $\mathbf{p}_3$ и $\mathbf{p}_4$. Мы будем работать в представлении взаимодействия, в котором поле $\varphi_I(\mathrm{x})$ удовлетворяет уравнению $(\partial^2 + m^2)\,\varphi_I = 0$. Предположим, что при $t_0 = -\infty$ существует вакуумное состояние свободных частиц для которого $\hat{a}_{\mathbf{p}}|\,\rangle = 0$, а начальное двухчастичное состояние получается действием на него операторами рождения:

$$|\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1\rangle \sim a^+_{\mathbf{p}_2} a^+_{\mathbf{p}_1}\,|\,\rangle.$$

Векторы в представлении взаимодействия изменяются со временем (**??**), поэтому в момент времени $t = \infty$ получится, вообще говоря другой вектор вакуума свободных частиц. При этом норма вектора не меняется:

$$\big\langle \Phi, t|\Phi, t\big\rangle_I = \big\langle \Phi, t_0|\hat{S}^+(t, t_0)\hat{S}(t, t_0)|\Phi, t_0\big\rangle_I = \big\langle \Phi, t_0|\Phi, t_0\big\rangle_I.$$

Поэтому, раз предполагается, что при $t = \infty$ снова получаются свободные частицы, постулируется, что новый вакуум с точностью до фазы совпадает с исходным вакуумом при $t_0 = -\infty$:

$$|\,\rangle_\infty = \hat{S}(\infty, -\infty)\,|\,\rangle = e^{\imath\alpha}\,|\,\rangle. \tag{3.46}$$

В результате, при $t = \infty$ можно формировать двухчастичные состояния при помощи операторов рождения (они от времени не зависят):

$${}_\infty\big\langle \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_3|\ \sim\ {}_\infty\big\langle\,|a_{\mathbf{p}_4} a_{\mathbf{p}_3}\ = e^{-\imath\alpha}\,\big\langle\,|\,a_{\mathbf{p}_4} a_{\mathbf{p}_3}. \tag{3.47}$$

Начальное состояние со временем эволюционирует, превращаясь в будущем в состояние $\hat{S}(\infty, -\infty)\,|\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1\rangle$. Амплитуда вероятности обнаружить в этом состоянии у частиц импульсы $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$ равна:

$${}_\infty\big\langle \mathbf{p}_4,\ \mathbf{p}_3\,|\hat{S}(\infty, -\infty)|\,\mathbf{p}_2,\ \mathbf{p}_1\big\rangle \sim \frac{\big\langle\,|a_{\mathbf{p}_4} a_{\mathbf{p}_3}\,\hat{S}(\infty, -\infty)\,a^+_{\mathbf{p}_2} a^+_{\mathbf{p}_1}|\,\big\rangle}{\big\langle\,|\hat{S}(\infty, -\infty)|\,\big\rangle}, \tag{3.48}$$

где вместо вектора ${}_\infty\big\langle \mathbf{p}_4,\ \mathbf{p}_3\,|$ подставлено (3.47), а комплексная экспонента $e^{\imath\alpha} = \big\langle\,|\hat{S}(\infty, -\infty)|\,\big\rangle$ найдена из (3.46). Везде стоит вектор исходного вакуума при $t = -\infty$.

Казалось бы, фазу $e^{\imath\alpha}$ можно было просто опустить, так как она не сказывается на вероятности перехода. Однако, при построении теории возмущений возникают расходящиеся выражения, работа с которыми потребует определённой аккуратности. Поэтому для амплитуды будем пользоваться выражением (3.48), учитывающим $e^{\imath\alpha}$.

# Глава 4

# Сечение рассеяния

Типичный эксперимент в физике высоких энергий – это столкновение двух частиц друг с другом. В таком эксперименте измеряется сечение рассеяния, характеризующее вероятности изменений частицами своих импульсов.

Сначала мы напомним кинематические основы столкновений частиц и понятие сечения рассеяния в неквантовой теории. Затем, сечение рассеяния будет связано с матричными элементами оператора эволюции (матрицей рассеяния). При помощи теории возмущений мы вычислим его в модели скалярного поля с самодействием $\varphi^4$. Завершается глава выводом редукционной формулы, связывающей простым образом матрицу рассеяния с функциями Грина, которые будут изучаться в следующих главах.

---

**Квантовый мир**

**Сергей С. Степанов**

Эта книга находится в процессе создания. Её последняя версия и другие материалы находятся на сайте: http://synset.com. Там же можно найти первый том: **I. Механика**
Замеченные ошибки и вопросы просьба присылать по адресу: steps137, затем собачка и gmail.com.

(c) 2015. Печать: 2 июля 2017 г.

## 1 Столкновение частиц

• Основным методом изучения взаимодействия частиц является их столкновение друг с другом. Обычно сталкивают две частицы, в результате чего рождается множество других частиц: $A_1 + A_2 \mapsto B_1 + ... + B_n$. Если рождается только две частицы, то говорят о *двухчастичной реакции*: $A_1 + A_2 \mapsto B_1 + B_2$. Например, при рассеянии протона $p$ на фотоне $\gamma$ может родиться нейтральный пи-мезон $\pi^0$:

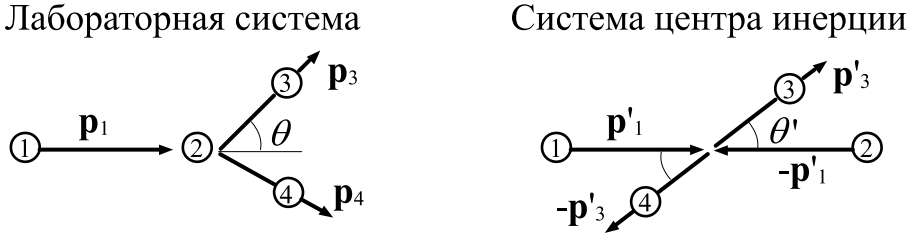
$$p \ + \ \gamma \ \mapsto \ p \ + \ \pi^0.$$

Суммарная энергия и импульс до и после столкновения равны (закон сохранения 4-импульса). Для двухчастичных реакций:

$$\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 = \mathrm{p}_3 + \mathrm{p}_4, \tag{4.1}$$

где $\mathrm{p}_i = \{E_i, \mathbf{p}_i\}$ и $E_i = \sqrt{\mathbf{p}_i^2 + m_i^2}$ (считаем, что в левой части (4.1) стоят значения начальных 4-импульсов, а в правой – конечных).

Чаще всего рассматривается две системы отсчёта. Если одна из частиц неподвижна (мишень), то такую систему называют *лабораторной*:




Если же импульсы начальных частиц равны и направлены в противоположные стороны, то говорят о системе *центра инерции*. В системе центра инерции ($\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$), в силу закона сохранения 3-импульса, противоположными будут и конечные импульсы: $\mathbf{p}_4 = -\mathbf{p}_3$. Закон сохранения энергии в этом случае можно записать следующим образом:

$$\sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_1^2} + \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m_2^2} = \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2} + \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_4^2}.$$

Рождение из исходных частиц $m_1$, $m_2$, частиц с массами $m_3$, $m_4$ возможно только, если суммарная энергия исходных частиц больше суммы масс конечных частиц $E_1 + E_2 > m_3 + m_4$. Это неравенство называется *порогом реакции*.

Если при столкновении частицы не меняются ($m_3 = m_1$ и $m_4 = m_2$), то такое столкновение называется *упругим*. При упругом столкновении $|\mathbf{p}_3| = |\mathbf{p}_1|$, т.е. длины импульсов и энергии всех частиц после столкновения возвращаются к исходным значениям, но изменяется направления импульсов. Для частиц одинаковой массы ($m_i = m$), в системе центра инерции энергии всех частиц одинаковы: $E_1 = E_2 = E_3 = E_4$.

• При описании двухчастичных реакций (4.1) удобно использовать инвариантные *переменные Мандельстама*:

$$s = (\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2)^2, \qquad t = (\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_3)^2 \qquad u = (\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_4)^2. \tag{4.2}$$

Между ними существует следующая связь:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2. \tag{4.3}$$

Действительно, умножим закон сохранения (4.1) на 4-вектор $\mathrm{p}_1$:

$$\mathrm{p}_1^2 + \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 = \mathrm{p}_1\mathrm{p}_3 + \mathrm{p}_1\mathrm{p}_4.$$

Откуда, возводя правые части определений (4.2) в квадрат и учитывая, что $\mathrm{p}_i^2 = m_i^2$, несложно получить (4.3).

В *системе центра инерции* ($\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$):

$$s = (E_1 + E_2)^2 = E_{tot}^2$$

и имеет смысл квадрата суммарной энергии столкновения. Через него можно выразить энергии частиц до и после столкновения. Например, вычислим следующий инвариант:

$$\mathrm{p}_1 \cdot (\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2) = E_1(E_1 + E_2) = E_1\sqrt{s} = m_1^2 + \mathrm{p}_1\mathrm{p}_2.$$

Выразив $\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2$, можно его подставить в определение инварианта:

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2\mathrm{p}_1\mathrm{p}_2 = m_2^2 - m_1^2 + 2E_1\sqrt{s},$$

откуда находим $E_1$ и также $E_2$:

$$E_1 = \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}}, \qquad E_2 = \frac{s + m_2^2 - m_1^2}{2\sqrt{s}}. \tag{4.4}$$

Из закона сохранения (4.1) следует, что $s = (\mathrm{p}_3 + \mathrm{p}_4)^2$. Поэтому, повторяя вычисления для $\mathrm{p}_3 \cdot (\mathrm{p}_3 + \mathrm{p}_4)$, получим энергии частиц после столкновения (в (4.4) необходимо произвести замену индексов $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 4$).

Аналогично, через инварианты выражаются энергии частиц в *лабораторной системе отсчёта* (будем помечать их штрихами). Пусть неподвижной является вторая частица: $\mathrm{p}_2 = (m_2, \mathbf{0})$. В силу закона сохранения (4.1) $t = (\mathrm{p}_4 - \mathrm{p}_2)^2$ и $u = (\mathrm{p}_3 - \mathrm{p}_2)^2$. Возводя в квадрат эти соотношения и определение $s$, получаем:

$$E_1' = \frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2m_2}, \qquad E_3' = \frac{m_2^2 + m_3^2 - u}{2m_2}, \qquad E_4' = \frac{m_2^2 + m_4^2 - t}{2m_2}.$$

Если переменные $s, t, u$ вычислены в одной системе отсчёта, то благодаря их инвариантности они имеют такое же значение в любой другой системе отсчёта. Это позволяет связывать энергии, углы рассеяния и т.п. величины в разных системах.

• Инвариант $t$ связан с углом рассеяния частиц. Например, в системе центра инерции:

$$t = m_1^2 + m_3^2 - 2\mathrm{p}_1 \cdot \mathrm{p}_3 = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1E_3 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3| \cos\theta. \qquad (4.5)$$

Квадраты импульсов до и после реакции могут быть найдены из стандартной связи $\mathbf{p}_1^2 = E_1^2 - m_1^2$, $\mathbf{p}_3^2 = E_3^2 - m_3^2$, что с учётом (4.4) даёт:

$$\mathbf{p}_1^2 = \frac{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}{4s}, \qquad \mathbf{p}_3^2 = \frac{\lambda(s, m_3^2, m_4^2)}{4s},$$

где для сокращения введена *функция треугольника*:

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$$

Подставляя эти значения в (4.5), получаем косинус угла рассеяния:

$$\cos\theta = \frac{s\,(t-u) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)\,\lambda(s, m_3^2, m_4^2)}}, \qquad (4.6)$$

Аналогично можно найти угол вылета третей частицы относительно импульса первой в лабораторной системе (величины со штрихами):

$$t = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1'E_3' + 2|\mathbf{p}_1'||\mathbf{p}_3'| \cos\theta'.$$

В этой системе

$$\mathbf{p}_1'^2 = \frac{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}{4m_2^2}, \qquad \mathbf{p}_3'^2 = \frac{\lambda(u, m_3^2, m_2^2)}{4m_2^2},$$

поэтому

$$\cos\theta' = \frac{(s - m_1^2 - m_2^2)(m_2^2 + m_3^2 - u) + 2m_2^2\,(t - m_1^2 - m_3^2)}{\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)\,\lambda(u, m_3^2, m_2^2)}}. \qquad (4.7)$$

Если массы всех частиц равны $m$, то в системе центра инерции

$$\cos\theta = 1 + \frac{2t}{s - 4m^2}, \qquad E_i = \frac{\sqrt{s}}{2}. \qquad (4.8)$$

Порогом реакции является $s \geqslant 4m^2$ (значение $s = 4m^2$ соответствует нулевой скорости начальных частиц). Кроме этого, квадрат косинуса должен быть меньше единицы $\cos^2\theta \leqslant 1$, что приводит к неравенству

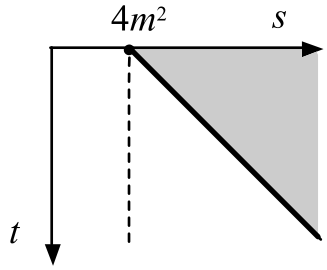
$$t\,(t + s - 4m^2) \leqslant 0.$$

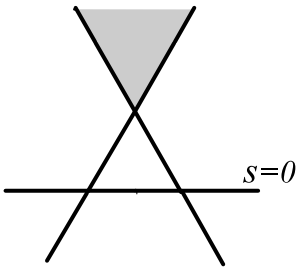
С учётом $s \geqslant 4m^2$ это неравенство даёт

$$t \leqslant 4m^2 - s \leqslant 0,$$

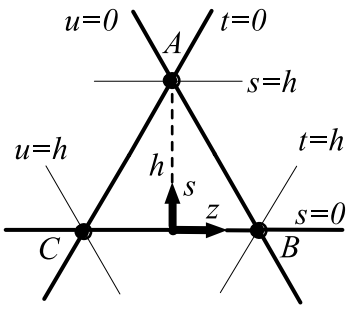
что является ограничением для разрешённых значений инвариантов.

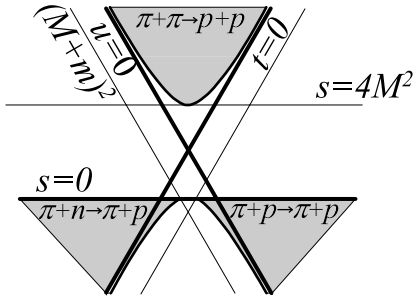
• Кинематические области реакции часто изображают графически при помощи *диаграмм Далица* или *диаграмм Мандельстама.* Первые являются декартовой плоскостью $(s,t)$, на которой заштриховывают область разрешённых значений инвариантов. Для частиц одинаковой массы диаграмма Далица изображена ниже на первом рисунке:




На диаграммах Мандельстама одновременно изображаются все три инварианта $(s,t,u)$. Такая диаграмма является косоугольной системой координат, в которой оси $s$ и $t$ проведены под углом 60 градусов. Но рисуются не сами оси, а уровни $s=1$, $s=2$, ...., параллельные линии $s=0$ и отстоящие от неё на 1, 2,... Аналогично для уровней $t$, $u$. Линии $s=0$, $t=0$ и $u=0$ образуют правильный треугольник $ABC$, высота которого равна $h=s+t+u=m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2$. Положительные значения инвариантов откладываются от нулевой линии к центру, а отрицательные – в обратную. Ниже на первом рисунке жирными линиями отмечены нулевые уровни, а тонкими – уровни $s=h$, $t=h$, $u=h$:



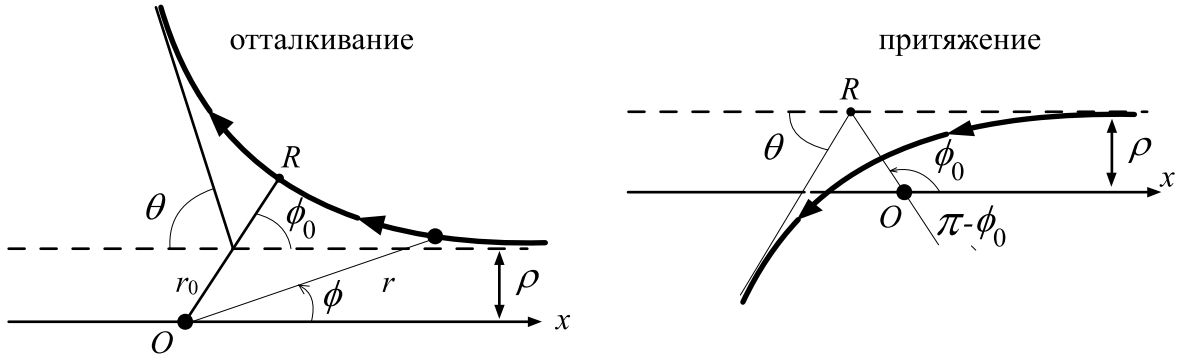




Можно ввести декартовы координаты, если провести вертикальную ось $s$ вдоль высоты $h$ перпендикулярно линии $s=0$, а ось $z$ направить вдоль линии $s=0$. Прямоугольные координаты $(z,s)$ связаны с инвариантами следующим образом: $t=(h+\sqrt{3}z-s)/2$, $u=(h-\sqrt{3}z-s)/2$.

На диаграммах Мандельстама удобно изображать сразу все разрешенные области, для реакций, получающихся из исходной перестановкой частиц. Например, на втором рисунке выше в верхней части изображена область для реакции $\pi^+ + \pi^- \mapsto p + \bar{p}$ ($s$-канал). Внизу слева и справа нарисованы еще две реакции (считаем массы нуклонов равными, как и массы всех пи-мезонов). Более подробное описание процедуры построения таких диаграмм можно найти в [1].

## 2 Сечение рассеяния

• В неквантовой теории частица во внешнем поле движется по фиксированной траектории. Пусть источник поля находится в точке $O$, а частица налетает на него со скоростью $v_0$ (с энергией $E_0 = m/\sqrt{1-v_0^2}$ и импульсом $p_0 = E_0 v_0$) из бесконечности против оси $x$, отстоя от неё на *прицельное расстояние* $\rho$. В стационарном поле энергия частицы постоянна и на бесконечности скорость частицы вернётся по модулю к начальному значению, но изменит направление на *угол рассеяния* $\theta$:




Параметр $\rho$ определяет момент импульса $L = rp_0 \sin\phi \to p_0\rho$. В полярных координатах $\mathbf{v}^2 = \dot r^2 + r^2\dot\phi^2$ и $|\mathbf{r}\times\mathbf{v}| = r^2\dot\phi$, поэтому, сохраняющиеся энергия и момент импульса равны:

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-\dot r^2 - r^2\dot\phi^2}} + U(r), \qquad L = \frac{m\,r^2\dot\phi}{\sqrt{1-\dot r^2 - r^2\dot\phi^2}}. \tag{4.9}$$

Исключая время, получаем:

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm\frac{\sqrt{(E-U)^2 - m^2 - L^2/r^2}}{L/r^2}. \tag{4.10}$$

Знак минус соответствует уменьшению $r$, а плюс – увеличению ($\phi > \phi_0$). Уравнение $dr/d\phi = 0$ определяет точку "остановки" $r = r_0$, где расстояние перестает уменьшаться и начинает увеличиваться. Независимо от знака, в правой части (4.10) стоит одна функция $r$. Поэтому траектория симметрична относительно прямой $OR$, проведенной из центра поля $O$ ($\phi = \phi_0$). Симметричны также и обе асимптотики траектории относительно прямой $OR$, поэтому $\theta = \pm(\pi - 2\phi_0)$, где плюс соответствует полю отталкивания, а минус – притяжению. Интегрируя (4.10), имеем:

$$\phi_0 = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{p_0\rho\,dr/r^2}{\sqrt{p_0^2 - 2E_0U + U^2 - p_0^2\rho^2/r^2}}. \tag{4.11}$$

Это уравнение связывает угол $\phi_0$ (а, следовательно, и $\theta$) с прицельным расстоянием $\rho$ и скоростью налетающей частицы $v_0$.

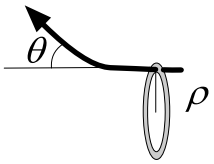
• Обычно контролировать значение прицельного расстояния сложно. Поэтому, изучают рассеяние потока частиц, падающих параллельно с одинаковой скоростью и *различными* прицельными расстояниями $\rho$. Предполагается, что такой поток частиц однороден в плоскости, перпендикулярной к скорости. В этом случае измеряют *сечение рассеяния* $d\sigma$, равное отношению:

$$\frac{\text{Число рассеянных частиц в единицу времени в телесный угол } d\Omega}{\text{Число падающих частиц в единицу времени через единицу площади}}.$$

Знаменатель делает величину $d\sigma$ независимой от интенсивности падающего потока. В физике элементарных частиц сечение принято измерять в барнах: $\text{barn} = 10^{-28}\,\text{м}^2 = (10\,\text{fm})^2$.

Для сферически симметричных потенциалов движение происходит в плоскости, поэтому можно измерять рассеяние на угол $\theta$, проинтегрировав по второму углу: $d\Omega = 2\pi \sin\theta\, d\theta$ (ось $z$ в сферической системе координат направлена вдоль скорости падающих частиц).

Для монотонно убывающих потенциалов связь между $\theta$ и $\rho$ однозначна. Поэтому интервал углов $\theta$, $\theta + d\theta$ соответствует интервалу $\rho$, $\rho + d\rho$. Число падающих частиц, попадающих в этот интервал, пропорционально площади $2\pi\rho\, d\rho$ кольца радиуса $\rho$ и шириной $d\rho$. Если плотность числа падающих частиц в единицу времени через единицу площади равна $j$, то




$$d\sigma = \frac{j \cdot 2\pi\rho\, d\rho}{j} = 2\pi\, \rho\, d\rho. \qquad (4.12)$$

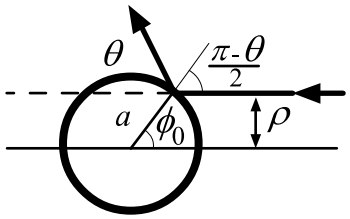
Переходя к углу $\theta$ и считая далее, что $\rho = \rho(\theta)$, имеем:

$$d\sigma = 2\pi\, \rho \left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| d\theta = \frac{\rho}{\sin\theta} \left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| d\Omega. \qquad (4.13)$$

Модуль поставлен, т.к. обычно $d\rho/d\theta < 0$ (чем больше $\rho$, тем меньше $\theta$).

*Полное сечение рассеяния* $\sigma$ получается интегрированием по телесному углу. Если потенциал ни где не обращается строго в ноль, полное сечение равно бесконечности. Действительно, оно эквивалентно интегралу $\rho d\rho$ в (4.12) от 0 до бесконечности. Если при любых $\rho$ происходит хотя бы небольшое изменение траектории (т.е. рассеяние), то этот интеграл расходится. Измеряемое на практике полное сечение конечно, так как диаметр падающего потока ограничен ($\rho < \rho_{max}$). Кроме этого, при измерении дифференциального сечения $d\sigma$, отбрасываются значения $\theta \approx 0$ (при малых углах нельзя отделить рассеявшиеся частицы от нерассеянных, соответствующих большим $\rho$).

• Полное сечение конечно (даже для неограниченного потока), если потенциал на больших расстояниях в точности равен нулю. Рассмотрим в качестве примера рассеяние на абсолютно твёрдом, очень тяжёлом шарике радиуса $a$ (потенциал при $r < a$ равен бесконечности, а при $r > a$ – нулю). Частицы упруго отражаются от шарика (угол падения равен углу отражения):




$$\rho = a\sin(\phi_0) = a\cos\frac{\theta}{2},$$

$$d\sigma = \frac{a^2}{4}\,d\Omega.$$

Полное сечение равняется площади сечения шарика $\sigma = \pi a^2$, и соответствует частицам в падающем потоке, которые провзаимодействовали с шариком. Эти частицы должны иметь прицельное расстояние $\rho < a$. Результат $\sigma = \pi a^2$ можно сразу получить по и формуле (4.12).

• Важным случаем, приводящим к бесконечному полному сечению, является кулоновский потенциал $U(r) = \alpha/r$. Считая $p_0\rho > |\alpha|$, найдём точку поворота, положив правую часть (4.10) нулю:

$$\frac{\rho}{r_0} = \frac{\sqrt{1+\eta^2(1-v_0^2)}-\eta}{1-\eta^2 v_0^2}, \qquad \eta = \frac{\alpha/\rho}{E_0 v_0^2}. \tag{4.14}$$

Интеграл (4.11) вычисляется при помощи замены $z = \rho/r$:

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2 v_0^2}}\,\arccos\frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2(1-v_0^2)}} = \frac{\pi \mp \theta}{2}, \tag{4.15}$$

где минус соответствует отталкиванию ($\alpha > 0$), а плюс – притяжению ($\alpha < 0$). При малых скоростях ($v_0 \ll 1$) можно пренебречь $v_0^2$. Тогда $\pm\sin(\theta/2) = \eta/\sqrt{1+\eta^2}$ или $\rho = (\alpha/E_0 v_0^2)\,\mathrm{ctg}(\theta/2)$. Пользуясь соотношением (4.13), приходим к *формуле Резерфорда*:

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2E_0 v_0^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}}, \tag{4.16}$$

где $E_0 \approx m$. В ультрарелятивистском пределе ($v_0 \to 1$, $E_0 \to \infty$, $\eta \to 0$) получается *такое же* выражение. Сечение не чувствительно к знаку $\alpha$ и одинаково в поле притяжения и в поле отталкивания. В общем случае $d\sigma/d\Omega = (\alpha/E_0)^2\, f(v_0, \theta)$, что очевидно из соображений размерности.

• Рассмотрим лабораторную систему отсчёта, в которой поток частиц со скоростью $v$ рассеивается на неподвижной мишени. Обозначим плотность (число частиц в единице объёма) мишени через $n_{20}$, а плотность падающего потока через $n$ (первый рисунок):

При движении объём сокращается $V = V_0\sqrt{1-v^2}$, поэтому, если в системе покоя падающего потока его плотность равна $n_{10}$, то в лабораторной системе она равняется $n = n_{10}/\sqrt{1-v^2}$.

Найдём величину потока частиц $j$ (число частиц, проходящих в единицу времени через единицу площади). Для этого рассмотрим цилиндр, ось которого ориентирована вдоль скорости частиц $v$. За время $T$ основание цилиндра $S$ пересекут частицы, находящиеся на расстоянии $vT$ от этого основания. Объём такого цилиндра равен $V = S\,vT$, поэтому:

$$j = \frac{N_0}{TS} = \frac{n\,V}{TS} = \frac{n\,S\,vT}{TS} = v\,n.$$

Число рассеянных в единицу времени частиц $dN$ пропорционально падающему потоку $j$ и числу частиц в мишени $n_{20}\,V$ (считаем, что падающий поток и мишень занимают всё пространство $V \to \infty$ и эксперимент длится очень долго: $T \to \infty$). Поэтому, в лабораторной системе отсчёта сечение *определим* следующим образом:

$$d\sigma = \frac{dN/T}{vn\,n_{20}V} \tag{4.17}$$

Перейдём в произвольную систему отсчёта, в которой мишень движется (встречные потоки частиц со скоростями $v_1$ и $v_2$). Для коллинеарных скоростей, в силу закона сложения, лабораторная скорость $v$ будет равна $v = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|/(1 - \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)$. Произведение, стоящее в знаменателе (4.17), в новой системе принимает вид:

$$v\,n\,n_{20} = \frac{v\,n_{10}\,n_{20}}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|\,n_{10}\,n_{20}}{\sqrt{1-v_1^2}\sqrt{1-v_2^2}} = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|\,n_1 n_2,$$

где $n_1$ и $n_2$ – плотности потоков в этой системе. Поэтому:

$$d\sigma = \frac{dN/(T\,V)}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| n_1\,n_2}. \tag{4.18}$$

Это сечение является *инвариантным*, так как произведение $TV = inv$ (объём всего 4-пространства) и число рассеянных частиц $dN = inv$ одинаково во всех системах.

## 3 Сечение и амплитуда рассеяния

Перейдём теперь к квантовой теории. Пусть вероятность рассеяться (изменить импульсы) для двух частиц равна $dW$. Каждая из $n_1V$ частиц первого потока с вероятностью $dW$ может рассеяться с каждой из $n_2V$ частиц второго потока. Поэтому число рассеяний равно $dN = dW\, n_1 n_2 V^2$ и сечение (4.18) можно переписать следующим образом:

$$d\sigma = \frac{V\, dW/T}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}. \tag{4.19}$$

Осталось выразить вероятность через векторы состояний. Пусть есть множество ортогональных векторов $|Q\rangle$, нумерующихся непрерывными величинами $Q$. Предположим, что нормировка этих векторов имеет вид $\langle Q|Q'\rangle = N\,\delta(Q-Q')$, так, что единичным оператором является

$$\int |Q\rangle\langle Q|\,\frac{dQ}{N} = \hat{1}$$

(для проверки действуем этим оператором на фиксированный вектор $|Q'\rangle$ и учитываем условие ортогональности). Тогда, если система находится в состоянии $|\Psi\rangle$, вероятность её обнаружить в состояниях $|Q\rangle$ в интервале $dQ$ равна

$$dW = \frac{|\langle Q|\Psi\rangle|^2}{\langle\Psi|\Psi\rangle}\,\frac{dQ}{N}. \tag{4.20}$$

При этом, полная вероятность любых значений $Q$ равна единице:

$$\int dW = \int \frac{\langle\Psi|Q\rangle\langle Q|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle}\,\frac{dQ}{N} = \frac{\langle\Psi|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle} = 1.$$

Одночастичное состояние с фиксированным импульсом $\mathbf{p}$ и энергией $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$, при помощи оператора рождения и вакуумного вектора, будем записывать следующим образом:

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{(2\pi)^3\,2E_p}\,\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\,|\,\rangle, \qquad \langle\,|\,\rangle = 1, \tag{4.21}$$

где, в отличии от ковариантной нормировки (стр. 52), выделен ещё множитель $(2\pi)^{3/2}$. Условие ортогональности этих векторов имеет вид:

$$\langle\mathbf{k}\,|\,\mathbf{p}\rangle = (2\pi)^3\,2E_p\,\delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}). \tag{4.22}$$

Такую нормировку будем использовать и для начальных и для рассеянных частиц.

Пусть в начальном (initial) состоянии при $t = -\infty$ находится две частицы:

$$|i\rangle = |\mathbf{p}_2,\, \mathbf{p}_1\rangle = (2\pi)^3\, 2\sqrt{E_1 E_2}\; \hat{a}^+_{\mathbf{p}_2}\, \hat{a}^+_{\mathbf{p}_1}\, |\,\rangle. \tag{4.23}$$

Это состояние (в представлении взаимодействия) эволюционирует со временем, превращаясь в состояние $\hat{S}(\infty, -\infty)\,|i\rangle$, см. стр. 85. Нас интересует вероятность обнаружить в этом состоянии $n$ частиц с импульсами $\mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_n$ и энергиями $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. Для этого необходимо вычислить скалярное произведение проэволюционировавшего вектора с вектором

$$|f\rangle = |\mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_n\rangle = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{(2\pi)^3\, 2\varepsilon_i}\, \hat{a}^+_{\mathbf{k}_i}\, |\rangle'$$

(напомним (стр. 85), что вакуумный вектор в представлении взаимодействия при $t = \infty$ приобретает фазовый множитель, поэтому у него мы поставили штрих). Норма начального состояния равна

$$\langle i|i\rangle = (2\pi)^6\, 4E_1 E_2\, \delta^2(\mathbf{0}) = 4E_1 E_2\, V^2,$$

где для функции Дирака от импульсов в нуле мы воспользовались её интегральным представлением ($V$ – объём координатного 3-пространства):

$$\delta(\mathbf{0}) = \int e^{\imath \mathbf{x}\mathbf{0}}\, \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} = \frac{V}{(2\pi)^3}. \tag{4.24}$$

Вводя матричные элементы оператора эволюции:

$$S_{fi} \;= \langle f|\hat{S}(\infty, -\infty)|i\rangle \;= \langle \mathbf{k}_n, ..., \mathbf{k}_1|\hat{S}(\infty, -\infty)|\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1\rangle,$$

с учётом общего соотношения (4.20) запишем соответствующую вероятность:

$$dW = \frac{|S_{fi}|^2}{4E_1\, E_2\, V^2} \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3 2\varepsilon_i}.$$

Подставляя её в определение сечения рассеяния (4.19), получаем:

$$d\sigma = \frac{|S_{fi}|^2/(TV)}{4E_1\, E_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3 2\varepsilon_i}. \tag{4.25}$$

При неупругом столкновении, в принципе, можно измерять импульсы рассеянных частиц каждого типа, считая сколько частиц в единицу времени появляется с импульсом $\mathbf{k}_i$ с погрешностью $d^3\mathbf{k}_i$. Деление этой величины на относительный поток падающих частиц и даёт сечение (4.25).

• При рассеянии сохраняется энергия-импульс. Это означает, что амплитуды переходов $\langle f|\hat{S}(\infty,-\infty)|i\rangle$, запрещённые законом сохранения, будут равны нулю. Поэтому удобно ввести *амплитуду рассеяния* $\hat{M}$:

$$\hat{S}(\infty,\,-\infty) = \hat{1} + (2\pi)^4\,\delta(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 - \sum \mathrm{k}_i)\,\hat{M}. \tag{4.26}$$

Единичный оператор отражает то, что частицы могут не провзаимодействовать (в предельном случае полного отсутствия взаимодействия $\hat{M} = 0$ и $\hat{S} = \hat{1}$). Как мы увидим дальше, именно в виде (4.26) будет получаться оператор эволюции по теории возмущений.

На эксперименте регистрируют только рассеянные частицы (изменившие свои импульсы), поэтому единичный оператор далее будем опускать. Это означает, что конечное и начальное состояния ортогональны (импульсы различны), поэтому, при вычислении матричных элементов $\langle f|\hat{S}(\infty,\,-\infty)|i\rangle$ единичный оператор не будет давать вклада. При возведении второго слагаемого (4.26) в квадрат, получается квадрат 4-мерной функции Дирака, который мы запишем следующим образом:

$$[\delta(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 - \sum \mathrm{k}_i)]^2 = \delta(0)\,\delta(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 - \sum \mathrm{k}_i) = \frac{VT}{(2\pi)^4}\,\delta(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 - \sum \mathrm{k}_i),$$

где $V$ – объём всего пространства, а $T$ – всё бесконечное время. Последнее равенство следует из интегрального представления 4-мерной $\delta$-функции, подобного (4.24). В результате, соотношение (4.25) принимает вид:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4\,|M_{fi}|^2}{4E_1\,E_2|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}\,\delta(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 - \sum \mathrm{k}_i)\,\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3\mathbf{k}_i}{(2\pi)^3 2\varepsilon_i}. \tag{4.27}$$

Строго говоря, при вычислении сечения рассеяния, необходимо рассматривать волновые пакеты. Действительно, чистое состояние $|\mathbf{p}_2,\,\mathbf{p}_1\rangle$ не локализовано в пространстве и не может рассматриваться как встречные потоки двух частиц, которые “не чувствуют” друг друга на бесконечности (являются свободными). Для построения таких пакетов, вводятся функции $f_i(\mathbf{p}_i)$ распределения импульсов начальных частиц. Эти функции имеют максимумы в окрестности заданных экспериментом импульсов. После вычисления сечения, максимумы можно сделать сколь угодно высокими и узкими и мы снова придём к выражению (4.27). Поэтому, мы опустим детали таких вычислений, используя для матричных элементов оператора эволюции состояния (4.23).

• Запишем сечение (4.27), в случае, когда в конечном состоянии оказывается только две частицы. Будем обозначать $\mathbf{p}_3 = \mathbf{k}_1$, $\mathbf{p}_4 = \mathbf{k}_2$ и $E_3 = \varepsilon_1$, $E_4 = \varepsilon_2$, считая, что массы всех частиц различны: $m_1, ..., m_4$ (двухчастичное неупругое рассеяние). Далее ограничимся системой центра инерции в которой $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$:

$$d\sigma = \frac{|M_{fi}|^2\,\delta(E_{tot} - E_3 - E_4)\,\delta(\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4)}{64\pi^2\,E_1\,E_2\,E_3\,E_4\,|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}\;d^3\mathbf{p}_3\,d^3\mathbf{p}_4, \tag{4.28}$$

где $E_{tot} = E_1 + E_2$ – энергия столкновения в системе центра инерции.

Проинтегрируем по $d^3\mathbf{p}_4$ с $\delta(\mathbf{p}_3+\mathbf{p}_4)$ (будем регистрировать одну рассеянную частицу). Это даст $\mathbf{p}_4 = -\mathbf{p}_3$. Длина импульса $p_3 = |\mathbf{p}_3|$ находится из закона сохранения энергии $E_{tot} = \sqrt{p_3^2 + m_3^2} + \sqrt{p_3^2 + m_4^2}$ и является функцией полной энергии и масс частиц $p_3 = p = f(E_{tot}, m_3, m_4)$. В соответствии с тождеством (F.18), стр. 264 для функции Дирака, имеем:

$$\delta\big(E_{tot} - \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2} - \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_4^2}\big) = \frac{\delta(p_3 - p)}{\frac{p_3}{E_3} + \frac{p_3}{E_4}} = \delta(p_3 - p)\,\frac{E_3E_4}{p_3E_{tot}}.$$

Проинтегрировав по длине импульса $p_3 = |\mathbf{p}_3|$ с функцией Дирака в сферических координатах $d^3\mathbf{p}_3 = p_3^2\,dp_3\,d\Omega$, окончательно получаем:

$$\Big(\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big)_{\text{ц.и.}} = \frac{|M_{fi}|^2}{64\pi^2E_{tot}^2}\,\frac{|\mathbf{p}_3|}{|\mathbf{p}_1|}, \tag{4.29}$$

где $|\mathbf{p}_3|$ фиксировано законом сохранения и учтено, что $E_1E_2|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = |E_2\mathbf{p}_1 - E_2\mathbf{p}_2| = |\mathbf{p}_1|(E_1 + E_2) = |\mathbf{p}_1|E_{tot}$. Для упругого рассеяния, когда массы частиц не меняются $|\mathbf{p}_3| = |\mathbf{p}_1|$.

При равенстве масс частиц $\cos\theta = 1 + 2t/(s - 4m^2)$, см. (4.8). Подставляя при фиксированном $s$ косинус в телесный угол $d\Omega = -2\pi\,d\cos\theta$, можно записать сечение рассеяния в инвариантном виде, справедливом в любой системе отсчёта:

$$d\sigma = -\frac{|M_{fi}|^2}{64\pi^2}\,\frac{4\pi\,dt}{s(s - 4m^2)}. \tag{4.30}$$

Интеграл по всему телесному углу равен полному сечению рассеяния $\sigma$. Если частицы тождественны при таком интегрировании мы дважды учитываем одну и туже частицу. Поэтому результат интегрирования надо разделить на 2. Действительно, регистрируя в детекторе частицу мы не может отличить 3-я она или 4-я (массы и другие квантовые числа совпадают). В случае, когда в конечном состоянии находится $k$ тождественных частиц, полное сечение делится на $k!$.

## 4 Рассеяние скалярных частиц

Рассмотрим реакцию рассеяния двух скалярных частиц. Пусть до столкновения частицы имели импульсы $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, а после столкновения $\mathbf{p}_3$ и $\mathbf{p}_4$. Будем считать, что начальные импульсы отличаются от конечных (произошло рассеяние). В первом порядке по теории возмущения необходимо вычислить (см. стр. 85) матричные элементы (шляпки у операторов опускаем):

$$S \equiv S(\infty,\, -\infty) = 1 + \frac{(-\imath\lambda)}{4!} \int \varphi_I^4(\mathrm{x})\, d^4\mathrm{x} + \ldots \tag{4.31}$$

При получении сечения рассеяния мы выбрали (стр. 96) следующую нормировку одночастичных состояний:

$$\tilde{a}_{\mathbf{p}} = \sqrt{(2\pi)^3\, 2\omega_p}\;\; a_{\mathbf{p}}, \qquad\qquad |\mathbf{p}\,\rangle \;=\; \tilde{a}_{\mathbf{p}}\,|\,\rangle, \tag{4.32}$$

т.е. в операторы с тильдой будем включать нормировочный множитель. Поэтому матричные элементы оператора эволюции равны:

$$\big\langle \mathbf{p}_4,\, \mathbf{p}_3\,|S\,|\mathbf{p}_2,\, \mathbf{p}_1\big\rangle = \big\langle \tilde{a}_{\mathbf{p}_4}\tilde{a}_{\mathbf{p}_3}\, S\;\tilde{a}^+_{\mathbf{p}_2}\tilde{a}^+_{\mathbf{p}_1}\big\rangle = -\imath\frac{\lambda}{4!}\int \big\langle \tilde{a}_{\mathbf{p}_4}\tilde{a}_{\mathbf{p}_3}\,\varphi^4_{\mathrm{x}}\,\tilde{a}^+_{\mathbf{p}_2}\tilde{a}^+_{\mathbf{p}_1}\big\rangle\, d^4\mathrm{x}.$$

Выше операция хронологического произведения опущена, так как все сомножители имеют одинаковое время. Опущен также единичный оператор. В силу отличия начальных и конечных импульсов, его матричные элементы равны нулю. Кроме этого, мы опускаем индекс $I$, помня, что работаем в представлении взаимодействия.

Вычислим по теореме Вика (стр. 64) среднее:

$$\big\langle \tilde{a}_{\mathbf{p}_4}\tilde{a}_{\mathbf{p}_3}\,\varphi^4_{\mathrm{x}}\;\tilde{a}^+_{\mathbf{p}_2}\tilde{a}^+_{\mathbf{p}_1}\big\rangle = 4\,\underbrace{\tilde{a}_{\mathbf{p}_4}\varphi_{\mathrm{x}}}\big\langle \tilde{a}_{\mathbf{p}_3}\,\varphi^3_{\mathrm{x}}\;\tilde{a}^+_{\mathbf{p}_2}\tilde{a}^+_{\mathbf{p}_1}\big\rangle = 4\cdot 3\,\underbrace{\tilde{a}_{\mathbf{p}_4}\varphi_{\mathrm{x}}}\,\underbrace{\tilde{a}_{\mathbf{p}_3}\varphi_{\mathrm{x}}}\big\langle \varphi^2_{\mathrm{x}}\;\tilde{a}^+_{\mathbf{p}_2}\tilde{a}^+_{\mathbf{p}_1}\big\rangle.$$

Выше мы взяли первый оператор $\tilde{a}_{\mathbf{p}_4}$ и спарили его с $\varphi^4_{\mathrm{x}} = \varphi_{\mathrm{x}}\varphi_{\mathrm{x}}\varphi_{\mathrm{x}}\varphi_{\mathrm{x}}$. Возможны 4 спаривания, откуда появился числовой множитель 4. В последнем равенстве мы спарили $\tilde{a}_{\mathbf{p}_3}$ с оставшимися тремя операторами $\varphi^3_{\mathrm{x}}$, что дало ещё один множитель 3. Продолжая спаривания с операторами $\tilde{a}^+_{\mathbf{p}_2}$, $\tilde{a}^+_{\mathbf{p}_1}$ начального состояния, получаем:

$$\big\langle \tilde{a}_{\mathbf{p}_4}\tilde{a}_{\mathbf{p}_3}\,\varphi^4_{\mathrm{x}}\;\tilde{a}^+_{\mathbf{p}_2}\tilde{a}^+_{\mathbf{p}_1}\big\rangle = 4!\;\underbrace{\tilde{a}_{\mathbf{p}_4}\varphi_{\mathrm{x}}}\;\underbrace{\tilde{a}_{\mathbf{p}_3}\varphi_{\mathrm{x}}}\;\underbrace{\varphi_{\mathrm{x}}\tilde{a}^+_{\mathbf{p}_2}}\;\underbrace{\varphi_{\mathrm{x}}\tilde{a}^+_{\mathbf{p}_1}}. \tag{4.33}$$

При применении теоремы Вика мы спаривали операторы рождения и уничтожения только с полевыми операторами $\varphi_{\mathrm{x}}$, но не друг с другом. Связано это с тем, что начальные и конечные импульсы различны и эти операторы коммутируют (их спаривания равны нулю).

Спаривание означает перестановку операторов. Например, спаривание $\tilde{a}_{\mathbf{p}}\,\varphi_{\mathrm{x}}$ – это коммутатор $[\tilde{a}_{\mathbf{p}}\,,\,\varphi_{\mathrm{x}}]$ и т.д. В отличии от исходных операторов $a_{\mathbf{p}}$, операторы с тильдой $\tilde{a}_{\mathbf{p}}$ имеют нормировочные множители (4.32), которые сокращаются при вычисления коммутатора:

$$\tilde{a}_{\mathbf{p}}\,\varphi_{\mathrm{x}} = [\tilde{a}_{\mathbf{p}}\,,\,\varphi_{\mathrm{x}}] = \sqrt{(2\pi)^3\,2\omega_p}\int [a_{\mathbf{p}}\,,\,a^+_{\mathbf{k}}]\,e^{\imath \mathrm{k}\cdot\mathrm{x}}\,\frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{(2\pi)^3\,2\omega_k}}.$$

Учитывая, что $[a_{\mathbf{p}}\,,\,a^+_{\mathbf{k}}] = \delta_{\mathbf{pk}}$, имеем:

$$\tilde{a}_{\mathbf{p}}\,\varphi_{\mathrm{x}} = e^{\imath \mathrm{p}\cdot\mathrm{x}}, \qquad\qquad \varphi_{\mathrm{x}}\,\tilde{a}^+_{\mathbf{p}} = e^{-\imath \mathrm{p}\cdot\mathrm{x}}, \tag{4.34}$$

где спаривание с оператором рождения вычисляется аналогичным образом. Подставляя эти значения в среднее (4.33), получаем:

$$\big\langle f|S(\infty,-\infty)\,|i\big\rangle = \big\langle \mathbf{p}_4,\,\mathbf{p}_3\,|S\,|\mathbf{p}_2,\,\mathbf{p}_1\big\rangle = -\imath\lambda\int e^{\imath \mathrm{x}\,(\mathrm{p}_3+\mathrm{p}_4-\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_2)}\,d^4\mathrm{x}.$$

Интегрирование по $d^4\mathrm{x}$ даёт $(2\pi)^4\,\delta(\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_2-\mathrm{p}_3-\mathrm{p}_4)$, поэтому введенная на стр. 98 амплитуда рассеяния оказывается равной константе:

$$M_{fi} = -\imath\lambda. \tag{4.35}$$

В результате, в первом порядке по теории возмущения, сечение рассеяния равно:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2\,E^2_{tot}}, \tag{4.36}$$

где $E_{tot} = \omega_1 + \omega_2 = 2\omega_1$ – полная энергия сталкивающихся частиц. Полное сечение получается интегрированием по телесному углу $\Omega = 4\pi$. Кроме этого, результат необходимо разделить на 2 (в конечном состоянии находится 2 тождественные частицы, стр. 99):

$$\sigma_{tot} = \frac{\lambda^2}{32\pi\,E^2_{tot}}. \tag{4.37}$$

Это сечение конечно, что говорит о локальности взаимодействия частиц. В нерелятивистском пределе $E_{tot} \approx 2m$, поэтому, сравнивая это сечение с результатом рассеяния $\sigma = \pi a^2$ на твёрдом шарике (стр. 94), можно заключить, что радиус области взаимодействия скалярных частиц равен $a \sim \lambda/m$. Так как в теории возмущений предполагается, что $\lambda \ll 1$, эта область меньше характерного размера нелокальности частицы $1/m$ (стр. 13, 56).

Заметим, что мы не учитывали вакуумное среднее $\big\langle S\big\rangle$. Оно, в силу нормированности вакуумных векторов $\big\langle\,|\,\big\rangle = 1$ и (4.31), равно $1 + O(\lambda)$. Так как в числителе уже стоит $\lambda$, деление (с разложением в ряд по $\lambda$) приведёт к членам второго порядка по $\lambda$.

## 5 Редукционная формула

Существует простая формула, связывающее амплитуду рассеяния с функциями Грина, свойства которых будут изучаться в следующих главах. Эта формула называется *редукционной*.

Будем работать в представлении взаимодействия, опуская индекс $I$ у полевых операторов (как и их шляпки). Запишем амплитуду упругого рассеяния двух скалярных частиц:

$$\langle f|S|i\rangle = \frac{\langle\, |\tilde{a}_{\mathbf{p}_4}\, \tilde{a}_{\mathbf{p}_3}\, S\, \tilde{a}^+_{\mathbf{p}_2} \tilde{a}^+_{\mathbf{p}_1}|\,\rangle}{\langle\, |S|\,\rangle}.$$

Если мы сможем "протащить" оператор $\tilde{a}_{\mathbf{p}_3}$ через оператор эволюции $S$, он подействует на правый вакуумный вектор и даст ноль (импульсы всех частиц различны). Чтобы вычислить соответствующий коммутатор, напомним (стр. 69), что для свободных полей (а, следовательно, и для полей в представлении взаимодействия) справедливо уравнение:

$$\imath(\partial^2_{\mathrm{x}}+m^2)\,\mathrm{T}\{\varphi_{\mathrm{x}}\varphi_1\varphi_2\varphi_3\} = \delta_{\mathrm{x}1}\mathrm{T}\{\varphi_2\varphi_3\}+\delta_{\mathrm{x}2}\mathrm{T}\{\varphi_1\varphi_3\}+\delta_{\mathrm{x}3}\mathrm{T}\{\varphi_1\varphi_2\}. \quad (4.38)$$

В уравнении для $\mathrm{T}\{\varphi_{\mathrm{x}}\varphi_1...\varphi_{\mathrm{n}}\}$ в правой части будет стоять сумма $n$ слагаемых, в каждом из которых вычеркнут один полевой оператор $\varphi_i \equiv \varphi(\mathrm{x}_i)$ и поставлена 4-мерная функция Дирака $\delta_{\mathrm{x}i} \equiv \delta(\mathrm{x}-\mathrm{x}_i)$. Пусть $t_1 > t_2 > t_3$. Пользуясь тождеством $[A,\, BC] = [A,\, B]\, C + B\,[A,\, C]$, полагая $B = \varphi_1$, $C = \varphi_2\varphi_3$, найдём коммутатор:

$$[\tilde{a}_{\mathbf{p}},\, \varphi_1\varphi_2\varphi_3] = [\tilde{a}_{\mathbf{p}},\, \varphi_1]\,\varphi_2\varphi_3 + \varphi_1\,[\tilde{a}_{\mathbf{p}},\, \varphi_2\varphi_3],$$

или, применяя тождество ещё раз:

$$[\tilde{a}_{\mathbf{p}},\, \varphi_1\varphi_2\varphi_3] = [\tilde{a}_{\mathbf{p}},\, \varphi_1]\,\varphi_2\varphi_3 + \varphi_1\,[\tilde{a}_{\mathbf{p}},\, \varphi_2]\,\varphi_3 + \varphi_1\varphi_2\,[\tilde{a}_{\mathbf{p}},\, \varphi_3].$$

Слева и справа порядок операторов неизменен, поэтому можно поставить знак хронологического порядка. Аналогично, рассматривая другую последовательность времён и, учитывая (4.34), запишем:

$$[\tilde{a}_{\mathbf{p}},\, \mathrm{T}\{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\}] = e^{\imath \mathrm{p}\mathrm{x}_1}\,\mathrm{T}\{\varphi_2\varphi_3\} + e^{\imath \mathrm{p}\mathrm{x}_2}\,\mathrm{T}\{\varphi_1\varphi_3\} + e^{\imath \mathrm{p}\mathrm{x}_3}\,\mathrm{T}\{\varphi_1\varphi_2\}. \quad (4.39)$$

Понятно, что аналогичное выражение получится и для коммутатора с произведением произвольного числа хронологически упорядоченных операторов. Сравнивая (4.39) с (4.38), получаем:

$$[\tilde{a}_{\mathbf{p}},\, \mathrm{T}\{\varphi_1...\varphi_n\}] = \imath \int e^{\imath \mathrm{p}\mathrm{x}}\,(\partial^2_{\mathrm{x}} + m^2)\,\mathrm{T}\{\varphi_{\mathrm{x}}\varphi_1...\varphi_n\}\, d^4\mathrm{x}, \quad (4.40)$$

где обобщение на произвольное число операторов очевидно.

Также вычисляется коммутатор с оператором рождения:

$$[\mathrm{T}\{\varphi_1...\varphi_n\},\, \tilde{a}^+_{\mathbf{p}},] = \imath \int e^{-\imath \mathrm{px}}\, (\partial^2_{\mathrm{x}} + m^2)\, \mathrm{T}\{\varphi_{\mathrm{x}}\varphi_1...\varphi_n\}\, d^4\mathrm{x}. \qquad (4.41)$$

Обратим внимание, что хотя операторы поля являются эрмитово самосопряженными ($\varphi^+ = \varphi$), чтобы получить (4.41) нельзя взять эрмитово сопряжение (4.40). Действительно, например, эрмитово сопряжение $\mathrm{T}\{\varphi_1\varphi_2\} = \theta_{12}\varphi_1\varphi_2 + \theta_{21}\varphi_2\varphi_1$ равно $\mathrm{T}\{\varphi_1\varphi_2\}^+ = \theta_{12}\varphi_2\varphi_1 + \theta_{21}\varphi_1\varphi_2$ (при сопряжении операторы меняются местами). Это выражение не равно $\mathrm{T}\{\varphi_1\varphi_2\}$. Поэтому, (4.41) необходимо получать, аналогично (4.40), вычисляя коммутатор и сравнивая его с (4.38).

Оператор эволюции, в соответствии с формулой (**??**), стр. **??**, равен хронологическому произведению полевых операторов. Поэтому, когда мы меняем его с оператором $\tilde{a}_{\mathbf{p}}$, можно пользоваться формулой (4.40), добавляя под знак хронологического порядка ещё один оператор поля, на который действует $\partial^2 + m^2$. Например:

$$[\tilde{a}_{\mathbf{p}},\, S] = \imath \int e^{\imath \mathrm{px}}\, (\partial^2_{\mathrm{x}} + m^2)\, \mathrm{T}\{\varphi_{\mathrm{x}} S\}\, d^4\mathrm{x}. \qquad (4.42)$$

Поэтому, последовательно перенося через $S$ операторы $\tilde{a}_{\mathbf{p}_3}$ и $\tilde{a}_{\mathbf{p}_4}$ вправо и $\tilde{a}_{\mathbf{p}_2}$ и $\tilde{a}_{\mathbf{p}_1}$ влево, получаем:

$$\big\langle f|S|i\big\rangle = \imath^4 \int d^4\mathrm{x}_1...d^4\mathrm{x}_4\, e^{\imath \mathrm{p}_4\mathrm{x}_4 + \imath \mathrm{p}_3\mathrm{x}_3 - \imath \mathrm{p}_2\mathrm{x}_2 - \imath \mathrm{p}_1\mathrm{x}_1}$$

$$(\partial^2_1 + m^2)(\partial^2_2 + m^2)(\partial^2_3 + m^2)(\partial^2_4 + m^2)\, \mathrm{G}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_4), \qquad (4.43)$$

где введена симметричная (под $\mathrm{T}\{...\}$ операторы можно переставлять) функция

$$\mathrm{G}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_4) = \frac{\big\langle\, |\mathrm{T}\{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4 S\}|\, \big\rangle}{\big\langle\, |S|\, \big\rangle}. \qquad (4.44)$$

В следующей главе мы докажем, что она является точной функцией Грина, равной хронологическому произведению четырёх операторов в представлении Гейзенберга, усреднённому по вакууму $|0\rangle$ полного гамильтониана $H = H_0 + V$.

Несложно видеть, что редукционная формула (4.43) справедлива и для произвольной амплитуды, описывающей, например, рождение $n$ частиц при столкновении двух частиц $a$ и $b$ (неупругое рассеяние). В этом случае в выражении будет стоять функция Грина $\mathrm{G}(\mathrm{x}_a, \mathrm{x}_b, \mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n)$, на которую действуют $n+2$ операторов $\partial^2 + m^2$, а в показателе экспоненты 4-импульсы исходных частицы стоят со знаком минус, а родившихся со знаком плюс. Всё выражение умножается на $\imath^{n+2}$.

• Запишем для функций Грина фурье-интеграл:

$$\mathrm{G}(\mathrm{x}_1,...,\mathrm{x}_4) = \int \tilde{\mathrm{G}}(\mathrm{k}_1,...,\mathrm{k}_4)\, e^{-\imath(\mathrm{x}_1\mathrm{k}_1+...+\mathrm{x}_4\mathrm{k}_4)}\, \frac{d^4\mathrm{k}_1}{(2\pi)^4}...\frac{d^4\mathrm{k}_4}{(2\pi)^4} \qquad (4.45)$$

и подставим его в редукционную формулу (4.43):

$$\big\langle f|S|i\big\rangle = \imath^4 \int d^4\mathrm{x}_1...d^4\mathrm{x}_4\, \frac{d^4\mathrm{k}_1}{(2\pi)^4}...\frac{d^4\mathrm{k}_4}{(2\pi)^4}\, e^{\imath\mathrm{p}_4\mathrm{x}_4+\imath\mathrm{p}_3\mathrm{x}_3-\imath\mathrm{p}_2\mathrm{x}_2-\imath\mathrm{p}_1\mathrm{x}_1}$$

$$(-\mathrm{k}_1^2+m^2)(-\mathrm{k}_2^2+m^2)(-\mathrm{k}_3^2+m^2)(-\mathrm{k}_1^4+m^2)\,\tilde{\mathrm{G}}(\mathrm{k}_1,...,\mathrm{k}_4)\, e^{-\imath(\mathrm{x}_1\mathrm{k}_1+...+\mathrm{x}_4\mathrm{k}_4)},$$

где операторы Лапласа подействовали на экспоненту и заменились на квадраты 4-импульсов с обратным знаком. Интегралы по $d^4\mathrm{x}_i$ дают функции Дирака. Поэтому, вводя фурье-образ пропагатора (стр. 58):

$$D(\mathrm{p}) = \frac{\imath}{\mathrm{p}^2-m^2}, \qquad (4.46)$$

получаем для матричных элементов $\big\langle f|S|i\big\rangle$ следующее выражение:

$$\int d^4\mathrm{k}_1...d^4\mathrm{k}_4\, \delta(\mathrm{p}_1+\mathrm{k}_1)\delta(\mathrm{p}_2+\mathrm{k}_2)\delta(\mathrm{p}_3-\mathrm{k}_3)\delta(\mathrm{p}_4-\mathrm{k}_4)\frac{\tilde{\mathrm{G}}(\mathrm{k}_1,...,\mathrm{k}_4)}{D(\mathrm{k}_1)...D(\mathrm{k}_4)}.$$

Интегрируя с функциями Дирака, окончательно, имеем:

$$\big\langle f|S|i\big\rangle = \frac{\tilde{\mathrm{G}}(-\mathrm{p}_1,-\mathrm{p}_2,\mathrm{p}_3,\mathrm{p}_4)}{D(\mathrm{p}_1)\,D(\mathrm{p}_2)\,D(\mathrm{p}_3)\,D(\mathrm{p}_4)}. \qquad (4.47)$$

(в знаменателе у 4-импульсов мы не поставили знаки минус, так как фурье-пропагатор (4.46) является чётной функцией).

При построении теории возмущений мы покажем (стр. 122), что, если импульсы начальных и конечных частиц различаются, то фурье-образ функции Грина пропорционален функции Дирака от суммы 4-импульсов. Коэффициент пропорциональности мы будем также обозначать буквой G, но уже без тильды:

$$\tilde{\mathrm{G}}(\mathrm{p}_1,...,\mathrm{p}_4) = (2\pi)^4\,\delta(\mathrm{p}_1+...+\mathrm{p}_4)\,\mathrm{G}(\mathrm{p}_1,...,\mathrm{p}_4). \qquad (4.48)$$

Он определяет матричные элементы амплитуды рассеяния (4.26):

$$\big\langle f|M|i\big\rangle = \frac{\mathrm{G}(-\mathrm{p}_1,-\mathrm{p}_2,\,\mathrm{p}_3,\,\mathrm{p}_4)}{D(\mathrm{p}_1)\,D(\mathrm{p}_2)\,D(\mathrm{p}_3)\,D(\mathrm{p}_4)}. \qquad (4.49)$$

Обратим внимание, что в фурье-преобразовании (4.45) все четыре импульса входят равноправным образом. В формуле для амплитуды (4.49) необходимо изменить знак у 4-импульсов начальных частиц.

• Пропагатор (4.46) является фурье-образом свободных двухточечных функций Грина, равных ваккумному среднему при $\lambda = 0$ от хронологического произведения двух операторов поля:

$$D(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2) = \big\langle\, |\mathrm{T}\varphi(\mathrm{x}_1)\varphi(\mathrm{x}_2)|\, \big\rangle = \int \frac{d^4\mathrm{p}_1}{(2\pi)^4}\,\frac{d^4\mathrm{p}_2}{(2\pi)^4}\,\tilde{D}(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2)\; e^{-\imath\,(\mathrm{p}_1\mathrm{x}_1+\mathrm{p}_2\mathrm{x}_2)}.$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$\tilde{D}(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2) = \int d^4\mathrm{x}_1\, d^4\mathrm{x}_2\, D(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2)\; e^{\imath\,(\mathrm{p}_1\mathrm{x}_1+\mathrm{p}_2\mathrm{x}_2)}.$$

В силу трансляционной инвариантности $D(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2)$ зависит от разности координат, поэтому это выражение, сделав замену $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x} + \mathrm{x}_2$, можно переписать следующим образом:

$$\tilde{D}(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2) = \int d^4\mathrm{x}_2\, e^{\imath\,(\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_2)\mathrm{x}_2} \int d^4\mathrm{x}\, D(\mathrm{x})\; e^{\imath\,(\mathrm{p}_1\mathrm{x}} = (2\pi)^4\delta(\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_2)\, D(\mathrm{p}_1).$$

Аналогичные соотношения получаются для точной двухточечной функции Грина при $\lambda \neq 0$:

$$\mathrm{G}(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2) = \big\langle 0|\mathrm{T}\varphi(\mathrm{x}_1)\varphi(\mathrm{x}_2)|0\big\rangle,$$

где усреднение уже ведётся по вакууму точной теории. Эта функция также зависит от разности координат (стр. 76). Её фурье-образ при множителе $(2\pi)^4\delta(\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_2)$ обозначим как $\mathrm{G}(\mathrm{p})$, что является частным случаем (4.48).

В теории возмущений удобно ввести *усечённые функции Грина*, получающиеся делением фурье-образа функций Грина (без тильды) на *точные* пропагаторы:

$$\mathrm{G}_{\mathrm{yc}}(\mathrm{p}_1,...,\mathrm{p}_4) = \frac{\mathrm{G}(\mathrm{p}_1,...,\mathrm{p}_4)}{\mathrm{G}(\mathrm{p}_1)...\mathrm{G}(\mathrm{p}_4)}.$$

Амплитуда упругого двухчастичного рассеяния, выраженная через усечённые 4-точечные функции, имеет вид:

$$\big\langle f|M|i\big\rangle = \frac{\mathrm{G}(\mathrm{p}_1)}{D(\mathrm{p}_1)}\,\frac{\mathrm{G}(\mathrm{p}_2)}{D(\mathrm{p}_2)}\,\frac{\mathrm{G}(\mathrm{p}_3)}{D(\mathrm{p}_3)}\,\frac{\mathrm{G}(\mathrm{p}_4)}{D(\mathrm{p}_4)}\,\mathrm{G}_{\mathrm{yc}}(-\mathrm{p}_1,-\mathrm{p}_2,\,\mathrm{p}_3,\,\mathrm{p}_4). \qquad (4.50)$$

Аналогично записываются амплитуды неупругого рассеяния. Например, если две частицы сталкиваясь, рождают четыре частицы, необходимо импользовать шеститоченую функцию Грина $\mathrm{G}_{\mathrm{yc}}(-\mathrm{p}_1,-\mathrm{p}_2,\,\mathrm{p}_3,\,\mathrm{p}_4,\,\mathrm{p}_5,\,\mathrm{p}_6)$, умноженную на 6 отношений $\mathrm{G}(\mathrm{p}_i)/D(\mathrm{p}_i)$.

# Глава 5

# Функции Грина

При исследовании различных вопросов в квантовой теории поля, удобно работать с функциями Грина. Они непосредственно связаны с матрицей рассеяния, однако не содержат “тривиальных” множителей, соответствующих сталкивающимся частиц.

Мы покажем, как вычислять функции Грина по теории возмущений. Будут подробно проведены расчёты для двух- и четырёхточечных функций. Полученные результаты можно сделать более наглядными при помощи диаграмм Фейнмана. Рассматриваются правила их построения в координатном и импульсном представлениях.

---

**Квантовый мир**

**Сергей С. Степанов**

Эта книга находится в процессе создания. Её последняя версия и другие материалы находятся на сайте: http://synset.com. Там же можно найти первый том: **I. Механика**
Замеченные ошибки и вопросы просьба присылать по адресу: steps137, затем собачка и gmail.com.

(c) 2015. Печать: 2 июля 2017 г.

## 1 Точные функции Грина

• Среднее от хронологического произведения скалярных полей в представлении Гейзенберга по вакууму полного гамильтониана называется *точной функцией Грина*. При помощи редукционной формулы (4.43), стр. 103 и этой функции вычисляются амплитуды рассеяния. Кроме этого, функции Грина интересны сами по себе, т.к. их поведение отражает все свойства квантового поля.

В частном случае двух операторов точная функция Грина называется *точным пропагатором*:

$$\mathrm{G(x,\,y)} = \bigl\langle 0\bigr|\,\mathrm{T}\{\hat\varphi(\mathrm{x})\hat\varphi(\mathrm{y})\}\,\bigl|0\bigr\rangle. \tag{5.1}$$

Задача этого раздела состоит в получении формулы, позволяющей вычислять по теории возмущений подобные средние.

Напомним, что мы различаем состояния с наименьшей энергией (вакуум) для полной и свободной теории. Первое вакуумное состояние обозначается как $|0\rangle$, а второе как $|\,\rangle$. Пусть энергия вакуума свободной теории равна $E_0^{(0)}$, а вакуумная энергия полной теории равна $E_0$:

$$\hat H\,|\,0\,\rangle = E_0\,|\,0\,\rangle, \qquad\qquad \hat H_0|\,\rangle = E_0^{(0)}|\,\rangle. \tag{5.2}$$

Кроме этого $\hat H = \hat H_0 + \hat V$, где для модели скалярного поля с самодействием $\hat V = (\lambda/4!)\,\hat\varphi^4$.

В формуле (5.1) усреднение проводится по полному вакууму $|0\rangle$ и операторы в (5.1) взяты в представлении Гейзенберга. Они удовлетворяют нелинейным операторным уравнениям

$$(\partial^2 + m^2)\hat\varphi = -\frac{\lambda}{3!}\,\hat\varphi^3, \tag{5.3}$$

решения которых неизвестны. Можно также перейти к операторам в представлении взаимодействия (стр. 82):

$$\hat\varphi(t,\,\mathbf{x}) = e^{\imath\hat H t}\,e^{-\imath\hat H_0 t}\,\hat\varphi_I(t,\,\mathbf{x})\,e^{\imath\hat H_0 t}\,e^{-\imath\hat H t},$$

которые удовлетворяют простым линейным уравнениям:

$$(\partial^2 + m^2)\hat\varphi_I = 0. \tag{5.4}$$

В определении (5.1) нам неизвестны ни свойства операторов $\hat\varphi$, ни свойства точного вакуумного среднего $|0\rangle$, что усложняет вычисление среднего. Поэтому выразим эти величины через $\hat\varphi_I$ и $|\,\rangle$.

• При помощи оператора эволюции (стр. **??**)

$$\hat{S}(t,t_0) = e^{\imath\hat{H}_0\, t}\, e^{-\imath\hat{H}\,(t-t_0)}\, e^{-\imath\hat{H}_0\, t_0} \tag{5.5}$$

связь между операторами в представлениях Гейзенберга и взаимодействия можно записать следующим образом:

$$\hat{\varphi}(t,\,\mathbf{x}) = \hat{S}(0,t)\,\hat{\varphi}_I(t,\,\mathbf{x})\,\hat{S}(t,0). \tag{5.6}$$

Выразим хронологическое произведение $\mathrm{T}\{\hat{\varphi}(\mathrm{x})\hat{\varphi}(\mathrm{y})\}$ операторов Гейзенберга, через хронологическое произведение операторов в представлении взаимодействия. Пусть $x^0 > y^0$. Тогда:

$$\mathrm{T}\{\hat{\varphi}(\mathrm{x})\hat{\varphi}(\mathrm{y})\} = \hat{\varphi}(\mathrm{x})\hat{\varphi}(\mathrm{y}) = \hat{S}(0,x^0)\,\hat{\varphi}_I(\mathrm{x})\,\hat{S}(x^0,0)\;\hat{S}(0,y^0)\,\hat{\varphi}_I(\mathrm{y})\,\hat{S}(y^0,0).$$

В силу свойства перемножения операторов эволюции (**??**), стр. **??** можно объединить произведение $\hat{S}(x^0,0)\hat{S}(0,y^0)$ в $\hat{S}(x^0,y^0)$:

$$\hat{\varphi}(\mathrm{x})\hat{\varphi}(\mathrm{y}) = \hat{S}(0,x^0)\,\hat{\varphi}_I(\mathrm{x})\,\hat{S}(x^0,\,y^0)\,\hat{\varphi}_I(\mathrm{y})\,\hat{S}(y^0,0).$$

Кроме этого, введём время $\tau$ такое, что $\tau > x^0 > y^0 > -\tau$ и добавим (по свойству перемножения) слева и справа операторы эволюции:

$$\hat{\varphi}(\mathrm{x})\,\hat{\varphi}(\mathrm{y}) = \hat{S}(0,\tau)\,\hat{S}(\tau,x^0)\,\hat{\varphi}_I(\mathrm{x})\,\hat{S}(x^0,y^0)\,\hat{\varphi}_I(\mathrm{y})\,\hat{S}(y^0,-\tau)\,\hat{S}(-\tau,0).$$

Оператор эволюции определяется (стр. **??**) оператором $\hat{V}_I$ в представлении взаимодействия. Последний, в свою очередь, зависит от $\hat{\varphi}_I$. В силу упорядоченности всех времён в $\hat{S}(\tau,x^0)$, $\hat{S}(x^0,y^0)$, $\hat{S}(y^0,-\tau)$, можно поставить символ T. Аналогичное соотношение с переставленными x и y получается, если $y^0 > x^0$. В результате:

$$\mathrm{T}\{\hat{\varphi}(\mathrm{x})\hat{\varphi}(\mathrm{y})\} = \hat{S}(0,\tau)\,\mathrm{T}\{\hat{S}(\tau,x^0)\,\hat{\varphi}_I(\mathrm{x})\,\hat{S}(x^0,y^0)\,\hat{\varphi}_I(\mathrm{y})\,\hat{S}(y^0,-\tau)\}\,\hat{S}(-\tau,0).$$

Так как под знаком T можно переставлять местами операторы, мы можем свернуть $\hat{S}(\tau,x^0)\hat{S}(x^0,y^0)\hat{S}(y^0,-\tau)$ в $\hat{S}(\tau,-\tau)$, окончательно выразив хронологическое произведение операторов Гейзенберга через хронологическое произведение операторов в представлении взаимодействия:

$$\mathrm{T}\{\hat{\varphi}(\mathrm{x})\hat{\varphi}(\mathrm{y})\} = \hat{S}(0,\tau)\,\mathrm{T}\{\hat{\varphi}_I(\mathrm{x})\hat{\varphi}_I(\mathrm{y})\,\hat{S}(\tau,-\tau)\}\,\hat{S}(-\tau,0). \tag{5.7}$$

Для оператора эволюции существует явная формула (**??**), стр. **??**, поэтому, (5.7) может быть вычислено в виде ряда по теории возмущений.

Понятно, что аналогичное выражение будет справедливо для произведения произвольного числа операторов. При этом, предполагается, что интервал времени $[-\tau,\,\tau]$ включает все времена полевых операторов.

• Осталось выразить вакуумный вектор точного гамильтониана $|0\rangle\!\rangle$, через вектор вакуума свободной теории $|\,\rangle$. Тогда вычисления функций Грина будет относительно легко выполнять при помощи теоремы Вика (которая справедлива для средних по свободному вакууму).

Разложим вакуум точной теории по полному набору состояний свободной теории:

$$|0\rangle\!\rangle = C_0\,|\,\rangle + \int d^3\mathbf{p}\, C_{\mathbf{p}}\;\; |\mathbf{p}\,\rangle + \int d^3\mathbf{p}\, d^3\mathbf{k}\, C_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\,|\mathbf{p},\mathbf{k}\,\rangle + \ldots \tag{5.8}$$

Первое слагаемое – это вакуум свободной теории, умноженный на некоторую константу $C_0$. Далее идёт суперпозиция одночастичных состояний с различной энергий (3-импульсом). Вклад этих состояний определяется функций $C(\mathbf{p}) \equiv C_{\mathbf{p}}$. Третье слагаемое – это суперпозиция двухчастичных состояний с весами $C(\mathbf{p},\mathbf{k}) \equiv C_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$. Многоточием обозначены трех- и т.д. частичные состояния.

Подействуем оператором $\hat{S}(-\tau,0) = e^{-\imath\hat{H}_0\tau}\, e^{\imath\hat{H}\tau}$ на точный вакуум:

$$\hat{S}(-\tau,0)\,|0\rangle\!\rangle = e^{\imath E_0\tau}\, e^{-\imath\hat{H}_0\tau}\,|0\rangle\!\rangle,$$

где учтено, что $\hat{H}|0\rangle\!\rangle = E_0|0\rangle\!\rangle$ и получившееся *число* перенесено через оператор $e^{-\imath\hat{H}_0\tau}$. Его действие на вакуумный вектор $|0\rangle\!\rangle$ вычислим при помощи разложения (5.8):

$$e^{-\imath E_0^{(0)}\tau}\left(C_0|\,\rangle + \int d^3\mathbf{p}\, e^{-\imath\omega_p\tau}\, C_{\mathbf{p}}\;\; |\mathbf{p}\,\rangle + \int d^3\mathbf{p}\, d^3\mathbf{k}\, e^{-\imath(\omega_p+\omega_k)\tau}\, C_{\mathbf{p},\mathbf{k}}\,|\mathbf{p},\mathbf{k}\,\rangle + \ldots\right).$$

В первом слагаемом учтено, что $\hat{H}_0|\,\rangle = E_0^{(0)}|\,\rangle$. Во втором слагаемом, действие $e^{-\imath\hat{H}_0\tau}$ даёт энергию одночастичного состояния $E_0^{(0)} + \omega_p$, где $\omega_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ с импульсом $\mathbf{p}$. Аналогично для двухчастичного состояния и т.д.

Интервал $[-\tau,\,\tau]$ в (5.7) должен включать все времена операторов, которые могут быть сколь угодно большими. Следовательно, целесообразно рассмотреть предел $\tau \to \infty$. Однако, на прямую этот предел вычислить не получится в силу осциллирующего характера множителей типа $e^{-\imath\omega_p\tau}$. Поэтому потребуется выполнить один математический трюк. Сделаем малый отрицательный комплексный сдвиг квадрата массы $m^2 \mapsto m^2 - \imath\epsilon$ (в конечном выражении мы перейдём к пределу $\epsilon \to +0$). Энергия свободных частиц $\omega_p$ получит такой же сдвиг:

$$\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 - \imath\epsilon} \sim \omega_p - \imath\epsilon.$$

Теперь при $\tau \to \infty$ экспоненты $e^{-\imath(\omega_p - \imath\epsilon)\infty} \to 0$. Потому, выше можно пренебречь всеми слагаемыми кроме ведущего, пропорционального вектору вакуума свободного поля.

В результате при $\tau \to \infty$, получаем:

$$\hat{S}(-\tau, 0)\,|0\rangle\!\rangle \to e^{\imath\,\Delta E_0\,\tau}\,C_0\,|\,\rangle\!\rangle, \tag{5.9}$$

где $\Delta E_0 = E_0 - E_0^{(0)}$. Аналогично повторяются вычисления для:

$$\langle\!\langle 0|\,\hat{S}(0,\tau) \to C_0^*\,e^{\imath\,\Delta E_0\,\tau}\,\langle\!\langle\,|. \tag{5.10}$$

Формально (5.10) можно получить эрмитовым сопряжением (5.9), с последующей заменой $\tau \mapsto -\tau$, так как $\hat{S}^+(-\tau, 0) = \hat{S}(0, -\tau)$. Однако наличие мнимой добавки к квадрату массы делает гамильтониан не эрмитов, а энергию $E_0$, вообще говоря, комплексной. Поэтому более строгим будет повторить вычисления, приведшие нас к (5.9). После перенесения операторов эволюции вправо из (5.9) и (5.10) следует:

$$C_0\,e^{\imath\,\Delta E_0\,\tau}\,\hat{S}(0,-\tau)\,|\,\rangle\!\rangle \to |0\rangle\!\rangle, \qquad C_0^*\,e^{\imath\,\Delta E_0\,\tau}\,\langle\!\langle\,|\hat{S}(\tau,0) \to \langle\!\langle 0|. \tag{5.11}$$

Таким образом, мы выразили вакуумный вектор $|0\rangle\!\rangle$ через действие оператора эволюции на вакуум свободной теории в пределе $\tau \to \infty$. Заметим, что проделанный трюк предполагает перестановочность пределов $\tau \to \infty$ и $\epsilon \to 0$. Действительно, исходный гамильтониан не имеет мнимой добавки к квадрату массы (это есть предел $\epsilon \to 0$). Мы хотим вычислить предел $\tau \to \infty$. Однако, вместо этого сначала вычисляется предел $\tau \to \infty$, а только затем $\epsilon \to 0$. Мы опустим математическое обоснование законности перестановочности таких пределов.

Перемножим векторы (5.11). Считая, что вектор основного состояния полного гамильтониана нормирован на единицу: $\langle\!\langle 0|0\rangle\!\rangle = 1$, получаем:

$$\langle\!\langle\,|\hat{S}(\tau,\,-\tau)|\,\rangle\!\rangle \to \frac{1}{|C_0|^2\,e^{\,2\imath\,\Delta E_0\,\tau}}. \tag{5.12}$$

Окончательно, с учётом (5.9), (5.10) и (5.12), запишем среднее значение (5.7) по состоянию $|\,0\,\rangle\!\rangle$ следующим образом:

$$\langle\!\langle 0|\mathrm{T}\{\hat{\varphi}(\mathrm{x})\hat{\varphi}(\mathrm{y})\}|0\rangle\!\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\langle\!\langle\,|\,\mathrm{T}\{\hat{\varphi}_I(\mathrm{x})\hat{\varphi}_I(\mathrm{y})\,\hat{S}(\infty,\,-\infty)\}|\,\rangle\!\rangle}{\langle\!\langle\,|\hat{S}(\infty,\,-\infty)|\,\rangle\!\rangle}. \tag{5.13}$$

Используя теорию возмущений (**??**), стр. **??**, при помощи этого соотношения, можно вычислять точные функции Грина. Комплексная добавка $m^2 \mapsto m^2 - \imath\epsilon$, потребовавшаяся для вычисления предела $\tau \to \infty$, приводит к необходимости использовать причинные функции Грина вида (2.40), стр. 58. Действительно, в их знаменателе стоит выражение $\mathrm{p}^2 - m^2 + \imath\epsilon$, что в точности совпадает с введенным выше комплексным сдвигом квадрата массы.

## 2 Двухточечная функция Грина по теории возмущений

Найдём по теории возмущений двухточечную функцию Грина, равную $\mathrm{G}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2) = \langle 0|\mathrm{T}\varphi(\mathrm{x}_1)\varphi(\mathrm{x}_2)|0\rangle$ (шляпки над операторами не пишем). Будем рассматривать модель с самодействием $(\lambda/4!)\,\varphi^4$, для которой знаменатель в формуле (5.13) имеет вид (*опускаем* у операторов индекс $I$):

$$\langle S\rangle = 1 - \frac{\imath\lambda}{4!}\int\langle \mathrm{T}\,\varphi_{\mathrm{x}}^4\rangle\, d^4\mathrm{x} + \frac{(-\imath\lambda)^2}{2!\cdot 4!^2}\int\langle \mathrm{T}\,\varphi_{\mathrm{x}}^4\varphi_{\mathrm{y}}^4\rangle\, d^4\mathrm{x}\, d^4\mathrm{y} + \ldots$$

Далее будем использовать следующие сокращённые обозначения для хронологических средних:

$$\langle \mathrm{T}\,\varphi_{\mathrm{x}}^4\rangle \equiv (\mathrm{x}^4), \qquad \langle \mathrm{T}\,\varphi_{\mathrm{x}}^4\varphi_{\mathrm{y}}^4\rangle \equiv (\mathrm{x}^4\mathrm{y}^4), \qquad \langle \mathrm{T}\,\varphi_{\mathrm{x}}\varphi_{\mathrm{y}}^3\rangle \equiv (\mathrm{x}\mathrm{y}^3)$$

и т.д. В этих обозначениях среднее значение оператора $S$ имеет вид:

$$\langle S\rangle = 1 - \frac{\imath\lambda}{4!}\,(\mathrm{x}^4) + \frac{(-\imath\lambda)^2}{2\cdot 4!^2}\,(\mathrm{x}^4\mathrm{y}^4) + \ldots, \tag{5.14}$$

где по x и y подразумевается *интегрирование*. Средние значения вычисляем по теореме Вика (стр. 67):

$$(\mathrm{x}^4) = (\overbrace{\mathrm{xxxx}}) + (\overbrace{\mathrm{xxxx}}) + (\overbrace{\mathrm{xxxx}}) = 3\,(\mathrm{xx})^2. \tag{5.15}$$

Для среднего $\langle \mathrm{T}\varphi_{\mathrm{x}}^2\varphi_{\mathrm{y}}^2\rangle \equiv (x^2y^2)$ берём первый оператор в произведении xx и спариваем его со вторым оператором и с произведением yy. Так как в этом произведении получится два одинаковых спаривания, имеем:

$$(\mathrm{x}^2\mathrm{y}^2) = (\mathrm{xxyy}) = (\overbrace{\mathrm{xx}}\mathrm{yy}) + (\overbrace{\mathrm{xxy}}\mathrm{y}) + (\overbrace{\mathrm{xxyy}}) = (\mathrm{xx})(\mathrm{yy}) + 2(\mathrm{xy})(\mathrm{xy}).$$

Аналогично вычисляется:

$$(\mathrm{x}\mathrm{y}^3) = 3\,(\mathrm{xy})(\mathrm{yy}). \tag{5.16}$$

Далее найдём

$$(\mathrm{x}^4\mathrm{y}^4) = 3\,(\mathrm{xx})(\mathrm{x}^2\mathrm{y}^4) + 4\,(\mathrm{xy})(\mathrm{x}^3\mathrm{y}^3),$$

где коэффициент 3 возникает при спаривании первого x в (xxxxyyyy) с остальными тремя, а коэффициент 4 при спаривании x с четырьмя операторами, зависящими от y. Дальнейшие вычисления дают:

$$(\mathrm{x}^2\mathrm{y}^4) = (\mathrm{x}^2)(\mathrm{y}^4)+4(\mathrm{xy})(\mathrm{x}\mathrm{y}^3), \quad (\mathrm{x}^3\mathrm{y}^3) = 2\,(\mathrm{x}^2)(\mathrm{x}\mathrm{y}^3)+3\,(\mathrm{xy})(\mathrm{x}^2\mathrm{y}^2). \tag{5.17}$$

Соберём теперь всё вместе:

$$(\mathrm{x}^4\mathrm{y}^4) = 9\,(\mathrm{xx})^2(\mathrm{yy})^2 + 72\,(\mathrm{xx})(\mathrm{yy})(\mathrm{xy})^2 + 24\,(\mathrm{xy})^4. \tag{5.18}$$

Точно также вычисляются более сложные варианты средних.

Перейдём теперь к числителю в формуле (5.13), который сразу запишем в сокращённых обозначениях:

$$\big\langle \mathrm{T}\,\varphi_1\varphi_2\,S\big\rangle = (\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2) - \imath\frac{\lambda}{4!}\,(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}^4) + \frac{(-\imath\lambda)^2}{2!\,4!^2}\,(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}^4\mathrm{y}^4) + \ldots$$

В первом порядке по $\lambda$:

$$(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\,\mathrm{x}^4) = (\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2)\,(\mathrm{x}^4) + 4\,(\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{x}^3) \tag{5.19}$$

$$= (\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2)\,(\mathrm{x}^4) + 12\,(\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{x}\mathrm{x}).$$

Во втором порядке также сначала спарим $\varphi_1$:

$$(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}^4\mathrm{y}^4) = (\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2)(\mathrm{x}^4\mathrm{y}^4) + 4\,(\mathrm{x}_1\mathrm{x})\,(\mathrm{x}_2\,\mathrm{x}^3\mathrm{y}^4) + 4\,(\mathrm{x}_1\mathrm{y})\,(\mathrm{x}_2\,\mathrm{x}^4\mathrm{y}^3).$$

Так как по x и y ведётся интегрирование, переименуем их в последнем слагаемом, переставив местами и приведём подобные:

$$(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\,\mathrm{x}^4\mathrm{y}^4) = (\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2)(\mathrm{x}^4\mathrm{y}^4) + 8\,(\mathrm{x}_1\mathrm{x})\,(\mathrm{x}_2\,\mathrm{x}^3\mathrm{y}^4).$$

Спарим теперь $\varphi_2$ во втором слагаемом:

$$(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\,\mathrm{x}^4\mathrm{y}^4) = (\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2)(\mathrm{x}^4\mathrm{y}^4) + 24\,(\mathrm{x}_1\mathrm{x})\,(\mathrm{x}_2\mathrm{x})\,(\mathrm{x}^2\mathrm{y}^4) + 32\,(\mathrm{x}_1\mathrm{x})\,(\mathrm{x}_2\mathrm{y})\,(\mathrm{x}^3\mathrm{y}^3).$$

Подставим в последние два слагаемых средние (5.17):

$$(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\,\mathrm{x}^4\mathrm{y}^4) = (\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2)(\mathrm{x}^4\mathrm{y}^4) + 24\,(\mathrm{x}_1\mathrm{x})\,(\mathrm{x}_2\mathrm{x})\,(\mathrm{x}\mathrm{x})(\mathrm{y}^4) \tag{5.20}$$

$$+288\,(\mathrm{x}_1\mathrm{x})\,(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{x}\mathrm{y})^2(\mathrm{y}\mathrm{y}) + (\mathrm{x}_1\mathrm{x})\,(\mathrm{x}_2\mathrm{y})\,\{288(\mathrm{x}\mathrm{x})(\mathrm{y}\mathrm{y})(\mathrm{x}\mathrm{y}) + 192(\mathrm{x}\mathrm{y})^3\}.$$

Умножим (5.19) на $(-\imath\lambda)/4!$, а (5.20) на $(-\imath\lambda)^2/2\cdot 4!^2$ и сложим их:

$$\big\langle \mathrm{T}\{\varphi_1\varphi_2\,S\}\big\rangle = (\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2)\cdot\Big\{1 - \frac{\imath\lambda}{4!}\,(\mathrm{x}^4) + \frac{(-\imath\lambda)^2}{2\cdot 4!^2}\,(\mathrm{x}^4\mathrm{y}^4)\Big\}$$

$$-\frac{\imath\lambda}{2}\,(\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{x}\mathrm{x})\cdot\Big\{1 - \frac{\imath\lambda}{4!}(\mathrm{y}^4)\Big\}$$

$$-\lambda^2\Big\{\frac{1}{4}\,(\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{x}\mathrm{y})^2(\mathrm{y}\mathrm{y}) + \frac{1}{4}(\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{y})(\mathrm{x}\mathrm{x})(\mathrm{y}\mathrm{y})(\mathrm{x}\mathrm{y}) + \frac{1}{6}\,(\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{y})(\mathrm{x}\mathrm{y})^3\Big\}.$$

Чтобы получить функцию Грина, это выражение необходимо разделить на $\big\langle S\big\rangle$. Так как и числитель и знаменатель получены с точностью до $\lambda^2$, деление необходимо проводить с этой же точностью. Выражения в первых двух фигурных скобках с точностью до $\lambda^2$ равны знаменателю (5.14) и сокращается с ним, а на последнюю фигурную скобку, имеющую порядок $\lambda^2$ знаменатель с точностью до $\lambda^2$ не оказывает влияние.

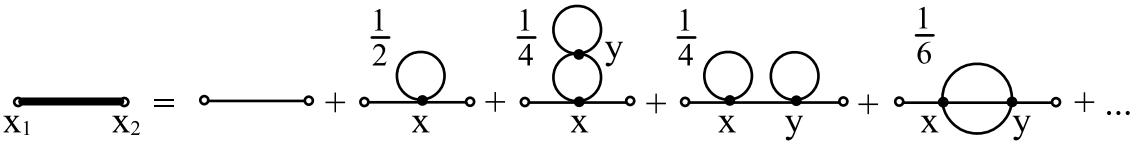
В результате, окончательно, получаем:

$$\mathrm{G}(\mathrm{x}_1,\,\mathrm{x}_2) = (\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2) - \frac{\imath\lambda}{2}\,(\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{x}\mathrm{x}) \tag{5.21}$$

$$-\lambda^2\left\{\frac{1}{4}\,(\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{x}\mathrm{y})^2(\mathrm{y}\mathrm{y}) + \frac{1}{4}(\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{y})(\mathrm{x}\mathrm{x})(\mathrm{y}\mathrm{y})(\mathrm{x}\mathrm{y}) + \frac{1}{6}\,(\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{y})(\mathrm{x}\mathrm{y})^3\right\}.$$

Придадим этому выражению более наглядный вид. Для этого введём следующие соответствия между множителями в функции Грина и элементами графов:

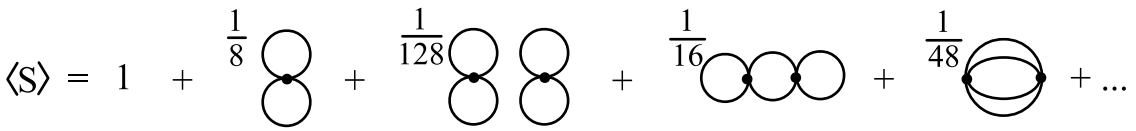
Таким образом, двумя белыми кружочками, соединёнными тонкой линией, мы обозначаем двухточечную функцию Грина $D(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2) \equiv (\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2)$ свободных частиц ($\lambda = 0$), а каждая чёрная точка приводит к умножению на $-\imath\lambda$ и интегрированию по переменной, связанной с этой точкой. Все элементы в данной диаграмме (не зависимо связные они или нет) перемножаются. Кроме этого, результат умножается на числовой множитель, который мы будем писать рядом с диаграммой. Обозначим также точную двухточечную функцию Грина $\mathrm{G}(\mathrm{x}_1,\,\mathrm{x}_2)$ жирной линией. Тогда равенство (5.21) можно представить в виде следующей суммы диаграмм:




Аналогично изображается вакуумное среднее от оператора $S$. Подставим в его выражение (5.14) вычисленные средние (5.15) и (5.18) (по x и y ведётся интегрирование):

$$\langle S\rangle = 1 - \frac{\imath\lambda}{8}\,(\mathrm{x}\mathrm{x})^2 - \lambda^2\left\{\frac{1}{128}\,(\mathrm{x}\mathrm{x})^2(\mathrm{y}\mathrm{y})^2 + \frac{1}{16}\,(\mathrm{x}\mathrm{x})(\mathrm{y}\mathrm{y})(\mathrm{x}\mathrm{y})^2 + \frac{1}{48}\,(\mathrm{x}\mathrm{y})^4\right\}.$$

На языке диаграмм это выражение имеет вид:

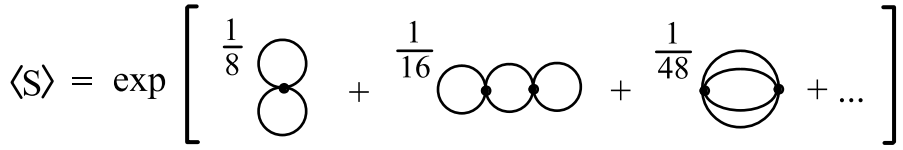



Обратим внимание, что в отличии от $\mathrm{G}(\mathrm{x}_1,\,\mathrm{x}_2)$ этот ряд содержит несвязные диаграммы (третье слагаемое после равенства). Кроме этого, оно, естественно, не содержит внешних линий (оканчивающихся белыми кружочками).

Заметим, что, с точностью до $\lambda^2$, среднее оператора $S$ можно переписать следующим образом:

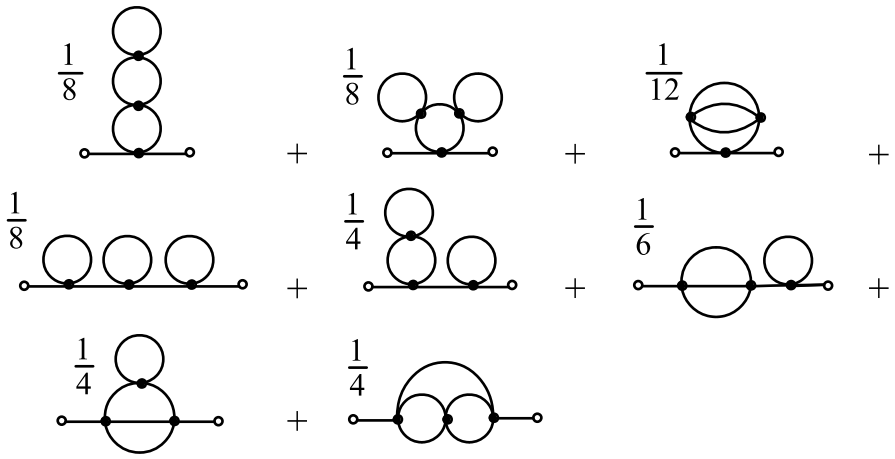
$$\langle S\rangle = \exp\Big[ -\frac{\imath\lambda}{8}\,(\mathrm{xx})^2 - \frac{\lambda^2}{16}\,(\mathrm{xx})(\mathrm{yy})(\mathrm{xy})^2 - \frac{\lambda^2}{48}\,(\mathrm{xy})^4 + \ldots\Big]. \qquad (5.22)$$

При разложении экспоненты в ряд Тейлора ($e^x = 1 + x + x^2/2! + \ldots$) по константе $\lambda$, первое слагаемое в её показателе взведётся в квадрат и разделится на 2!, что даст член $-(\lambda^2/128)\,(\mathrm{xx})^2(\mathrm{yy})^2$. Графически, экспоненциальное представление среднего имеет вид:




При этом, в показателе экспоненты выпадает несвязная диаграмма и все диаграммы оказываются связными. Это общее свойство, справедливое во всех порядках по теории возмущений, называется *экспонированием несвязных диаграмм*. Аналогично, числитель в (5.13) для двухточечных функций Грина всегда содержит связные диаграммы, сумма которых умножается на $\langle S\rangle$ и это даёт часть несвязных диаграмм. Однако, этот множитель сокращается со знаменателем. В результате, двухточечная функция Грина всегда состоит только из связных диаграмм.

С увеличением порядка теории возмущений, число диаграмм стремительно растёт. Если во втором порядке присутствует три диаграммы, то уже в третьем порядке существует восемь топологически различных диаграмм (напомним, что $\mathrm{G}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = \mathrm{G}(\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_1)$, т.к. под хронологическим произведением операторы можно переставлять):




В четвёртом порядке их 30, а в пятом – 118. Таким образом, получение по теории возмущений поправок высокого порядка по $\lambda$ сопряжено со значительными вычислительными трудностями.

## 3 Четырёхточечная функция Грина

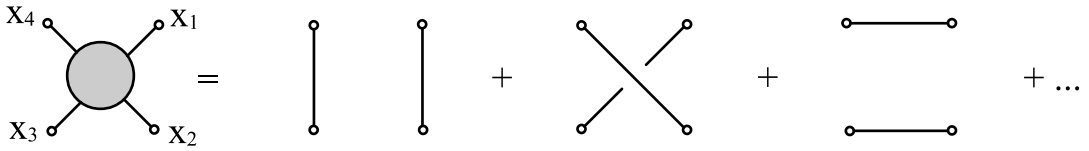
Рассмотрим теперь хронологическое среднее от четырёх операторов поля по вакууму полного гамильтониана:

$$\mathrm{G}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\mathrm{x}_4) = \big\langle 0|\mathrm{T}\,\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4|0\big\rangle. \tag{5.23}$$

В нулевом приближении по теории возмущения $\mathrm{G}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\mathrm{x}_4)$ равна

$$D(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\mathrm{x}_4) = (\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2)(\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4) + (\mathrm{x}_1\mathrm{x}_3)(\mathrm{x}_2\mathrm{x}_4) + (\mathrm{x}_1\mathrm{x}_4)(\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3). \tag{5.24}$$

Это соотношение изображается при помощи следующих трех диаграмм, каждая из которых распадается на две несвязные, соответствующие двухточечным функциям Грина свободных частиц:




Точную 4-точечную функцию, стоящую слева от равенства мы изобразили заштрихованным кружком. Чтобы не загромождать диаграмму указанием координат, справа от равенства сохраняется пространственное расположение вершин функции Грина, соответствующих координатам $\mathrm{x}_1,\ldots\mathrm{x}_4$ (по часовой стрелки). Это приводит к тому, что во второй диаграмме пришлось нарисовать одну линию разрывной (линии расположены как-бы друг над другом). Однако, они не пересекаются, пока не соединены чёрной точкой.

В первом порядке по теории возмущения начнём спаривать $\varphi_{\mathrm{x}_1}$ под средним $(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4\mathrm{x}^4)$ со всеми остальными:

$$(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2)(\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4\mathrm{x}^4) + (\mathrm{x}_1\mathrm{x}_3)(\mathrm{x}_2\mathrm{x}_4\mathrm{x}^4) + (\mathrm{x}_1\mathrm{x}_4)(\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3\mathrm{x}^4) + 4(\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4\mathrm{x}^3).$$

Для среднего в первом слагаемом имеем:

$$(\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4\mathrm{x}^4) = (\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4)(\mathrm{x}^4) + 4\,(\mathrm{x}_3\mathrm{x})(\mathrm{x}_4\mathrm{x}^3) = (\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4)(\mathrm{x}^4) + 12\,(\mathrm{x}_3\mathrm{x})(\mathrm{x}_4\mathrm{x})(\mathrm{x}^2),$$

а множитель $(\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4\mathrm{x}^3)$ в последнем слагаемом равен

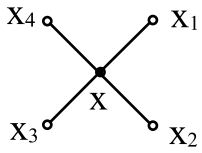
$$3(\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3)(\mathrm{x}_4\mathrm{x})(\mathrm{x}^2) + 3(\mathrm{x}_2\mathrm{x}_4)(\mathrm{x}_3\mathrm{x})(\mathrm{x}^2) + 3(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4)(\mathrm{x}^2) + 6(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{x}_3\mathrm{x})(\mathrm{x}_4\mathrm{x}).$$

Собирая всё вместе, имеем:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4!}\,(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4\mathrm{x}^4) &= (\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{x}_3\mathrm{x})(\mathrm{x}_4\mathrm{x}) + \frac{1}{4!}\,(\mathrm{x}^4)\,D(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\mathrm{x}_4)\\ +\frac{1}{2}\,(\mathrm{xx})\,\{&(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2)(\mathrm{x}_3\mathrm{x})(\mathrm{x}_4\mathrm{x}) + (\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4)(\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{x}) + (\mathrm{x}_1\mathrm{x}_3)(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{x}_4\mathrm{x})\\ &+(\mathrm{x}_2\mathrm{x}_4)(\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_3\mathrm{x}) + (\mathrm{x}_1\mathrm{x}_4)(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{x}_3\mathrm{x}) + (\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3)(\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_4\mathrm{x})\},\end{aligned}$$

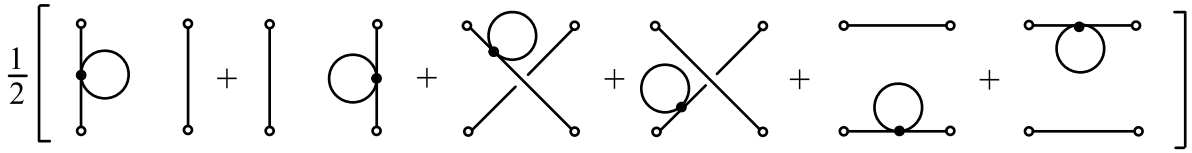
где выражение сразу разделено на 4! и $D(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_4)$ определено в (5.24).

Первое слагаемое изображается диаграммой, которая является связной:

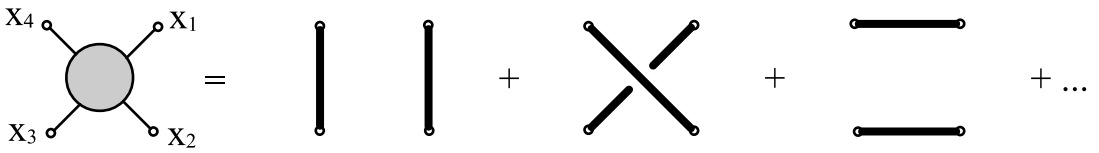



Напомним, что наличие чёрной точки означает, что диаграмму нужно умножить на $-i\lambda$ и проинтегрировать по координате, связанной с этой точкой (в данном случае – это x).

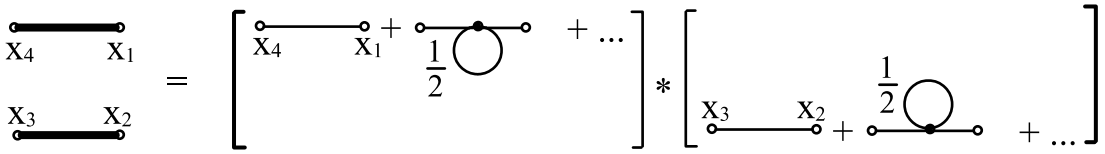
Второе слагаемое, просуммированное с нулевым приближением к функции Грина (5.24), сократиться при делении на среднее оператора рассеяния $\langle S\rangle = 1 - i\lambda\langle \mathrm{x}^4\rangle/4! + \ldots$ (останется только нулевое приближение $D(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4)$). На остальные шесть слагаемых знаменатель в первом порядке по $\lambda$ не влияет (они уже умножены на $\lambda$). Они описываются несвязными диаграммами следующего вида:




Обозначим, как и раньше, точную двухточечную функцию Грина жирной линией. Если мы просуммируем все *несвязные* диаграммы (во всех порядках теории возмущений), то *несвязная* часть 4-точечной функции будет иметь такой же вид, как и свободная функция, но с точными двухточечными пропагаторами:




Например, для третей диаграммы $\mathrm{G}(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_4)\mathrm{G}(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_3)$ имеем следующее произведение рядов каждого сомножителя:




Несложно видеть, что такое произведение приводит к несвязной части 4-точечной функции с точностью до $\lambda$.

Точные двухточечные функции Грина мы уже рассмотрели в предыдущем разделе. Поэтому, чтобы чуть упростить вычисления, далее будем рассматривать только связные части 4-точечной функции.

Для этого во втором порядке по теории возмущений не будем спаривать $x_i$ друг с другом. Спаривая $x_1$ с x и y (переименовывая и переставляя переменные интегрирования), имеем:

$$(x_1x_2x_3x_4\,x^4y^4) = 8\,(x_1x)(x_2x_3x_4\,x^3y^4).$$

Спарим теперь $x_2$, а затем $x_3$:

$$= 24\,(x_1x)(x_2x)(x_3x_4\,x^2y^4) + 32\,(x_1x)(x_2y)(x_3x_4\,x^3y^3)$$

$$= 24\cdot 2\,(x_1x)(x_2x)(x_3x)(x_4\,x\,y^4) + 24\cdot 4\,(x_1x)(x_2x)(x_3y)(x_4\,x^2y^3)$$

$$+\,32\cdot 3\,(x_1x)(x_2y)(x_3x)(x_4\,x^2y^3) + 32\cdot 3\,(x_1x)(x_2y)(x_3y)(x_4\,x^3y^2).$$

Наконец, спаривая оставшийся оператор с аргументом $x_4$, получаем:

$$= 48\,(x_1x)(x_2x)(x_3x)(x_4x)(y^4) + 48\cdot 4\,(x_1x)(x_2x)(x_3x)(x_4y)(xy^3)$$

$$+96\cdot 2\,(x_1x)(x_2x)(x_3y)(x_4x)(xy^3) + 96\cdot 3\,(x_1x)(x_2x)(x_3y)(x_4y)(x^2y^2)$$

$$+96\cdot 2\,(x_1x)(x_2y)(x_3x)(x_4x)(xy^3) + 96\cdot 3\,(x_1x)(x_2y)(x_3x)(x_4y)(x^2y^2)$$

$$+96\cdot 3\,(x_1x)(x_2y)(x_3y)(x_4x)(x^2y^2) + 96\cdot 2\,(x_1x)(x_2y)(x_3y)(x_4y)(x^3y).$$

Неспаренные "остатки" мы уже вычисляли на стр. 112:

$$(xy^3) = 3(xy)(yy), \qquad (x^2y^2) = (xx)(yy) + 2(xy)^2.$$

Подставляя их (и переименовывая переменные интегрирования x и y в последнем слагаемом), окончательно, получаем:

$$\frac{1}{2\cdot 4!^2}\,(x_1x_2x_3x_4\,x^4y^4) = (x_1x)(x_2x)(x_3x)(x_4x)\,\frac{(y^4)}{4!}$$

$$+\frac{1}{2}\,(xy)(yy)\{(x_1x)(x_2x)(x_3x)(x_4y) + (x_1x)(x_2x)(x_3y)(x_4x)+$$

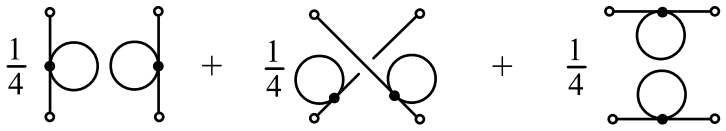
$$(x_1x)(x_2y)(x_3x)(x_4x) + (x_1y)(x_2x)(x_3x)(x_4x)\}$$

$$+\frac{1}{2}(xy)^2\,(x_1x)\,\{(x_2x)(x_3y)(x_4y) + (x_3x)(x_2y)(x_4y) + (x_4x)(x_2y)(x_3y)\}$$

$$+\frac{1}{4}(xx)(yy)\,(x_1x)\,\{(x_2x)(x_3y)(x_4y) + (x_3x)(x_2y)(x_4y) + (x_4x)(x_2y)(x_3y)\}.$$

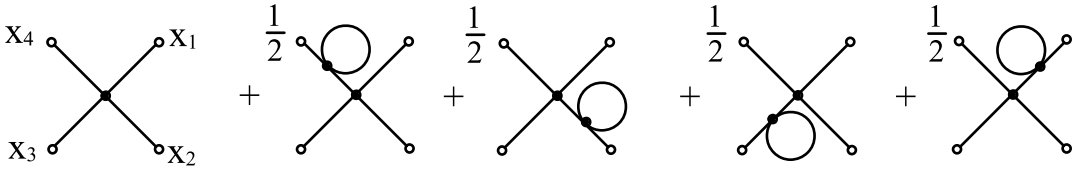
Первое слагаемое, если к нему добавить аналогичное слагаемое, полученное в первом порядке по теории возмущений, получает множитель $1 - \imath\lambda(y^4)/4!$, который сокращается с $\langle S\rangle$. Представим полученный результат в графическом виде.

Последняя строчка даёт три несвязные диаграммы, которые продолжают разложение произведения двух несвязных точных двухточечных функций:

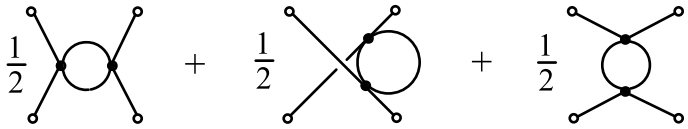


Поэтому мы их игнорируем (т.к. договорились вычислить только связную часть функции Грина).

Первое слагаемое после сокращения множителя $\langle S \rangle$ является вершиной первого порядка. Следующие четыре похожи на неё, но имеют частично "одетые" рёбра:




Ещё три слагаемых дают новый класс диаграмм, не сводящийся к одеванию внешних рёбер:



Запишем окончательное выражение 4-точечной функции Грина во втором порядке по теории возмущений (первые три слагаемых точные):

$$\mathrm{G}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\mathrm{x}_4) = \tag{5.25}$$

$$\mathrm{G}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)\mathrm{G}(\mathrm{x}_3,\mathrm{x}_4)+\mathrm{G}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_3)\mathrm{G}(\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_4)+\mathrm{G}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_4)\mathrm{G}(\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3)$$

$$-\imath\lambda\,(\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{x}_3\mathrm{x})(\mathrm{x}_4\mathrm{x})$$

$$-\frac{\lambda^2}{2}\,(\mathrm{xy})(\mathrm{yy})\,\{(\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{x}_3\mathrm{x})(\mathrm{x}_4\mathrm{y})+(\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{x}_3\mathrm{y})(\mathrm{x}_4\mathrm{x})+$$
$$(\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{y})(\mathrm{x}_3\mathrm{x})(\mathrm{x}_4\mathrm{x})+(\mathrm{x}_1\mathrm{y})(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{x}_3\mathrm{x})(\mathrm{x}_4\mathrm{x})\}$$

$$-\frac{\lambda^2}{2}\,(\mathrm{xy})^2\,(\mathrm{x}_1\mathrm{x})\,\{(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{x}_3\mathrm{y})(\mathrm{x}_4\mathrm{y})+(\mathrm{x}_3\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{y})(\mathrm{x}_4\mathrm{y})+(\mathrm{x}_4\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{y})(\mathrm{x}_3\mathrm{y})\}.$$

Напомним, что по x и y проводится интегрирование, поэтому, например, член первого порядка по $\lambda$ на самом деле имеет вид:

$$-\imath\lambda\int D(\mathrm{x}_1-\mathrm{x})D(\mathrm{x}_2-\mathrm{x})D(\mathrm{x}_3-\mathrm{x})D(\mathrm{x}_4-\mathrm{x})\,d^4\mathrm{x}.$$

В координатном представлении функции Грина являются сингулярными (что проявляется уже в случае свободных частиц). Их вид в импульсном представлении существенно проще, что мы сейчас и продемонстрируем.

## 4 Импульсное представление для функций Грина

Точную двухточечную функцию Грина мы обозначили как $\mathrm{G}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$. В силу трансляционной инвариантности (стр. 76) она должна зависеть от разности 4-координат полевых операторов, стоящих под среднем. Кроме этого, так как под хронологическим произведением операторы можно переставлять местами, она является чётной функцией $\mathrm{G}(-\mathrm{x}) = \mathrm{G}(\mathrm{x})$. Запишем следующее фурье-разложение:

$$\mathrm{G}(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2) = \int \mathrm{G}(\mathrm{p})\, e^{-\imath \mathrm{p}(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2)}\, \frac{d^4\mathrm{p}}{(2\pi)^4}. \tag{5.26}$$

Аналогичное интегральное представление мы использовали и для свободной функции Грина $D(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2)$. Её фурье-образ $D(\mathrm{p})$ называется *пропагатором* (вспоминаем про мнимую добавку, стр.111):

$$D(\mathrm{p}) = \frac{\imath}{\mathrm{p}^2 - m^2 + \imath\epsilon}. \tag{5.27}$$

Если аргументы функции свободной функции Грина совпадают, то она пропорциональна константе:

$$D(0) = (\mathrm{xx}) = \Delta_1 = \int \frac{\imath}{\mathrm{p}^2 - m^2 + \imath\epsilon}\, \frac{d^4\mathrm{p}}{(2\pi)^4}.$$

Эта константа бесконечна (интеграл при больших p расходится). Для устранения подобных бесконечностей проводится регуляризация (глава 7), а затем перенормировка параметров модели (глава 8).

Первая поправка по теории возмущений к двухточечной функции Грина (петля), с точностью до множителя $-\imath\lambda/2$, равна:

$$\int (\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{xx})\, d^4\mathrm{x} = \Delta_1 \int D(\mathrm{p})\, D(\mathrm{q})\, e^{-\imath \mathrm{p}\,(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}) - \imath \mathrm{q}\,(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x})}\, \frac{d^4\mathrm{p}\, d^4\mathrm{q}\, d^4\mathrm{x}}{(2\pi)^8}.$$

Интеграл по $d^4\mathrm{x}$ с экспонентой даёт $(2\pi)^4\delta(\mathrm{q} + \mathrm{p})$. Интегрируя с этой $\delta$-функцией по $d^4\mathrm{q}$, получаем:

$$\int (\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{xx})\, d^4\mathrm{x} = \Delta_1 \int D^2(\mathrm{p})\, e^{-\imath \mathrm{p}\,(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2)}\, \frac{d^4\mathrm{p}}{(2\pi)^4},$$

где учтена чётность функции $D(\mathrm{p})$. Приравнивая фурье-образы всех выражений в (5.21), стр. 114 получаем в первом приближении по $\lambda$ разложение:

$$\mathrm{G}(\mathrm{p}) = D(\mathrm{p}) - \frac{\imath\lambda}{2}\, \Delta_1\, D^2(\mathrm{p}) + \ldots \tag{5.28}$$

Обратим внимание, что для функции Грина автоматически получилась разница аргументов $\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2$.

Также расписываются слагаемые второго порядка по $\lambda$. Например выражение $(\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{y}\mathrm{y})(\mathrm{x}\mathrm{y})^2$ равно:

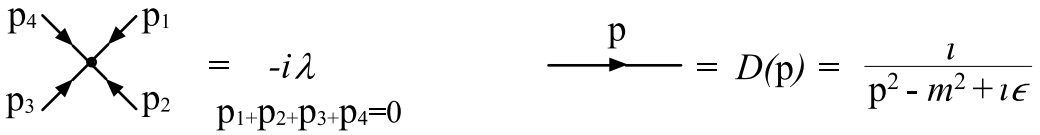
$$\Delta_1 \int D(\mathrm{p})D(\mathrm{q})D(\mathrm{k})D(\mathrm{s})\, e^{-\imath \mathrm{p}(\mathrm{x}_1-\mathrm{x})-\imath \mathrm{q}(\mathrm{x}_2-\mathrm{x})-\imath(\mathrm{k}+\mathrm{s})(\mathrm{x}-\mathrm{y})}\, \frac{d^4\mathrm{p}\, d^4\mathrm{q}\, d^4\mathrm{k}\, d^4\mathrm{s}\, d^4\mathrm{x}\, d^4\mathrm{y}}{(2\pi)^{16}}.$$

Интеграл по $d^4\mathrm{x}\, d^4\mathrm{y}$ даёт $(2\pi)^8\delta(\mathrm{p}+\mathrm{q}-\mathrm{k}-\mathrm{s})\,\delta(\mathrm{k}+\mathrm{s}) = (2\pi)^8\delta(\mathrm{p}+\mathrm{q})\,\delta(\mathrm{k}+\mathrm{s})$. Эти $\delta$-функции позволяют проинтегрировать по s и q. Повторяя эти вычисления для оставшиеся двух слагаемых, получаем следующий фурье-образ точной функции Грина с точностью до $\lambda^2$:

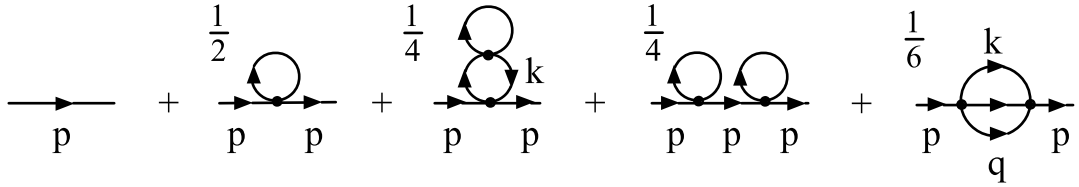
$$\mathrm{G}(\mathrm{p}) = D(\mathrm{p}) - \frac{\imath\lambda}{2}\,\Delta_1\, D^2(\mathrm{p}) - \frac{\lambda^2}{4}\,\Delta_1\, D^2(\mathrm{p}) \int D^2(\mathrm{k})\, \frac{d^4\mathrm{k}}{(2\pi)^4} \qquad (5.29)$$

$$-\frac{\lambda^2}{4}\,\Delta_1^2\, D^3(\mathrm{p}) \;-\; \frac{\lambda^2}{6}\, D^2(\mathrm{p}) \int D(\mathrm{k})\, D(\mathrm{q})\, D(\mathrm{p}-\mathrm{k}-\mathrm{q})\, \frac{d^4\mathrm{k}\, d^4\mathrm{q}}{(2\pi)^8} + \ldots$$

Это выражение можно представить в графическом виде при помощи *диаграмм Фейнмана*:




В каждой вершине должен выполнятся закон сохранения 4-импульса, а по импульсам не зафиксированным этим законом, проводится интегрирование $d^4\mathrm{k}/(2\pi)^4$. Пять слагаемых (5.29) имеют следующее графическое представление:




В замкнутых петлях с одной точкой (как на второй диаграмме) один и тот-же импульс входит и выходит из вершины, поэтому он не связан с импульсами попадающими в вершину из двух нижних линий. Такие петли дают множитель $\Delta_1$. На нижней петле третей диаграммы ситуация аналогична, но так как у неё две вершины, возникает множитель $D^2(\mathrm{k})$ и эта петля не равна $\Delta_1$. В последней диаграмме центральная прямая, соединяющая вершины, должна иметь импульс $\mathrm{p}-\mathrm{k}-\mathrm{q}$, чтобы выполнялся закон сохранения в каждой вершине. Направление импульсов по которым ведётся интегрирование может быть произвольным (но фиксированным). Например, если k и q перевернуть, импульс центральной линии станет равным $\mathrm{p}+\mathrm{k}+\mathrm{q}$.

• Фурье-образ 4-точечной функции Грина равен:

$$\tilde{\mathrm{G}}(\mathrm{p}_1,...,\mathrm{p}_4) = \int \mathrm{G}(\mathrm{x}_1,...,\mathrm{x}_4)\, e^{\imath\,(\mathrm{x}_1\mathrm{p}_1+...+\mathrm{x}_4\mathrm{p}_4)}\, d^4\mathrm{x}_1...d^4\mathrm{x}_4. \qquad (5.30)$$

В отличие от 2-точечной функции, 4-точечная может содержать связные и несвязные диаграммы. Структура фурье-образа для них будет отличается. Рассмотрим сначала несвязные диаграммы. Пусть, например,

$$\mathrm{G}(\mathrm{x}_1,...,\mathrm{x}_4) = \mathrm{G}(\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2)\mathrm{G}(\mathrm{x}_3-\mathrm{x}_4).$$

Подставим в это выражение импульсное представление 2-точечных функций и проинтегрируем в соответствии с определением (5.30):

$$\int \mathrm{G}_\mathrm{p}\mathrm{G}_\mathrm{q} e^{\imath\{\mathrm{p}_1\mathrm{x}_1+\mathrm{p}_2\mathrm{x}_2+\mathrm{p}_3\mathrm{x}_3+\mathrm{p}_4\mathrm{x}_4-\mathrm{p}(\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2)-\mathrm{q}(\mathrm{x}_3-\mathrm{x}_4)\}}\, \frac{d^4\mathrm{p}\, d^4\mathrm{q}}{(2\pi)^8}\, d^4\mathrm{x}_1...d^4\mathrm{x}_4,$$

где $\mathrm{G}_\mathrm{p} \equiv \mathrm{G}(\mathrm{p})$. Интегралы по $d^4\mathrm{x}_i$ дают произведение функций Дирака $(2\pi)^{16}\delta(\mathrm{p}_1-\mathrm{p})\delta(\mathrm{p}_2+\mathrm{p})\delta(\mathrm{p}_3-\mathrm{q})\delta(\mathrm{p}_4+\mathrm{q})$, интегрируя с которыми по $d^4\mathrm{p}$ и $d^4\mathrm{q}$, получаем:

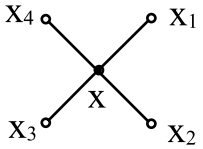
$$\tilde{\mathrm{G}}(\mathrm{p}_1,...,\mathrm{p}_4) = (2\pi)^4\,\delta(\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_2)\,\mathrm{G}(\mathrm{p}_1)\ \cdot(2\pi)^4\,\delta(\mathrm{p}_3+\mathrm{p}_4)\,\mathrm{G}(\mathrm{p}_3). \qquad (5.31)$$

Для связных диаграмм возникает одна функция Дирака, зависящая от суммы четырёх импульсов:

$$\tilde{\mathrm{G}}(\mathrm{p}_1,...,\mathrm{p}_4) = (2\pi)^4\,\delta(\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_2+\mathrm{p}_3+\mathrm{p}_4)\,\mathrm{G}(\mathrm{p}_1,...,\mathrm{p}_4). \qquad (5.32)$$

Благодаря функции Дирака, независимых аргументов у фурье-образа функции Грина всегда на один меньше, так как $\mathrm{p}_1 = -\mathrm{p}_2 - ... - \mathrm{p}_4$.

Продемонстрируем как появляется эта функция Дирака на примере связной диаграммы первой поправки в (5.25) по теории возмущений:




Запишем её выражение (с точностью до множителя $-\imath\lambda$) в координатном представлении, переходя к фурье-образу двухточечных функций Грина:

$$\int (\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{x}_3\mathrm{x})(\mathrm{x}_4\mathrm{x})\, d^4\mathrm{x} = \int D_{\mathrm{k}_1}D_{\mathrm{k}_2}D_{\mathrm{k}_3}D_{\mathrm{k}_4}\, e^{-\imath A}\, \frac{d^4\mathrm{k}_1...d^4\mathrm{k}_4}{(2\pi)^{16}}\, d^4\mathrm{x},$$

где

$$A = \mathrm{k}_1\,(\mathrm{x}_1-\mathrm{x}) + \mathrm{k}_2\,(\mathrm{x}_2-\mathrm{x}) + \mathrm{k}_3\,(\mathrm{x}_3-\mathrm{x}) + \mathrm{k}_4\,(\mathrm{x}_4-\mathrm{x}).$$

Интеграл по $d^4\mathrm{x}$ даёт $(2\pi)^4\delta(\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_2+\mathrm{k}_3+\mathrm{k}_4)$. Умножим на $e^{\imath\,(\mathrm{x}_1\mathrm{p}_1+...+\mathrm{x}_4\mathrm{p}_4)}$ и проинтегрируем по $d^4\mathrm{x}_1...d^4\mathrm{x}_4$. Это даст произведение функций Дирака $(2\pi)^{16}\delta(\mathrm{k}_1-\mathrm{p}_1)\delta(\mathrm{k}_2-\mathrm{p}_2)\delta(\mathrm{k}_3-\mathrm{p}_3)\delta(\mathrm{k}_4-\mathrm{p}_4)$, которые “уходят” после интегрирования по $d^4\mathrm{k}_1...d^4\mathrm{k}_4$.

В результате множитель при функции Дирака в (5.32) имеет вид:

$$\mathrm{G}(\mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_4) = -\imath\lambda\, D_{\mathrm{p}_1}\, D_{\mathrm{p}_2} D_{\mathrm{p}_3} D_{\mathrm{p}_4}. \tag{5.33}$$

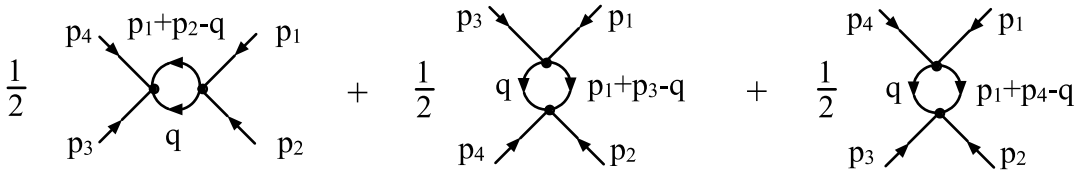
Такое произведение пропагаторов, соответствующих внешним линиям в 4-точечной функции Грина будет возникать во всех порядках по теории возмущений. Например во втором порядке присутствует член вида:

$$\frac{(-\imath\lambda)^2}{2} \int (\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{x}_3\mathrm{y})(\mathrm{x}_4\mathrm{y})\, d^4\mathrm{x}\, d^4\mathrm{y}.$$

Повторяя предыдущие вычисления, для функции при $(2\pi)^4\,\delta(\mathrm{p}_1+...+\mathrm{p}_4)$ получаем следующее выражение:

$$D_{\mathrm{p}_1} D_{\mathrm{p}_2} D_{\mathrm{p}_3} D_{\mathrm{p}_4} \frac{(-\imath\lambda)^2}{2} \int D_{\mathrm{q}}\, D_{\mathrm{q}-\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_2} \frac{d^4\mathrm{q}}{(2\pi)^4}. \tag{5.34}$$

Аналогичные выражения получаются ещё для двух диаграмм с переставленными индексами у импульсов (12) $\mapsto$ (13), (12) $\mapsto$ (14). Они соответствуют перестановке индексов у координат функции Грина. Нарисуем эти три вклада в виде диаграмм Фейнмана:

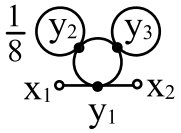



Импульсы, от которых зависит $\mathrm{G}(\mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_4)$ всегда направлены к центру диаграммы и подписываются рядом с внешними линиями. Им соответствует произведение пропагаторов $D_{\mathrm{p}_1}...D_{\mathrm{p}_4}$. Над остальными (внутренними) линиями мы ставим произвольные импульсы (с фиксированным направлением) и проверяем выполнение закона сохранения в каждой вершине. Это позволяет выразить часть импульсов через другие и импульсы внешних линий. Например, на первой диаграмме в правой вершине импульсы $\mathrm{p}_1$ и $\mathrm{p}_2$ в неё входят. Произвольный импульс q из неё выходит. Оставшийся импульс должен быть равен $\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 - \mathrm{q}$, чтобы в этой вершине выполнился закон сохранения. Очевидно, что закон сохранения будет выполнен и в левой вершине, так как благодаря функции Дирака $\delta(\mathrm{p}_1 + ... + \mathrm{p}_4)$ имеем связь $\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 + \mathrm{p}_3 + \mathrm{p}_4 = 0$. По всем импульсам, не зафиксированным законом сохранения, необходимо провести интегрирование $d^4\mathrm{q}/(2\pi)^4$. Кроме этого, каждую вершину умножаем на $(-\imath\lambda)$, а всю диаграмму на "симметрийный" множитель, следующий из теоремы Вика (он приводится рядом с диаграммой).

## 5 Как получать симметрийные множители *

Для нахождения всех диаграмм Фейнмана в высоких порядках по теории возмущений, приходится делать достаточно утомительные вычисления, основанные на теореме Вика. Иногда необходимо для диаграммы данного типа найти числовой множитель не проводя всех возможных спариваний, учитывающих другие диаграммы. Эта задача существенно проще.

Рассмотрим в качестве примера следующего Микки Мауса:




$$+ \ldots \quad = \quad (x_1 x_2 y_1^4 y_2^4 y_3^4).$$

Спаривания для связной диаграммы начинаем проводить обычным образом:

$$= 4 \cdot 3\,(x_1 y_1)(x_2 y_1^3 y_2^4 y_3^4) = 12 \cdot 3\,(x_1 y_1)\,(x_2 y_1)\,(y_1^2 y_2^4 y_3^4) + \ldots$$

Во втором равенстве мы спарили $x_2$ только с $y_1$, так как хотим получить член в котором $x_1$ и $x_2$ сходятся в одной вершине. Все остальные спаривания помечены многоточием. Далее, $y_1$ должен спариваться не с собой, а с двумя *различными* вершинами:

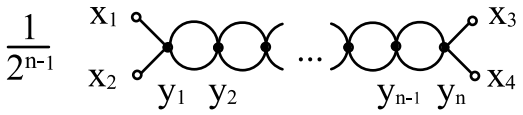
$$(y_1^2 y_2^4 y_3^4) = 4 \cdot 2\,(y_1 y_2)\,(y_1 y_2^3 y_3^4) + \ldots = 8 \cdot 4\,(y_1 y_2)\,(y_1 y_3)(y_2^3 y_3^3) + \ldots$$

Осталось найти

$$(y_2^3 y_3^3) = 2(y_2 y_2)(y_2 y_3^3) + 3\,(y_2 y_3)\,(y_2^2 y_3^2) = 9\,(y_2 y_2)\,(y_3 y_3)\,(y_2 y_3) + \ldots,$$

где снова оставлены только спаривания, соответствующие диаграмме, т.е. $y_2$ должно спариться с $y_3$ только один раз, так как эти вершины соединены только одним ребром. Собирая все множители вместе и деля их на общий числовой фактор, возникающий в третьем порядке по теории возмущений, получаем $10368/(4!^3\,3!) = 1/8$.

Этим же методом можно иногда получать симметрийные множители в произвольном порядке по теории возмущений для диаграмм, имеющих повторяющиеся блоки. Рассмотрим в $n$-том порядке по теории возмущений диаграмму следующего вида:




Она содержит $n$ вершин, соединяющих между собой циклы в длинную цепочку. Симметрийный коэффициент (с *подписанными* внешними линиями) при этой диаграмме равен $1/2^{n-1}$.

Для доказательства этого начнём проводить спаривания с внешними линиями, учитывая, только *связные* диаграммы. Проведём первое спаривание $x_1$:

$$(x_1x_2x_3x_4\,y_1^4...y_n^4) = 4\,n\,(x_1y_1)\,(x_2x_3x_4\,y_1^3y_2^4...y_n^4).$$

Так как по $y_i$ проводится интегрирование, $x_1$ спаривается с каждым $y_i$ (их $n$ штук) и при каждом таком спаривании четвёртая степень даёт множитель 4. Мы хотим получить диаграмму, в которой линия $x_2$ связана с линией $x_1$ в одной вершине (это $y_1$), поэтому из всех возможных спариваний $x_2$ учитываем только спаривания с $y_1$:

$$= 4\,n\cdot 3\,(x_1y_1)\,(x_2y_1)\,(x_3x_4y_1^2y_2^4...y_n^4) + ...,$$

где многоточием обозначены оставшиеся спаривания. Далее, $x_3$ не должно спариваться с $y_1$, так как она не связана с этой вершиной. Поэтому спарим её только с $y_2^4...y_n^4$:

$$= 12\,n\cdot 4\,(n-1)\,(x_1y_1)\,(x_2y_1)\,(x_3y_n)\,(x_4\,y_1^2y_2^4...y_{n-1}^4y_n^3) + ...$$

Осталось спарить $x_4$ и только с $y_n$ в вершине которой, она соединяется с линией $x_3$:

$$= 48\cdot 3\,n\,(n-1)\,(x_1y_1)\,(x_2y_1)\,(x_3y_n)\,(x_4y_n)\,(y_1^2y_2^4...y_{n-1}^4y_n^2) + ...$$

Оставшееся среднее в котором стоит $n-2$ операторов в четвёртой степени и два во второй, вычислим рекурсивным образом. Спарим $y_1$ (не затрагивая $y_n$, с которым он в диаграмме не связан):

$$\begin{aligned}(y_1^2\,y_2^4...y_{n-1}^4\,y_n^2) &= 4\,(n-2)\,(y_1y_2)\,(y_1\,y_2^3y_3^4...y_{n-1}^4\,y_n^2) + ...\\ &= 4\cdot 3\,(n-2)\,(y_1y_2)^2\,(y_2^2\,y_3^4...y_{n-1}^4\,y_n^2) + ...\end{aligned}$$

В результате получилось выражение аналогичное исходному, но содержащее на один оператор в четвёртой степени меньше. Так как $4\cdot 3 = 12 = 4!/2$, продолжая, рекурсивно, получаем:

$$= \frac{4!^{n-2}}{2^{n-2}}\,(n-2)!\,(y_1y_2)^2(y_2y_3)^2\,...\,(y_{n-2}y_{n-1})^2(y_{n-1}^2y_n^2)^2 + ...$$

Последнее среднее $(y_{n-1}^2y_n^2) = 2(y_{n-1}y_n)^2 + ...$ даёт ещё один множитель 2. Таким образом:

$$(x_1x_2x_3x_4\,y_1^4...y_n^4) = \frac{4!^n n!}{2^{n-1}}\,(x_1y_1)\,(x_2y_1)\,(y_1y_2)^2...(y_{n-1}y_n)^2(x_3y_n)\,(x_4y_n) + ...$$

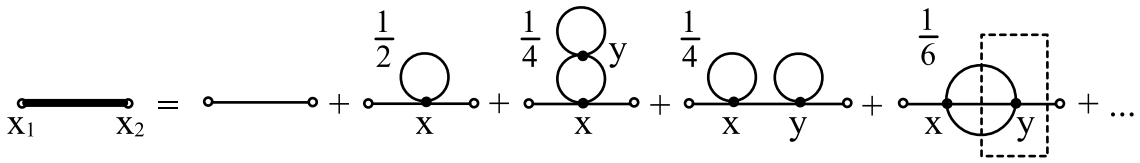
Числитель $4!^n\,n!$ сокращается со знаменателем в разложении экспоненты, поэтому числовой множитель при диаграмме равен $1/2^{n-1}$.

## 6 Топология диаграмм

Диаграмма Фейнмана в координатном представлении является неориентированным графом, который состоит из вершин, внешних линий и рёбер. Вершины мы обозначаем чёрными кружками. Диаграмма, соответствующая $V$-тому порядку теории возмущений содержит $V$ вершин. В $\varphi^4$-теории в каждую вершину всегда входит 4 линии. Они могут быть одной из $N$ внешних линий (связанных с аргументами функций Грина) либо одной из $R$ внутренних рёбер (соединяющих вершины). Внутреннее ребро может соединять две различные вершины или дважды входить в одну вершину. Поэтому

$$4V = N + 2R. \tag{5.35}$$

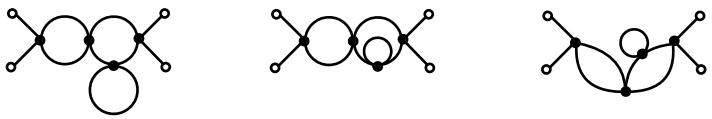
Если ребро входит и выходит из вершины, оно образует простую петлю. Например, двухточечная функция Грина на третей диаграмме после равенства, содержит два кольца:




При этом верхнее является простой петлёй. Нижнее кольцо содержит два ребра. Вторая и четвёртые диаграммы также имеют простые петли.

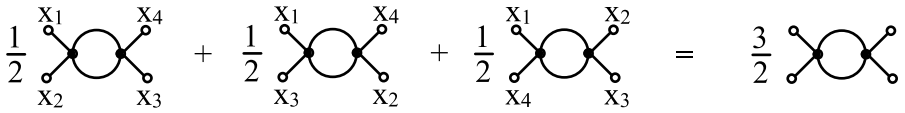
Число внешних линий всегда чётно. Это же справедливо и для любого подграфа, выделенного в диаграмме (см. пунктирный прямоугольник на последней диаграмме верхнего рисунка).

В координатном представлении по координатам, связанными с вершинами ведётся интегрирование. Переменные интегрирования можно переименовывать, поэтому при рисовании диаграмм мы будем их опускать, помня, что все они различны. Диаграмму, соответствующую данному члену разложения по теории возмущений, можно нарисовать различным образом. Например, ниже все три диаграммы из разложения четырёхточечной функции топологически эквиваленты (говорят, также что они *изоморфны*):

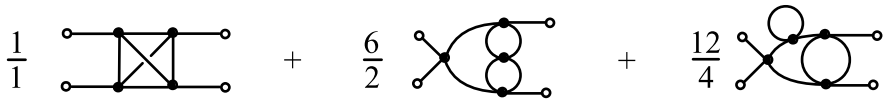


Это означает, что деформируя (без разрывов) их можно сделать одинаковыми. Мы рисуем диаграммы на плоскости, но, на самом деле, это топологический объект (важно только роль только то, что с чем связано), поэтому диаграмму можно выворачивать наизнанку и делать с ней любые другие надругательства, не меняющие её топологии.

Обычно, чтобы не загромождать рисунок внешние линии не подписываются. При этом необходимо помнить, что функция Грина является симметричной, поэтому при переходе от диаграммы к аналитическим выражениям, необходимо должным образом учесть все возможные перестановки внешних линий. Например, связная четырёхточечная функция во втором порядке по теории возмущений имеет три диаграммы:




Так как они отличаются только подписями у внешних линий, мы будем изображать их одной диаграммой, ставя у неё дополнительный множитель 3 (такие множители всегда будут стоять в числителе!). Приведём несколько диаграмм четвертого порядка по теории возмущений:



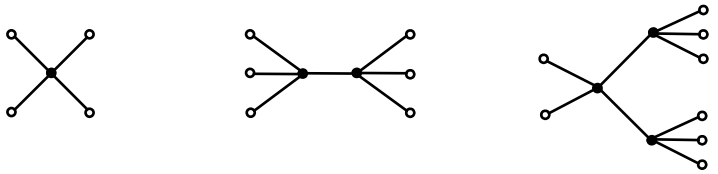

Первая диаграмма получилась *непланарной*, т.е. её нельзя изобразить в плоскости без пересечения линий. Поэтому одна диагональная линии разорвана (она как-бы находится под другой диагональю), чтобы подчеркнуть, что там нет пересечения. В этой диаграмме, каждая внешняя линия, через одиночные рёбра соединена со всеми остальными внешними линиями. Поэтому любые подписи координат $x_i$ на внешних линиях будут топологически эквивалентны и множитель в числителе равен 1. В этом смысле эта диаграмма аналогична диаграмме в первом порядке по теории возмущений, в котором все четыре внешние линии сходятся в одной вершине (крестик).

В левой вершине второй диаграммы сходятся две внешние линии. Это могут быть $x_1x_2$, $x_1x_3$, $x_1x_4$, $x_2x_3$, $x_2x_4$, $x_3x_4$. Правые две внешние линии могут быть подписаны парой оставшихся координат в любом порядке, так как существует осевая симметрия. В результате, в числителе мы имеем множитель 6. Иная ситуация с третьей диаграммой. В левой вершине снова сходится две линии и возможно 6 различных их комбинаций. Однако, так как осевой симметрии уже нет, для каждой из шести возможностей, необходимо учесть два варианта подписывания правых внешних линий. В результате, множитель в числителе равен $12 = 6 \cdot 2$.

Числа в знаменателях называют внутренними симметрийными коэффициентами. Они равны отношению фактора $4!^V\, V!$, возникающего в $V$-том порядке по теории возмущений, делённого на число всех топологически эквивалентных диаграмм.

• Диаграммы могут быть *связными* и *несвязными*. Несвязная диаграмма разбивается на несколько независимых графов. В теории возмущений такой диаграмме соответствует слагаемое, равное произведению всех несвязных графов. Многие несвязные диаграммы сокращаются при делении в формуле (5.13), стр. 111 на вакуумное среднее $\langle S \rangle$. Однако, часть несвязных диаграмм возникает при прямом спаривании внешних линий в функциях Грина. Это достаточно "тривиальная" несвязность, которую мы далее выделим, введя понятие вершинных функций.

*Древесными графами* называются диаграммы не содержащие замкнутых путей. Несколько примеров приведено ниже на рисунке:

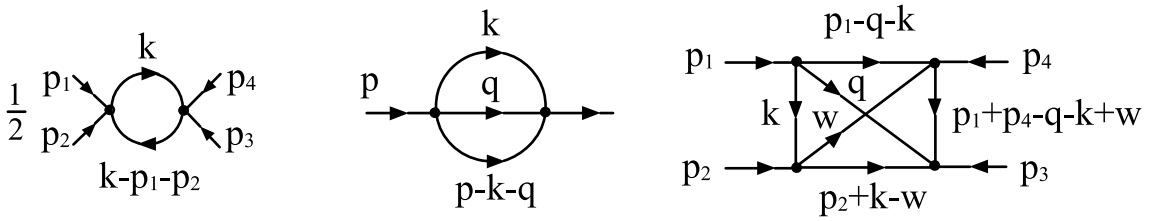


Путешествуя по такому графу нельзя заблудиться, попав в бесконечный цикл. Из любой внешней вершины (белый кружок) за конечное число шагов мы можем однозначным образом попасть в любую другую вершину (для связных графов). Так как циклы в такой диаграмме отсутствуют, в импульсном представлении она сводится к произведению пропагаторов без каких либо интегралов (значение импульсов на всех внутренних линиях однозначно фиксируется законом сохранения).

В недревесных диаграммах есть интегралы по внутренним импульсам. Подсчитать их число $L$ можно по следующей формуле:

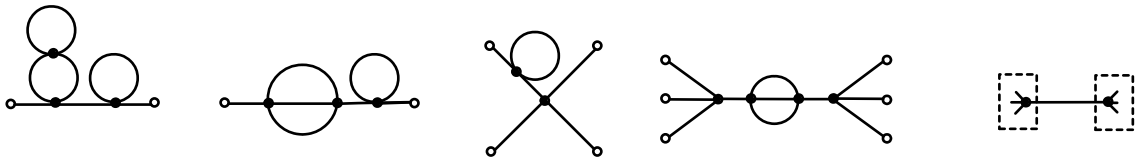
$$L \;=\; R - V + 1 = V + 1 - \frac{N}{2}, \tag{5.36}$$

где число внутренних линий ($R$) – это число импульсов из которого мы вычитаем число связей (уравнений), возникающих по закону сохранения в каждой вершине ($V$). Число связей необходимо на одну уменьшить, в силу общего закона сохранения $\mathrm{p}_1 + \ldots + \mathrm{p}_N = 0$ для всей диаграммы. Во втором равенстве подставлена связь (5.35).




Например, выше первая диаграмма определяется одним интегралом, вторая – двумя, а третья – тремя. Чем выше порядок по теории возмущений (число вершин $V$), тем больше будет интегралов.

• Древесная диаграмма может быть разделена на две несвязные части, разрезанием одной внутренней линии (ребра). Такие диаграммы называются *некомпактными* или *одночастично приводимыми*. Подобным свойством могут обладать не только древесные диаграммы:



В 2-точных функциях Грина компактных диаграмм достаточно много. В 4-точечных функциях они возможны только на внешних линиях, которые могут быть отрезаны от всей диаграммы. В 6-точечной функции возможно более нетривиальное "внутреннее" расположение линии, по которой можно разделить диаграмму.

Некомпактные диаграммы в импульсном представлении равны произведению пропагатора (который мы разрезаем) на два множителя, соответствующих получившимся после разрезания диаграммам. При этом, по импульсу разрезанного пропагатора интегрирование не ведётся (он однозначно фиксирован). Поэтому достаточно разобраться только с *компактными* диаграммами, которые нельзя разделить, разрезав одну линию. Некомпактные диаграммы получаются из них при помощи простых перемножений.

В $V$-том порядке по теории возмущений $N$-точечная функция Грина имеет много диаграмм. Если $N$ большое, что их *очень* много. Поправка $(\mathrm{x}_1 ... \mathrm{x}_N \, \mathrm{y}_1^4 ... \mathrm{y}_V^4)$ теории возмущений содержит $k = N + 4V$ сомножителей. Поэтому возможно $(k-1)(k-3)(k-5)...1$ спариваний. Ниже в таблице в строчке "всего" для двух- и четырёхточечных функций приведен порядок этого числа в первых пяти поправках теории возмущений:

| | $\mathrm{G}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$ | | | | $\mathrm{G}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4)$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v =$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| всего | $10^3$ | $10^5$ | $10^7$ | $10^{10}$ | $10^4$ | $10^6$ | $10^9$ | $10^{11}$ |
| эконом | 10 | 64 | 496 | 4512 | 57 | 408 | 3496 | 34995 |
| различных | 3 | 8 | 30 | 118 | 2 | 8 | 37 | 181 |
| 1ЧН | 2 | 5 | 17 | 68 | 1 | 3 | 14 | 64 |

В следующей строчке дано число диаграмм при более их экономичном перечислении, подобно тому, как это делалось в предыдущей главе. Затем приведено сколько из них оказывается связных и топологически различных. Наконец, в последней строчке приведено количество одночастично неприводимых диаграмм.

# Глава 6

# Вершинные функции

Диаграммы Фейнмана являются очень наглядным инструментом изображения различных поправок по теории возмущений. В этой главе мы рассмотрим общие свойства диаграмм и проведём суммирование некоторого подмножества диаграмм во всех порядках теории возмущений. Будет введены новые функции – собственной энергии, вершин и цепей, которые содержат в себе наиболее значимые особенности функций Грина. В конце главы выводится точные уравнения Дайсона, связывающие между собой различные функции Грина.

---

**Квантовый мир**

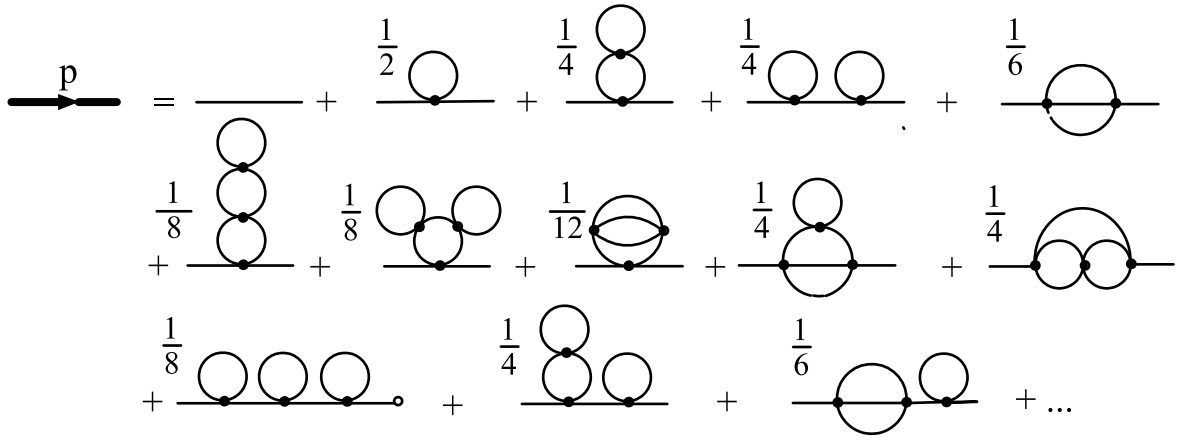
**Сергей С. Степанов**

Эта книга находится в процессе создания. Её последняя версия и другие материалы находятся на сайте: http://synset.com. Там же можно найти первый том: **I. Механика**
Замеченные ошибки и вопросы просьба присылать по адресу: steps137, затем собачка и gmail.com.

(c) 2015. Печать: 2 июля 2017 г.

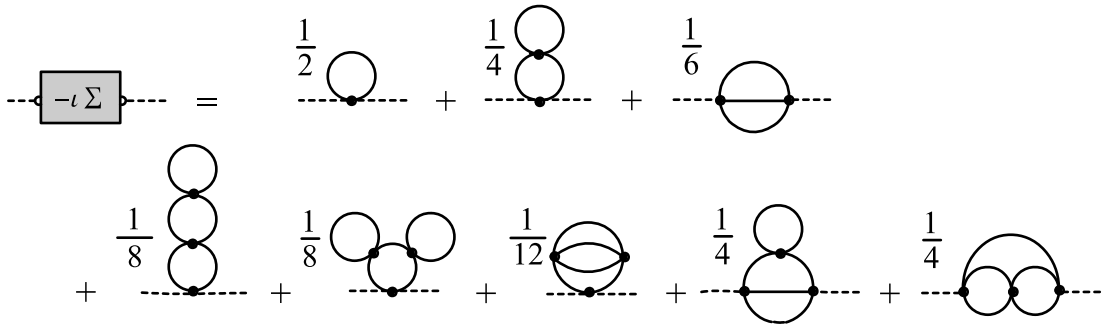
## 1 Функция собственной энергии

Рассмотрим 2-точечную функцию Грина G(p), которая также называется точным пропагатором. Нарисуем в импульсном представлении с точностью до $\lambda^3$ все диаграммы, дающие вклад в эту функцию (стрелки импульсов не рисуем):



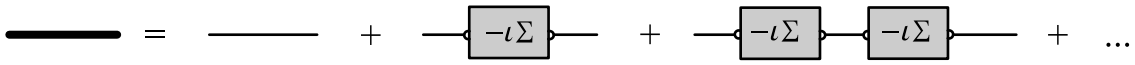

Этот ряд содержит как компактные, так и некомпактные диаграммы. Так, некомпактными (одночастично приводимыми) диаграммами является предпоследняя диаграмма в первой строке и все диаграммы из нижней строки. Остальные диаграммы не могут быть разбиты на две несвязные части, разрезанием внутренней линии, поэтому они являются компактными. Мы говорим о внутренней линии, так внешние можно "обрезать" до бесконечности. Когда внутренняя линия разрезана, она становится концами двух внешних линий и процесс разрезаний оканчивается. Выделение компактных диаграмм позволяет эффективно просуммировать часть бесконечного разложения по теории возмущений.

Обозначим все компактные диаграммы (кроме пропагатора) *без внешних линий* как $-\imath\Sigma(\mathrm{p})$ или графически в виде заштрихованного прямоугольника:




Прозрачными точками, прижатыми к прямоугольнику обрзначены "входы" для внешних линий, которые наривованы пунктиром. Вместо этих пунктиров в дальнешем будут нарисованы линии, т.е. добавлен множитель $D(\mathrm{p})D(\mathrm{p})$.

При помощи этого обозначения запишем точную функцию Грина (обозначенную жирной линией) как сумму диаграмм:




Коэффициенты при подобным образом сгруппированных диаграммах *одинаковы*. Несложно проверить что, с точностью до $\lambda^3$ это действительно так. Например, четвёртая диаграмма с двумя петлями после равенства на верхнем рисунке предыдущей страницы имеет числовой множитель 1/4. Вторая диаграмма после равенства (с одной петлёй) имеет коэффициент 1/2. Она включена в определение $-\imath\Sigma(\mathrm{p})$ и произведение двух петель даёт множитель 1/4. Можно доказать, что это же будет выполняться в любом порядке по теории возмущений.

Запишем сумму диаграмм G в аналитическом виде:

$$D+D\,(-\imath\Sigma)\,D+D\,(-\imath\Sigma)\,D\,(-\imath\Sigma)\,D+\ldots = D\,\{1-\imath\Sigma(D+D\,(-\imath\Sigma)\,D+\ldots)\}.$$

Ряд в круглых скобках снова равняется G, т.е.: или

$$\mathrm{G} = D\,\{1-\imath\Sigma\mathrm{G}\} \qquad => \qquad \mathrm{G} = \frac{D}{1+\imath D\Sigma}.$$

Подставляя явный вид пропагатора $D(\mathrm{p}) = \imath/(\mathrm{p}^2 - m^2 + \imath\epsilon)$, получаем:

$$\mathrm{G}(\mathrm{p}) = \frac{\imath}{\mathrm{p}^2 - m^2 - \Sigma(\mathrm{p}) + \imath\epsilon}. \tag{6.1}$$

Это выражение похоже на пропагатор свободной частицы у которой получилась модифицированная масса $m^2 \mapsto m^2 + \Sigma(\mathrm{p})$. Поэтому $\Sigma(\mathrm{p})$ называют *функцией собственной энергии* частицы. Собственная энергия содержит бесконечное число слагаемых, получаемых по теории возмущений и содержащих только компактные диаграммы. Все остальные диаграммы (их также бесконечно много) эффективно просуммированы в точном пропагаторе (6.1).

С точностью до $\lambda^2$ по теории возмущения собственная энергия равна следующему выражению

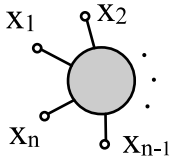
$$\Sigma(\mathrm{p}) = \frac{\lambda}{2}\,\Delta_1 + \frac{\lambda^2}{4}\,\Delta_1\Delta_2 - \frac{\imath\lambda^2}{6}\int D_\mathrm{k}\,D_\mathrm{q}\,D_{\mathrm{p}-\mathrm{k}-\mathrm{q}}\,\frac{d^4\mathrm{k}\,d^4\mathrm{q}}{(2\pi)^8}, \tag{6.2}$$

где константы $\Delta_n$ являются интегралами от $\imath/(\mathrm{p}^2-m^2+\imath\epsilon)^n$ по $d^4\mathrm{p}/(2\pi)^4$, т.е. $\Delta_1$ – это петля с одной точкой, а $\imath\Delta_2$ – петля с двумя точками. Из соображений ковариантности, $\Sigma(\mathrm{p})$ является скалярной функцией. Так как других 4-векторов кроме p в её определении нет, она зависит от $\mathrm{p}^2$.

## 2 Вершинные функции

- В общем случае $n$-точечная функция Грина:

$$\mathrm{G}(\mathrm{x}_1,...,\mathrm{x}_n) \;=\; \big\langle 0|\mathrm{T}\{\varphi_1...\varphi_n\}|0\big\rangle \;=$$




равна сумме связных и несвязных диаграмм. Для *связных* диаграмм фурье-образ $n$-точечной точной функции Грина равен, см. (5.32), стр. 122:

$$(2\pi)^4\,\delta(\mathrm{p}_1{+}...{+}\mathrm{p}_n)\,\mathrm{G}(\mathrm{p}_1,...,\mathrm{p}_n) = \int \mathrm{G}(\mathrm{x}_1,...,\mathrm{x}_n)\,e^{i\,(\mathrm{x}_1\mathrm{p}_1+...+\mathrm{x}_n\mathrm{p}_n)}\,d^4\mathrm{x}_1...d^4\mathrm{x}_n.$$

Так как в каждом слагаемом при разложении по теории возмущений у $n$-точечной функции появляется произведение $n$ пропагаторов внешних линий, удобно ввести *усечённую функцию Грина*:

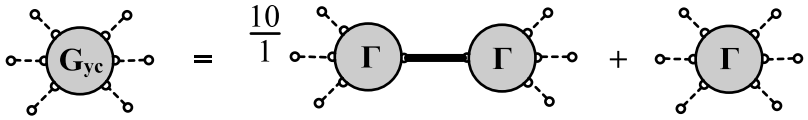
$$\mathrm{G}_{\text{ус}}(\mathrm{p}_1,...,\mathrm{p}_n) = \frac{\mathrm{G}_{\text{связ}}(\mathrm{p}_1,...,\mathrm{p}_n)}{\mathrm{G}(\mathrm{p}_1)\cdot...\cdot\mathrm{G}(\mathrm{p}_n)}. \tag{6.3}$$

В числителе определения стоят только вклады, соответствующие *связным* диаграммам, что помечено индексом “связ”. В знаменателе стоят *точные* двухточечные пропагаторы, которые возникают при “одевании” внешних линий диаграммы дополнительными петлями при разложении по теории возмущений.

*Вершинной функцией* $\Gamma^{(n)}(\mathrm{p}_1,...,\mathrm{p}_n)$ называют компактные, усечённые функции Грина, т.е. диаграммы, которых нельзя разбить на несвязные части разрезанием *одной* внутренней линии. Диаграммы для 4-точечной функции Грина в $\varphi^4$-теории всегда компактны, поэтому:

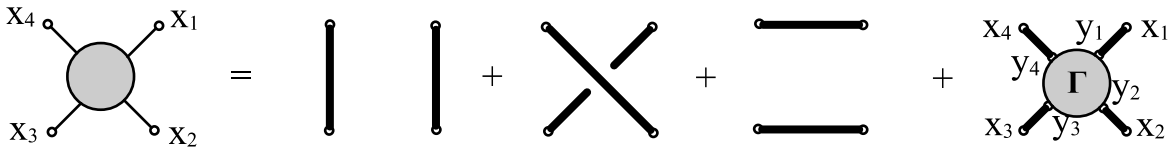
$$\Gamma^{(4)}(\mathrm{p}_1,...,\mathrm{p}_4) = \mathrm{G}_{\text{ус}}(\mathrm{p}_1,...,\mathrm{p}_4). \tag{6.4}$$

Шеститочечные диаграммы могут быть некомпактными. Поэтому усечённая шеститочечная функция Грина выражается через вершинные функции с 4-я и 6-тью аргументами:




Пунктирными линиями изображены “отрезанные” внешние пропагаторы, а жирная линия, соединяющая две вершинных 4-функций, как обычно, означает точный пропагатор. Коэффициент 10 отражает, что возможно 10 топологически неэквивалентных подписей импульсов у внешних линий.

• В импульсном представлении у связных и несвязных диаграмм структура множителей с $\delta$-функциями различна. Поэтому рассмотрим сначала координатное представление. Четырёхточечная функция $G(x_1, ..., x_4)$ в нём описывается такими диаграммами:




Фурье-образ вершинной функции определяем следующим образом:

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(k_1, ..., k_4) = \int \Gamma^{(4)}(y_1, ..., y_4)\, e^{\imath(k_1y_1+...+k_4y_4)}\, d^4y_1...d^4y_4, \qquad (6.5)$$

а обратное преобразование равно:

$$\Gamma^{(4)}(y_1, ..., y_4) = \int \tilde{\Gamma}^{(4)}(k_1, ..., k_4)\, e^{-\imath(k_1y_1+...+k_4y_4)}\, \frac{d^4k_1...d^4k_4}{(2\pi)^{16}}. \qquad (6.6)$$

Так как вершинная функция состоит только из связных диаграмм, аналогично функции Грина, выделим в ней функцию Дирака от суммы внешних импульсов:

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(k_1, ..., k_4) = (2\pi)^4\delta(k_1 + ... + k_4)\, \Gamma^{(4)}(k_1, ..., k_4). \qquad (6.7)$$

Запишем импульсное представление для последней (вершинной) диаграммы в $G(x_1, ..., x_4)$. Она имеет 4 внешних линий, соединённых с вершинной функцией точками в которых подразумевается интегрирование, поэтому эта диаграмма равна

$$\int G_{x_1y_1}G_{x_2y_2}G_{x_3y_3}G_{x_4y_4}\, \Gamma^{(4)}(y_1, ..., y_4)\, d^4y_1...d^4y_4.$$

Подставляя фурье-преобразования для двухточечных функций Грина, интегралы (6.6), умножая на $e^{\imath\,(x_1p_1+...+x_4p_4)}$ и интегрируя по $d^4x_1...d^4x_4$, получаем:

$$(2\pi)^4\,\delta(p_1 + ... + p_4)\, G_{p_1}...G_{p_4}\, \Gamma^{(4)}(p_1, ..., p_4).$$

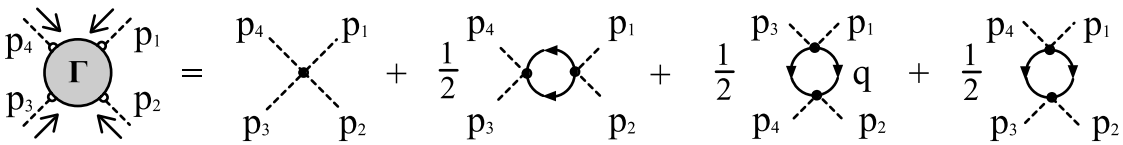
Фурье-образ всех четырёх диаграмм имеет следующий вид:

$$\tilde{G}(p_1, ..., p_4) = (2\pi)^8\,\delta(p_1 + p_2)\,\delta(p_3 + p_4)\, G_{p_1}G_{p_3} + ...$$

$$(2\pi)^4\,\delta(p_1 + ... + p_4)\, G_{p_1}...G_{p_4}\, \Gamma^{(4)}(p_1, ..., p_4),$$

где многоточием помечены еще два слагаемых с перестановкой индексов у импульсов $(1234) \mapsto (1324)$ и $(1234) \mapsto (1423)$.

• Запишем четырёхточечную вершинную функцию $\Gamma^{(4)}(\mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_4)$ во втором порядке по теории возмущений:




Пунктиром помечены *входящие* импульсы, на место которых необходимо присоединить точные пропагаторы. Аналитическое выражение четырёхточечной вершинной функции ($\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 + \mathrm{p}_3 + \mathrm{p}_4 = 0$) с точностью до $\lambda^2$ имеет вид:

$$\Gamma^{(4)}(\mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_4) = -\imath\lambda\Big[1 + \Lambda(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2) + \Lambda(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_3) + \Lambda(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_4)\Big],$$

где три последние диаграммы определяются одной функцией:

$$\Lambda(\mathrm{p}) = \frac{-\imath\lambda}{2} \int D(\mathrm{k}) D(\mathrm{p} - \mathrm{k}) \frac{d^4\mathrm{k}}{(2\pi)^4}. \tag{6.8}$$

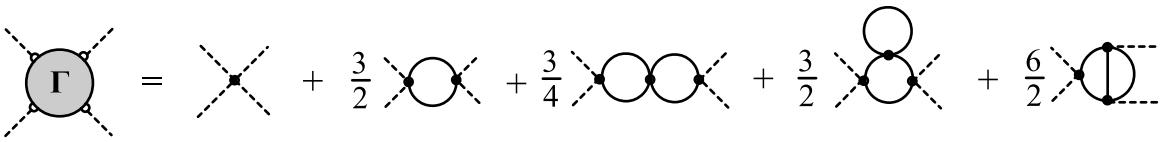
В силу релятивистской ковариантности она зависит от $\mathrm{p}^2$, а вершинная функция $\Gamma^{(4)}(\mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_4)$ от следующих трех инвариантов импульсов:

$$s = (\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2)^2, \qquad t = (\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_3)^2, \qquad u = (\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_4)^2. \tag{6.9}$$

Умножая закон сохранения $\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_2+\mathrm{p}_3+\mathrm{p}_4 = 0$ на $\mathrm{p}_1$, несложно получить:

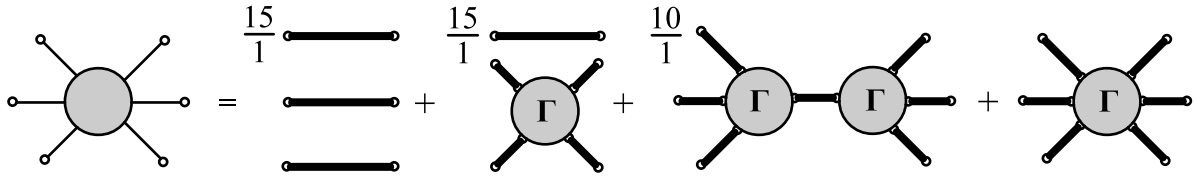
$$s + u + t = \mathrm{p}_1^2 + \mathrm{p}_2^2 + \mathrm{p}_3^2 + \mathrm{p}_4^2. \tag{6.10}$$

В третьем порядке по теории возмущений к этим диаграммам добавятся ещё три:




Напомним, что для записи аналитических выражений, соответствующих этим диаграммам, необходимо симметризовать входящие импульсы (вершинная функция симметрична). Поэтому, вторая, третья и четвёртая диаграммы должны замениться на три с различными значениями импульсов $\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2$, $\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_3$ и $\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_4$. Это отражают множители 3 при диаграммах. Пятая диаграмма имеет 6 возможных входящих слева импульсов $\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_2$, $\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_3$, $\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_4$, $\mathrm{p}_2+\mathrm{p}_3$, $\mathrm{p}_2+\mathrm{p}_4$, $\mathrm{p}_3+\mathrm{p}_4$. Заметим, что в третьем порядке есть ещё три диаграммы, но они сводятся к вершинной функции в первом порядке по теории возмущений, в которой одна внешняя линия “одета” в точный пропагатор. Эти диаграммы мы не учитываем, так как четырёхточечная функция Грина в определении вершинной функция делится на точные пропагаторы.

• Шеститочечная функция Грина $G(x_1, ..., x_6)$ определяется точным пропагатором, четырёхточечной и шеститочечной вершинными функциями:




Для трёх несвязных пропагаторов возможно $15 = 5 \cdot 3$ различных разметок внешних концов, и столько же с одним пропагатором и четырёхточечной вершинной функцией. В последней диаграмме собраны только связные *одночастично неприводимые* диаграммы Фейнмана. Фурье-образ такой шеститочечной функции Грина имеет вид:

$$\tilde{G}(p_1, ..., p_6) = (2\pi)^{12}\,\delta(p_1 + p_2)\,\delta(p_3 + p_4)\,\delta(p_5 + p_6)\,G_{p_1}G_{p_3}G_{p_5} + ...$$

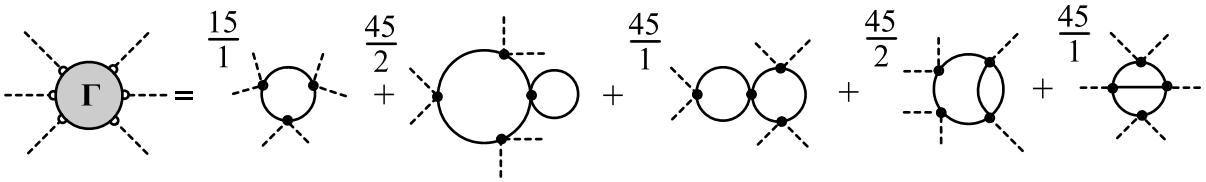
$$+(2\pi)^8\,\delta(p_1 + p_2)\,\delta(p_3 + ... + p_6)\,G_{p_1}\,G_{p_3}\,...\,G_{p_6}\,\Gamma^{(4)}(p_3, ..., p_6) + ...$$

$$+(2\pi)^4\,\delta(p_1 + ... + p_6)\,G_{p_1}\,...\,G_{p_6}\,\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p)\,G_p\,\Gamma^{(4)}(p, p_4, p_5, p_6) + ...$$

$$+(2\pi)^4\,\delta(p_1 + ... + p_6)\,G_{p_1}\,...\,G_{p_6}\,\Gamma^{(6)}(p_1, ..., p_6).$$

В третьей строке приведено произведение одной из 10 диаграмм с произведением вершинных 4-функций и $p = p_1 + p_2 + p_3$. Шеститочечная вершинная функция находится в последней строчке. Она умножается (кроме пропагаторов) на функцию Дирака от суммы всех шести 4-импульсов от которых зависит эта вершинная функция (закон сохранения).

В первом и во втором порядках по $\lambda$ шеститочечная вершинная функция равна нулю. В третьем порядке она имеет одну диаграмму, а в четвёртом ещё четыре (импульсное представление):

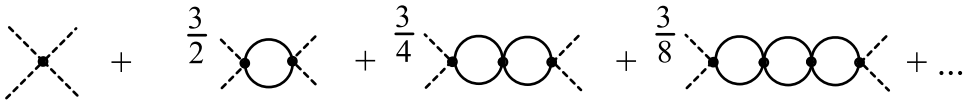



В этом приближении усечённая 6-функция Грина содержит 17 диаграмм, из которых 12 группируются в произведение двух 4-вершинных функций, соединённых точным пропагатором. Таким образом, выделение вершинных функций существенно упрощает вычисления по теории возмущений.

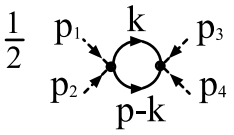
## 3 Суммирование циклов *

Определяя собственную функцию энергии, мы просуммировали бесконечное подмножество одночастично неприводимых диаграмм. Подобное суммирование можно провести и для 4-вершинной функции.

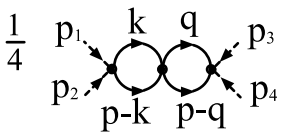
Просуммируем *все* диаграммы, состоящие из связанных между собой циклов, добавив к ним вершину первого приближения по теории возмущений (работаем в импульсном представлении):




Коэффициент 3 указывает на необходимость симметризовать выражение по входящим импульсам, т.е положить для входящих слева в диаграмму импульсов $\mathrm{p} = \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2$, $\mathrm{p} = \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_3$ и $\mathrm{p} = \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_4$. Рассмотрим диаграммы с одним циклом (стр. 136) и двумя ($\mathrm{p} = \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2$):




$$= (-\imath\lambda)\,\Lambda(\mathrm{p}),$$




$$= (-\imath\lambda)\,\Lambda^2(\mathrm{p}).$$

Благодаря тому, что виртуальные импульсы интегрирования между собой не связаны, диаграмма с двумя циклами полностью определяется диаграммой с одним циклом:

$$\frac{(-\imath\lambda)^3}{4}\int\frac{d^4\mathrm{k}}{(2\pi)^4}\,\frac{\imath}{\mathrm{k}^2-m^2}\,\frac{\imath}{(\mathrm{p}-\mathrm{k})^2-m^2}\int\frac{d^4\mathrm{q}}{(2\pi)^4}\,\frac{\imath}{\mathrm{q}^2-m^2}\,\frac{\imath}{(\mathrm{p}-\mathrm{q})^2-m^2}.$$

Аналогично, диаграмма с тремя циклами равна $(-\imath\lambda)\Lambda^3(\mathrm{p})$ и т.д.

Теперь несложно записать результат суммирования всех циклов:

$$(-\imath\lambda)\,\Lambda(\mathrm{p}) + (-\imath\lambda)\,\Lambda^2(\mathrm{p}) + (-\imath\lambda)\,\Lambda^3(\mathrm{p}) + \ldots = \frac{-\imath\lambda\,\Lambda(\mathrm{p})}{1-\Lambda(\mathrm{p})}.$$

Добавим к этому выражению первое приближение $(-\imath\lambda)$ и симметризуем входящие импульсы:

$$\Gamma^{(4)}(s,t,u) = -\imath\lambda\left[1 + \frac{\Lambda(s)}{1-\Lambda(s)} + \frac{\Lambda(t)}{1-\Lambda(t)} + \frac{\Lambda(u)}{1-\Lambda(u)}\right]. \qquad (6.11)$$

В отличие от точного пропагатора, выраженного через функцию собственной энергии, это выражение не является точным, так как мы просуммировали не все возможные диаграммы, а только те из них, которые содержали "произведение" циклов. Тем не менее, можно надеяться, что (6.11) точное аппроксимирует точную четырёхточечную вершинную функцию, чем только диаграммы до второго порядка по $\lambda$, которые определяют $\Lambda(s)$.

Есть ещё одна тонкость, связанная с зависимостью четырёхточечной вершинной функции от инвариантов $s, t, u$. Пока мы рассматриваем класс симметричных диаграмм, в которых пары внешних линий соединяются в одних вершинах, $\Gamma^{(4)}(\mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_4)$ одинаково зависит от трех комбинаций импульсов $\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2$, $\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_3$, $\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_4$. Из одного 4-импульса возможно построить только один инвариант, поэтому возникает зависимость от трёх инвариантов $s, t, u$. Однако, ситуация меняется при рассмотрении диаграмм типа

В первой диаграмме, правые линии могут быть помечены как $(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)$, $(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_3)$, $(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_4)$, $(\mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3)$, $(\mathrm{p}_2, \mathrm{p}_4)$, $(\mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4)$ в любом порядке (диаграмма обладает осевой симметрией). Оставшиеся два импульса входят в одну вершину слева. Поэтому эта диаграмма (их на самом деле 6) определяется функцией двух аргументов:

$$F(\mathrm{p}_3 + \mathrm{p}_4,\, \mathrm{p}_1) + F(\mathrm{p}_2 + \mathrm{p}_4,\, \mathrm{p}_1) + F(\mathrm{p}_2 + \mathrm{p}_3,\, \mathrm{p}_1)$$

$$+F(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_4,\, \mathrm{p}_2) + F(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_3,\, \mathrm{p}_2) + F(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2,\, \mathrm{p}_3).$$

Двенадцать диаграмм второго типа уже определяются функцией, зависящей от трёх импульсов $K(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2,\, \mathrm{p}_3, \mathrm{p}_4)$ и т.д. Таким образом, не все диаграммы могут быть сведены к сумме $\Lambda(s) + \Lambda(t) + \Lambda(u)$. В общем случае, из четырёх импульсов являются независимыми три (закон сохранения). Из трёх 4-импульсов можно построить 6 инвариантов. Впрочем, если эти импульсы рассматриваются на массовой поверхности ($\mathrm{p}_i^2 = m^2$), как это происходит в случае двухчастичного упругого рассеяния, число независимых инвариантов сокращается до двух.

В симметричных диаграммах с парами импульсов в одной вершине можно выделить блок, содержащий цепочки с циклами, составленными из *точных* пропагаторов:

Тогда многие диаграммы вершинной 4-функции можно выразить на языке этого объекта. В аналитическом виде ряд равен:

$$\mathrm{C}(\mathrm{p}) = \frac{-\imath\,\lambda\,\mathcal{C}(\mathrm{p})}{1 - \mathcal{C}(\mathrm{p})}, \qquad \mathcal{C}(\mathrm{p}) = \frac{-\imath\lambda}{2}\int \mathrm{G}(\mathrm{k})\mathrm{G}(\mathrm{p} - \mathrm{k})\,\frac{d^4\mathrm{k}}{(2\pi)^4}, \qquad (6.12)$$

где $\mathrm{p} = \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2$. Из 19-ти диаграмм до четвёртого порядка теории возмущений включительно, 9 включаются в (6.12).

## 4 Уравнения Дайсона

Функции Грина удовлетворяют бесконечной системе уравнений, которые называют уравнениями Дайсона. Для их вывода напомним (стр. 69), что для скалярного поля справедлива следующая формула:

$$D_{\rm x}^{-1}\,{\rm T}\{\varphi_{\rm x}\,\varphi_1...\varphi_{\rm n}\} \;=\; {\rm T}\{D_{\rm x}^{-1}\,\varphi_{\rm x}\,\varphi_1...\varphi_{\rm n}\} + \sum_{k=1}^{n}\delta_{{\rm x}{\rm x}_k}\,{\rm T}\{\varphi_1...\varphi_{{\rm k}-1}\varphi_{{\rm k}+1}...\varphi_{\rm n}\}, \tag{6.13}$$

где $\varphi_k \equiv \varphi({\rm x}_k)$, $\delta_{{\rm x}{\rm x}_k} \equiv \delta({\rm x}-{\rm x}_k)$ и введен дифференциальный оператор $D_{\rm x}^{-1} = \imath(\partial_{\rm x}^2 + m^2)$, действующий на оператор $\varphi_{\rm x}$. Все операторы здесь и далее взяты в представлении Гейзенберга. Используя уравнения поля (5.3), получаем *уравнения Дайсона в дифференциальной форме* ($\text{Dyson}_{\rm df}$):

$$D_{\rm x}^{-1}\,{\rm T}\{\varphi_{\rm x}\,\varphi_1...\varphi_{\rm n}\} = -\frac{\imath\lambda}{6}\,{\rm T}\{\varphi_{\rm x}^3\,\varphi_1...\varphi_{\rm n}\} + \sum_{k=1}^{n}\delta_{{\rm x}{\rm x}_k}\,{\rm T}\{\varphi_1...\varphi_{{\rm k}-1}\varphi_{{\rm k}+1}...\varphi_{\rm n}\}.$$

Это дифференциальное уравнение (точнее систему уравнений) можно переписать в эквивалентной *интегральной форме* ($\text{Dyson}_{\rm int}$):

$${\rm T}\{\varphi_{\rm x}\,\varphi_1...\varphi_{\rm n}\} = -\frac{\imath\lambda}{6}\int\limits_{\rm w} D_{\rm xw}{\rm T}\{\varphi_{\rm w}^3\,\varphi_1...\varphi_{\rm n}\} + \sum_{k=1}^{n} D_{{\rm x}{\rm x}_{\rm k}}\,{\rm T}\{\varphi_1..\varphi_{{\rm k}-1}\varphi_{{\rm k}+1}..\varphi_{\rm n}\},$$

где для краткости опущен дифференциал интегрирования $d^4{\rm w}$ (интегрирование обозначаем подобно суммированию). Из этого уравнения несложно получить предыдущее уравнение ($\text{Dyson}_{\rm df}$), если учесть, что пропагатор свободной частицы $D_{\rm xy}$ удовлетворяет уравнению:

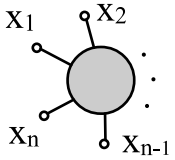
$$D_{\rm x}^{-1}D_{\rm xy} \equiv \imath(\partial_{\rm x}^2 + m^2)D_{\rm xy} = \delta_{\rm xy}. \tag{6.14}$$

Собственно уравнения Дайсона получаются после усреднения уравнения ($\text{Dyson}_{\rm int}$) по вакууму точной теории $|0\rangle$ (хотя, вообще говоря, они справедливы для среднего по любому состоянию).

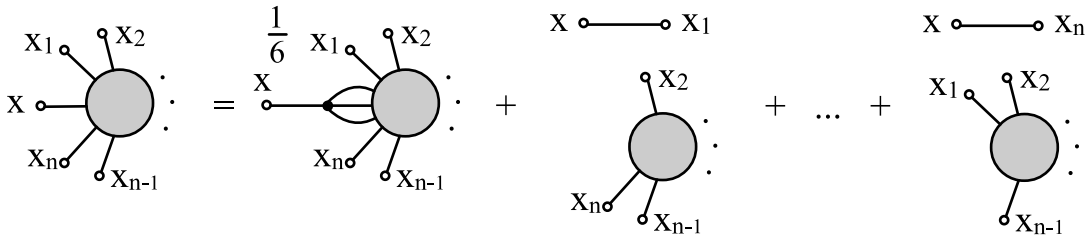
Уравнения ($\text{Dyson}_{\rm int}$) связывают $n+1$-точечную функцию Грина с $n+3$ и $n-1$ функциями. В результате получается бесконечная система "зацепляющихся" друг за друга уравнений. К сожалению, она устроена таким образом, что найдя $n$-точечную функцию мы не можем получить $n+1$-точечную функцию и т.д. Поэтому для решения уравнений Дайсона приходится использовать различные приближённые методы.

• Обозначим точную $n$-точечную функцию Грина в виде круга с $n$ внешними линиями:

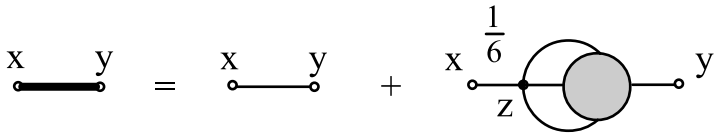
$$\mathrm{G}(\mathrm{x}_1,...,\mathrm{x}_n) \;=\; \langle 0|\mathrm{T}\{\varphi_1...\varphi_n\}|0\rangle \;=$$




Тогда уравнение Дайсона ($\mathrm{Dyson}_{\mathrm{int}}$) можно изобразить следующим образом:




Нарисуем систему Дайсона в виде последовательности уравнений. Первое уравнение ($n = 1$) в левой части содержит 2-точечную функцию Грина, являющуюся точными пропагатором (жирная линия):

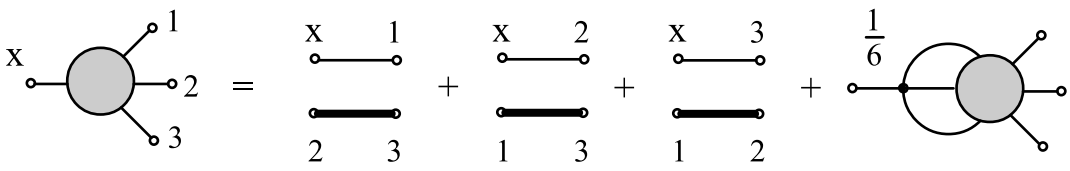



(6.15)

Этот пропагатор выражается через свободный пропагатор (тонкая линия) и 4-точечную функцию Грина, три внешние линии которой собраны в одной точке. В соответствии с правилами Фейнмана в координатном представлении эта точка умножается на $-\imath\lambda$ и в ней проводится интегрирование:

$$\mathrm{G}_{\mathrm{xy}} = D_{\mathrm{xy}} - \frac{\imath\lambda}{6}\int\limits_{\mathrm{z}} D_{\mathrm{xz}}\mathrm{G}(\mathrm{z},\mathrm{z},\mathrm{z},\mathrm{y}). \tag{6.16}$$

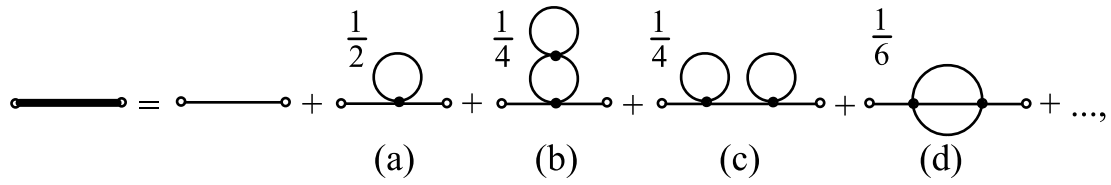
Функции Грина с нечётным числом аргументов равны нулю, поэтому запишем следующее уравнение при $n = 3$. Оно выражает 4-точечную функцию через 6-точечную:



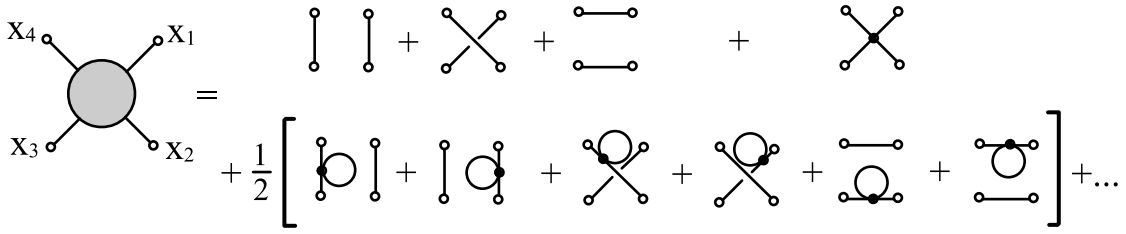

(6.17)

Аналогично рисуются уравнения Дайсона при $n = 5, 7, ....$ В несвязных частях они содержат произведение свободного пропагатора и точной функции Грина порядка $n - 1$.

• Напомним, что с точностью до второго порядка по $\lambda$, 2-точечная функция Грина равна:



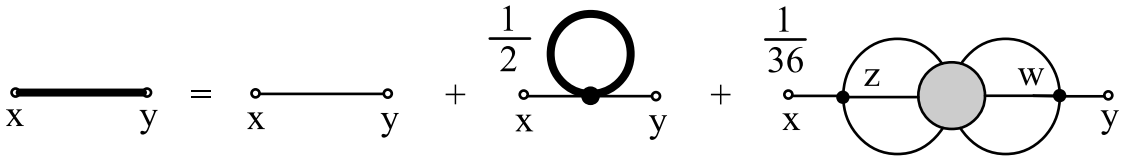

а точная 4-точечная функция в первом порядке:




(справа сохраняется пространственный порядок внешних линий, подписанных слева). Положим в уравнении (6.15) $y = x_1$. На диаграммах 4-точечной функции эта точка всегда находится в правом верхнем углу. Остальные прозрачные точки нужно соединить вместе, закрасить (в них ведётся интегрирование по z) и присоединить линию пропагатора, на свободном конце которого находится x. Первые три диаграммы $G(x_1, ..., x_4)$ свернуться в диаграмму (a) на 2-точечной функции Грина, дав множитель 3. В уравнении Дайсона стоит множитель 1/6, в результате чего получится 1/2, который и присутствует в (a). Последняя диаграмма во первом ряду 4-точечной функции, свернув свои концы приведёт к диаграмме (d). Так как она одна, то множитель при ней останется 1/6. Из оставшихся 6 диаграмм, три без петли на линии, содержащей $x_1 = y$ дадут диаграмму (b), а с петлёй – диаграмму (c).

Таким образом, 4-точечная функция Грина в *первом* порядке по теории возмущений, подставленная в уравнение Дайсона, даёт 2-точечную функцию Грина во *втором* порядке теории возмущений.

Аналогично, графически можно подставить уравнение Дайсона для 4-точечной функции (6.17) в 2-точечную функцию (6.15):




Обратим внимание, что второе слагаемое после равенства похоже на диаграмму для функции Грина $G(x, y)$ в первом порядке по теории возмущений. Однако теперь в петле стоит не пропагатор свободных частиц, а точная функция Грина (жирная линия).

• Естественно, подобные подстановки уравнений друг в друга можно выполнять и аналитически. Например, полагая в ($\mathrm{Dyson_{int}}$) для $n = 3$ $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_3 = \mathrm{z}$, имеем:

$$\big\langle 0|\mathrm{T}\varphi_{\mathrm{y}}\varphi_{\mathrm{z}}^3|0\big\rangle = 3\,D_{\mathrm{yz}}\,\mathrm{G}_{\mathrm{zz}} - \frac{\imath\lambda}{6}\int\limits_{\mathrm{w}} D_{\mathrm{yw}}\,\big\langle 0|\mathrm{T}\varphi_{\mathrm{w}}^3\varphi_{\mathrm{z}}^3|0\big\rangle. \tag{6.18}$$

Подставляя 4-точечную функцию в уравнение Дайсона (6.16), получим:

$$\mathrm{G}_{\mathrm{xy}} = D_{\mathrm{xy}} - \frac{\imath\lambda}{2}\int\limits_{\mathrm{z}} D_{\mathrm{xz}}\,\mathrm{G}_{\mathrm{zz}}\,D_{\mathrm{zy}} + \frac{(-\imath\lambda)^2}{36}\int\limits_{\mathrm{z,w}} D_{\mathrm{xz}}\,\big\langle 0|\mathrm{T}\varphi_{\mathrm{z}}^3\varphi_{\mathrm{w}}^3|0\big\rangle\,D_{\mathrm{wy}},$$

что графически изображено выше. Обратим внимание, что хотя функция G стоит и слева и справа, на самом деле, в петле её аргументы совпадают. Поэтому справа – это только её значение в нуле: $\mathrm{G}(\mathrm{z},\mathrm{z}) = \mathrm{G}(\mathrm{z}{-}\mathrm{z}) = \mathrm{G}(0)$.

• Хотя уравнения Дайсона точные, их можно получить и при помощи теории возмущений. Запишем, например, её $n$-тый член для 2-точечной функции Грина $\mathrm{G}_{\mathrm{xy}} = \big\langle 0|\mathrm{T}\varphi_{\mathrm{x}}\varphi_{\mathrm{y}}|0\big\rangle$:

$$(\mathrm{xy}\,\mathrm{x}_1^4{\ldots}\mathrm{x}_n^4) = (\mathrm{xy})\,(\mathrm{x}_1^4{\ldots}\mathrm{x}_n^4) + 4n\,(\mathrm{x}\mathrm{x}_1)(\mathrm{y}\mathrm{x}_1^3\,\mathrm{x}_2^4{\ldots}\mathrm{x}_n^4), \tag{6.19}$$

где по $\mathrm{x}_i$ подразумевается интегрирование. Умножая на $(-\imath\lambda)^n/4!^n n!$ и суммируя по $n$ от 0 до $\infty$, получаем:

$$\mathrm{G}_{\mathrm{xy}}\,\big\langle S\big\rangle = (\mathrm{xy})\,\big\langle S\big\rangle + 4(\mathrm{x}\mathrm{x}_1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\imath\lambda)^n n}{4!^n\,n!}\,(\mathrm{y}\mathrm{x}_1^3\,\mathrm{x}_2^4{\ldots}\mathrm{x}_n^4), \tag{6.20}$$

где среднее значение оператора эволюции по свободному вакууму равно

$$\big\langle S\big\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\imath\lambda)^n}{4!^n\,n!}(\mathrm{x}_1^4{\ldots}\mathrm{x}_n^4),$$

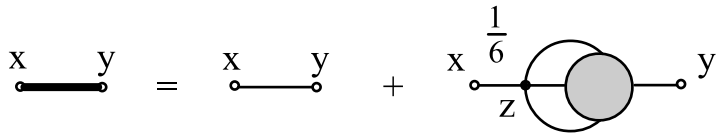
а точная функция Грина по вакууму записана по формуле (5.13). Индекс суммирования в (6.20) начинается с единицы, благодаря множителю $n$, равному нулю при $n = 0$. Перепишем эту сумму следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\imath\lambda)^n\,n}{4!^n\,n!}(\mathrm{y}\mathrm{x}_1^3\,\mathrm{x}_2^4{\ldots}\mathrm{x}_n^4) = \frac{-\imath\lambda}{4!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\imath\lambda)^{n-1}}{4!^{n-1}\,(n-1)!}(\mathrm{y}\mathrm{x}_1^3\,\mathrm{x}_2^4{\ldots}\mathrm{x}_n^4).$$

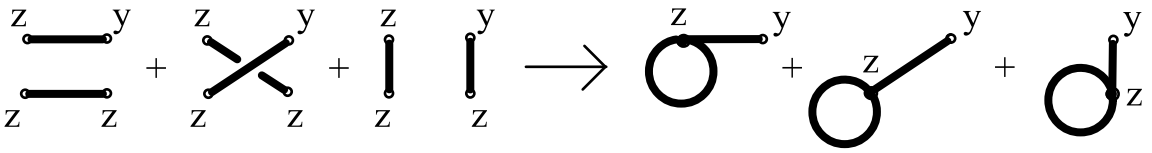
Заменяя $n-1 \mapsto n$ (сумма начнётся с $n = 0$), получаем $\big\langle \mathrm{T}\varphi_{\mathrm{y}}\varphi_{\mathrm{x}_1}^3\,S\big\rangle$. Деля всё выражение (6.20) на $\big\langle S\big\rangle$, приходим к уравнению Дайсона, связывающее точную 2-точечную функцию Грина с точной 4-точечной функцией.

## 5 Уравнения Дайсона для вершинных функций

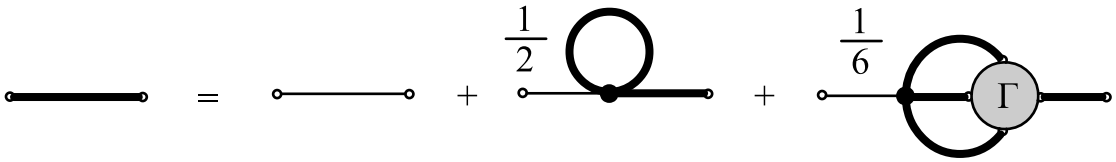
Выше мы нашли связь между точными 2-точечными и 4-точечными функциями Грина (уравнение Дайсона):




Перепишем это уравнение в терминах вершинных функций. Возьмём первые три несвязных слагаемых 4-функции Грина и зафиксируем координату y, например, для правой верхней вершины. Затем подпишем остальные свободные концы как $z$ и соберём их в одну вершину:




В результате получается три топологически одинаковые диаграммы, которые можно собрать в одну, поставив перед ней множитель 3. Присоединяя к вершине этой диаграммы свободный пропагатор и проделывая аналогичные действия с вершинной 4-функцией, получаем:




Обратим внимание, что второе слагаемое аналогично (включая коэффициент!) однопетлевой поправке к 2-функции Грина в первом порядке по теории возмущений. Однако, в петле, вместо пропагатора свободных частиц, стоит точный пропагатор (тот-же, что и в левой части этого уравнения). Несмотря на то, что этот пропагатор неизвестен, петля соответствует интегрированию, поэтому эта часть уравнения является произведением некоторой константы на свободный и точный пропагаторы. В импульсном представлении это уравнение имеет вид:

$$\mathrm{G_p} = D_\mathrm{p} - \frac{\imath\lambda}{2}\, D_\mathrm{p}\mathrm{G_p} \int \mathrm{G_k}\, \frac{d^4\mathrm{k}}{(2\pi)^4} \tag{6.21}$$

$$-\frac{\imath\lambda}{6}\, D_\mathrm{p}\, \mathrm{G_p} \int \mathrm{G_k G_q G_{p-k-q}}\, \Gamma^{(4)}(\mathrm{k},\mathrm{q},\mathrm{p}-\mathrm{k}-\mathrm{q},\mathrm{p})\, \frac{d^4\mathrm{q}\, d^4\mathrm{k}}{(2\pi)^8},$$

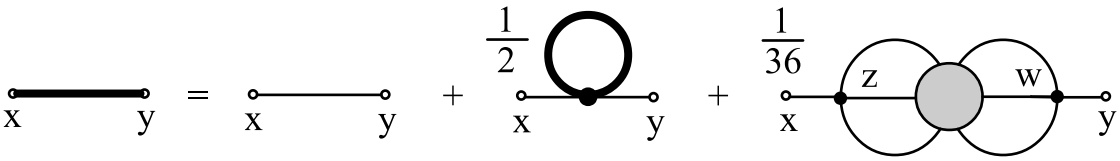
что несложно проверить, используя правила Фейнмана.

Конечно, решение такого уравнения представляет собой крайне непростую задачу. Основная проблема состоит в том, что кроме искомой 2-функции Грина, оно содержит неизвестную нам точную вершинную 4-функцию. Последняя, в свою очередь, определяется 6-функцией и т.д. Такую бесконечную систему зацепляющихся уравнений можно решить, тем или иным образом, только приближенно, отбрасывая часть уравнений. Например, можно положить вершинную 4-функцию равной её значению в первом порядке по теории возмущений $\Gamma^{(4)} = -\imath\lambda$:

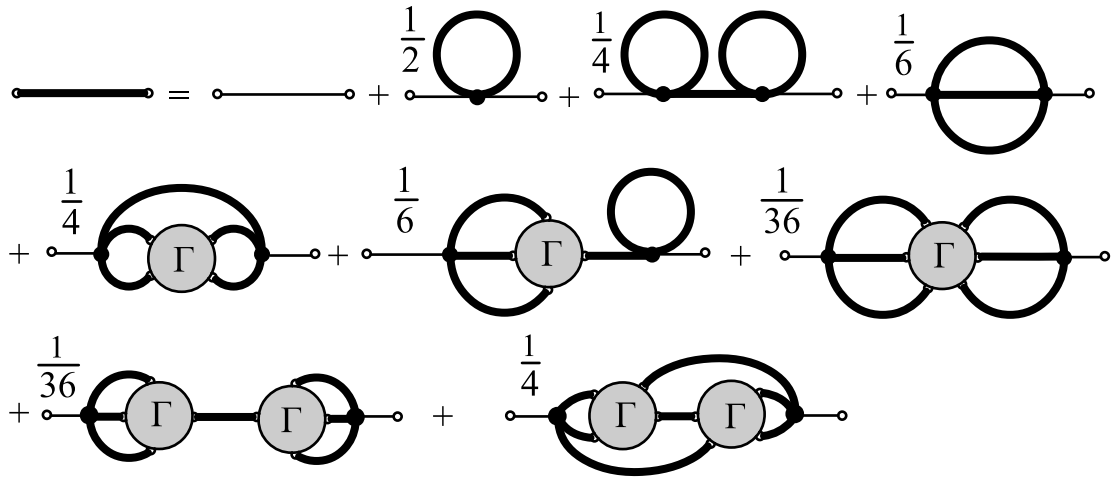
$$\frac{1}{\mathrm{G(p)}} = \mathrm{p}^2 - m^2 + \frac{\imath\lambda}{2}\int \mathrm{G_k}\,\frac{d^4\mathrm{k}}{(2\pi)^4} + \frac{\lambda^2}{6}\int \mathrm{G_k G_q G_{p-k-q}}\,\frac{d^4\mathrm{k}\,d^4\mathrm{q}}{(2\pi)^8}.$$

Впрочем и после этого, задача намного проще не становится. К тому же, входящие в уравнение интегралы расходятся и для работы с ними потребуется регуляризация (глава 7), с последующей перенормировкой (глава 8).

Уравнение Дайсона можно записать и при помощи шеститочечной вершинной функции. Чтобы это сделать, возьмём его представление в виде (стр. 143):



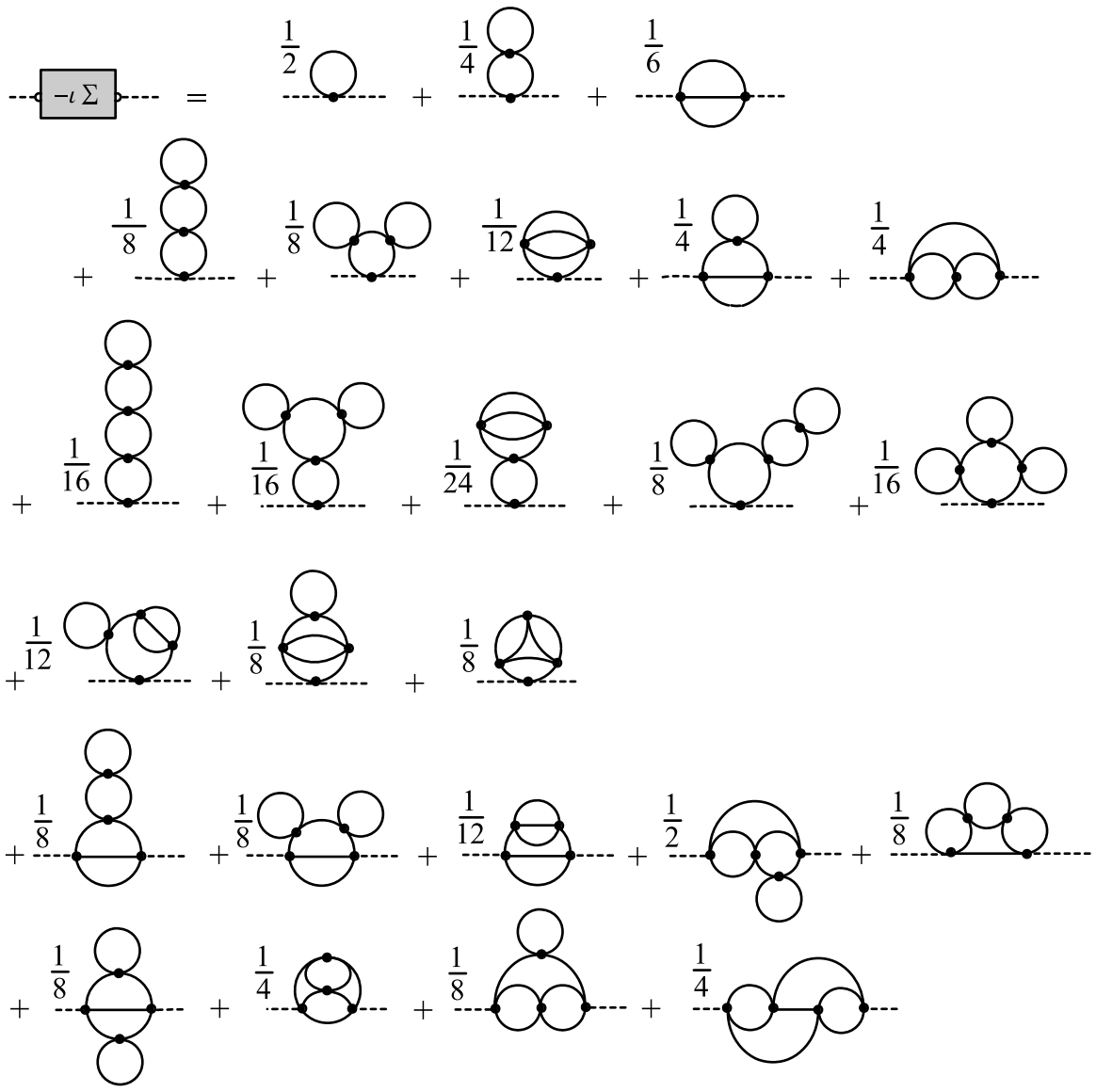

Будем действовать также, как и в случае с (6.21). Возьмём представление шеститочечной функции Грина через двухточечные функции Грина и вершинные 4-, 6-функции (стр.137) и подставим их в это уравнение. Результатом будет следующая сумма диаграмм:




что предлагается проверить в качестве упражнения.

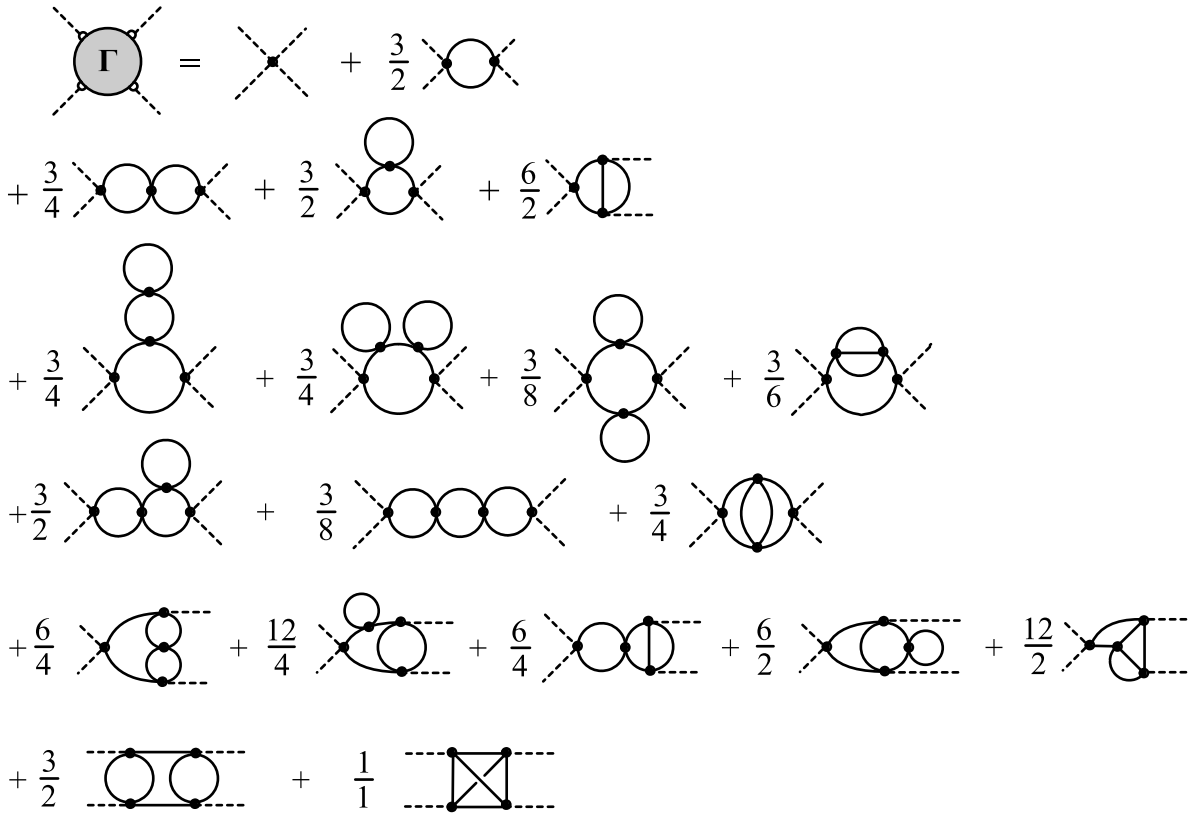
## 6 Немного картинок

Получать поправки по теории возмущений, достаточно утомительное занятие. Однако оно может быть автоматизировано при помощи компьютера. Ниже в справочных целях приведены все диаграммы для функции собственной энергии до четвёртого порядка по $\lambda$ включительно:

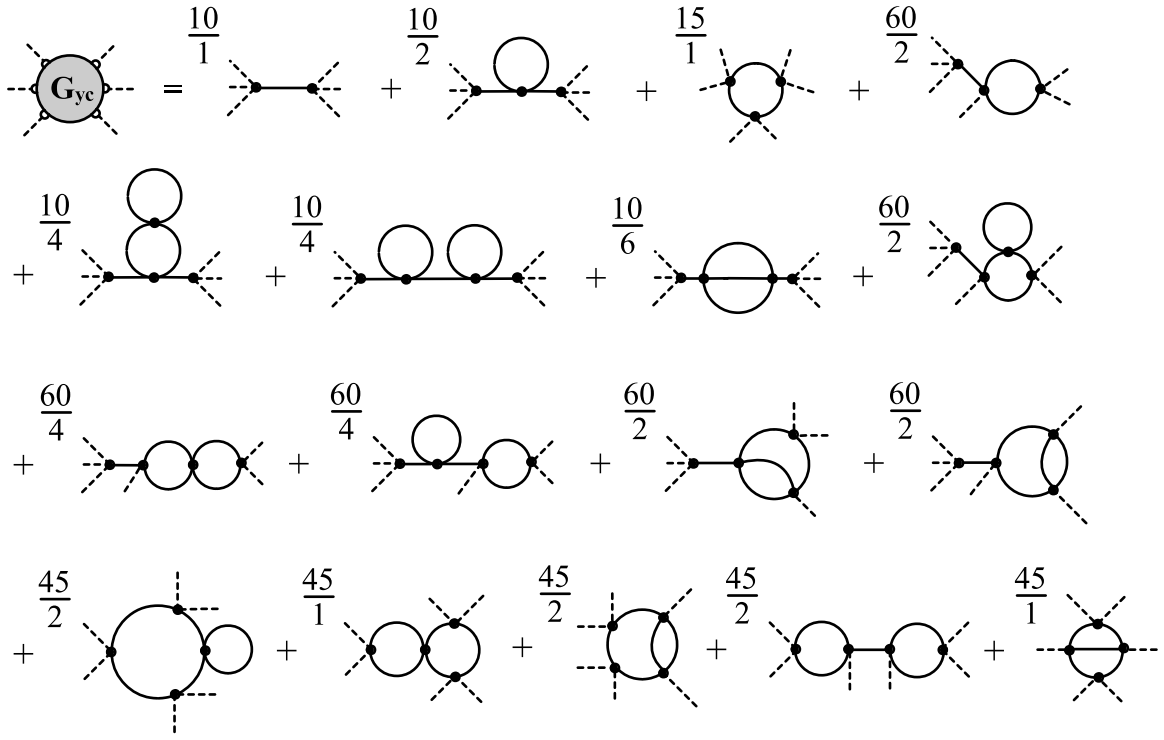



Эти диаграммы довольно живописны и часто получают собственные имена объектов на которые (с некоторой долей фантазии) они похожи. Стоит попробовать найти в этом списке, кроме знакомого уже Микки Мауса – заходящее солнце, кактусы и Чебурашку. Некоторые диаграммы, подобно последней, являются сильно связными, другие могут быть разорваны в одной вершине или разрезаны по двум внутренним линиям.

Аналогично, приведём все диаграммы до четвёртого порядка по теории возмущений для четырёхточечной вершинной функции:

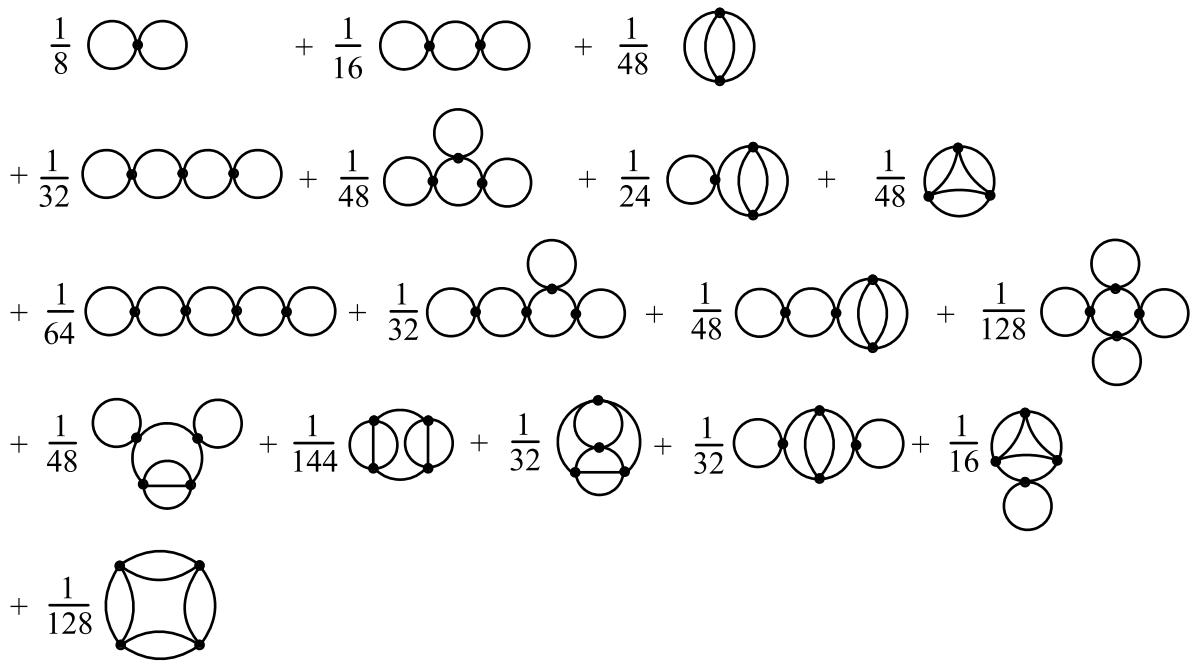



Для шеститочечной функции приведём все связные диаграммы, включающие в себя и одночастично приводимые (некомпактные):




В вершинной функции мы опускаем одночастично приводимые диаграммы, которых выше 12 штук из 17-ти.

Приведём также связные вакуумные диаграммы:



Обратим внимание, что цепочки циклов, последовательно соединённые $n$ вершинами, имеют симметрийный множитель $1/2^{2+n} = 1/8,\ 1/16, ...$ Все диаграммы этого типа несложно просуммировать также, как это было сделано для вершинной 4-функции в предыдущем разделе. К этому же классу относятся "цветочные" диаграммы, в которых несколько петель присоединяются к одной. Выше таких "тривиальных" диаграмм (включая цепочки циклов) семь штук.

Несвязные диаграммы из которых состоит среднее оператора эволюции $\big\langle S \big\rangle$, получаются при помощи этих диаграмм и экспоненциальной формы разложения:

$$\exp\big(a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^4\big) = 1 + a_1\lambda + \Big(a_2 + \frac{a_1^2}{2}\Big)\lambda^2 + \Big(a_3 + a_1a_2 + \frac{a_1^3}{6}\Big)\lambda^3$$
$$+\Big(a_4 + a_1a_3 + \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_2a_1^2}{2} + \frac{a_1^4}{24}\Big)\lambda^4 + ...,$$

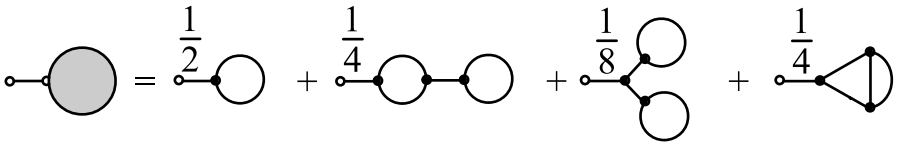
где $a_1$ – это первая диаграмма (порядок $\lambda$), $a_2$ – сумма второй и третей (порядок $\lambda^2$), следующие 4 диаграммы – это $a_3$ и т.д.

Напомним (стр. 111), что вакуумное среднее $\big\langle S \big\rangle$ определяет энергию основного состояния полного гамильтониана:

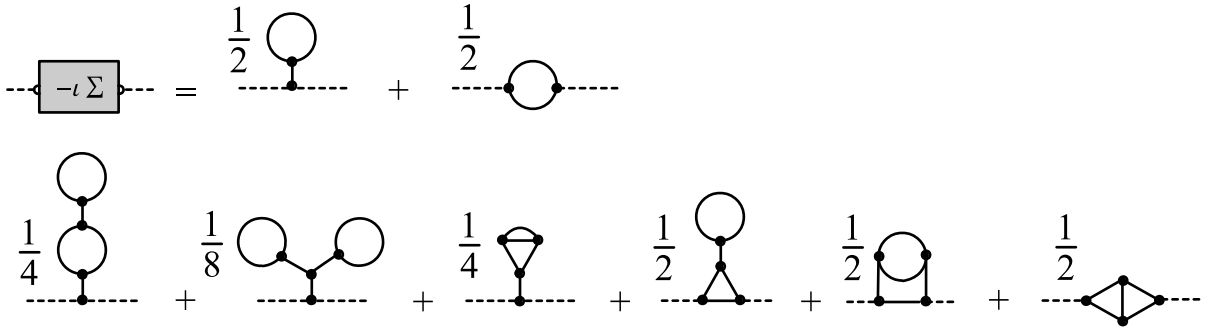
$$2\imath\tau E_0 = -\ln|C_0^2| - \ln\big\langle S \big\rangle$$

при $\tau \to \infty$. Поэтому, фактически, сумма связных вакуумных диаграмм пропорциональна вакуумной энергии.

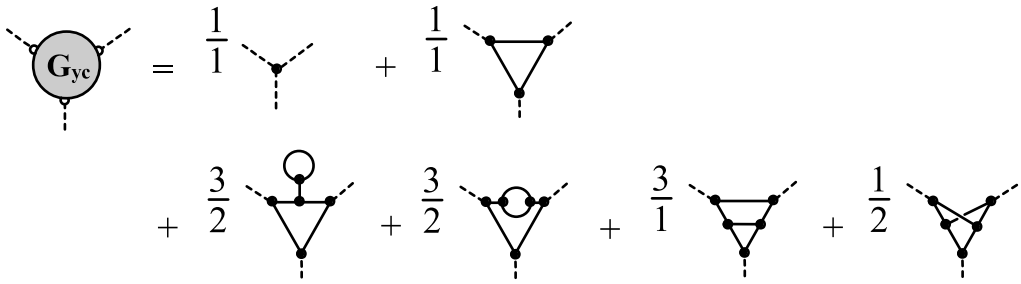
• Вместо модели $\varphi^4$ можно рассматривать модель $(\lambda/3!)\,\varphi^3$ (т.е. когда нелинейность 4-й степени в лагранжиане заменена на нелинейность 3-степени). В отличии от $\varphi^4$-модели, в этой теории не равна нулю одночастичная функция Грина $\mathrm{G(x)} = \langle\varphi(\mathrm{x})\rangle$:



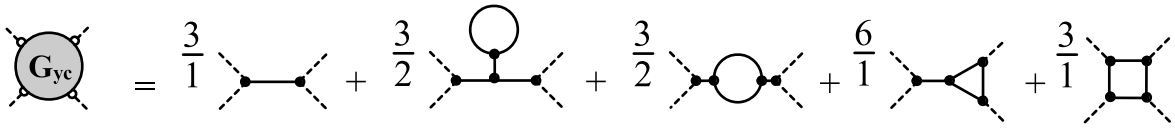
Собственная функция энергии (определяемая аналогично модели $\varphi^4$) имеет следующие диаграммы:




Обратим внимание, что мы отбросили только диаграммы в которых можно оторвать разрезанием внутренней линии друг от друга внешние линии. В тоже время, например, первая диаграмма после равенства, которая, строго говоря, является одночастично приводимой – оставлена. В этом случае точный пропагатор по-прежнему выражается через функцию собственной энергии следующим образом: $\mathrm{G} = \imath/(\mathrm{p}^2 - m^2 - \Sigma)$. Трёхчастичная усечённая функция Грина равна:




а четырёхточечная:




Она, в отличие от теории $\varphi^4$ может быть одночастично приводимой. В частности, первые 4 диаграммы после равенства выражаются через точный пропагатор и 3-точечную вершинную функцию. Одночастично неприводимой (вершинной) является только последняя диаграмма.

# Глава 7

# Регуляризация

В этой главе обсуждается как из бесконечных величин выделять конечные, осмысленные результаты. Для этого используется регуляризация расходящихся интегралов при помощи введения в них вспомогательных параметров, временно "убирающих" бесконечность. Мы изучим метод обрезания импульсов и размерную регуляризацию Будет вычислена функция собственной энергии и четырёхточечная вершинная функция.

Перед чтением главы, стоит просмотреть математические приложения A и B, в которых приведены методы вычисления встречающихся интегралов, свойства гамма функций и т.п.

---

**Квантовый мир**

**Сергей С. Степанов**

Эта книга находится в процессе создания. Её последняя версия и другие материалы находятся на сайте: http://synset.com. Там же можно найти первый том: **I. Механика**
Замеченные ошибки и вопросы просьба присылать по адресу: steps137, затем собачка и gmail.com.

(c) 2015. Печать: 2 июля 2017 г.

## 1 Вычитание бесконечностей

При вычислениях по теории возмущений возникают расходящиеся (бесконечные) интегралы. Рассмотрим в качестве примера следующий интеграл ($\epsilon \to +0$, $d^4\mathrm{k} = dk_0\, d\mathbf{k}$):

$$I(\mathrm{p}) = \int \frac{d^4\mathrm{k}}{\mathrm{k}^2 - 2\mathrm{pk} + a + \imath\epsilon}. \tag{7.1}$$

Найдём сначала его значение при $\mathrm{p} = 0$. Для этого сделаем поворот Вика, который сводится к замене $k_0 = \imath k_4$, где $k_4$ далее считается *действительной* переменной (обоснование такой замены см. на стр. 250). Квадрат 4-вектора приобретает евклидов вид: $\mathrm{k}^2 = -(k_4^2 + \mathbf{k}^2) = -\mathrm{k}_E^2$ и интеграл можно записать в 4-мерных сферических координатах (стр. 263) с телесным углом $\Omega_4 = 2\pi^2$ ($d^4\mathrm{k}_E = dk_4\, d\mathbf{k}$ и опускаем пока $\imath\epsilon$):

$$I(0) = \int \frac{d^4\mathrm{k}}{\mathrm{k}^2 + a} = -\imath \int \frac{d^4\mathrm{k}_E}{\mathrm{k}_E^2 - a} = \frac{2\pi^2}{\imath} \int\limits_0^\infty \frac{k^3\, dk}{k^2 - a}. \tag{7.2}$$

При больших длинах евклидовых импульсов $k = \sqrt{k_4^2 + \mathbf{k}^2}$ подынтегральная функция ведёт себя как $k\, dk \mapsto k^2 \sim \infty^2$, т.е. интеграл расходится квадратичным образом. Расходимости, возникающие при $k \to \infty$, называются *ультрафиолетовыми*.

В следующей главе выяснится, как бесконечные константы типа $I(0)$ можно "спрятать" в параметры модели ($\lambda$, $m$). Для этого необходимо сначала научиться разделять интеграл на конечную часть, *зависящую* от импульса и бесконечные *постоянные* составляющие.

В силу релятивистской ковариантности, функция $I(\mathrm{p})$ должна зависеть от $\mathrm{p}^2$ (других 4-векторов в ней нет). Предположим, что, несмотря на расходимость интеграла, его можно разложить в ряд по $\mathrm{p}^2$:

$$\frac{1}{\mathrm{k}^2 - 2\mathrm{pk} + a} = \frac{1}{\mathrm{k}^2 + a}\Big[1 - \frac{2\mathrm{pk}}{\mathrm{k}^2 + a}\Big]^{-1} = \frac{1}{\mathrm{k}^2 + a} + \frac{2\mathrm{pk}}{(\mathrm{k}^2 + a)^2} + \frac{4(\mathrm{pk})^2}{(\mathrm{k}^2 + a)^3} + \ldots$$

При интегрировании нечётных степеней скалярного произведения $(\mathrm{pk})$ с функцией $f(\mathrm{k}^2)$ получается ноль (интеграл меняет знак при $\mathrm{k} \mapsto -\mathrm{k}$). Для чётных степеней учтём, что

$$\int 4(\mathrm{kp})^2 f(\mathrm{k}^2)\, d^4\mathrm{k} = \mathrm{p}^2 \int \mathrm{k}^2\, f(\mathrm{k}^2)\, d^4\mathrm{k}.$$

Это тождество проверяется взятием второй производной по $p^\mu$ левой и правой части ($\partial p^\mu / \partial p^\mu = \delta^\mu_\mu = 4$). Альтернативно можно также провести простое интегрирование в сферических координатах (стр. 252).

Подставляя разложение подынтегральной функции в (7.1), получаем:

$$I(\mathrm{p}) = \int \frac{d^4\mathrm{k}}{\mathrm{k}^2 + a} + \mathrm{p}^2 \int \frac{\mathrm{k}^2\, d^4\mathrm{k}}{(\mathrm{k}^2 + a)^3} + \ldots$$

Если первый интеграл расходится квадратично $(k\,dk)$, то второй имеет более слабую *логарифмическую расходимость* $dk/k$. Третье слагаемое уже сходится так как его подынтегральная функция на бесконечности ведёт себя как $k^4\, k^3\, dk/(k^2)^5 = dk/k^3$.

Таким образом, расходятся только первые два члена разложения в ряд Тейлора и если их вычесть из функции $I(\mathrm{p})$, то остаток будет конечен. Это означает, что интеграл (7.1) можно представить в следующем виде:

$$I(\mathrm{p}) = I(0) + I'(0)\,\mathrm{p}^2 + \tilde{I}(\mathrm{p}). \tag{7.3}$$

Он содержит две бесконечные константы $I(0)$ и $I'(0)$ и конечную функцию $\tilde{I}(\mathrm{p})$. При этом $\tilde{I}(0) = \tilde{I}'(0) = 0$, где $\tilde{I}'(0) = \partial^2 \tilde{I}(\mathrm{p})/\partial p^\mu \partial p_\mu\big|_{\mathrm{p}=0}$.

Чем быстрее подынтегральная функция убывает на бесконечности, тем меньше степень расходимости интеграла. Например, в интеграле:

$$J(\mathrm{p}) = \int \frac{d^4\mathrm{k}}{(\mathrm{k}^2 - 2\mathrm{pk} + a + \imath\epsilon)^2} \tag{7.4}$$

подынтегральная функция при больших евклидовых 4-импульсах убывает в сферических координатах как $dk/k$, т.е. это логарифмическая расходимость. Для её выделения достаточно вычесть значение интеграла в нуле:

$$J(\mathrm{p}) = J(0) + \tilde{J}(\mathrm{p}), \tag{7.5}$$

где $\tilde{J}(\mathrm{p})$ – конечная функция и $\tilde{J}(0) = 0$. Если степень знаменателя равна 3 и выше – это уже сходящиеся интегралы.

Заметим, что проводить вычитания можно не в нуле, а при любом значении 4-импульса $\mathrm{p}^2 = \mu^2$. Действительно, перепишем (7.5) следующим образом:

$$J(\mathrm{p}) = J(0) + \tilde{J}(\mu) + \tilde{J}(\mathrm{p},\, \mu), \qquad \tilde{J}(\mathrm{p},\, \mu) = \tilde{J}(\mathrm{p}) - \tilde{J}(\mu),$$

т.е. в бесконечную константу теперь включается число $\tilde{J}(\mu) = \tilde{J}(\mathrm{p})|_{\mathrm{p}^2=\mu^2}$, а конечной частью интеграла считается функция $\tilde{J}(\mathrm{p},\, \mu)$, которая теперь равна нулю в точке вычитания $\mu$. Аналогично:

$$I(\mathrm{p}) = I(0) + \tilde{I}(\mu) + I'(0)\mu^2 + [I'(0) + \tilde{I}'(\mu)](\mathrm{p}^2 - \mu^2) + \tilde{I}(\mathrm{p},\, \mu),$$

где $\tilde{I}(\mathrm{p},\, \mu) = \tilde{I}(\mathrm{p}) - \tilde{I}(\mu) - \tilde{I}'(\mu)(\mathrm{p}^2 - \mu^2)$ – конечная функция. Она и её производная по $\mathrm{p}^2$ при $\mathrm{p}^2 = \mu^2$ равны нулю.

## 2 Обрезание импульса

• Вычитание из интеграла части его разложения в ряд Тейлора решает задачу выделения конечной части расходящегося выражения. Однако, иногда такие действия оказываются математически достаточно громоздкими и стоит рассмотреть альтернативную возможность выделения конечных функций. Кроме этого, с бесконечными константами далее мы будем работать как с конечными и даже в некотором смысле малыми величинами. Чтобы придать такой деятельности элемент осмысленности, используется регуляризационная техника. В ней меняют интеграл, вводя некоторый параметр, при котором бесконечность не возникает. Когда этот параметр стремится к предельному значению (например, бесконечности), мы возвращаемся к исходному расходящемуся интегралу.

Выше ультрафиолетовые расходимости возникали из-за не достаточно быстрого убывания подынтегральных функций на бесконечности. Чтобы сделать интеграл конечным, можно интегрировать не до бесконечности, а до некоторого большого, но конечного значения $Q$. Например, для константы (7.2) можно написать:

$$\frac{\imath}{\pi^2}\,I(0) = 2\int\limits_0^Q \frac{k^3\,dk}{k^2-a} = \int\limits_0^{Q^2} \frac{t\,dt}{t-a} = Q^2 + a\int\limits_0^{Q^2} \frac{dt}{t-a-\imath\epsilon},$$

где сделана замена $k^2 = t$ и восстановлен комплексный сдвиг, который далее будет возникать из-за правила обхода полюсов в пропагаторе ($m^2 \mapsto m^2 - \imath\epsilon$). Благодаря этому сдвигу интеграл имеет смысл как при отрицательных $a$ (когда полюса нет), так и при положительных. Вычисление такого интеграла обсуждается на стр. 244. Его можно выполнить формально, учитывая далее правило $\ln(-|x|\pm\imath\epsilon) = \ln|x| \pm \imath\pi$, см. стр.241. Таким образом, регуляризованная константа равна:

$$I(0) = \int \frac{d^4\mathrm{k}}{\mathrm{k}^2+a} \approx \frac{\pi^2}{\imath}\Big[Q^2 + a\ln\Big(\frac{Q^2}{-a-\imath\epsilon}\Big)\Big], \tag{7.6}$$

где $Q^2 - a$ заменено на $Q^2$, т.е. выражение записано с точностью до $Q^0$ и опущены слагаемые $1/Q, \ldots$ Аналогично вычисляется константа:

$$I'(0) = \int \frac{\mathrm{k}^2\,d^4\mathrm{k}}{(\mathrm{k}^2+a)^3} \approx \frac{\pi^2}{\imath}\,\Big[\frac{3}{2} - \ln\Big(\frac{Q^2}{-a-\imath\epsilon}\Big)\Big], \tag{7.7}$$

которая записана с той-же точностью по $Q$.

Обрезание импульса в интеграле $I(\mathrm{p})$ при $\mathrm{p} \neq 0$ несколько осложняется наличием скалярного произведения pk. Если сделать поворот Вика ($k_0 = \imath k_4$, $p_0 = \imath p_4$) и провести интегрирование по углам сферической системы координат (стр. 253), то с точностью до $Q^0$, получается следующее выражение (везде $a \mapsto a + \imath\epsilon$):

$$I(\mathrm{p}) = \int \frac{d^4\mathrm{k}}{\mathrm{k}^2 - 2\mathrm{pk} + a} \approx \frac{\pi^2}{\imath}\Big[Q^2 + (\mathrm{p}^2 - a)\ln\Big(\frac{\mathrm{p}^2 - a}{Q^2}\Big) + \frac{\mathrm{p}^2}{2}\Big]. \qquad (7.8)$$

Его конечная часть, удовлетворяющая условиям $\tilde{I}(0) = \tilde{I}'(0) = 0$, равна:

$$\tilde{I}(\mathrm{p}) = \frac{\pi^2}{\imath}\Big[(\mathrm{p}^2 - a)\ln\Big(\frac{\mathrm{p}^2 - a}{-a}\Big) - \mathrm{p}^2\Big], \qquad (7.9)$$

а бесконечные константы в разложении $I(\mathrm{p}) = I(0) + I'(0)\mathrm{p}^2 + \tilde{I}(\mathrm{p})$, приведены в (7.6), (7.7). Обратим внимание, что если в знаменателе под интегралом стоит $(\mathrm{k} - \mathrm{p})^2 + b$, т.е. $a = \mathrm{p}^2 + b$, то в выражении (7.8) остаётся зависимость от импульса p (последние слагаемое). Т.е. устранить p при помощи замены $\mathrm{k} \mapsto \mathrm{k}+\mathrm{p}$ в расходящемся интеграле нельзя, *если* используется регуляризация обрезанием (замена сказывается на пределах интегрирования). Дифференцируя (7.8) по $a$, можно получить интеграл:

$$J(\mathrm{p}) = \int \frac{d^4\mathrm{k}}{(\mathrm{k}^2 - 2\mathrm{pk} + a + \imath\epsilon)^2} \;\approx\; \frac{\pi^2}{\imath}\Big[\,1 \,+\, \ln\Big(\frac{\mathrm{p}^2 - a - \imath\epsilon}{Q^2}\Big)\,\Big]. \qquad (7.10)$$

Аналогичными дифференцированиями по $a$ или $p_\mu$, получаются другие подобные интегралы.

Обрезание квадрата евклидового 4-импульса удобно тем, что в результате получаются ковариантные выражения и параметр обрезания $Q$ можно считать инвариантом. Тем не менее, альтернативно, можно проводить обрезание и по 3-импульсу $|\mathbf{k}| < Q'$, выполнив сначала интегрирование по $k_0$ (или по $k_4$ после поворота Вика):

$$I(0) = -\imath \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_4 \int\limits_{|\mathbf{k}|<Q'} \frac{d^3\mathbf{k}}{k_4^2 + \mathbf{k}^2 - a} = \frac{\pi}{\imath} \int\limits_{|\mathbf{k}|<Q'} \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{\mathbf{k}^2 - a}} \approx \frac{\pi^2}{\imath}\Big[2Q'^2 + \ldots\Big].$$

В результате, коэффициент при квадрате 3-импульса $Q'^2$ оказывается в два раза больше, чем при квадрате 4-импульса $Q^2$ в (7.6). Тем не менее, интеграл, естественно, по-прежнему имеет квадратичную расходимость.

В фурье-преобразованиях большие 3-импульсы связаны с малыми расстояниями. Поэтому подобное ограничение импульса можно трактовать как некоторое отбрасывание физики малых расстояний. Впрочем, это лишь гипотеза и к параметру обрезания $Q$ мы будем относится как технической, временной мере.

## 3 Размерная регуляризация

Обрезание евклидового 4-импульса является довольно естественным, но не всегда удобным методом регуляризации. В частности, при обрезании, сдвиги переменных интегрирования недопустимы (без изменения пределов интегрирования). Это, вообще говоря, противоречит вольному обращению с импульсами на внутренних линиях в диаграммах Фейнмана (где они могут быть выбраны как угодно, лишь бы в вершинах выполнялся закон сохранения 4-импульса). При выводе соответствующих правил, мы обращались с фурье-интегралами так, как если бы они давали конечные выражения. В частности, произвольным образом делались переобозначения переменных интегрирования. Хотелось бы этот произвол сохранить и при регуляризации. *Размерная регуляризация* как раз обладает таким свойством.

Предположим, что наше пространство-время имеет не 4 измерения, а $d$. Это означает, что, например, 4-импульс имеет $d$ компонент, а 4-интегралы заменяются на $d$-кратные интегралы:

$$\mathrm{k}^2 = k_0^2 - k_1^2 - \ldots - k_{d-1}^2, \qquad \int \frac{d^4\mathrm{k}}{(2\pi)^4} \mapsto \int \frac{d^d\mathrm{k}}{(2\pi)^d}.$$

В системе единиц $c = 1$ (стр. 14) энергия $E = mc^2$ и импульс $p = Ev/c^2$ имеют размерность массы $M$, а длина и время в системе $\hbar = 1$ имеют размерность обратной массы $M^{-1}$ (т.к $Lp \sim \hbar$). Соответственно, пространственный ($d-1$-мерный) объём $d^{d-1}\mathbf{x}$ будет иметь размерность $M^{1-d}$. Чтобы параметр $\lambda$ теории $\varphi^4$ остался *безразмерным*, его необходимо умножить на константу $M$ размерности массы в степени $4-d$. Действительно, энергия скалярного поля имеет размерность массы:

$$E \sim M = \int \Big( \frac{1}{2}\,\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}\,(\nabla\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\,\varphi^2 + \frac{\lambda M^{4-d}}{4!}\,\varphi^4 \Big)\, d^{d-1}\mathbf{x},$$

откуда несложно найти размерности скалярного поля и параметров модели ( $M \sim (\nabla\varphi)^2 d^{d-1}\mathrm{x} \sim M^2\varphi^2 M^{1-d}$ и т.д.):

$$\varphi \sim M^{(d-2)/2}, \qquad \lambda \sim M^0, \qquad m \sim M. \tag{7.11}$$

Теперь, если $d \neq 4$, в модели $\varphi^4$ будет два размерных параметра $m$ и $M$, а параметр $\lambda$ остаётся безразмерным. Во всех формулах, полученных ранее, необходимо заменить $\lambda \mapsto \lambda M^{4-d}$, а в интегралах по импульсам $(2\pi)^4 \mapsto (2\pi)^d$. Во всём остальном $d$-мерная квантовая теория поля не отличается от 4-мерной.

• Проведём регуляризацию константы $I(0)$. Для сохранения размерности величин, умножим её на $M^{4-d}$ (при $d=4$ это не играет роли):

$$I(0) = M^{4-d}\int \frac{d^d\mathrm{k}}{\mathrm{k}^2+a} = \frac{M^{4-d}}{\imath}\,\Omega_d \int\limits_0^\infty \frac{k^{d-1}\,dk}{k^2-a},$$

где сделан поворот Вика и произведен переход к сферическим координатам (F.14), стр. 263 с телесным углом $\Omega_d = 2\,\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$. Будем считать, что $a<0$. Сделаем замену $k=-a\,t$ и введём параметр $\nu$ отклонения размерности пространства $d=4-2\nu$ от исходной, равной 4:

$$I(0) = \frac{\pi^2}{\imath}\Big(\frac{M^2}{-a\pi}\Big)^\nu \frac{2\,(-a)}{\Gamma(2-\nu)}\int\limits_0^\infty \frac{t^{3-2\nu}\,dt}{t^2+1} = \frac{\pi^2}{\imath}\,(-a)\,\Big(\frac{M^2}{-a\pi}\Big)^\nu \Gamma(-1+\nu).$$

При $\nu>1$ (или $d<2$) интеграл *сходится* и равен бета-функции (стр.261): $\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$ с $\beta=2-\nu$, $\alpha=-1+\nu$, что учтено в последнем равенстве. Размерность пространства меньшая 2 может показаться странной. Однако, мы делаем её малой, только добравшись до интеграла по $t$, в котором $\nu$ можно считать просто некоторым параметром, по которому интеграл аналитически продолжается в область, где он сходится.

Разложим теперь результат в ряд по $\nu$. Степенная функция равна $A^\nu = 1+\nu\ln A+\ldots$, а гамма-функция сингулярна при отрицательных целых аргументах (см. стр. 262), поэтому ($\gamma=0.577\ldots$):

$$\frac{\imath}{\pi^2}\,I(0) = (-a)\,\Big\{1+\nu\,\ln\frac{M^2}{-a\pi}\Big\}\,\Big\{-\frac{1}{\nu}-1+\gamma\Big\} = (-a)\,\Big[-\frac{1}{\nu}-1+\gamma-\ln\frac{M^2}{-a\pi}\Big],$$

где скобки перемножены с точностью до нулевой степени по $\nu$. Заметим, что при $\nu\to+0$ получается обратный знак бесконечности по сравнению с (7.6), а $\Gamma(-1+\nu)$ имеет полюс и при $\nu=0$ ($d=4$), и при $\nu=1$ ($d=2$).

В общем случае, при помощи (I.41), стр. 255, для $I(\mathrm{p})$ запишем:

$$I(\mathrm{p}) = \int \frac{M^{2\nu}\,d^d\mathrm{k}}{\mathrm{k}^2-2\mathrm{kp}+a} = \frac{\pi^2}{\imath}\Big(\frac{M^2}{\pi}\Big)^\nu \frac{\Gamma(-1+\nu)}{(\mathrm{p}^2-a)^\nu}\,(\mathrm{p}^2-a).$$

Раскладывая в ряд по $\nu$, получаем регуляризованное выражение:

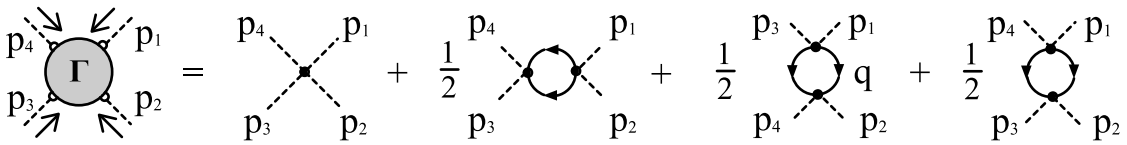
$$I(\mathrm{p}) = \frac{\pi^2}{\imath}\Big[-\frac{1}{\nu}-1+\gamma+\ln\frac{\mathrm{p}^2-a}{M^2/\pi^2}\Big]\,(\mathrm{p}^2-a). \qquad (7.12)$$

Его конечная часть с вычитанием в нуле $\tilde I(\mathrm{p}) = I(\mathrm{p}) - I(0) - I'(0)\mathrm{p}^2$ совпадает с (7.9). Бесконечные коэффициенты вычитаемого полинома, естественно, отличаются от регуляризации обрезанием.

Перейдём теперь к конкретным вычислениям функций Грина.

## 4 Вершинная функция

Четырёхточечная вершинная функция (стр. 136) в $\varphi^4$-модели, с точностью до второго порядка по $\lambda$, описывается диаграммами:




и имеет следующий аналитический вид:

$$\Gamma^{(4)}(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2,\mathrm{p}_3,\mathrm{p}_4) = -\imath\lambda\left\{1+\Lambda(\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_2)+\Lambda(\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_3)+\Lambda(\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_4)\right\},$$

где введена функция 4-импульса p:

$$\Lambda(\mathrm{p}) = \frac{-\imath\lambda}{2}\int \frac{\imath}{(\mathrm{k}-\mathrm{p})^2-m^2+\imath\epsilon}\cdot\frac{\imath}{\mathrm{k}^2-m^2+\imath\epsilon}\,\frac{d^4\mathrm{k}}{(2\pi)^4}. \qquad (7.13)$$

Этот интеграл при больших импульсах k (“*ультрафиолетовая*” область) расходится логарифмическим образом ($k^3\,dk/k^4 = dk/k \mapsto \ln k \mapsto \ln\infty$). Поэтому достаточно вычесть константу $\Lambda(0)$, что даёт (после приведения к общему знаменателю) сходящийся интеграл (опускаем $\imath\epsilon$, $\imath^2=-1$):

$$\tilde\Lambda(\mathrm{p}) = \Lambda(\mathrm{p})-\Lambda(0) = \frac{\imath\lambda}{2}\int \frac{2\mathrm{kp}-\mathrm{p}^2}{[(\mathrm{k}-\mathrm{p})^2-m^2]\,[\mathrm{k}^2-m^2]^2}\,\frac{d^4\mathrm{k}}{(2\pi)^4} \qquad (7.14)$$

(при больших импульсах $k^4dk/k^6 = dk/k^2$). Применим фейнмановскую факторизацию (I.48), стр. 256 с $n=2$, $m=1$, при помощи которой объединим два знаменателя в один:

$$\tilde\Lambda(\mathrm{p}) = \imath\lambda\int_0^1\int \frac{(2\mathrm{kp}-\mathrm{p}^2)\,x\,dx}{[\mathrm{k}^2-m^2+(1-x)(\mathrm{p}^2-2\,\mathrm{kp})]^3}\,\frac{d^4\mathrm{k}}{(2\pi)^4}.$$

Подстановкой $\mathrm{k} = \mathrm{q}+(1-x)\,\mathrm{p}$, уберём kp в знаменателе:

$$\tilde\Lambda(\mathrm{p}) = \imath\lambda\int_0^1\int \frac{\mathrm{p}^2\,x\,(1-2x)\,dx}{[\mathrm{q}^2+x\,(1-x)\,\mathrm{p}^2-m^2]^3}\,\frac{d^4\mathrm{q}}{(2\pi)^4},$$

где в числителе опущено слагаемое qp равное нулю, в силу нечётности подынтегральной функции. Воспользуемся формулой (I.28) стр. 250:

$$\tilde\Lambda(\mathrm{p}) = -\frac{\lambda}{32\pi^2}\int_0^1 \frac{\mathrm{p}^2\,x\,(1-2x)\,dx}{x\,(1-x)\,\mathrm{p}^2-m^2}, \qquad (7.15)$$

где обход полюса проводится в соответствии со сдвигом $m^2 \mapsto m^2-\imath\epsilon$.

• Аналогичный результат можно получить при помощи регуляризации расходящегося интеграла. Рассмотрим сначала обрезание евклидового 4-импульса. Используя фейнмановскую параметризацию (стр. 256), объединим в (7.13) знаменатели:

$$\Lambda(\mathrm{p}) = \frac{\imath\lambda}{32\,\pi^4}\int\limits_0^1 dx \int \frac{d^4\mathrm{k}}{[\mathrm{k}^2 - 2x\mathrm{pk} + x\mathrm{p}^2 - m^2]^2}.$$

Воспользовавшись формулой (7.10) с $\mathrm{p} \mapsto x\mathrm{p}$ и $a = x\mathrm{p}^2 - m^2$, проведём интегрирование по 4-сфере радиуса $Q$:

$$\Lambda(\mathrm{p}) = \frac{\lambda}{32\,\pi^2}\int\limits_0^1 dx\Big[1 + \ln\Big(\frac{m^2 - x(1-x)\,\mathrm{p}^2}{Q^2}\Big)\Big]. \tag{7.16}$$

В этом интеграле уже легко выполнить вычитание расходящейся константы:

$$\Lambda(0) \;=\; \frac{\lambda}{32\,\pi^2}\Big[1 + \ln\Big(\frac{m^2}{Q^2}\Big)\Big]. \tag{7.17}$$

Эта константа получилась действительной и отрицательной при $Q \to \infty$. Так как под логарифмом стоит положительная величина, малый комплексный сдвиг у массы можно опустить (для логарифма предполагается разрез вдоль отрицательной полуоси, стр. 241).

В результате, конечная часть вершинной функции равна:

$$\tilde{\Lambda}(\mathrm{p}) = \Lambda(\mathrm{p}) - \Lambda(0) = \frac{\lambda}{32\,\pi^2}\int\limits_0^1 \ln\Big(1 - x\,(1-x)\,\frac{\mathrm{p}^2}{m^2}\Big)\,dx. \tag{7.18}$$

Чтобы привести этот интеграл к (7.15), необходимо выполнить интегрирование по частям:

$$\ln f(x)\,dx = d(x\ln f) \;-\; \frac{f'(x)}{f(x)}\,x\,dx.$$

Первое слагаемое на границах равно нулю, а второе даёт (7.15).

Обратим внимание, что на интервале $x = [0...1]$ квадратичная форма $x(1-x)$ достигает максимального значения $1/4$, когда $x = 1/2$. Если $\mathrm{p}^2 > 4m^2$, то под логарифмом возникает отрицательное число. Эта же проблема в виде полюса присутствует в (7.15). Как будет показано чуть позже, все эти неприятности обходятся при помощи комплексного сдвига в квадрате массы ($m^2 \mapsto m^2 - \imath\epsilon$).

• Воспользуемся, наконец, размерной регуляризацией для получения тех же результатов. Объединяя в (7.13) знаменатели, запишем результат в $(d = 4 - 2\nu)$-мерном пространстве:

$$\Lambda(\mathrm{p}) = \frac{\imath\lambda M^{2\nu}}{2} \int\limits_0^1 dx \int \frac{d^d\mathrm{k}/(2\pi)^d}{[\mathrm{k}^2 - 2x\mathrm{pk} + x\mathrm{p}^2 - m^2]^2}.$$

Считая, что интеграл аналитически продолжен в область размерностей, где он сходится, можем сделать замену $\mathrm{k} \mapsto \mathrm{k} + x\mathrm{p}$ и затем перейти к евклидовым координатам ($k_0 = \imath k_4$). Впрочем, сразу воспользуемся формулой (I.41), стр. 255, приложения I:

$$\Lambda(\mathrm{p}) = -\frac{\lambda}{32\,\pi^2} \int\limits_0^1 dx\ \Gamma(\nu) \left(\frac{m^2 - x(1-x)\,\mathrm{p}^2}{4\pi M^2}\right)^{-\nu}.$$

Учтём разложение гамма-функции в окрестности $\nu = 0$ (стр. 262), ряд Тейлора для $A^{-\nu}$ и перемножим их:

$$\Gamma(\nu)\,A^{-\nu} = \left\{\frac{1}{\nu} - \gamma + ...\right\}\left\{1 - \nu\,\ln A + ...\right\} = \frac{1}{\nu} - \gamma - \ln A + ...$$

В результате получаем такую же конечную часть $\Lambda(\mathrm{p}) - \Lambda(0)$, как и в предыдущих методах:

$$\Lambda(\mathrm{p}) = \Lambda(0) + \frac{\lambda}{32\,\pi^2} \int\limits_0^1 \ln\!\left(1 - x\,(1-x)\,\frac{\mathrm{p}^2}{m^2}\right) dx. \qquad (7.19)$$

Бесконечность содержится в значении функции при $\mathrm{p} = 0$, которое равно (с точностью до $\nu^0$):

$$\Lambda(0) \approx -\frac{\lambda}{32\,\pi^2}\left\{\frac{1}{\nu} - \gamma + \ln\frac{4\pi M^2}{m^2}\right\} \qquad (7.20)$$

Знак бесконечности при $\nu \to +0$ совпадает с знаком "бесконечности обрезания" (7.17). Хотя полученная расходимость не выглядит явным образом логарифмической, всегда можно переопределить регуляризационный параметр следующим образом: $1/\nu = \ln(Q^2/m^2)$.

Заметим, что (7.20) с точностью до $\nu^0$ можно также записать в виде:

$$\Lambda(0) \approx -\frac{\lambda\,M^{2\nu}}{32\,\pi^2}\left\{\frac{1}{\nu} - \gamma + \ln\frac{4\pi}{m^2}\right\}. \qquad (7.21)$$

Это выражение не очень красиво из-за массы $m$ под логарифмом, однако является верным. Стоит иметь ввиду, что размерный параметр $M$ всегда входит в комбинации $\lambda M^{2\nu}$, если она не разложена в ряд по $\nu$.

• Запишем конечную часть вершинной функции в явном виде, вычислив интеграл (7.15). Для этого выполним замены $x' = 2x - 1$, $dx = dx'/2$ (опустив штрих) и отбросим нечётный по $x$ член, равный нулю при интегрировании по симметричным пределам:

$$\tilde{\Lambda}(\mathrm{p}) = -\frac{\lambda}{32\pi^2} \int\limits_{-1}^{1} \Big[1 + \frac{\mathrm{p}^2 - 4m^2}{\mathrm{p}^2\, x^2 + 4m^2 - \mathrm{p}^2 - \imath\epsilon}\Big]\, dx, \qquad (7.22)$$

Пусть $\mathrm{p}^2 = -|\mathrm{p}^2| < 0$. Так как знаменатель не обращается в ноль при любом $x$, можно положить $\epsilon = 0$. В результате при $\mathrm{p}^2 < 0$ имеем:

$$\tilde{\Lambda}(\mathrm{p}) = -\frac{\lambda}{16\pi^2} \Big\{1 + \frac{a}{2}\, \ln\frac{a-1}{a+1}\Big\}, \qquad a = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\mathrm{p}^2}}. \qquad (7.23)$$

Аналогичная ситуация при $0 < \mathrm{p}^2 < 4m^2$:

$$\tilde{\Lambda}(\mathrm{p}) = -\frac{\lambda}{16\pi^2} \Big\{1 - a\, \mathrm{arctg}\,\frac{1}{a}\Big\}, \qquad a = \sqrt{\frac{4m^2}{\mathrm{p}^2} - 1}. \qquad (7.24)$$

При $\mathrm{p}^2 > 4m^2$ знаменатель обращается в ноль (если $\epsilon = 0$) и необходимо пользоваться соотношением (I.17), стр. 244. В результате:

$$\tilde{\Lambda}(\mathrm{p}) = -\frac{\lambda}{16\pi^2} \Big\{1 + \frac{\imath\pi}{2}\, a + \frac{a}{2}\, \ln\frac{1-a}{1+a}\Big\}, \qquad a = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\mathrm{p}^2}}. \qquad (7.25)$$

В этом случае у функции появляется мнимая составляющая.

При больших $\mathrm{p}^2 \to \infty$, $a \approx 1 - 2m^2/\mathrm{p}^2$ конечная часть вершинной функции имеет следующее асимптотическое поведение:

$$\tilde{\Lambda}(s) \approx \frac{\lambda}{32\,\pi^2} \Big\{ -\imath\pi + \ln\frac{\mathrm{p}^2}{m^2}\Big\}, \qquad \mathrm{p}^2 \to \infty, \qquad (7.26)$$

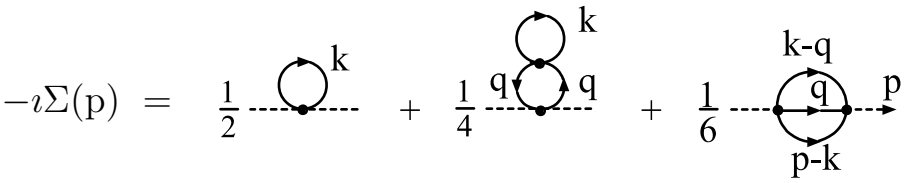
а при малых значениях $s$ из (7.24) или сразу из (7.19) получаем:

$$\tilde{\Lambda}(s) \approx -\frac{\lambda}{192\,\pi^2}\, \frac{\mathrm{p}^2}{m^2} + ..., \qquad \mathrm{p}^2 \to 0. \qquad (7.27)$$

Коэффициент $(192\pi^2)^{-1} \approx 0.0005$ весьма мал. При больших $\mathrm{p}^2$, начиная с $\mathrm{p}^2 = 4m^2$ (точка ветвления) вершинная функция приобретает мнимую составляющую, а её действительная часть логарифмически увеличивается с ростом $\mathrm{p}^2$. При появлении мнимой составляющей в $\mathrm{p}^2 = 4m^2$ происходит излом её действительной части.

## 5 Функция собственной энергии

Рассмотрим теперь функцию собственной энергии, которая с точностью до $\lambda^2$ описывается следующими диаграммами:




Первые две диаграммы являются константами, и от импульса зависит только третья диаграмма:

$$\Sigma(\mathrm{p}) = \frac{\lambda}{2}\Big[1+\Lambda(0)\Big]\int \frac{\imath}{\mathrm{k}^2-m^2}\,\frac{d^4\mathrm{k}}{(2\pi)^4} + I(\mathrm{p}), \tag{7.28}$$

где $\Lambda(0)$ определена в (7.13), а часть, зависящая от импульса, равна:

$$I(\mathrm{p}) = -\frac{\lambda^2}{6}\int \frac{1}{(\mathrm{k}-\mathrm{q})^2-m^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{q}^2-m^2}\cdot\frac{1}{(\mathrm{p}-\mathrm{k})^2-m^2}\,\frac{d^4\mathrm{k}}{(2\pi)^4}\,\frac{d^4\mathrm{q}}{(2\pi)^4}. \tag{7.29}$$

Этот интеграл расходится сильнее, чем $\Lambda(\mathrm{p})$. Если, совершив поворот Вика (стр. 250), перейти к евклидовой метрике и при помощи фейнмановской параметризации объединить 3 знаменателя (результат будет в 3-й степени), то возникнет комбинация $\mathrm{w}^2 = \mathrm{q}^2 + \mathrm{k}^2$. Её можно интерпретировать как квадрат 8-мерного евклидового вектора, а объём интегрирования как $d^4\mathrm{k}\,d^4\mathrm{q} = d^8\mathrm{w} = w^7\,dw$. В результате, при больших импульсах получаем квадратичную расходимость интеграла: $w^7\,dw/[w^2]^3 = w\,dw$.

На самом деле расходимость чуть более сильная, чем получается при такой простой оценке. Действительно, учитывая определение функции $\Lambda(\mathrm{p})$ (7.13), выражение для (7.29) можно переписать в виде интеграла только по k:

$$I(\mathrm{p}) = \frac{\imath\lambda}{3}\int \frac{\Lambda(\mathrm{k})}{(\mathrm{p}-\mathrm{k})^2-m^2}\,\frac{d^4\mathrm{k}}{(2\pi)^4}. \tag{7.30}$$

Подынтегральная функция при больших $\mathrm{k}^2$ ведёт себя как $\Lambda(\mathrm{k})\,k^3\,dk/k^2 = \Lambda(\mathrm{k})\,k^3\,dk/k^2$. В соответствии с (7.25), вершинная функция $\Lambda(\mathrm{k})$ имеет логарифмическую асимптотику. Поэтому, рост подынтегральной функции оказывается чуть быстрее линейного.

Для выделения конечной части интеграла, вычитания одной константы уже не достаточно и $I(\mathrm{p}) - I(0)$ по-прежнему расходится (но уже линейно $\sim \Lambda(k)\,dk$). Поэтому необходимо вычесть и $I'(0)\,\mathrm{p}^2$. Мы далее проведём эти вычитания при помощи размерной регуляризации.

• В первом порядке по теории возмущений функция собственной энергии постоянна: $\Sigma(\mathrm{p}) = \Sigma_0$, где:

$$\Sigma_0 = \frac{\lambda}{2} \int \frac{\imath}{\mathrm{k}^2 - m^2} \frac{d^4\mathrm{k}}{(2\pi)^4} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{1}{\mathrm{k}_E^2 + m^2} \frac{d^4\mathrm{k}_E}{(2\pi)^4} = \frac{\lambda}{16\pi^2} \int\limits_0^Q \frac{k^3\, dk}{k^2 + m^2}.$$

Выше, как обычно, совершён поворот Вика ($k_0 = \imath k_4$) и произведен переход к сферическим координатам с обрезанием длины "*евклидового* 4-импульса" на значении $Q$. Делая замену $t = k^2$, проводя элементарное интегрирование и удерживая слагаемы порядка $Q^0$, получаем квадратичную расходимость:

$$\Sigma_0 \approx \frac{\lambda\, m^2}{32\,\pi^2} \Big[ \frac{Q^2}{m^2} - \ln \frac{Q^2}{m^2} \Big]. \tag{7.31}$$

Проведём также размерную регуляризацию $\Sigma_0$. В $(d = 4 - 2\nu)$-мерном пространстве она равна:

$$\Sigma_0 = \frac{\lambda M^{2\nu}}{2} \int \frac{\imath}{\mathrm{k}^2 - m^2} \frac{d^d\mathrm{k}}{(2\pi)^d} = \frac{\lambda\, m^2}{32\,\pi^2} \Big(\frac{4\pi M^2}{m^2}\Big)^{\nu} \Gamma(-1 + \nu),$$

где использована формула (I.41), стр. 255. Раскладывая в ряд по $\nu$ гамма-функцию $\Gamma(-1 + \nu) = -1 + \gamma - 1/\nu$ и логарифм $A^\nu = 1 + \nu \ln A + ...$, окончательно получаем:

$$\Sigma_0 = -\frac{\lambda\, m^2}{32\,\pi^2} \Big\{ \frac{1}{\nu} + 1 - \gamma + \ln \frac{4\pi M^2}{m^2} \Big\}. \tag{7.32}$$

Обратим ещё раз внимание на то, что размерная регуляризация, в данном случае приводит к структуре "бесконечностей", отличающейся от метода регуляризации обрезанием импульса. В частности при $\nu \to +0$ знак "бесконечности", обратен по сравнению с (7.31).

Вторая (двухпетлевая) диаграмма для $-\imath\Sigma(\mathrm{p})$ имеет порядок $\lambda^2$ и также постоянна. Она равна произведению $\Lambda(0)\,\Sigma_0$, поэтому возникает полюс второго порядка по $\nu$:

$$\Lambda(0)\,\Sigma_0 = \frac{\lambda^2\, m^2}{(32\,\pi^2)^2} \Big\{ \frac{1}{\nu^2} + \Big(1 - 2\gamma + 2 \ln \frac{4\pi M^2}{m^2}\Big) \frac{1}{\nu} + ... \Big\}, \tag{7.33}$$

где уже опущены члены порядка $\nu^0$. При проведении регуляризацию обрезанием импульса, результат получается следующий:

$$\frac{\Lambda(0)}{2}\,\Sigma_0 = -\frac{\lambda^2\, m^2}{(32\,\pi^2)^2}\, \frac{Q^2}{m^2}\, \ln \frac{Q^2}{m^2} + ..., \tag{7.34}$$

где удержано только ведущее по $Q$ слагаемое.

• Перейдём к третьей диаграмме, записав её в $(d = 4 - 2\nu)$-мерном пространстве и сдвинем (переобозначив) импульсы $(\mathrm{k} \mapsto \mathrm{k} + \mathrm{q})$:

$$I(\mathrm{p}) = -\frac{\lambda^2}{6}\,\frac{M^{4\nu}}{(2\pi)^{2d}} \int \frac{1}{\mathrm{k}^2 - m^2} \cdot \frac{1}{\mathrm{q}^2 - m^2} \cdot \frac{1}{(\mathrm{p} - \mathrm{k} - \mathrm{q})^2 - m^2}\, d^d\mathrm{k}\, d^d\mathrm{q}.$$

Воспользуемся фейнмановской формулой (I.51), стр. 257:

$$-\frac{\lambda^2\, M^{4\nu}}{6} \int\limits_0^1 \int \frac{2\,\theta(z)\,dx\,dy\;\; d^d\mathrm{k}\, d^d\mathrm{q}/(2\pi)^{2d}}{[(x+z)\,\mathrm{k}^2 + (y+z)\,\mathrm{q}^2 + 2z\,\mathrm{k}\,\mathrm{q} - 2z\,\mathrm{p}(\mathrm{k}+\mathrm{q}) + z\,\mathrm{p}^2 - m^2]^3},$$

где $z = 1 - x - y$. Сдвигами $\mathrm{k} = \mathrm{k}' + \mathrm{p}\,yz/\sigma$, $\mathrm{q} = \mathrm{q}' + \mathrm{p}\,xz/\sigma$ устраним в знаменателе линейное по p слагаемое (штрихи опускаем). Затем сделаем ещё одну замену $\mathrm{k} = \mathrm{k}' - \mathrm{q}z/(x+z)$, устраняя слагаемое kq:

$$I(\mathrm{p}) = -\frac{\lambda^2}{6}\,\frac{M^{4\nu}}{(2\pi)^{2d}} \int\limits_0^1 \int \frac{2\,\theta(z)\,dx\,dy\;\; d^d\mathrm{k}\, d^d\mathrm{q}}{[(x+z)\,\mathrm{k}^2 + \frac{\sigma}{x+z}\,\mathrm{q}^2 + \frac{xyz}{\sigma}\,\mathrm{p}^2 - m^2]^3}.$$

где введены сокращения:

$$\sigma = xy + xz + yz, \qquad z = 1 - x - y. \tag{7.35}$$

Наличие тета-функции приводит к $z > 0$, поэтому и $\sigma$ неотрицательна. Заменами $\mathrm{k} \mapsto \mathrm{k}/\sqrt{x+z}$, $\mathrm{q} \mapsto \mathrm{q}\,\sqrt{(x+z)/\sigma}$ придадим этому интегралу симметричный вид, затем сделаем поворот Вика ($k_0 = \imath\tilde{k}_0$, $q_0 = \imath\tilde{q}_0$) и перейдём в $2d$-мерное сферическое пространство ($\mathrm{w}^2 = \mathrm{k}_E^2 + \mathrm{q}_E^2$):

$$I(\mathrm{p}) = -\frac{\lambda^2}{6}\,\frac{M^{4\nu}}{(2\pi)^{2d}}\,\frac{2\pi^d}{\Gamma(d)} \int\limits_0^1 2\,\theta(z)\,\frac{dx\,dy}{\sigma^{d/2}} \int\limits_0^\infty \frac{w^{2d-1}\,dw}{[w^2 + m^2 - \frac{xyz}{\sigma}\,\mathrm{p}^2]^3}.$$

Благодаря комплексному сдвигу $m^2 \mapsto m^2 - \imath\epsilon$, интеграл по $w$, не зависимо от знака выражения в знаменателе (см. стр. 254), сводится к бета-функции (F.6), стр. 261. Таким образом, остаётся только двойной интеграл по $x$ и $y$ и собственная функция энергии принимает вид:

$$I(\mathrm{p}) = -\frac{\lambda^2 m^2}{6(4\pi)^4} \Big(\frac{4\pi M^2}{m^2}\Big)^{2\nu}\,\Gamma(-1+2\nu) \int\limits_0^1 \frac{dx\,dy\,\theta(z)}{\sigma^{2-\nu}}\,A^{1-2\nu}, \tag{7.36}$$

где использовано сокращение:

$$A = 1 - \frac{xyz}{\sigma}\,\frac{\mathrm{p}^2}{m^2}. \tag{7.37}$$

При $\nu = 0$ $(d = 4)$ это выражение бесконечно (гамма-функция). Однако, если взять производную по $\mathrm{p}^2$, появится множитель $-(-1+2\nu)$, который увеличивает аргумент гамма-функции: $(-1+2\nu)\,\Gamma(-1+2\nu) = \Gamma(2\nu)$. Ещё одна производная даст конечный при $\nu = 0$ множитель $\Gamma(1+2\nu)$.

Это наблюдение позволяет выделить конечную часть интеграла:

$$\tilde{\Sigma}(\mathrm{p}) = I(\mathrm{p}) - I(0) - I'(0)\,\mathrm{p}^2, \tag{7.38}$$

где $I'(0)$ – производная по $\mathrm{p}^2$ при $\mathrm{p}^2 = 0$. Запишем это вычитание для подынтегральной функции $A^{1-2\nu}$:

$$A^{1-2\nu} - 1 + (1-2\nu)(1-A) = 2\nu\{A - 1 - A\ln A\} + ...$$

Гамма-функция $\Gamma(-1+2\nu) = -1/2\nu + ...$, поэтому в пределе $\nu \to 0$, имеем конечное выражение. Наличие функции Хэвисайда приводит к интервалам интегрирования по $y$ от 0 до $1-x$. Поэтому, сделав замену $y = (1-x)y'$ и опуская штрих, окончательно, получаем:

$$\tilde{\Sigma}(\mathrm{p}) = \frac{\lambda^2 m^2}{6\,(4\pi)^4} \int\limits_0^1 \frac{dx\,dy}{(1-x)\,(x+yz)^2} \Big\{ -t\frac{\mathrm{p}^2}{m^2} - \Big(1 - t\frac{\mathrm{p}^2}{m^2}\Big)\ln\Big(1 - t\frac{\mathrm{p}^2}{m^2}\Big)\Big\},$$

где

$$z = (1-x)(1-y), \qquad t = \frac{xyz}{x+yz}$$

(при $x = 1/3$ и $y = 1/2$ переменная $t$ достигает максимального значения $1/9$). Сумма трёх диаграмм для функции собственной энергии имеет вид:

$$\Sigma(\mathrm{p}) = \Sigma(0) + \Sigma'(0)\,\mathrm{p}^2 + \tilde{\Sigma}(\mathrm{p}), \tag{7.39}$$

где все бесконечные константы собраны в две: $\Sigma(0) = \Sigma_0 + \Lambda(0)\Sigma_0 + I(0)$ и $\Sigma'(0) = I'(0)$. В ведущем по $1/\nu$ приближении:

$$\Sigma'(0) = -\frac{\lambda^2}{6(32\pi^2)^2}\,\frac{1}{\nu} + O(\nu^0).$$

Для вычисления $\Sigma(0)$ необходимо аккуратно учесть сингулярность интеграла по $dx\,dy$ при $x = y = 0$, когда $d = 4$ [12] (стр. 137). Впрочем, на конечную часть собственной энергии она не сказывается.

Найдём предельные значения $\tilde{\Sigma}(\mathrm{p})$. При $\mathrm{p}^2 > 9m^2$ она приобретает мнимую часть, имея асимптотику:

$$\tilde{\Sigma}(\mathrm{p}) \to \frac{\lambda^2 \mathrm{p}^2}{12\,(4\pi)^4}\Big\{\imath\pi + \ln\frac{\mathrm{p}^2}{m^2}\Big\}. \tag{7.40}$$

При малых значениях квадрата 4-импульса:

$$\tilde{\Sigma}(\mathrm{p}) \approx -\frac{\lambda^2 m^2}{12\,(4\pi)^4}\Big(\frac{\mathrm{p}^2}{m^2}\Big)^2 \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy\,\frac{x^2 y^2\,z^2}{\sigma^4} \approx -10^{-7}\,\lambda^2 m^2\Big(\frac{\mathrm{p}^2}{m^2}\Big)^2,$$

где численное значение двойного интеграла равно 0.03...

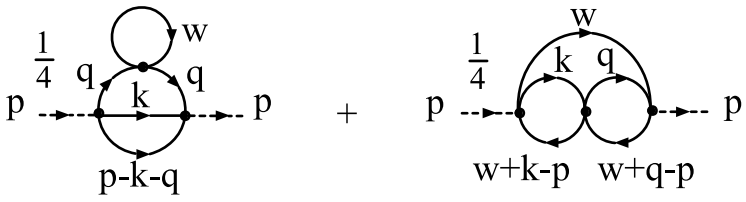
## 6 Подсчёт расходимостей

В предыдущей главе (стр. 126) были установлены связи между числом вершин $V$, внешних линий $N$, внутренних линий (рёбер) $R$ и числом импульсов $L$, не зафиксированных законом сохранения:

$$4V = N + 2R, \qquad L = V - \frac{N}{2} + 1. \tag{7.41}$$

Каждый из $L$ импульсов соответствует 4-х кратному интегралу, которые являются потенциальной угрозой появления бесконечностей. Чем больше порядок по теории возмущений $V$, тем больше интегралов $L$ приходится вычислять. С другой стороны, для данного $V$, число интегралов тем меньше, чем больше внешних линий $N$ (их количество в $\varphi^4$-теории всегда чётно).

Для диаграмм с двум внешними линиями ($N = 2$), в соответствии с формулой (7.41), число импульсов интегрирования $L$ равно порядку теории возмущений $V$. Однако, структура этих интегралов может быть различна. Рассмотрим, например, диаграммы собственной энергии $-\imath\Sigma(\mathrm{p})$ в третьем порядке по теории возмущений, которые нетривиальным образом зависят от импульса p:




Первая диаграмма содержит произведение *не связных* между собой расходящихся интегралов:

$$\int \frac{d^4\mathrm{w}}{\mathrm{w}^2 - m^2} \int \frac{d^4\mathrm{k}\, d^4\mathrm{q}}{(\mathrm{k}^2 - m^2)((\mathrm{p} - \mathrm{k} - \mathrm{p})^2 - m^2)(\mathrm{q}^2 - m^2)^2}$$

(мы опускаем общий числовой множитель и сдвиг полюса $\imath\epsilon$ в знаменателе). Во второй диаграмме все три импульса связаны между собой пропагаторами:

$$\int \frac{d^4\mathrm{k}\, d^4\mathrm{q}\, d^4\mathrm{w}}{(\mathrm{w}^2 - m^2)(\mathrm{k}^2 - m^2)(\mathrm{q}^2 - m^2)((\mathrm{w} + \mathrm{k} - \mathrm{p})^2 - m^2)(\mathrm{w} + \mathrm{q} - \mathrm{p})^2 - m^2)}.$$

В обоих случаях присутствует $L = 3$ интегралов (4-кратных). Общее число пропагаторов, стоящих под интегралами равно числу внутренних линий (рёбер) $R = 2V - N/2$, см. (7.41). Для двухточечных функций $R = 2V - 1$ (в примерах выше $V = 3$, $R = 5$). Определим расходимость подобных выражений.

Пусть есть $L$ связных интегралов, под которыми стоит произведение $R$ пропагаторов. При помощи формул Фейнмана эти пропагаторы можно объединить в один знаменатель в котором стоит квадратичная форма из импульсов интегрирования и внешних импульсов. Эту форму всегда можно диагонализовать (см. пример на стр. 164). В результате интегралы принимают вид:

$$\int \frac{d^4\mathrm{k}_1 \ldots d^4\mathrm{k}_L}{(\quad)_1 \ldots (\quad)_R} \quad \mapsto \quad \int \frac{d^4\mathrm{k}_1 \ldots d^4\mathrm{k}_L}{(\mathrm{k}_1^2 + \ldots + \mathrm{k}_L^2 + A)^R} \quad \mapsto \quad \int\limits_0^\infty \frac{k^{4L-1}\, dk}{(k^2 - A)^R}, \quad (7.42)$$

где опущены интегралы по вспомогательным фейнмановским переменным и $A$ – квадратичная функция по внешним импульсам и массе $m$. На последнем шаге сделан поворот Вика и осуществлён переход к $4L$-мерному сферическому пространству. Введём *индекс расходимости* интеграла:

$$D = 4L - 2R. \quad (7.43)$$

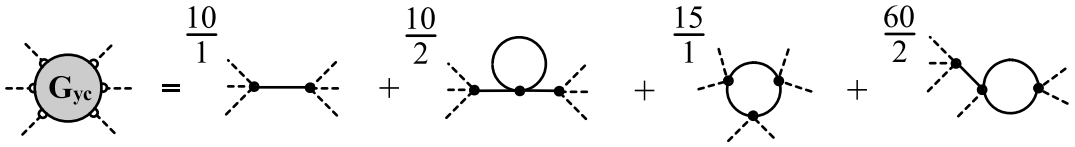
При больших импульсах подынтегральная функция в (7.42) ведёт себя следующим образом: $k^{D-1}$. Интеграл будет сходится только, если $D < 0$. Если $D = 0$ (или $R = 2L$), то интеграл расходится логарифмическим образом $(dk/k)$. Это самая слабая *ультрафиолетовая расходимость* (большие импульсы). При $D = 2$ (или $R = 2L - 1$) расходимость квадратична $(k\, dk)$ и т.д. Как мы видели в начале главы, логарифмическая расходимость (пример 4-вершинная функция) устраняется вычитанием из интеграла константы. Квадратичная и более высокие расходимости выделяются дифференцированием выражения по внешним импульсам и вычитанием из интеграла первых членов ряда Тейлора.

В примерах выше, первая диаграмма является произведением квадратично расходящегося интеграла $D = 2$ (он не зависит от импульса p) и логарифмически расходящегося интеграла $D = 0$. Вторя диаграмма – расходится квадратично. *Если* все интегралы в диаграмме связаны друг с другом (как во второй диаграмме выше), число пропагаторов равно числу рёбер $R$ поэтому из (7.41) имеем:

$$D = 4 - N. \quad (7.44)$$

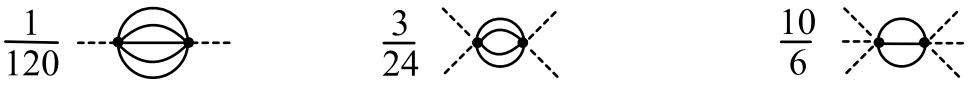
Замечательно, что расходимость в этом случае зависит не от числа вершин, а от количества внешних линий. Для двухточечных диаграмм типична квадратичная расходимость $(D = 2)$, а для 4-точечных – логарифмическая $(D = 0)$.

• В общем случае число $D = 4 - N$ называют *кажущейся расходимостью* диаграммы. Слово "кажущаяся" означает, что поддиаграммы могут расходится сильнее, чем индекс $D$ всей диаграммы, если интегралы оказываются не связанными всеми внутренними рёбрами. Рассмотрим в качестве примера усечённую 6-точечную функцию Грина, с точностью до третьего порядка по теории возмущений:




Кажущаяся расходимость для неё равна $D = 4-6 = -2$ (т.е. расходимости нет). Первая диаграмма является древесной и не содержит интегралов. Вторая диаграмма имеет квадратичную расходимость. Фактически это древесная диаграмма в которой внутренняя линия замена на первое приближение к точному пропагатору. В третей диаграмме также есть один интеграл, однако, благодаря тому, что он "завязан" на три пропагатора, его расходимость ($L = 1$, $R = 3$) по формуле (7.43) равна $D = -2$, т.е. в данном случае кажущаяся и истинная расходимости совпадают (интеграл конечен). Наконец, в третей диаграмме один импульс $L = 1$ связывает два пропагатора $R = 2$ и интеграл расходится логарифмически $D = 0$. Несложно видеть, что эта диаграмма состоит из древесной (первая диаграмма) в которой в третьем порядке по теории возмущений правая вершина заменена на 4-точечную вершинную функцию во втором порядке по теории возмущений.

Такая ситуация типична для $N$-точечных функций Грина (или вершинных функций) при $N > 4$. Соответствующие им диаграммы либо являются конечными функциями импульсов, либо состоят из подблоков, выражающихся через точную (в том или ином порядке теории возмущений) 2-точечную функцию Грина, либо точную 4-точечную вершинную функцию. Поэтому, для устранения бесконечностей из $N$-точечных функций Грина, достаточно устранить их из пропагатора и 4-вершинной функции. Это свойство $\varphi^4$ теории отражает её *перенормируемость*. Например, если бы нелинейное взаимодействие имело вид $\lambda\varphi^6/6!$, возникали бы сильно-связные по импульсам интегрирования диаграммы, которые расходились бы и не сводились к простым подблокам:

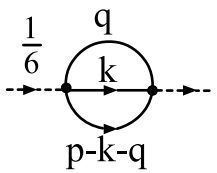



Фактически, в этом случае не хватает параметров модели в которые можно было бы спрятать все бесконечности.

• Вернёмся к диаграммам в начале раздела. Вторая диаграмма имеет квадратичную расходимость и уточняет значение коэффициентов в разложении функции собственной энергии $\Sigma(\mathrm{p}) = \Sigma(0) + \Sigma'(0)\mathrm{p}^2 + \tilde{\Sigma}(\mathrm{p})$, где $\tilde{\Sigma}(\mathrm{p})$ – конечное выражение, а расходящиеся слагаемые $\Sigma(0)$ и $\Sigma'(0)$ мы можем спрятать в перенормированную массу и константу перенормировки поля. Сложнее ситуация с первой диаграммой. Она умножается на бесконечный однопетлевой вклад, который нельзя *аддитивно* выделить никаким дифференцированием по квадрату импульса $\mathrm{p}^2$.

Забегая несколько вперёд, отметим, что эта диаграмма сокращается, когда мы переходим от затравочной массы $m_0$ к перенормированной $m$ в диаграммах второго порядка по теории возмущений. При этом константа $\Sigma(0)$ "прячется" в массу, в результате заменены:

$$m_0^2 = m^2\Sigma(0) = m^2 \; - \quad \frac{1}{2} \quad = m^2 - \frac{\lambda}{2}\int \frac{d^4\mathrm{k}/(2\pi)^4}{\mathrm{k}^2 - m^2}. \qquad (7.45)$$




Это значение необходимо подставить в диаграмму "заходящего Солнца" второго порядка по теории возмущений:




$$= \frac{-\imath\lambda^2}{6}\int \frac{i^3\, d^4\mathrm{k} d^4\mathrm{q}/(2\pi)^8}{(\mathrm{k}^2 - m_0^2)(\mathrm{q}^2 - m_0^2)((\mathrm{p} - \mathrm{k} - \mathrm{q})^2 - m_0^2)}.$$

Так как мы отслеживаем точности $\lambda^2$, выражение следует разложить в ряд по $\lambda$. Первый член этого разложения даст исходную диаграмму с перенормированной массой $m$. Второй, соответствует производной пропагатора по $m_0^2$ (ряд Тейлора). Таких пропагаторов 3, что даст множитель $-3 \cdot (1/2)$, где коэффициент $1/2$ стоит в однопетлевой диаграмме (7.45). В результате получается первая диаграмма начала раздела со знаком минус и с тем же симметрийным множителем $1/4$. Напомним, что мы рисуем только топологически различные диаграммы. Диаграмма "заходящего Солнца" в третьем порядке теории возмущение может приобрести петлю на каждой из трёх внутренних линий. Однако все эти возможности топологически эквивалентны и приводят к одинаковым интегралам.

Подобный переход в диаграммах Фейнмана от исходных параметров модели $\lambda_0$ и $m_0$ к регуляризованным величинам $\lambda$ и $m$, в высоких порядках по теории возмущений достаточно не простой. Удобнее оказывается метод контрчленов, который будет рассмотрен в следующей главе.

# Глава 8

# Перенормировка

В этой главе будет изучена процедура перенормировки, позволяющая прятать расходимости и получать конечные выражения. Сначала мы напомним основные понятия и немного изменим обозначения. Общая идея перенормировки будет проиллюстрирована на устранении бесконечностей из 2-точечной и 4-точечной функций Грина, вычисленных с точностью до $\lambda^2$. Переход от затравочных параметров лагранжиана к перенормированым упрощается при использовании техники контрчленов. Впрочем, за всё необходимо платить. Подобное упрощение потребует ввести новые правила Фейнмана и увеличить число диаграмм, возникающих в теории возмущений.

---

**Квантовый мир**

**Сергей С. Степанов**

Эта книга находится в процессе создания. Её последняя версия и другие материалы находятся на сайте: http://synset.com. Там же можно найти первый том: **I. Механика**
Замеченные ошибки и вопросы просьба присылать по адресу: steps137, затем собачка и gmail.com.

(c) 2015. Печать: 2 июля 2017 г.

## 1 Затравочные и перенормированные величины

В этой главе мы будем помечать параметры $\varphi^4$-модели и операторы поля индексом 0:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left\{(\partial\varphi_0)^2 - m_0^2\,\varphi_0^2\right\} - \frac{\lambda_0}{4!}\,\varphi_0^4. \tag{8.1}$$

Таким же индексом помечаются точные функции Грина:

$$\mathrm{G}_0(\mathrm{x}_1,...,\mathrm{x}_n) = \big\langle 0|\mathrm{T}\,\varphi_0(\mathrm{x}_1)...\varphi_0(\mathrm{x}_n)|0\big\rangle, \tag{8.2}$$

*связные части* которых (стр. 135) имеют следующее фурье-разложение (импульсное представление):

$$(2\pi)^4\,\delta(\mathrm{p}_1+...+\mathrm{p}_n)\,\mathrm{G}_0(\mathrm{p}_1,...,\mathrm{p}_n) = \int \mathrm{G}_0(\mathrm{x}_1,...,\mathrm{x}_n)\,e^{\imath\sum \mathrm{x}_i\mathrm{p}_i}\,d^4\mathrm{x}_1...d^4\mathrm{x}_n.$$

Двухточечная функция Грина, благодаря трансляционной инвариантности, зависит от разницы координат: $\mathrm{G}_0(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2) = \mathrm{G}_0(\mathrm{x}_1-\mathrm{x}_2)$. В импульсном представлении, в силу сохранения 4-импульса $\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_2=0$ (функция Дирака), она зависит от одного импульса: $\mathrm{G}_0(\mathrm{p}) = \mathrm{G}_0(\mathrm{p},-\mathrm{p})$ и называется точным пропагатором. При $\lambda_0 = 0$ точный пропагатор $\mathrm{G}_0(\mathrm{p})$ переходит в пропагатор свободных частиц:

$$D_0(\mathrm{p}) = \frac{\imath}{\mathrm{p}^2 - m_0^2}.$$

Если просуммировать *все* одночастично приводимые диаграммы, точный пропагатор принимает вид:

$$\mathrm{G}_0(\mathrm{p}) = \frac{\imath}{\mathrm{p}^2 - m_0^2 - \Sigma_0(\mathrm{p})}, \tag{8.3}$$

где $\Sigma_0(\mathrm{p})$ содержит одночастично неприводимые диаграммы и называется функцией собственной энергии (стр. 132). Так-же мы определили ампутированные (без внешних линий), связные, *одночастично неприводимые* (1ЧН) функции Грина, которые назвали вершинными функциями:

$$\Gamma_0^{(n)}(\mathrm{p}_1,...,\mathrm{p}_n) = \frac{\mathrm{G}_0(\mathrm{p}_1,...,\mathrm{p}_n)^{\text{1ЧН}}_{\text{связ}}}{\mathrm{G}_0(\mathrm{p}_1)\cdot...\cdot\mathrm{G}_0(\mathrm{p}_n)}. \tag{8.4}$$

Важную роль играют 2-точечные вершинные функции, обратные точному пропагатору $\Gamma_0^{(2)}(\mathrm{p}) = 1/\mathrm{G}_0(\mathrm{p})$ и 4-точечные вершинные функции $\Gamma_0^{(4)}(\mathrm{p}_1,...,\mathrm{p}_4)$, определяющие сечение упругого рассеяния двух частиц. В первом порядке по теории возмущений, последняя функция постоянна и равна $-\imath\lambda_0$.

При вычислениях по теории возмущений возникают расходящиеся интегралы, которые делаются конечными при помощи регуляризации. В результате они оказываются зависящими от параметра $Q$ (в регуляризации обрезанием) или пары $M, \nu$ (при размерной регуляризации). Например, 4-точечная вершинная функция представляется в виде ряда:

$$\Gamma_0^{(4)} = -\imath\lambda_0 \Big[1 + (-\imath\lambda_0)\, F_1(\{\,\mathrm{p}\},\ m_0,\, Q) + (-\imath\lambda_0)^2\, F_2(\{\,\mathrm{p}\},\ m_0,\, Q) + ...\Big],$$

где $\{\,\mathrm{p}\} = \mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_4$ – совокупность 4-импульсов от которых она зависит. При размерной регуляризации вместо $Q$ будет стоять $1/\nu$ и $\lambda_0 M^{2\nu}$ вместо константы $\lambda_0$.

В лагранжиане (8.1) параметры $\lambda_0$, $m_0$ являются произвольными величинами, не имеющими непосредственного физического смысла. Их значения должны быть "подогнаны" под результаты экспериментов (например, при измерении сечения рассеяния частиц). Эти параметры можно переобозначать произвольным образом, например, положить $m\lambda_0$ вместо $m_0$ и т.п.

Основная идея перенормировки состоит в том, что от $\lambda_0$ и $m_0$ переходят к новым параметрам $\lambda = \lambda(\lambda_0, m_0, Q)$ и $m = m(\lambda_0, m_0, Q)$, так, чтобы регуляризационный параметр $Q$ (и следовательно бесконечности) "спрятался" в $\lambda$, $m$, а в функциях Гирина зависимость от него ушла. Естественно, такую приятную возможность предоставляют не все модели, а только некоторые. Теории, в которых все бесконечности можно спрятать в конечное число параметров, называются *перенормируемыми*.

В модели $\varphi^4$ для полного упрятывания бесконечностей, по-мимо $\lambda_0$ и $m_0$, требуется ещё один параметр. Этот параметр можно ввести, переопределив "нормировку" оператора поля, сделав замену:

$$\varphi(\mathrm{x}) = \frac{\varphi_0(\mathrm{x})}{\sqrt{Z}}, \tag{8.5}$$

где $Z$ – некоторая константа, зависящая от регуляризационного параметра и параметров модели: $Z = Z(\lambda_0, m_0, Q)$. Исходное поле $\varphi_0$ и константы $\lambda_0$, $m_0$ называются *голыми* или *затравочными*, а поле $\varphi$ и новые параметры $\lambda$, $m$ – перенормированными величинами.

Полевая модель будет перенормированной, если структура возникающих бесконечностей такова, что их можно в любом порядке по теории возмущений спрятать в два параметра $\lambda$, $m$ и поле $\varphi$ (константу $Z$). Естественно, свойство перенормируемости необходимо доказывать. К счастью, многие физически интересные модели оказываются перенормируемыми. И наоборот, физически интересными (адекватными реальности) следует считать теории, которые можно перенормировать.

Перенормированные поля определяют *перенормированные функции Грина*, которые будут записываться без индекса 0:

$$\mathrm{G}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n) = \langle 0|\mathrm{T}\,\varphi(\mathrm{x}_1)...\varphi(\mathrm{x}_n)|0\rangle = Z^{-n/2}\,\mathrm{G}_0(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n). \tag{8.6}$$

В частности, перенормированный пропагатор ($n = 2$) равен

$$\mathrm{G}(\mathrm{p}) = Z^{-1}\mathrm{G}_0(\mathrm{p}),$$

а перенормированная $n$-точечная вершинная функция (8.4):

$$\Gamma^{(n)}(\mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_n) = Z^{n/2}\,\Gamma_0^{(n)}(\mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_n). \tag{8.7}$$

Можно также определить функции, называемые *инвариантным зарядом*, в которых не возникает нормировочного множителя $Z$:

$$\Gamma^{(n)}(\mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_n)\,[\mathrm{G}(\mathrm{p}_1)\cdot ...\cdot \mathrm{G}(\mathrm{p_n})]^{1/2} = \Gamma_0^{(n)}(\mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_n)\,[\mathrm{G}_0(\mathrm{p}_1)\cdot ...\cdot \mathrm{G}_0(\mathrm{p_n})]^{1/2}.$$

Сформулируем ещё раз процедуру перенормировки, выписав в явном виде параметры модели:

$$\Gamma^{(n)}(\{\,\mathrm{p}\},\,\lambda,\,m) \;=\; Z^{n/2}(\lambda_0,\,m_0,\,Q)\;\Gamma_0^{(n)}(\{\,\mathrm{p}\},\,\lambda_0,\,m_0,\,Q), \tag{8.8}$$

где $\{\,\mathrm{p}\} \equiv \mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_n$. Новые константы $\lambda = \lambda(\lambda_0,\,m_0,\,Q)$ и $m = m(\lambda_0,\,m_0,\,Q)$ являются функциями $\lambda_0$, $m_0$ и регуляризационного параметра $Q$. Перенормированные вершинные функции $\Gamma^{(n)}$ становятся конечными, когда мы выражаем затравочные параметры $\lambda_0$, $m_0$, входящие в $\Gamma_0^{(n)}$, через перенормированные параметры $\lambda$, $m$. При этом $\lambda$ и $m$ считаются конечными, что обусловливает и конечность перенормированных вершинных функций. Именно последние мы должны сравнивать с экспериментом, например при рассеянии частиц.

Чтобы процедуру введения новых параметров $\lambda$, $m$ сделать однозначной, используют *нормировочные условия* (требования, накладываемые на перенормированные функции Грина). Например, двухточечная функция Грина содержит функцию собственной энергии $\Sigma_0(\mathrm{p})$, которая определяется квадратично расходящимися интегралами. Эти расходимости выделяются при помощи двух вычитаний:

$$\Sigma_0(\mathrm{p}) = \Sigma_0(0) + \Sigma_0'(0)\,\mathrm{p}^2 + \tilde{\Sigma}_0(\mathrm{p}),$$

где $\tilde{\Sigma}_0(\mathrm{p})$ – конечная функция 4-импульса и затравочных констант $\lambda_0$, $m_0$ (что подчёркивает индекс 0). Исходная (неперенормированная) вершинная 2-функция $\imath\Gamma_0^{(2)} = \mathrm{p}^2 - m_0^2 - \Sigma_0(\mathrm{p})$ имеет бесконечный постоянный сдвиг и наколон. Для их перенормировки (“объявления конечными”) требуется *два* нормировочных условия.

Например, можно потребовать, чтобы перенормированная функция $\Gamma^{(2)} = Z\,\Gamma_0^{(2)}$ удовлетворяла уравнениям:

$$\imath\Gamma^{(2)}(\mathrm{p})\Big|_{\mathrm{p}^2=m^2} = 0, \qquad \imath\frac{\partial\Gamma^{(2)}(\mathrm{p})}{\partial\mathrm{p}^2}\Big|_{\mathrm{p}^2=m^2} = 1. \tag{8.9}$$

Эти условия эквивалентны требованию наличия в точной функции Грина полюса при $\mathrm{p}^2 = m^2$ с вычетом равным $\imath$, т.е. $\mathrm{G}(\mathrm{p}) \approx \imath/(\mathrm{p}^2 - m^2)$ при $\mathrm{p}^2 \to m^2$. Этот полюс определяет "физическую" массу $m$ и аналогичен полюсу в пропагаторе свободной частицы $\imath/D_0(\mathrm{p}) = \mathrm{p}^2 - m_0^2$, которая удовлетворяет обоим уравнением (8.9) с $m = m_0$. Для нормировки 4-вершинной функции можно использовать *симметричную точку нормировки*:

$$\Gamma^{(4)}(\mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_4)\Big|_{\mathrm{p}\sim\mu} = -\imath\lambda, \tag{8.10}$$

где символ $\mathrm{p} \sim \mu$ обозначает следующие значения 4-импульсов, при которых выполняется соотношение $(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2 + \mathrm{p}_3 + \mathrm{p}_4)^2 = 0$:

$$\mathrm{p}_i^2 = \mu^2, \qquad \mathrm{p}_i \cdot \mathrm{p}_j = -\frac{\mu^2}{3}, \qquad s = t = u = \frac{4\mu^2}{3}, \tag{8.11}$$

где индексы – это номера 4-векторов, а не компоненты и записаны также значения инвариантов $s = (\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_2)^2$, $t = (\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_3)^2$, $u = (\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_4)^2$, равные друг другу в симметричной точке нормировки.

Задавая нормировочные условия, мы требуем, чтобы вершинные функции равнялись *конечным* числам при некоторых значениях импульсов. А эти числа определённым образом были связаны с $\lambda$ и $m$. Тем самым определяются перенормированные параметры модели.

Понятно, что вариантов нормировочных условий существует множество. Например, вместо (8.9) можно выбрать нормировку

$$\imath\Gamma^{(2)}(\mathrm{p})\Big|_{\mathrm{p}^2=0} = -m^2, \qquad \imath\,\frac{\partial\Gamma^{(2)}(\mathrm{p})}{\partial\mathrm{p}^2}\Big|_{\mathrm{p}^2=0} = 1. \tag{8.12}$$

Они также согласуются со свободной 2-вершинной функцией с $m = m_0$. При этом константа $m$ – это конечный параметр размерности массы, отличный от (также конечной) массы $m$ в нормировке (8.9). Ещё один пример нормировки, которой удовлетворяет пропагатор свободных частиц:

$$\imath\Gamma^{(2)}(\mathrm{p})\Big|_{\mathrm{p}^2=\mu_1^2} = \mu_1^2 - m^2, \qquad \imath\,\frac{\partial\Gamma^{(2)}(\mathrm{p})}{\partial\mathrm{p}^2}\Big|_{\mathrm{p}^2=\mu_2^2} = 1. \tag{8.13}$$

В ней требуется, чтобы в *произвольных*, но фиксированных точках $\mu_1$ и $\mu_2$ получались *конечные* значения вершинной функции и её производной.

## 2 Перенормировка во втором порядке по $\lambda$

Рассмотрим пример перенормировки функций Грина, вычисленных во втором порядке по теории возмущений. *Перенормированная* двухточечная функция Грина в результате суммирования всех одночастично приводимых диаграмм выражается через функцию собственной энергии:

$$\imath\Gamma^{(2)}(\mathrm{p}) = Z\,\frac{\imath}{\mathrm{G}_0(\mathrm{p})} = Z\left[\,\mathrm{p}^2 - m_0^2 - \underbrace{\Sigma_0(0) - \Sigma_0'(0)\mathrm{p}^2 - \tilde{\Sigma}_0(\mathrm{p})}_{\Sigma_0(\mathrm{p})}\right], \quad (8.14)$$

где $\tilde{\Sigma}_0(\mathrm{p}) = \tilde{\Sigma}_0(\mathrm{p}, m_0, \lambda_0)$ – конечная функция. Она и её первая производная по $\mathrm{p}^2$ при $\mathrm{p}^2 = 0$ равны нулю. Все бесконечности (после снятия регуляризации) находятся в константах $\Sigma_0(0)$ и $\Sigma_0'(0)$. При этом ряд для $\Sigma_0(0)$ начинается с $\lambda$ (одна петля), а $\Sigma_0'(0)$ и $\tilde{\Sigma}_0(\mathrm{p})$ имеют порядок $\lambda^2$.

Подставим (8.14) в нормировочные условия (8.12):

$$m^2 = Z\,[m_0^2 + \Sigma_0(0)], \qquad\qquad Z = \frac{1}{1 - \Sigma_0'(0)}. \quad (8.15)$$

Исключая бесконечную константу $m^2{+}\Sigma_0(0)$ из перенормированной функции (8.14) (пряча её в перенормированную массу $m$), имеем:

$$\imath\Gamma^{(2)}(\mathrm{p}) = \mathrm{p}^2 - m^2 - \frac{\tilde{\Sigma}_0(\mathrm{p})}{1 - \Sigma_0'(0)}. \quad (8.16)$$

Во втором слагаемом в числителе стоит функция пропорциональная $\lambda^2$ и вычисленная с этой точностью. Поэтому знаменатель нужно опустить: $[a\lambda^2 + O(\lambda^3)]/(1 - b\lambda^2) = a\lambda^2 + O(\lambda^3)$. В результате, с точностью $\lambda^2$, получаем следующее конечное перенормированное выражение:

$$\imath\Gamma^{(2)}(\mathrm{p}) = \mathrm{p}^2 - m^2 - \tilde{\Sigma}(\mathrm{p}). \quad (8.17)$$

В нём отсутствует индекс ноль у функции $\tilde{\Sigma}(\mathrm{p})$, т.е. вместо параметра $m_0$ везде необходимо поставить $m$. Действительно, в силу (8.15) $m_0^2 = m^2 + O(\lambda_0)$. Так как $\tilde{\Sigma}_0$ получена с точностью до $\lambda_0^2$, в ней можно в рамках этой же точности заменить $m_0$ на $m$ (отклонение $m$ от $m_0$ будут давать поправки порядка $\lambda_0^3$).

При выборе нормировки (8.9), повторение вычислений, приводит к следующему результату:

$$\imath\Gamma^{(2)}(\mathrm{p}) = \{1 + \tilde{\Sigma}'(m)\}\,[\mathrm{p}^2 - m^2 + \tilde{\Sigma}(m) - \tilde{\Sigma}(\mathrm{p})]. \quad (8.18)$$

где $\tilde{\Sigma}'(m)$ – производная функции $\tilde{\Sigma}_0(\mathrm{p})$ по $\mathrm{p}^2$ при $\mathrm{p}^2 = m^2$. Он эквивалентен (8.17), но содержит другой параметр перенормированной массы (полюс): $m^2 \mapsto m^2 - \tilde{\Sigma}_0(m)$ и единичный вычет при полюсе (т.е. (8.18) и (8.17) отличаются постоянным множителем).

• Аналогично перенормируем четырёхточечную вершинную функцию (7.19), стр. 160. Во втором порядке по $\lambda$ она имеет логарифмическую расходимость, устраняемую вычитанием константы: $\tilde{\Lambda}_0(s) = \Lambda_0(s) - \Lambda_0(0)$. Запишем перенормированную вершинную функцию $Z^2\Gamma_0^{(4)}$:

$$\Gamma^{(4)}(s,t,u) = -\imath\lambda_0 Z^2 \Big[1 + 3\,\Lambda_0(0) + \tilde{\Lambda}_0(s) + \tilde{\Lambda}_0(t) + \tilde{\Lambda}_0(u)\Big]. \qquad (8.19)$$

Так как $\Lambda_0(0)$ и $\tilde{\Lambda}_0(s)$ пропорциональны $\lambda_0$, это соотношение с такой же точностью по $\lambda_0$ можно переписать следующим образом:

$$\Gamma^{(4)}(s,t,u) = -\imath\lambda_0 Z^2 \Big[1 + 3\,\Lambda_0(0)\Big] \Big[1 + \tilde{\Lambda}_0(s) + \tilde{\Lambda}_0(t) + \tilde{\Lambda}_0(u)\Big].$$

Выберем нормировочное условие (8.10) с нулевым импульсом $\mu = 0$. Требование $\Gamma^{(4)}(0,0,0) = -\imath\lambda$ приводит к следующей связи перенормированной константы $\lambda$ и затравочных величин:

$$\lambda = \lambda_0 Z^2 \Big[1 + 3\,\Lambda_0(0)\Big]. \qquad (8.20)$$

В результате для перенормированной вершинной функции получаем следующее выражение:

$$\Gamma^{(4)}(s,t,u) = -\imath\lambda \Big[1 + \tilde{\Lambda}(s) + \tilde{\Lambda}(t) + \tilde{\Lambda}(u)\Big], \qquad (8.21)$$

где снова опущены индексы “0” у $\tilde{\Lambda}$, т.е. с точностью до $\lambda^2$ параметры $\lambda_0$ и $m_0$ заменены на $\lambda$ и $m$:

$$\lambda = \lambda_0 + a\lambda_0^2 + \ldots \qquad => \qquad \lambda_0 = \lambda - a\lambda^2 + \ldots \qquad (8.22)$$

К сожалению, выше нам пришлось достаточно вольно обращаться с рядами теории возмущения. Несмотря на то, что они содержали бесконечные слагаемые, считалось, что эти величины *конечны* и *малы*. Это позволило, например, ликвидировать знаменатель (8.16), пренебрегая членами более высокого порядка малости по $\lambda$. Кроме этого, положительность $Z > 0$ в (8.5) предполагает малость $\Sigma'(0) \ll 1$, см. (8.15), что справедливо, если $\lambda_0 \ll 1$ и $\Sigma_0'(0)$ – конечно.

Эти, не вполне корректные с математической точки зрения операции, частично обосновываются тем, что мы работаем не с бесконечными, а конечными, регуляризованными величинами. Другими словами мы делаем регуляризацию сколь угодно “сильной” и “щадящей” для нашей теории возмущений, чтобы она работала хорошо. Снимается же регуляризация (параметры $1/\nu$ или $Q$ устремляются к бесконечности) уже *после* проведения перенормировки. Возможно, подобный подход покажется не достаточно строгим, однако, к сожалению, более корректной процедуры придумано пока не было.

## 3 Контрчлены

Поправки по теории возмущений зависят от затравочных параметров $\lambda_0$ и $m_0$. Их необходимо выразить через перенормированные величины $\lambda = \lambda(\lambda_0, m_0)$ и $m = m(\lambda_0, m_0)$, т.е. обратить эти функции: $\lambda_0 = \lambda_0(\lambda, m)$ и $m_0 = m_0(\lambda, m)$. Однако они нелинейны и вычисления в высоких порядках по $\lambda_0$ становятся довольно непростыми. Альтернативный подход – сразу строить теорию возмущений по параметру $\lambda$.

Для этого выразим в лагранжиане $\varphi^4$-модели (8.1) затравочные поля через перенормированные $\varphi_0 = \varphi\, Z^{1/2}$:

$$\mathcal{L} = \frac{Z}{2}\left\{(\partial\varphi)^2 - m_0^2\,\varphi^2\right\} - \frac{\lambda_0 Z^2}{4!}\,\varphi^4 \tag{8.23}$$

и перепишем его в эквивалентном виде:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left\{(\partial\varphi)^2 - m^2\,\varphi^2\right\} - \frac{1-Z}{2}\,(\partial\varphi)^2 - \frac{Z\,m_0^2 - m^2}{2}\,\varphi^2 - \frac{\lambda_0 Z^2}{4!}\,\varphi^4.$$

Величины $Z$, $m_0$, $\lambda_0$ зависят от $\lambda$, поэтому разложим коэффициенты при последних трёх слагаемых в ряд по $\lambda$:

$$Z\,m_0^2 - m^2 = \imath\sum_{k=1}^{\infty} A_k\,(-\imath\lambda)^k, \qquad 1 - Z = \imath\sum_{k=1}^{\infty} B_k\,(-\imath\lambda)^k,$$

$$\lambda_0 Z^2 = \imath\sum_{k=1}^{\infty} C_k\,(-\imath\lambda)^k,$$

где мнимые единицы введены для единообразия последующих соотношений. В ведущем по $\lambda$ приближении $Z = 1 + O(\lambda^2)$, $m_0^2 = m^2 + O(\lambda)$ и $\lambda_0 = \lambda + O(\lambda^2)$, см., (8.15), (8.20). Поэтому можно сразу считать, что $B_1 = 0$, $C_1 = 1$. Последние три члена в лагранжиане (за исключением компоненты пропорциональной $C_1$) называют *контрчленами*. По своей структуре они совпадают с тремя слагаемыми исходного лагранжиана.

Считая перенормированную константу $\lambda$ малой, можно построить теорию возмущений по $\lambda$. Неизвестные коэффициенты разложения $A_k$, $B_k$, $C_k$ подбираются так, чтобы все бесконечности, в каждом порядке разложения по $\lambda$ сокращались. Для однозначности такого выбора необходимо использовать конкретные нормировочные условия.

Ситуация, впрочем, несколько осложняется наличием члена $(\partial\varphi)^2$ в лагранжиане взаимодействия. В формуле для оператора эволюции (**??**), стр. **??** стоит гамильтониан взаимодействия $V$, а не лагранжиан $L_{int}$ (интеграл от $\mathcal{L}_{int}$ по $d^3\mathbf{x}$). Если в последнем нет производных полей, то $V = -L_{int}$. Однако, в нашем случае это не так, поэтому потребуется небольшое отступление.

• Рассмотрим лагранжиан

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}\left\{(\partial\varphi)^2 - m^2\,\varphi^2\right\}}_{\mathcal{L}_0} \underbrace{- \frac{a}{2}\,(\partial\varphi)^2 - U(\varphi)}_{\mathcal{L}_{int}}, \tag{8.24}$$

где $U(\varphi)$ – некоторая функция поля, а $a$ – константа. Канонический импульс определяется обычным образом и не равен $\dot\varphi$:

$$\pi \;=\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} \;=\; (1-a)\,\dot\varphi.$$

Гамильтониан $H = H_0 + V$ (интеграл от $\pi\dot\varphi - \mathcal{L}$ по $d^3\mathbf{x}$) имеет вид:

$$H = \int\Big\{ \underbrace{\frac{\pi^2}{2} + \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} + \frac{m^2}{2}\,\varphi^2}_{H_0} \;+\; \underbrace{\frac{a}{1-a}\,\frac{\pi^2}{2} - a\,\frac{(\nabla\varphi)^2}{2} + U(\varphi)}_{V} \Big\}\, d^3\mathbf{x}.$$

В представлении взаимодействия $\varphi_I(t,\mathbf{x}) = e^{-\imath H_0 t}\,\varphi(0,\mathbf{x})\,e^{\imath H_0 t}$ операторы поля удовлетворят уравнениям Гейзенберга со свободным гамильтонианом: $\imath\dot\varphi_I = [\varphi_I,\, H_0] = \imath\pi_I$. Поэтому, заменяя $\pi_I$ на $\dot\varphi_I$, запишем гамильтониан взаимодействия $V$ в этом представлении:

$$V_I = \int\Big\{\frac{a}{1-a}\,\frac{\dot\varphi_I{}^2}{2} - a\,\frac{(\nabla\varphi_I)^2}{2} + U(\varphi_I)\Big\}\, d^3\mathbf{x}. \tag{8.25}$$

Из-за первых двух слагаемых, выражение для оператора эволюции:

$$\hat S(-\infty,\,\infty) = \mathrm{T}\,\exp\Big\{-\imath\int \hat V_I(\tau)\,d\tau\Big\} \tag{8.26}$$

теряет свою ковариантную форму. Другая проблема связана с применим теоремы Вика при вычислении средних от хронологических произведений, содержащих производную по времени. При доказательстве этой теоремы (стр. 64) проводился перенос оператора свободного поля к правому вакуумному вектору. При этом он “зацеплялся” (спаривался) поочерёдно с каждым оператором. Аналогичные рассуждения можно провести и при наличии в произведении производных полей по времени. При этом в обычном среднем необходимо учитывать 4 вида спариваний (далее индекс $I$ опускаем):

$$\underbrace{\varphi_{\mathrm{x}}\,\varphi_{\mathrm{y}}},\qquad \underbrace{\dot\varphi_{\mathrm{x}}\,\varphi_{\mathrm{y}}},\qquad \underbrace{\varphi_{\mathrm{x}}\,\dot\varphi_{\mathrm{y}}},\qquad \underbrace{\dot\varphi_{\mathrm{x}}\,\dot\varphi_{\mathrm{y}}}.$$

Соответственно, появится 3 вида (симметричных) хронологических спариваний, при вычислении среднего от хронологического произведения операторов.

Эти спаривания необходимо выразить через пропагатор:

$$\overbrace{\varphi_{\rm x}\varphi_{\rm y}} = \langle {\rm T}\,\varphi_{\rm x}\varphi_{\rm y}\rangle = D({\rm x}-{\rm y}) = \int \frac{d^4{\rm p}}{(2\pi)^4}\,\frac{\imath}{{\rm p}^2 - m^2 + \imath\epsilon}\,e^{-\imath{\rm p}\,({\rm x}-{\rm y})}.$$

Из правила дифференцирования хронологических средних (стр. **??**):

$$\partial_t\,{\rm T}\{B_t P_1\} = {\rm T}\{\partial_t B_t\,P_1\} + \delta(t-t_1)\,[B_1,\,P_1],$$

следует, что один раз дифференцировать можно без последствий (при одинаковых временах операторы поля коммутируют):

$$\partial_{x_0}\,{\rm T}\{\varphi_{\rm x}\varphi_{\rm y}\} = {\rm T}\{\dot\varphi_{\rm x}\varphi_{\rm y}\},$$

а, т.е. $[\varphi_{\rm x},\,\dot\varphi_{\rm y}] = \imath\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ при $x_0 = y_0$, ещё одна производная добавляет функцию Дирака:

$$\partial_{x_0}\,\partial_{y_0}\,{\rm T}\{\varphi_{\rm x}\varphi_{\rm y}\} = \partial_{y_0}\,{\rm T}\{\varphi_{\rm y}\dot\varphi_{\rm x}\} = {\rm T}\{\dot\varphi_{\rm x}\dot\varphi_{\rm y}\} + \imath\,\delta({\rm x}-{\rm y}).$$

Определим модифицированную операцию хронологичнеского порядка (со звёздочкой), которая "не чувствительна" к производным по времени (т.е. их можно за этот символ выносить, получая обычный хронологический порядок):

$$\overset{*}{\rm T}\{\dot\varphi_1\dot\varphi_2...\} = \partial_{x_1^0}\partial_{x_2^0}...\,{\rm T}\{\varphi_1\varphi_2...\}. \tag{8.27}$$

В импульсном пространстве производные приводят к умножению пропагатора на компоненты 4-импульса. Например:

$$\langle \overset{*}{\rm T}\,\dot\varphi_{\rm x}\dot\varphi_{\rm x}\rangle = \int \frac{d^4{\rm p}}{(2\pi)^4}\,\frac{\imath\,p_0^2}{{\rm p}^2 - m^2 + \imath\epsilon}\,e^{-\imath{\rm p}({\rm x}-{\rm y})}. \tag{8.28}$$

При помощи модифицированного хронологического среднего, спаривания можно записать следующим образом:

$$\overbrace{\dot\varphi_{\rm x}\varphi_{\rm y}} = \langle {\rm T}\,\dot\varphi_{\rm x}\varphi_{\rm y}\rangle = \langle \overset{*}{\rm T}\,\dot\varphi_{\rm x}\varphi_{\rm y}\rangle \tag{8.29}$$

и

$$\overbrace{\dot\varphi_{\rm x}\dot\varphi_{\rm y}} = \langle {\rm T}\,\dot\varphi_{\rm x}\dot\varphi_{\rm y}\rangle = \langle \overset{*}{\rm T}\,\dot\varphi_{\rm x}\dot\varphi_{\rm y}\rangle - \imath\,\delta({\rm x}-{\rm y}). \tag{8.30}$$

В частности, при совпадающих аргументах:

$$\langle {\rm T}\,\dot\varphi_{\rm x}^2\rangle = \langle \overset{*}{\rm T}\,\dot\varphi_{\rm x}^2\rangle - \imath\,\delta(0) \equiv \langle \dot\varphi_{\rm x}^2\rangle \tag{8.31}$$

(заметим, что $\langle \overset{*}{\rm T}\,\dot\varphi_{\rm x}^2\rangle \neq 0$ должно вычисляться по (8.28) при ${\rm x} = {\rm y}$). Наличие функций Дирака в выражениях для спариваний существенно осложняет вычисления и добавляет расходящихся слагаемых, подобных $\delta(0)$.

Продемонстрируем это при вычислении вакуумного среднего:

$$A = \Big\langle \mathrm{T}\, \exp\Big\{ \imath\alpha \int\limits_{\mathrm{x}} \dot\varphi^2_{\mathrm{x}} \Big\} \Big\rangle = 1 + \imath\alpha \int\limits_{\mathrm{x}} \big\langle \mathrm{T}\, \dot\varphi^2_{\mathrm{x}} \big\rangle + \frac{(\imath\alpha)^2}{2!} \int\limits_{\mathrm{xy}} \big\langle \mathrm{T}\, \dot\varphi^2_{\mathrm{x}} \dot\varphi^2_{\mathrm{y}} \big\rangle + ...,$$

где $\alpha$ – некоторая константа и для краткости опущены символы $d^4\mathrm{x}$. Среднее $\big\langle \mathrm{T}\dot\varphi^2_{\mathrm{x}} \big\rangle$ записано выше, а для второго среднего, последовательно применим теорему Вика: $\big\langle \mathrm{T}\, \dot\varphi_{\mathrm{x}} \dot\varphi_{\mathrm{x}} \dot\varphi_{\mathrm{y}} \dot\varphi_{\mathrm{y}} \big\rangle = \big\langle \mathrm{T}\, \dot\varphi_{\mathrm{x}} \dot\varphi_{\mathrm{x}} \big\rangle \big\langle \mathrm{T}\, \dot\varphi_{\mathrm{y}} \dot\varphi_{\mathrm{y}} \big\rangle + 2 \big\langle \mathrm{T}\, \dot\varphi_{\mathrm{x}} \dot\varphi_{\mathrm{y}} \big\rangle^2$. Подставляя (8.30) и (8.31), имеем:

$$A = 1 + \imath\alpha\,(1+2\alpha) \int\limits_{\mathrm{x}} \big\langle \overset{*}{\mathrm{T}} \dot\varphi^2_{\mathrm{x}} \big\rangle + \frac{(\imath\alpha)^2}{2} \int\limits_{\mathrm{xy}} \Big[ \big\langle \overset{*}{\mathrm{T}} \dot\varphi^2_{\mathrm{x}} \big\rangle \big\langle \overset{*}{\mathrm{T}} \dot\varphi^2_{\mathrm{y}} \big\rangle + 2 \big\langle \overset{*}{\mathrm{T}} \dot\varphi_{\mathrm{x}} \dot\varphi_{\mathrm{y}} \big\rangle^2 \Big]$$

$$+ \int\limits_{\mathrm{x}} (\alpha + \alpha^2)\, \delta(0) + \frac{\alpha^2}{2} \Big[ \int\limits_{\mathrm{x}} \delta(0) \Big]^2 - \imath\alpha^2 \int\limits_{\mathrm{x}} \big\langle \overset{*}{\mathrm{T}} \dot\varphi^2_{\mathrm{x}} \big\rangle \int\limits_{\mathrm{y}} \delta(0) + ...$$

К счастью, ситуация существенно облегчается благодаря следующему тождеству (оно будет доказано позднее):

$$\mathrm{T}\Big\{ \exp\Big( \imath \int\limits_{\mathrm{x}} \alpha\, \dot\varphi^2 \Big)\, F(\varphi) \Big\} = C\, \overset{*}{\mathrm{T}} \Big\{ \exp\Big( \imath \int\limits_{\mathrm{x}} \frac{\alpha}{1-2\alpha}\, \dot\varphi^2 \Big)\, F(\varphi) \Big\}, \qquad (8.32)$$

где $F(\varphi)$ – произвольная функция (или функционал) и $C$ – константа:

$$C = \exp\Big( - \int\limits_{\mathrm{x}} \delta^4_{\mathrm{x}}(0) \ln \sqrt{1+2\alpha} \Big).$$

Для $\alpha = -a/2(1-a)$ коэффициент в экспоненте под $\overset{*}{\mathrm{T}}$ становится равным $-a/2$. Поэтому, с точностью до постоянного множителя $C$, который *сократиться* при вычислении функций Грина по формуле (5.13), стр. 111, выражения (8.25), (8.26) можно записать так:

$$S = \overset{*}{\mathrm{T}} \Big\{ \exp\Big( \imath \int \mathcal{L}_{int}\, d^4\mathrm{x} \Big) \Big\}, \qquad (8.33)$$

где $\mathcal{L}_{int} = -(a/2)\,(\partial\varphi)^2 - U(\varphi)$. Если лагранжиан не зависит от производных, то $\overset{*}{\mathrm{T}} = \mathrm{T}$ и мы возвращаемся к формуле (8.26). При наличии производных в лагранжиане, две "нековариантности" (одна в $V_I$, а вторая при вычислении $\mathrm{T}\{...\}$) сокращаются и получается ковариантное выражение (8.33).

## 4 Диаграммы Фейнмана для контрчленов

Перейдём теперь к построению теории возмущения при наличии контрчленов. Лагранжиан взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{int} = -\imath \sum_{k=1}^{\infty} (-\imath\lambda)^k \left\{ A_k \frac{\varphi^2}{2} + B_k \frac{(\partial\varphi)^2}{2} + C_k \frac{\varphi^4}{4!} \right\}$$

в соответствии с уточнением (8.33), непосредственно используется в операторе эволюции:

$$S = \overset{*}{\mathrm{T}} \exp \int \sum_{k=1}^{\infty} (-\imath\lambda)^k \left\{ A_k \frac{\varphi^2}{2} + B_k \frac{(\partial\varphi)^2}{2} + C_k \frac{\varphi^4}{4!} \right\} d^4\mathrm{x}.$$

Учитывая ряд Тейлора:

$$\exp(a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + ...) = 1 + a_1\lambda + \left\{ a_2 + \frac{a_1^2}{2} \right\} \lambda^2 + \left\{ a_3 + a_1 a_2 + \frac{a_1^3}{6} \right\} \lambda^3 + ...,$$

запишем во втором порядке по теории возмущений оператор $S$ (по x и y ведётся интегрирование, знак которого опущен):

$$S = 1 - \imath\lambda \left\{ A_1 \frac{\varphi_{\mathrm{x}}^2}{2} + \frac{\varphi_{\mathrm{x}}^4}{4!} \right\}$$

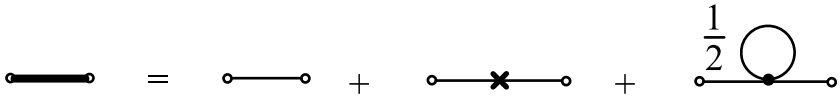
$$+ (-\imath\lambda)^2 \left\{ B_2 \frac{(\partial\varphi_{\mathrm{x}})^2}{2} + A_2 \frac{\varphi_{\mathrm{x}}^2}{2} + C_2 \frac{\varphi_{\mathrm{x}}^4}{4!} + A_1^2 \frac{\varphi_{\mathrm{x}}^2 \varphi_{\mathrm{y}}^2}{8} + A_1 \frac{\varphi_{\mathrm{x}}^2 \varphi_{\mathrm{y}}^4}{2 \cdot 4!} + \frac{\varphi_{\mathrm{x}}^4 \varphi_{\mathrm{y}}^4}{2 \cdot 4!^2} \right\},$$

где сразу учтно, что $B_1 = 0$ и $C_1 = 1$. Для сокращения последующих вычислений, мы ограничимся связными диаграммами, так как несвязные уйдут при делении выражений на вакуумное среднее $\langle S \rangle$.

Для 2-точечной функции Грина по теореме Вика в первом порядке по теории возмущений, имеем:

$$\mathrm{G}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = (\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2) - \imath\lambda \left\{ A_1 \, (\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{x}) + \frac{1}{2} \, (\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{x}\mathrm{x}) \right\},$$

где используются обозначения главы 5, стр.112 для хронологических средних. Это выражение изображается следующими диаграммами:




Новой является предпоследняя диаграмма, соответствующая контрчлену, в которой вершина, помеченная крестиком, имеет множитель $-\imath\lambda\, A_1$. Вершина же с точкой по-прежнему имеет множитель $-\imath\lambda$.

В импульсном представлении, полученный результат имеет вид:

$$\mathrm{G(p)} = D(\mathrm{p}) - \imath\lambda\, D^2(\mathrm{p})\Big\{A_1 + \frac{1}{2}\int D(\mathrm{k})\,\frac{d^4\mathrm{k}}{(2\pi)^4}\Big\}. \qquad (8.34)$$

Напомним, что масса $m$ в пропагаторе $D(\mathrm{p}) = \imath/(\mathrm{p}^2 - m^2)$ является физической (перенормированной), а не затравочной $m_0$.

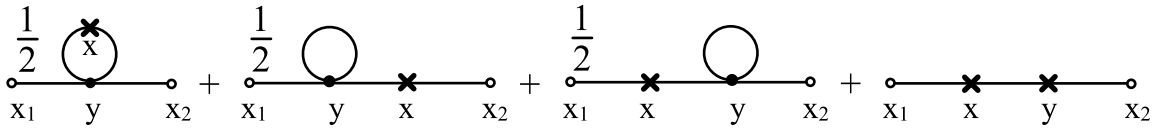
Во втором порядке по теории возмущений $\varphi^4_{\mathrm{x}}\,\varphi^4_{\mathrm{y}}$ будет приводить к диаграммам, уже рассмотренным в главе 5. Найдём остальные *связные* средние в двухточечной функции Грина. Для слагаемого $\varphi^2_{\mathrm{x}}\,\varphi^4_{\mathrm{y}}$ имеем:

$$(\mathrm{x_1x_2\,x^2y^4}) = 24\{(\mathrm{x_1y})(\mathrm{x_2y})(\mathrm{xy})^2 + (\mathrm{x_1y})(\mathrm{x_2x})(\mathrm{xy})(\mathrm{yy}) + (\mathrm{x_1x})(\mathrm{x_2y})(\mathrm{xy})(\mathrm{yy})\}.$$

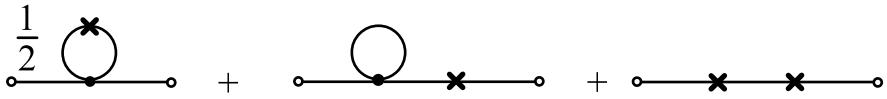
Аналогично вычисляем среднее для $\varphi^2_{\mathrm{x}}\,\varphi^2_{\mathrm{y}}$, связная часть которого равна

$$(\mathrm{x_1x_2\,x^2y^2}) = 8(\mathrm{x_1x})(\mathrm{x_2y})(\mathrm{xy}) + \ldots$$

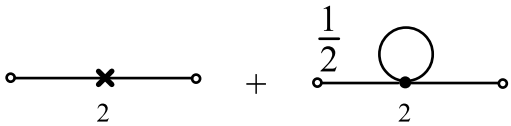
(как обычно, переменные интегрирования переобозначены и переставлены местами). Сумма этих слагаемых изобразим следующими диаграммами:




Двухточечная функция Грина симметрична по аргументам $\mathrm{x_1}$ и $\mathrm{x_2}$, поэтому вторую и третью диаграммы можно объединить в одну, умножив её на 2:




Ещё два слагаемых: $A_2\,(\varphi^2_{\mathrm{x}}/2) + C_2\,(\varphi^4_{\mathrm{x}}/4!)$ при хронологическом усреднении с $\varphi_{\mathrm{x_1}}\varphi_{\mathrm{x_2}}$, дают диаграммы, похожие на первый порядок по $\lambda$:




Однако теперь вершины (крестик и чёрный кружок) помечены цифрой 2. Это означает, что они имеют второй порядок по теории возмущений. Вершине с точкой соответствует множитель $(-\imath\lambda)^2\,C_2$, а крестику: $(-\imath\lambda)^2\,A_2$. В общем случае вершина может иметь произвольный порядок $k$, что будет помечаться цифрой рядом с этой вершиной (не стоит путать порядок вершины и симметрийный множитель всей диаграммы, который обычно является дробным числом).

Осталось вычислить среднее с контрчленом $B_2\,(\partial\varphi_{\rm x})^2/2$. Запишем производную $(\partial\varphi_{\rm x})^2$ как $g_{\mu\nu}\,\partial^\mu_{\rm x}\varphi_{\rm x}\,\partial^\nu_{\rm y}\varphi_{\rm y}$, а затем положим ${\rm x}={\rm y}$. Для связных частей хронологического среднего имеем:

$$\Big\langle\overset{*}{\rm T}\,\varphi_1\varphi_2\,\partial\varphi_{\rm x}\,\partial\varphi_{\rm y}\Big\rangle = \partial_{\rm x}\Big\langle{\rm T}\,\varphi_1\varphi_{\rm x}\Big\rangle\partial_{\rm y}\Big\langle{\rm T}\,\varphi_2\varphi_{\rm y}\Big\rangle + \partial_{\rm y}\Big\langle{\rm T}\,\varphi_1\varphi_{\rm y}\Big\rangle\partial_{\rm x}\Big\langle{\rm T}\,\varphi_2\varphi_{\rm x}\Big\rangle + ...,$$

где производные вынесены за знак модифицированного хронологического среднего, в соответствии с определением (8.27). Поэтому, полагая ${\rm x}={\rm y}$, имеем:

$$\Big\langle\overset{*}{\rm T}\,\varphi_1\varphi_2\,\frac{(\partial\varphi_{\rm x})^2}{2}\Big\rangle = \partial_{\rm x}D_{{\rm x}_1{\rm x}}\;\partial_{\rm x}D_{{\rm x}_2{\rm x}}.$$

Подставим фурье-преобразование для пропагаторов:

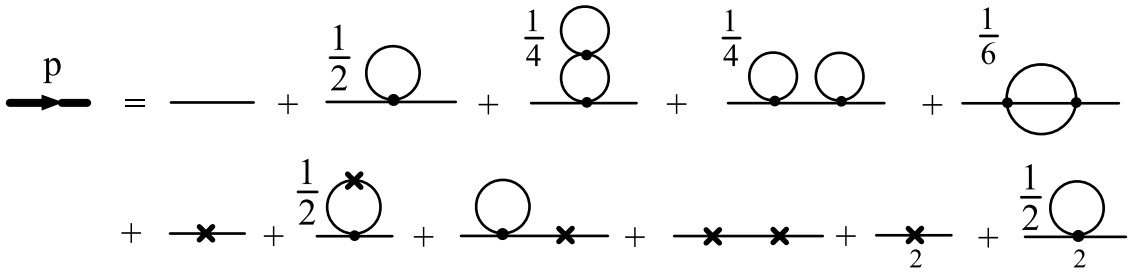
$$\Big\langle\overset{*}{\rm T}\,\varphi_1\varphi_2\,\frac{(\partial\varphi_{\rm x})^2}{2}\Big\rangle = \int\frac{d^4{\rm p}\,d^4{\rm k}}{(2\pi)^8}\,D({\rm p})D({\rm k})\,\imath^2{\rm pk}\,e^{-\imath{\rm p}({\rm x}_1-{\rm x})-\imath{\rm k}({\rm x}_2-{\rm x})}.$$

Для перехода в импульсное представление, это выражение необходимо умножить на $e^{\imath\,({\rm p}_1{\rm x}_1+{\rm p}_2{\rm x}_2)}$ и проинтегрировать по ${\rm x}_1$, ${\rm x}_2$ (вспоминаем также об интеграле по x в $S$). Это даёт:

$$\int\Big\langle\overset{*}{\rm T}\,\varphi_1\varphi_2\,\frac{(\partial\varphi_{\rm x})^2}{2}\Big\rangle\,e^{\imath\sum{\rm p}_i{\rm x}_i}\,d^4{\rm x}_1\,d^4{\rm x}_2\,d^4{\rm x} = (2\pi)^4\,\delta({\rm p}_1+{\rm p}_2)\,{\rm p}_1^2D^2({\rm p}_1).$$

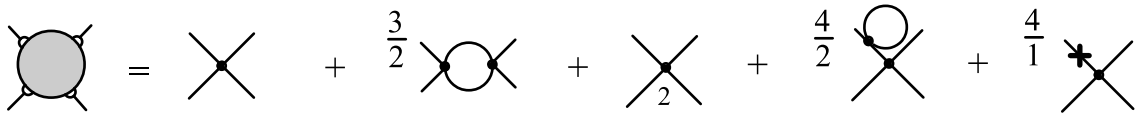
С точностью до множителя ${\rm p}_1^2$ этот результат совпадает с вычислением среднего от массового контрчлена $A_k\,\varphi^2_{\rm x}$. Поэтому, мы не будем для него заводить отдельного обозначения на диаграммах Фейнмана, а расширим определение вершины с крестиком $k$-того порядка, считая, что ей соответствует множитель $A_k + B_k\,{\rm p}^2$.

Собирая все полученные диаграммы, запишем в импульсном представлении 2-точную функцию Грина во втором порядке теории возмущений:



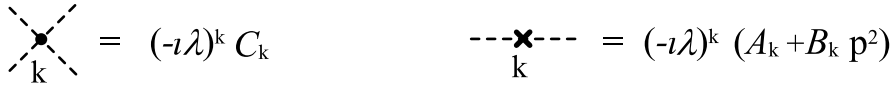

В первой строке идут привычные диаграммы неперенормированной теории возмущений, но зависящие теперь от перенормированных параметров $\lambda$, $m$. Во второй строке приведены все диаграммы контрчленов (с той-же точностью $\lambda^2$).

Аналогично проводятся вычисления для 4-точечных функций Грина. Они, как и в неперенормированном случае, состоят из суммы связных и несвязных диаграмм. При этом несвязные диаграммы при помощи точных пропагаторов собираются в три слагаемых, соответствующих различным соединениям импульсов $\mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_4$ (стр. 135). Связные диаграммы, могут иметь "частично одетые" внешние линии (включая контрчлены):

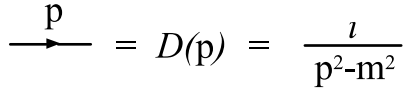



Напомним (стр. 127), что если внешние линии на диаграмме не подписываются, необходимо провести её симметризацию по всем входящим импульсам. Количество возникающих при этом диаграмм указывается в числителе симметрийных коэффициентов рядом с диаграммой. Выше последние четыре диаграммы имеют порядок $\lambda^2$, причём для третей после равенства диаграмме это явным образом указывает цифра 2 при вершине. Остальные 3 диаграммы содержат по две вершине первого порядка. Чтобы убрать "частично одетые" диаграммы мы переходим к вершинным функциям, получающимся делением функций Грина на точные пропагаторы внешних линий.

Подытожим, сформулировав правила Фейнмана в импульсном представлении. На диаграммах могут присутствовать два вида вершин (точка и крестик). Эти вершины могут быть $k$-того порядка и им соответствуют следующие множители:



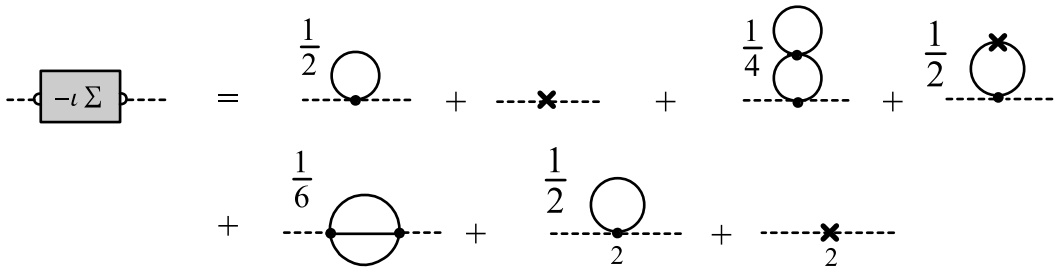

где p – 4-импульс проходящий через вершины контрчленов с крестиком. Вершины без цифры соответствует $k = 1$. Кроме этого $B_1 = 0$ и $C_1 = 1$. Остальные коэффициенты $A_k$ должны быть определены в процессе устранения бесконечностей. Вершины соединяются линиями, которым соответствует пропагатор:




Кроме этого, как и раньше, необходимо учесть закон сохранения в каждой вершине, а по 4-импульсам k не зафиксированным законом сохранения, провести интегрирование по $d^4\mathrm{k}/(2\pi)^4$. Каждая диаграмма должна быть умножена на симметрийный множитель. Эти множители надёжнее получать проводя спаривания в координатном представлении.

## 5 Функция собственной энергии

Перейдём теперь собственно к перенормировке. В случае точного пропагатора просуммируем все одночастично приводимые диаграммы, введя функцию собственной энергии:




Первые две диаграммы имеют порядок $\lambda$, остальные – порядок $\lambda^2$. Перенормированная 2-вершинная функция выражается через функцию собственной энергии следующим образом:

$$\imath\Gamma^{(2)}(\mathrm{p}) = \mathrm{p}^2 - m^2 - \Sigma(\mathrm{p}). \tag{8.35}$$

Выберем нормировочное условие в виде

$$\imath\Gamma^{(2)}(\mathrm{p})\Big|_{\mathrm{p}^2=0} = -m^2, \qquad \imath\frac{\partial\Gamma^{(2)}(\mathrm{p})}{\partial\mathrm{p}^2}\Big|_{\mathrm{p}^2=0} = 1. \tag{8.36}$$

Оно означает, что мы требуем выполнения для функции собственной энергии следующих соотношений:

$$\Sigma(0) = 0, \qquad \Sigma'(0) = 0. \tag{8.37}$$

Первые две диаграммы в разложении по перенормированной константе $\lambda$ не зависят от 4-импульса p. Поэтому из $\Sigma(0) = 0$ следует:

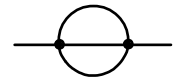
$$\frac{-\imath\lambda}{2}\int\frac{\imath}{\mathrm{k}^2 - m^2}\frac{d^4\mathrm{k}}{(2\pi)^4} - \imath\lambda\, A_1 = 0, \tag{8.38}$$

что даёт значение константы $A_1$. Оно автоматически сокращает две следующие диаграммы, сумма которых равна:

$$\frac{(-\imath\lambda)^2}{4}\int\frac{\imath^3\, d^4\mathrm{k}\, d^4\mathrm{q}/(2\pi)^8}{(\mathrm{k}^2 - m^2)(\mathrm{q}^2 - m^2)^2} + \frac{(-\imath\lambda)^2 A_1}{2}\int\frac{\imath^2\, d^4\mathrm{q}/(2\pi)^4}{(\mathrm{q}^2 - m^2)^2} = 0.$$

Таким образом, в этом случае можно даже не заниматься регуляризацией возникающих бесконечностей, сразу сокращая “вредные” диаграммы.

В пятой диаграмме (“заходящее Солнце”) уже требуется регуляризация для выделения расходящихся констант $I(0)$, $I'(0)$ и конечной функции $\tilde{I}(\mathrm{p})$:

$\frac{1}{6}$  $= \quad I(\mathrm{p}) = I(0) + I'(0)\,\mathrm{p}^2 + \tilde{I}(\mathrm{p}),$

где $\tilde{I}(0) = \tilde{I}'(0) = 0$. Сумма последних трёх диаграмм в разложении функции собственной энергии равна:

$$I(0) + I'(0)\,\mathrm{p}^2 + \tilde{I}(\mathrm{p}) + (-\imath\lambda)^2 \left\{ \frac{C_2}{2} \int \frac{\imath}{\mathrm{k}^2 - m^2} \frac{d^4\mathrm{k}}{(2\pi)^4} + A_2 + B_2\,\mathrm{p}^2 \right\}.$$

Нормировочное условие (8.37) для производной $\Sigma'(0) = 0$, даёт константу $B_2$ и сокращает бесконечность $I'(0)$:

$$I'(0) + (-\imath\lambda)^2\, B_2 = 0.$$

Из требования $\Sigma(0) = 0$, имеем связь $A_2$ и $C_2$:

$$I(0) + (-\imath\lambda)^2 \left\{ A_2 + \frac{C_2}{2} \int \frac{\imath}{\mathrm{k}^2 - m^2} \frac{d^4\mathrm{k}}{(2\pi)^4} \right\} = 0.$$

Выразим отсюда $A_2$, а произвольный пока контрчлен $C_2$ пригодится дальше при перенормировке 4-точечной вершинной функции, где он получит своё значение.

Окончательно, перенормированное выражение для 2-точечной вершинной функции имеет вид:

$$\imath\Gamma^{(2)}(\mathrm{p}) = \mathrm{p}^2 - m^2 - \tilde{I}(\mathrm{p}), \tag{8.39}$$

где явный вид для функции $\tilde{I}(\mathrm{p})$ получен на стр. 162. Пользуясь результатами этого же раздела, можно записать явный вид контрчлена в ведущем по $1/\nu$ приближении:

$$B_2 = \frac{\imath}{6(32\pi^2)^2} \frac{1}{\nu} + \ldots$$

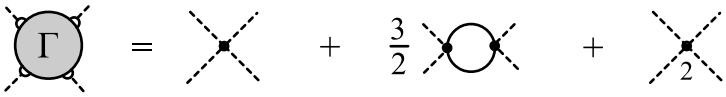
Несмотря на наличие в нём мнимой единицы, контрчлены, входящие в лагранжиан действительны, так как соответствующие ряды умножены на мнимую единицу ($B_1 = 0$):

$$\imath\Big[ B_2\,(-\imath\lambda)^2 + \ldots \Big] = \imath\, B_2 \lambda^2 + \ldots$$

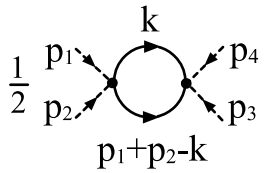
Перейдём теперь к перенормировке вершинной 4-функции.

## 6 Вершинная функция

• Перенормировка вершинной 4-функции втором порядке по теории возмущений не представляет труда. Запишем соответствующие этому приближению диаграммы Фейнмана (опустив одетые внешние линии):




Первая диаграмма равна $-\imath\lambda$. Вторая диаграмма определяется функцией $-\imath\lambda\Lambda(s)$, равной (стр. 158):




$$-\imath\lambda\Lambda(s) = \frac{1}{2} = \frac{(-\imath\lambda)^2}{2}\int\frac{\imath^2\, d^4\mathrm{k}/(2\pi)^4}{(\mathrm{k}^2-m^2)((\mathrm{p}-\mathrm{k})^2-m^2)},$$

где $\mathrm{p} = \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2$, $s = \mathrm{p}^2$ Она имеет логарифмическую расходимость, устраняемую вычитанием:

$$\Lambda(s) = \Lambda(0) + \tilde{\Lambda}(s).$$

Функция $\tilde{\Lambda}(s)$ конечна и равна нулю при $s = 0$. Симметризуя по входящим импульсам (добавляя диаграммы с $\mathrm{p} = \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_3$, $\mathrm{p} = \mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_4$), запишем вершинную функцию, в которую включим также диаграмму с контрчленом $C_2$:

$$\Gamma^{(4)}(s,t,u) = -\imath\lambda\{1 + \tilde{\Lambda}(s) + \tilde{\Lambda}(t) + \tilde{\Lambda}(u) + 3\Lambda(0)\} + (-\imath\lambda)^2\, C_2.$$

Для простоты выберем нормировочное условие при нулевых импульсах:

$$\Gamma^{(4)}(0,0,0) = -\imath\lambda, \tag{8.40}$$

что даёт значение контрчлена $C_2$:

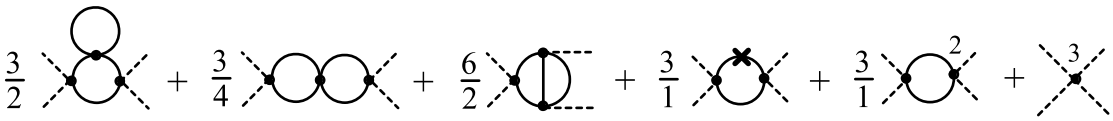
$$(-\imath\lambda)^2\, C_2 = 3\,\imath\lambda\,\Lambda(0), \tag{8.41}$$

которое сокращает бесконечный вклад и приводит к следующему выражению для регуляризованной вершинной функции:

$$\Gamma^{(4)}(s,t,u) = -\imath\lambda\{1 + \tilde{\Lambda}(s) + \tilde{\Lambda}(t) + \tilde{\Lambda}(u)\}. \tag{8.42}$$

Оно конечно и удовлетворяет нормировочному условию (8.40).

• Рассмотрим перенормировку в третьем порядке по $\lambda$. Для вершинной 4-функции добавляются следующие диаграммы:




Первые три соответствуют "обычной" теории возмущений, а последние три являются контрчленами. Их можно нарисовать сразу не совершая кропотливых спариваний по теореме Вика. Достаточно взять диаграммы второго порядка по теории возмущений и модифицировать их всеми возможными способами, добавляя вершины контрчленов $A_k$, $B_k$ и $C_k$. Так как внешние линии мы не трогаем, модификации может быть подвергнута единственная петлевая диаграмма ("рыба"). У неё можно заменить одну из вершин на $C_2$ (которая имеет второй порядок по $\lambda$) или добавить контрчленную вершину крестика на один из внутренних пропагаторов. Это может быть только вершина первого порядка пропорциональная $A_1$, т.к. там уже присутствуют две "обычные" вершины, дающие $\lambda^2$. Последняя диаграмма – это вершинный контрчлен $C_3$, имеющий порядок $\lambda^3$.

Симметрийный множитель при четвёртой диаграмме можно "угадать". Пропагатор с вершиной-крестиком $A_1$ в 2-точечной функции Грина имеет единичный коэффициент, он же будет и в "одетой" линии "рыбы" (сравниваем первую и четвёртую диаграммы с первыми двумя на стр. 186). Можно его вычислить и честно, пользуясь приёмом со страницы 124. Действительно, эта диаграмма возникает при спариваниях с членом вида $A_1\,\varphi_{\mathrm{x}}^4\varphi_{\mathrm{y}}^4\varphi_{\mathrm{z}}^2/(4\cdot 4!^2)$. Поэтому:

$$(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4\,\mathrm{x}^4\mathrm{y}^4\mathrm{z}^2) = 8(\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3\mathrm{x}_2\,\mathrm{x}^3\mathrm{y}^4\mathrm{z}^2) + 2(\mathrm{x}_1\mathrm{z})(\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3\mathrm{x}_2\,\mathrm{x}^4\mathrm{y}^4\mathrm{z}^2)$$

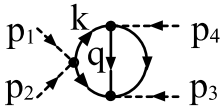
Второе слагаемое необходимо отбросить, т.к. внешние линии не связаны с внутренней вершиной z контрчлена $A_1$. Продолжая спаривания, игнорирующие z, получаем сумму трёх слагаемых вида $(\mathrm{x}_1\mathrm{x})(\mathrm{x}_2\mathrm{x})(\mathrm{x}_3\mathrm{y})(\mathrm{x}_4\mathrm{y})$, умноженных на $(4!^2/2)(\mathrm{x}^2\mathrm{y}^2\mathrm{z}^2) = 4\cdot 4!^2\,(\mathrm{xy})(\mathrm{xz})(\mathrm{yz}) + \ldots$.

В пятой диаграмме контрчленная вершина $C_2$ возникает при спаривании с $(-\imath\lambda)^3\,C_2\,\varphi_{\mathrm{x}}^4\varphi_{\mathrm{y}}^4/4!^2$ (см. разложение экспоненты на стр. 183). Это выражение в 2 раза больше чем его аналог во втором порядке по теории возмущений. Поэтому симметрийный множитель этой диаграммы в 2 раза больше, чем у "обычной рыбы".

Первая и четвёртая (контрчлен $A_1$) диаграммы благополучно сокращаются, как сокращались раннее диаграммы первого порядка в функции собственной энергии. При этом для $A_1$ мы, естественно, берём значение, полученное при перенормировке функции собственной энергии.

Третью диаграмму мы обозначим, как и рыбу, функцией $\Lambda$, но с двумя аргументами:

$$-\imath\lambda\Lambda(\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_2,\,\mathrm{p}_4) = \frac{1}{2}$$




Учитывая правила Фейнмана и законы сохранения в вершинах, запишем её явный вид:

$$\frac{(-\imath\lambda)^3}{2}\int\frac{\imath^4\,d^4\mathrm{k}\,d^4\mathrm{q}/(2\pi)^8}{(\mathrm{k}^2-m^2)((\mathrm{p}-\mathrm{k})^2-m^2)(\mathrm{q}^2-m^2)((\mathrm{k}+\mathrm{p}_4-\mathrm{q})^2-m^2)},$$

где $\mathrm{p}=\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_2$. В этом выражении можно учесть значение функции $\Lambda(\mathrm{p})$:

$$\Lambda(\mathrm{p},\,\mathrm{p}_4) = -\imath\lambda\int\frac{\imath^2\,d^4\mathrm{k}/(2\pi)^4}{(\mathrm{k}^2-m^2)((\mathrm{p}-\mathrm{k})^2-m^2)}\,\Lambda(\mathrm{k}+\mathrm{p}_4).$$

Подставляя разложение $\Lambda(\mathrm{p}) = \Lambda(0)+\tilde{\Lambda}(\mathrm{p})$, имеем:

$$\Lambda(\mathrm{p},\,\mathrm{p}_4) = 2\Lambda(0)\Lambda(\mathrm{p}) - \imath\lambda\int\frac{\imath^2\,d^4\mathrm{k}/(2\pi)^4}{(\mathrm{k}^2-m^2)((\mathrm{p}-\mathrm{k})^2-m^2)}\,\tilde{\Lambda}(\mathrm{k}+\mathrm{p}_4).$$

Интеграл во втором слагаемом расходится логарифмическим образом (на самом деле чуть быстрее, т.к. $\tilde{\Lambda}(\mathrm{p}) \to \ln \mathrm{p}^2$, см. стр.161). Он может быть регуляризован вычитанием константы. В результате, еще раз подставляя $\Lambda(\mathrm{p}) = \Lambda(0)+\tilde{\Lambda}(\mathrm{p})$, получаем:

$$\Lambda(\mathrm{p},\,\mathrm{p}_4) = \Lambda(0,\,0) + 2\,\Lambda(0)\tilde{\Lambda}(\mathrm{p}) + \tilde{\Lambda}(\mathrm{p},\,\mathrm{p}_4), \tag{8.43}$$

где $\tilde{\Lambda}(\mathrm{p},\,\mathrm{p}_4)$ – конечная функция, равная нулю при нулевых импульсах. Обратим внимание, что в отличии от "рыбы" из второго порядка теории возмущений, не все получившиеся бесконечности являются аддитивными константами (второе слагаемое).

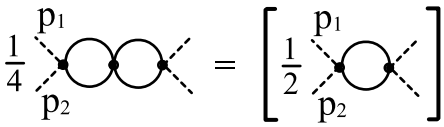
Теперь необходимо симметризовать по 6 комбинациям импульсов. В результате, вклад от этой диаграммы в вершинную функцию равен:

$$\Lambda(\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_2,\,\mathrm{p}_4) + 5\ \mathrm{perm} = \tag{8.44}$$

$$6\,\Lambda(0,\,0) + 4\,\{\tilde{\Lambda}(s)+\tilde{\Lambda}(t)+\tilde{\Lambda}(u)\}\,\Lambda(0) + \{\tilde{\Lambda}(\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_2,\,\mathrm{p}_4)+5\ \mathrm{perm}\}$$

(его необходимо умножить на $-\imath\lambda$). Слагаемое "5 perm" означает пять перестановок (permutation), т.е. слагаемые $\Lambda(\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_3,\,\mathrm{p}_4)$, $\Lambda(\mathrm{p}_1+\mathrm{p}_4,\,\mathrm{p}_3)$, $\Lambda(\mathrm{p}_2+\mathrm{p}_3,\,\mathrm{p}_1)$, $\Lambda(\mathrm{p}_2+\mathrm{p}_4,\,\mathrm{p}_1)$, $\Lambda(\mathrm{p}_3+\mathrm{p}_4,\,\mathrm{p}_1)$ При этом, во втором аргументе функции может стоять любой импульс, не входящий в сумму импульсов из первого аргумента.

Вторая диаграмма является цепочкой двух рыб и равна их произведению (стр. 138):

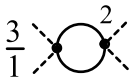



$$= (-\imath\lambda)\Lambda^2(s).$$

Поэтому, после симметризации и подстановки $\Lambda(s) = \Lambda(0) + \tilde{\Lambda}(s)$, получаем следующий вклад в вершинную функцию $\Gamma^{(4)}/(-\imath\lambda)$:

$$3\,\Lambda^2(0) + 2\,\{\tilde{\Lambda}(s) + \tilde{\Lambda}(t) + \tilde{\Lambda}(t)\}\,\Lambda(0) + \tilde{\Lambda}^2(s) + \tilde{\Lambda}^2(t) + \tilde{\Lambda}^2(t). \qquad (8.45)$$

Пятая диаграмма (с вершиной $C_2$) эквивалентна диаграмме обычной "рыбы" $(-\imath\lambda)\Lambda(s)$ умноженной на 2 (симметрийный множитель) и на $(-\imath\lambda)C_2 = -3\Lambda(0)$ (коэффициент контрчлена). Поэтому в $\Gamma^{(4)}/(-\imath\lambda)$ она даёт вклад:




$$= -6\,\{\Lambda(s)+\Lambda(t)+\Lambda(u)\}\,\Lambda(0)$$

или подставляя разложение $\Lambda(s) = \Lambda(0) + \tilde{\Lambda}(s)$:

$$-18\,\Lambda^2(0) - 6\,\{\tilde{\Lambda}(s) + \tilde{\Lambda}(t) + \tilde{\Lambda}(u)\}\,\Lambda(0). \qquad (8.46)$$

При сложении выражений (8.44), (8.45) и (8.46) расходимости вида $\{\tilde{\Lambda}(s)+\tilde{\Lambda}(t)+\tilde{\Lambda}(u)\}\,\Lambda(0)$ замечательным образом сокращаются и остаётся только одно бесконечное аддитивное слагаемое:

$$6\,\Lambda(0,\,0) + 3\,\Lambda^2(0) - 18\,\Lambda^2(0) = 6\,\Lambda(0,\,0) - 15\,\Lambda^2(0).$$

Эта константа ликвидируется контрчленом $C_3$ (шестая диаграмма).

Окончательно, перенормированная вершинная 4-функция имеет вид:

$$\Gamma^{(4)}(\mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_4) = -\imath\lambda\Big\{1+\tilde{\Lambda}(s)+\tilde{\Lambda}(t)+\tilde{\Lambda}(u)+\tilde{\Lambda}^2(s)+\tilde{\Lambda}^2(t)+\tilde{\Lambda}^2(t)\Big\} \quad (8.47)$$

$$-\imath\lambda\Big\{\tilde{\Lambda}(\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3) + 5 \text{ perm}\Big\},$$

где, как обычно, $s = (\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_2)^2$, $t = (\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_3)^2$ и $u = (\mathrm{p}_1 + \mathrm{p}_4)^2$.

Таким образом, сокращение расходимостей является нетривиальным эффектом. Для устранения бесконечности $\{\tilde{\Lambda}(s) + \tilde{\Lambda}(t) + \tilde{\Lambda}(u)\}\,\Lambda(0)$, зависящей от импульсов, потребовалось учесть две диаграммы "обычной" теории возмущений и одну контрчленную диаграмму. Можно показать, что подобные сокращения будут происходить во всех порядках по теории возмущений.

# Глава 9

# Ренормгруппа

Группа преобразований параметров модели при которых физические следствия теории не меняются, называется ренормгруппой. Подобная симметрия приводит к дифференциальным уравнениям для функций Грина, справедливых во всех порядках теории возмущений. К сожалению, коэффициенты этих уравнений могут быть вычислены только приближено (например, по теории возмущений). Однако, даже с приближенными коэффициентами, решения уравнений содержат новую информацию. Ренормгрупповых преобразований существует достаточно много и мы рассмотрим только некоторые из них.

---

**Квантовый мир**

**Сергей С. Степанов**

Эта книга находится в процессе создания. Её последняя версия и другие материалы находятся на сайте: http://synset.com. Там же можно найти первый том: **I. Механика**
Замеченные ошибки и вопросы просьба присылать по адресу: steps137, затем собачка и gmail.com.

(c) 2015. Печать: 2 июля 2017 г.

## 1 Произвол в выборе точки нормировки

Рассмотрим сначала ренормгрупповые следствия произвола в выборе нормировочных условий, при помощи которых определяются перенормированные константы $\lambda$, $m$ (стр. 175). Пусть, например:

$$\imath\Gamma^{(2)}\Big|_{\mathrm{p}^2=\mu^2} = \mu^2 - m^2, \qquad \imath\,\frac{d\Gamma^{(2)}}{d\mathrm{p}^2}\Big|_{\mathrm{p}^2=\mu^2} = 1, \qquad \imath\Gamma^{(4)}\Big|_{\mathrm{p}\sim\mu} = \lambda. \tag{9.1}$$

Точка нормировки $\mu$ – это фиксированное значение 4-импульса и симметричный выбор $\mathrm{p}\sim\mu$ импульсов $\{\mathrm{p}\} = \mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_4$ определён на стр. 175. Вычисленные с точностью до $\lambda_0^2$ затравочные вершинные функции, умноженные на $Z^{n/2}$ равны перенормированным функциям:

$$\imath\,\Gamma^{(2)}(\mathrm{p}) \;=\; Z\left[\mathrm{p}^2 - m_0^2 - \Sigma_0(0) - \Sigma_0'(0)\,\mathrm{p}^2 - \tilde\Sigma_0(\mathrm{p})\right], \tag{9.2}$$

$$\imath\,\Gamma^{(4)}(\mathrm{p}_1...\mathrm{p}_4) = \lambda_0\,Z^2\left[1 + 3\Lambda_0(0) + \tilde\Lambda_0(s) + \tilde\Lambda_0(t) + \tilde\Lambda_0(u)\right]. \tag{9.3}$$

Их подстановка в нормировочные условия (9.10) приводит к связи затравочных и пренормированных параметров модели (с точностью до $\lambda^2$):

$$Z = 1 + \Sigma_0'(0) + \tilde\Sigma_0'(\mu), \qquad m^2 = m_0^2\,Z + \Sigma_0(0) - \tilde\Sigma_0(\mu) - \mu^2\,\tilde\Sigma_0'(\mu),$$

$$\lambda = \lambda_0\,Z\,[1 + 3\Lambda_0(0) + 3\tilde\Lambda_0(3\mu^2/4)].$$

В результате, параметры $\lambda$, $m$ и множитель $Z$ зависят от $\mu$:

$$\lambda = \lambda(\lambda_0,\, m_0,\, Q,\, \mu), \qquad m = m(\lambda_0,\, m_0,\, Q,\, \mu), \qquad Z = Z(\lambda_0,\, m_0,\, Q,\, \mu),$$

где $Q$ – параметр регуляризации. Им является, например, импульс обрезания или $1/\nu$ и $\lambda_0 \mapsto \lambda_0 M^{2\nu}$ в размерной регуляризации.

Выбор точки нормировки $\mu$ произволен. Будем лишь считать, что $\mathrm{p}\sim\mu$ попадает в область импульсов, где вершинные функции действительны, чтобы действительными были параметры $\lambda$, $m$ в (9.10). Разные значения $\mu$ приводят к различным *определениям* перенормированных констант $\lambda$ и $m$, т.е. последние являются функцией $\mu$. При этом произвол в выборе $\mu$ не должен влиять на однозначность предсказаний теории. Так, пусть сначала была выбрана простейшая нормировка при $\mu = 0$. В результате сравнения с экспериментом определяются параметры модели $\lambda, m$ и получается перенормированная функция $\Gamma^{(4)}(\{\mathrm{p}\},\, \lambda,\, m)$. Однако, ни что не мешает переопределить константу $\lambda$, положив $\lambda_\mu = \imath\Gamma^{(4)}(\{\mathrm{p}\sim\mu\},\, \lambda,\, m)$. Затем выразить $\lambda$ через $\lambda_\mu$ и подставить её в вершинную функцию, получить $\Gamma^{(4)}(\mathrm{p},\, \lambda_\mu,\, m, \mu)$. Значения функции от этого не изменятся.

Сформулируем в аналитическом виде независимость от точки нормировки. Для этого запишем связь неперенормированной функции $\Gamma_0^{(n)}$, которая от $\mu$ *не зависит* и перенормированной функции $\Gamma^{(n)}$, зависящей от $\mu$:

$$\Gamma_0^{(n)}(\{\mathrm{p}\};\, \lambda_0,\, m_0,\, Q) = Z^{-n/2}(\lambda_0, m_0, \mu, Q)\; \Gamma^{(n)}(\{\mathrm{p}\};\, \lambda,\, m,\, \mu), \qquad (9.4)$$

Написав это соотношение для двух точек нормировки $\mu_1$, $\mu_2$ и разделив одно на другое, получаем:

$$\Gamma^{(n)}(\{\mathrm{p}\};\, \lambda_2,\, m_2,\, \mu_2) = z(\lambda_1,\, m_1, \mu_1,\, \mu_2)\, \Gamma^{(n)}(\{\mathrm{p}\};\, \lambda_1,\, m_1,\, \mu_1). \qquad (9.5)$$

где введено отношение:

$$z = \frac{Z^{-n/2}(\mu_1)}{Z^{-n/2}(\mu_2)} = 1 + \frac{n}{2}\left[\tilde{\Sigma}_0'(\mu_2) - \tilde{\Sigma}_0'(\mu_1)\right] + O(\lambda^3).$$

Множитель $z$ в (9.5) конечен (т.к. конечны перенормированные функции Грина) и регуляризационный параметр $Q$ из него должен выпасть ($Z$ содержит $Q$ в $\Sigma_0'(0)$). Выше это продемонстрировано во втором порядке по $\lambda$, где учтено, что $(1 + a\,\lambda^2)^{-n/2} \approx 1 - (n/2)\,a\,\lambda^2$ и дробь разложена по $\lambda$. Заметим также, что в $z$ зависимость от $\lambda_0$ и $m_0$ исключена при помощи первой нормировки $\lambda_0 = \lambda_0(\lambda_1, m_1, \mu_1, Q)$ и $m_0 = m_0(\lambda_1, m_1, \mu_1, Q)$ (зависимость от $Q$ снова должна выпасть).

Таким образом, если в перенормированной вершинной функции перейти от параметров $\lambda_1$, $m_1$, $\mu_1$ к другому набору $\lambda_2$, $m_2$, $\mu_2$, то её изменение будет мультипликативным (зависимость от импульсов не изменится, но вся функция умножится на константу, зависящую от параметров $\lambda_1$, $m_1, \mu_1$, $\mu_2$). Такое поведение вершинных функций и называется *мультипликативной ренормгруппой.*

В ряде случаев перенормировку можно провести таким образом, чтобы безразмерная величина $Z$ не зависела от массы $m$. Тогда, например, для безразмерной 4-вершины:

$$\Gamma^{(4)}\Big(\Big\{\frac{\mathrm{p}}{\mu_1}\Big\};\, \lambda_2,\, \frac{m_2}{\mu_2}\Big) = z\Big(\lambda_1, \frac{\mu_1}{\mu_2}\Big)\; \Gamma^{(4)}\Big(\Big\{\frac{\mathrm{p}}{\mu_1}\Big\};\, \lambda_1,\, \frac{m_1}{\mu_1}\Big).$$

Ещё проще выглядит изменение нормировки $\mu$ для инвариантных зарядов (стр. 8.8): $\xi = \Gamma^{(n)}(\mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_n)\,[\mathrm{G}(\mathrm{p}_1) \cdot ... \cdot \mathrm{G}(\mathrm{p}_\mathrm{n})]^{1/2}$. В этом случае ренормгрупповое преобразование выглядит следующим образом:

$$\xi\Big(\Big\{\frac{\mathrm{p}}{\mu_1}\Big\};\, \lambda_2,\, \frac{m_2}{\mu_2}\Big) = \xi\Big(\Big\{\frac{\mathrm{p}}{\mu_1}\Big\};\, \lambda_1,\, \frac{m_1}{\mu_1}\Big). \qquad (9.6)$$

В силу этого соотношения функции $\xi$ и получили своё название.

## 2 Ренормгрупповое уравнение

Перейдём от функционального ренормгруппового уравнения (9.5) к дифференциальному. Для этого продифференцируем по $\mu$ связь неперенормированной и перенормированной вершинных функций (9.4)

$$\Gamma_0^{(n)}(\{\mathrm{p}\};\, \lambda_0,\, m_0,\, Q) = Z^{-n/2}(\lambda_0, m_0, \mu, Q)\; \Gamma^{(n)}(\{\mathrm{p}\};\, \lambda,\, m,\, \mu),$$

Левая часть этого соотношения от $\mu$ не зависит и производная от неё будет равна нулю:

$$\frac{\partial\Gamma^{(n)}}{\partial\mu} + \frac{\partial\Gamma^{(n)}}{\partial m}\,\frac{\partial m}{\partial\mu} + \frac{\partial\Gamma^{(n)}}{\partial\lambda}\,\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} - \frac{n}{2Z}\frac{\partial Z}{\partial\mu}\;\Gamma^{(n)} = 0,$$

где при взятии производной учтены неявные зависимости

$$\lambda = \lambda(\lambda_0,\, m_0,\, Q,\, \mu), \qquad m = m(\lambda_0,\, m_0,\, Q,\, \mu), \qquad Z = Z(\lambda_0,\, m_0,\, Q,\, \mu)$$

с фиксированными значениями затравочных величин. Перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\left[\mu\,\frac{\partial}{\partial\mu} + \alpha\, m\,\frac{\partial}{\partial m} + \beta\,\frac{\partial}{\partial\lambda} - n\,\gamma\right]\Gamma^{(n)} = 0, \tag{9.7}$$

где введены следующие *безразмерные* функции:

$$\alpha = \frac{\mu}{m}\,\frac{\partial m}{\partial\mu}, \qquad \beta = \mu\,\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}, \qquad \gamma = \frac{\mu}{2Z}\,\frac{\partial Z}{\partial\mu}. \tag{9.8}$$

Если $m_0$ и $\lambda_0$ выразить через $\lambda$ и $m$ (при данном $\mu$), то эти функции не будут зависеть от регуляризационного параметра (в силу их конечности). Поэтому безразмерные величины $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ должны зависеть от $\lambda$ и отношения $\mu/m$:

$$\alpha = \alpha\Big(\lambda,\, \frac{\mu}{m}\Big), \qquad \beta = \beta\Big(\lambda,\, \frac{\mu}{m}\Big), \qquad \gamma = \gamma\Big(\lambda,\, \frac{\mu}{m}\Big). \tag{9.9}$$

Возможно, конечность $\gamma$ не столь очевидна, так как в её определение входит отношение бесконечных величин. Однако, в уравнении (9.7) все коэффициенты конечны, а, следовательно, и $\gamma$ будет конечной. Аналогично, конечным выше было отношение $z = Z^{-n/2}(\mu_1)/Z^{-n/2}(\mu_2)$.

Функции $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ можно вычислить по теории возмущений с некоторой точностью. Так как ренормгрупповое уравнение точное, можно надеяться что его решение с такими приближенными коэффициентами даст больше информации о поведении $\Gamma^{(n)}$, чем точность, с которой вычислены $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$.

Выберем нормировочные условия в которых от $\mu$ зависит только константа связи, а точный пропагатор нормирован при нулевом импульсе:

$$\imath\Gamma^{(2)}\Big|_{\mathrm{p}^2=0} = -m^2, \qquad \imath\,\frac{d\Gamma^{(2)}}{d\mathrm{p}^2}\Big|_{\mathrm{p}^2=0} = 1, \qquad \imath\Gamma^{(4)}\Big|_{\mathrm{p}\sim\mu} = \lambda. \tag{9.10}$$

Так как нормировочные условия для пропагатора не зависят от $\mu$, от него не будет зависеть норма поля $Z$ и перенормированная масса $m$:

$$Z = 1 + \Sigma_0'(0) + O(\lambda_0^3), \qquad m^2 = m_0^2 + \Sigma_0(0) + m_0^2\,\Sigma_0'(0) + O(\lambda_0^3),$$

где учтены выражения для вершинных функций (9.2), (9.3) и величины разложены в ряд по $\lambda_0$. Следовательно, $\alpha = \gamma = 0$.

В определении преренормированной константы $\lambda$ точка нормировки присутствует, поэтому она зависит от $\mu$:

$$\lambda = \lambda_0\,\{1 + 3\Lambda(0) + 3\tilde{\Lambda}(4\mu^2/3) + O(\lambda_0^2)\}.$$

Учитывая определение (9.8) для $\beta$-функции, имеем:

$$\beta = 3\lambda\mu\,\frac{\partial\tilde{\Lambda}(4\mu^2/3)}{\partial\mu} + O(\lambda^3).$$

Функция $\tilde{\Lambda}(s)$ при больших и малых значениях $s$ имеет следующее поведение (стр. 161):

$$\tilde{\Lambda}(s) \approx \frac{\lambda}{32\,\pi^2}\ln\frac{s}{m^2}, \quad s\to\infty; \qquad \tilde{\Lambda}(s) \approx -\frac{\lambda}{192\,\pi^2}\,\frac{s}{m^2}, \quad s\to 0.$$

Поэтому функция $\beta$, с точностью до $\lambda^2$ равна:

$$\beta = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}, \quad \mu\to\infty; \qquad \beta = -\frac{\lambda^2}{24\pi^2}\,\frac{\mu^2}{m^2}, \quad \mu\to 0. \tag{9.11}$$

Найдём решение (9.7) при больших $\mu$ (когда $\beta = \beta_0\lambda^2 \not\sim \mu$):

$$\mu\frac{\partial\Gamma^{(n)}}{\partial\mu} + \beta(\lambda)\,\frac{\partial\Gamma^{(n)}}{\partial\lambda} = 0 \qquad => \qquad \frac{\partial\Gamma^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial\Gamma^{(n)}}{\partial y} = 0.$$

где сделаны замены $x = \ln\mu$, $y = -1/(\beta_0\lambda)$. Это уравнение имеет решение $\Gamma^{(n)} = F(x-y)$, где $F$ – произвольная функция (доказывается заменами $u = x+y$, $v = x-y$). Таким образом, вершинная функция должна зависеть от комбинации $\ln\mu + 1/(\beta_0\lambda)$ или:

$$\bar{\lambda}(\mu) = \frac{\lambda}{1 + \beta_0\lambda\ln(\mu/m)}, \tag{9.12}$$

где масса $m$ должна возникать из соображения размерностей.

Соотношение (9.12) тесно связано с понятием бегущей константы связи, которое будет рассмотрено чуть позже. Ренормгрупповое уравнение позволяет подойти к этому понятию с другой стороны. Исключим из уравнения (9.7) производную по $\mu$. В системе единиц $c = \hbar = 1$ (стр. 156), в 4-мерном пространстве, координаты, импульсы, массы и поле имеют следующие размерности массы $M$:

$$\mathrm{x} \sim M^{-1}, \qquad \mathrm{p} \sim m \sim \mu \sim M, \qquad \varphi \sim M, \qquad \lambda \sim M^0. \tag{9.13}$$

Функции Грина $\mathrm{G}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n)$ являются средним произведения $n$ полевых операторов, а их интеграл по $d^4\mathrm{x}_1 ... d^4\mathrm{x}_n \sim M^{-4n}$ равен (стр. 172) фурье-образу, умноженному на функцию Дирака $\delta(\mathrm{p}_1 + ... + \mathrm{p}_n)$. Интеграл от последней по $d^4\mathrm{p}_1 \sim M^4$ равен единице, поэтому функция Дирака *от импульсов* имеет размерность $M^{-4}$. В результате:

$$\mathrm{G}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n) \sim M^n, \qquad \mathrm{G}(\mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_n) \sim M^{4-3n}. \tag{9.14}$$

Наконец, вершинная функция получается делением импульсной функции Грина на $n$ пропагаторов с размерностью $M^{-2}$, поэтому:

$$\Gamma^{(n)}(\mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_n) \sim M^{4-n}, \qquad \Gamma^{(2)} \sim \Sigma(\mathrm{p}) \sim M^2. \tag{9.15}$$

Поэтому можно написать:

$$\Gamma^{(n)}(t\mathrm{p}_1, ..., t\mathrm{p}_n;\, tm,\, t\mu,\, \lambda) = t^{4-n}\, \Gamma^{(n)}(\mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_n;\, m,\, \mu,\, \lambda),$$

что отражает изменение *всех* величин размерности массы в $t$ раз. Беря производную по $t$ при $t = 1$, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}_i \frac{\partial \Gamma^{(n)}}{\partial \mathrm{p}_i} + m\, \frac{\partial \Gamma^{(n)}}{\partial m} + \mu\, \frac{\partial \Gamma^{(n)}}{\partial \mu} = (4 - n)\, \Gamma^{(n)}. \tag{9.16}$$

Сумму производных по 4-импульсам можно заменить на одну производную по параметру $x$, если считать, что $\Gamma^{(n)} = \Gamma^{(n)}(x\mathrm{p}_1, ..., x\mathrm{p}_n;\, m, \mu, \lambda)$. Тогда

$$\frac{\partial \Gamma^{(n)}}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Gamma^{(n)}}{\partial (x\mathrm{p}_i)} \frac{\partial (x\mathrm{p}_i)}{\partial x} = \frac{1}{x} \sum_i \frac{\partial \Gamma^{(n)}}{\partial \mathrm{p}_i} \mathrm{p}_i.$$

Подставляя (9.16) в (9.7), получаем уравнение ренормгруппы в виде:

$$\left[ D - n\gamma + (\alpha - 1)\, m \frac{\partial}{\partial m} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} - x \frac{\partial}{\partial x} \right] \Gamma^{(n)}(x\mathrm{p}_1, ..., x\mathrm{p}_n;\, m, \lambda) = 0, \tag{9.17}$$

где $D = 4 - n$ – размерность вершинной функции и опущена зависимость от $\mu$. Решение (9.17) даёт информацию о том, как вершинная функция, зависящая от 4-импульсов $x\mathrm{p}_i$, связана с той же функцией при исходных значениях $\mathrm{p}_i$. Т.е. как она ведёт себя при изменении масштабов импульсов (и *только* импульсов, без затрагивания $m$ и $\mu$) в $x$ раз.

• Будем считать, что при больших $\mu$ функции $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ зависят только от $\lambda$. Запишем решение уравнения ренормгруппы в этом случае не конкретизируя явный вид функций $\alpha = \alpha(\lambda)$, $\beta = \beta(\lambda)$ и $\gamma = \gamma(\lambda)$. Для этого сделаем подстановку:

$$\Gamma^{(n)} = x^D \exp\Big\{ n \int\limits_0^\lambda \frac{\gamma(t)}{\beta(t)}\, dt \Big\}\, F(x\mathrm{p}_1, ..., x\mathrm{p}_n;\, m,\, \lambda).$$

Несложно проверить, что функция $F$ удовлетворяет однородному линейному уравнению:

$$\Big[ (\alpha - 1)\, m \frac{\partial}{\partial m} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} - x \frac{\partial}{\partial x} \Big]\, F(x\mathrm{p}_1, ..., x\mathrm{p}_n;\, m, \lambda) = 0, \qquad (9.18)$$

В случае больших $\mu$ или $\mu \gg m$, пренебрежём первым слагаемом в уравнении и положим $\beta = \beta_0\, \lambda^2$:

$$\Big[ \beta_0 \lambda^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} - x \frac{\partial}{\partial x} \Big]\, F(x\mathrm{p}_1, ..., x\mathrm{p}_n;\, \lambda) = 0,$$

Оно, как и выше, решается заменами $z = \ln x$, $y = -1/(\beta_0 \lambda)$ и, благодаря знаку минус, приходим к выводу, что вершинная функция должна зависеть от комбинации:

$$\bar{\lambda}(\lambda, x) = \frac{\lambda}{1 - \beta_0 \lambda \ln x}, \qquad (9.19)$$

где $\beta_0 = 3/16\pi^2$. Таким образом, при увеличении значений импульсов (или эквивалентно параметра $x$) должна расти бегущая константа связи. Стоит сравнить это выражение с (9.31), которое было получено при помощи суммирования бесконечной цепочки связанных цикличных диаграмм.

Мы затронули только верхушку айсберга, под названием ренормгрупповой подход. Существуют самые разнообразные вариации уравнения ренормгруппы. Кроме этого, формулируются различные способы проведения перенормировки. Например, в *схеме минимальных вычитаний* контрчлены подбирают так, что они содержат только сингулярные по $1/\nu$ части, а конечные (зависящие от параметра размерной регуляризации $M$) включают в перенормированные вершинные функции. В этом случае, можно показать, что функции $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ зависят только от $\lambda$ при любых $\mu$. Впрочем, их вычисление всё равно требует теории возмущений и определённой доли веры в то, что решения уравнения ренормгруппы с такими приближенными коэффициентами, действительно, отражает поведение точной вершинной функции.

## 3 Функция Гелл-Манна–Лоу

При фиксированных $\lambda, m, \mu$, существует связь затравочных величин и регуляризационного параметра $Q$, например, $\lambda_0 = \lambda_0(\lambda,\, m,\, \mu,\, Q)$. Произвол в выборе $Q$, $\lambda_0$ также не должен сказываться на результатах. Перенормированная константа $\lambda$ при регуляризации обрезанием импульса (стр. 177, 159) имеет вид ($\mu = 0$):

$$\lambda = \lambda_0\, Z\left[1 + 3\,\Lambda_0(0)\right] = \lambda_0 - \frac{3\lambda_0^2}{32\,\pi^2}\,\ln\!\Big(\frac{Q^2}{e\,m_0^2}\Big) + O(\lambda_0^3), \tag{9.20}$$

где для краткости вместо 1 добавлен множитель $\ln e = 1$ в знаменателе под логарифмом. Связь $\lambda = \lambda(\lambda_0,\, m_0,\, Q)$ можно обратить с той-же точностью по константе связи:

$$\lambda_0 = \lambda + \frac{3\lambda^2}{32\,\pi^2}\,\ln\!\Big(\frac{Q^2}{e\,m^2}\Big) + O(\lambda^3). \tag{9.21}$$

Обратим внимание на плюс (см. стр. 177) и переход к перенормированной $m$ (что можно сделать с точностью до $\lambda^2$). При фиксированных константах $\lambda$, $m$ (которые получаются при сравнении предсказаний теории с экспериментом), (9.21) даёт связь затравочной константы $\lambda_0 = \lambda_0(\lambda,\, m,\, Q)$ с регуляризационным параметром $Q$. Рассмотрим отношение двух таких констант, соответствующих параметрам $Q_2$ и $Q_1$:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{1 + \frac{3\lambda}{32\,\pi^2}\,\ln\!\Big(\frac{Q_2^2}{e\,m^2}\Big) + O(\lambda^2)}{1 + \frac{3\lambda}{32\,\pi^2}\,\ln\!\Big(\frac{Q_1^2}{e\,m^2}\Big) + O(\lambda^2)} = 1 + \frac{3\lambda}{32\,\pi^2}\,\ln\!\Big(\frac{Q_2^2}{Q_1^2}\Big) + O(\lambda^2),$$

где знаменатель разложен в ряд с точностью до $\lambda$ (перед ln появляется минус) и с этой же точностью перемножен с числителем. Наконец, сохраняя удерживаемую точность, можно $\lambda$ заменить на $\lambda_1$:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1 + \frac{3\lambda_1}{16\,\pi^2}\,\ln\!\Big(\frac{Q_2}{Q_1}\Big) + O(\lambda^2), \tag{9.22}$$

В этом выражении масса $m$ отсутствует. Аналогичная ситуация будет происходить и в общем случае. Действительно, $\lambda_0$ – безразмерная величина, а $Q_i$ и $m$ имеют размерность массы, поэтому:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = f\Big(\lambda_1,\, \frac{Q_2}{Q_1},\, \frac{m}{Q_1}\Big).$$

*Если* $m \ll Q_i$, то можно положить $m/Q_1 = 0$:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = F\Big(\lambda_1,\, \frac{Q_2}{Q_1}\Big). \tag{9.23}$$

Будем считать, что это соотношение выполняется в любом порядке по теории возмущений (по крайней мере при больших $Q_i$).

Перейдём от функционального уравнения (9.23) к дифференциальному. Для этого положим $\lambda_1 = \lambda_0$, $\lambda_2 = \lambda_0 + d\lambda_0$ и разложим функцию в ряд по $dQ/Q$:

$$\frac{\lambda_0 + d\lambda_0}{\lambda_0} = F\Big(\lambda_0,\, \frac{Q + dQ}{Q}\Big) = F\Big(\lambda_0,\, 1\Big) + F'\Big(\lambda_0,\, 1\Big)\,\frac{dQ}{Q}.$$

Введём *функцию Гелл-Манна–Лоу*:

$$\beta(\lambda_0) = \lambda_0\, F'\Big(\lambda_0,\, 1\Big) \equiv \lambda_0\, \frac{\partial F(\lambda_0,\, t)}{\partial t}\Big|_{t=1}. \tag{9.24}$$

Она зависит только от затравочной константы $\lambda_0$. В результате, уравнение для функции $\lambda_0 = \lambda_0(Q)$ принимает вид:

$$\frac{d\lambda_0}{d\ln Q} = \beta(\lambda_0), \tag{9.25}$$

решение которого равно:

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\lambda_0}{\beta(\lambda_0)} = \ln\frac{Q_2}{Q_1}. \tag{9.26}$$

К сожалению, точное выражение для функции Гелл-Манна–Лоу неизвестно. Лучшее, что пока мы можем сделать, это найти её при помощи теории возмущений, подставляя (9.22) в определение (9.24):

$$\beta(\lambda_0) = \frac{3\lambda_0^2}{16\,\pi^2}.$$

Используя это значение, из (9.26) имеем:

$$\frac{1}{\lambda_2} + \frac{3}{16\pi^2}\,\ln Q_2 = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{3}{16\pi^2}\,\ln Q_1.$$

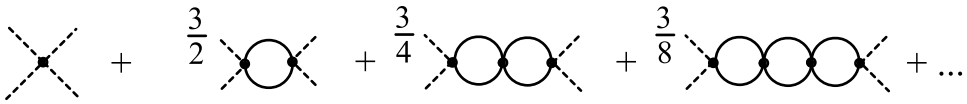
Слева и справа стоят независимые величины. Приравнивая их константе (не зависящей от $Q$, а, следовательно, конечной) это решение можно переписать в виде:

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{1 - \dfrac{3\lambda}{32\pi^2}\,\ln\dfrac{Q^2}{e\,m^2}} \tag{9.27}$$

Если разложить в ряд знаменатель, то снова получается (9.21). Однако, т.к. уравнение (9.25) учитывает общие свойства функции $\lambda_0(Q)$, то можно предположить, что это решение более точное, чем (9.21). Как мы сейчас увидим, оно учитывает суммирование бесконечного числа диаграмм определённого класса.

## 4 Бегущая константа связи

В результате суммирования *всех* диаграмм, состоящих из связанных между собой циклов:




на стр. 138 было получено следующее выражение для 4-точной вершинной функции:

$$\Gamma_0^{(4)}(s,t,u) = -\imath\lambda_0 \Big[1 + \frac{\Lambda_0(s)}{1-\Lambda_0(s)} + \frac{\Lambda_0(t)}{1-\Lambda_0(t)} + \frac{\Lambda_0(u)}{1-\Lambda_0(u)}\Big]. \qquad (9.28)$$

Так как сами функции $\Lambda_0(s)$ получены с точностью $\lambda_0$, в рамках этой точности, приведём дроби к общему знаменателю, оставив в числителе только ведущее по $\lambda$ слагаемое. Кроме этого, умножим вершинную функцию на $Z^2$, чтобы получить её перенормированную версию:

$$\Gamma^{(4)}(s,t,u) = \frac{-\imath\lambda_0\, Z^2}{1-\Lambda_0(s)-\Lambda_0(t)-\Lambda_0(u)} \qquad (9.29)$$

На самом деле, не очевидно, что подобное переписывание исходной суммы ряда, будет лучше аппроксимировать точную вершинную функцию. Тем не менее, такое представление удобно для проведения перенормировки. Действительно, выделим расходимость $\Lambda_0(s) = \Lambda_0(0) + \tilde{\Lambda}_0(s)$ и снова в знаменателе удержим первый порядок малости:

$$\Gamma^{(4)}(s,t,u) = \frac{-\imath\lambda_0\, Z^2}{\{1-3\Lambda_0(0)\}\{1-\tilde{\Lambda}_0(s)-\tilde{\Lambda}_0(t)-\tilde{\Lambda}_0(u)\}},$$

Используя как и раньше, нормировочное условие $\Gamma^{(4)}(0,0,0) = -\imath\lambda$ (определение перенормированной константы $\lambda$), получаем:

$$\lambda = \frac{\lambda_0\, Z^2}{1 + \dfrac{3\lambda_0}{32\pi^2}\,\ln\dfrac{Q^2}{e\,m_0^2}}. \qquad (9.30)$$

Так как числителе мы удерживали величины порядка $\lambda_0$, то $Z^2 = 1 + O(\lambda_0^2)$ можно опустить, а в знаменателе $m_0$ заменить на $m$. В результате, это соотношение совпадает с (9.27), являясь его обращением. Таким образом, можно считать, что решение уравнения (9.25) с функцией $\beta(\lambda_0)$, вычисленной по второму порядку теории возмущений, в некотором роде учитывает более высокие порядки теории возмущений. Впрочем, довольно вольное обращение с малостью величин (независимо в числителе и знаменателе), несколько портит этот вывод.

• Четырёхточечная вершинная функция непосредственно связана с сечением упругого рассеяния двух частиц (стр. 103). Если импульсы $\mathrm{p}_1$ и $\mathrm{p}_2$ соответствуют начальным частицам, то импульсы рассеянных частиц необходимо перевернуть: $\mathrm{p}_3 \mapsto -\mathrm{p}_3$, $\mathrm{p}_4 \mapsto -\mathrm{p}_4$. Кроме этого $\mathrm{p}_i^2 = m^2$. В системе центра инерции ($\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$) энергии всех частиц одинаковы: $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E$ и $s, t, u$-инварианты равны (стр. 89):

$$s = 4E^2, \qquad t = -\frac{1}{2}\,(s - 4m_r^2)(1 - \cos\theta), \qquad u = -\frac{1}{2}\,(s - 4m_r^2)(1 + \cos\theta),$$

где введен угол рассеяния $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_3 = |\mathbf{p}_1|\,|\mathbf{p}_3|\,\cos\theta$. При больших $s$ функция $\tilde{\Lambda}(s)$ имеет асимптотическое поведение (стр. 161):

$$\tilde{\Lambda}(s) \to \frac{\lambda}{32\pi^2}\,\ln\frac{|s|}{m^2}$$

(игнорируется комплексная добавка при $s > 0$ и затравочные параметры $m_0$, $\lambda_0$ заменены на регуляризованные значения). Если $\theta$ отличен от нуля (или $\pi$), то $1 \pm \cos\theta$ конечные числа, которыми можно пренебречь в асимптотическом пределе:

$$\ln|t| \sim \ln|s(1 - \cos\theta)| \sim \ln(1 - \cos\theta) + \ln s \to \ln s.$$

Следовательно функции $\tilde{\Lambda}(t)$ и $\tilde{\Lambda}(u)$ совпадают с $\tilde{\Lambda}(s)$ при $s \gg m^2$ и для вершинной 4-функции имеем следующее асимптотическое выражение:

$$\imath\Gamma^{(4)}(s,t,u) \;\to\; \bar{\lambda}(s) = \frac{\lambda}{1 - 3\tilde{\Lambda}(s)} = \frac{\lambda}{1 - \dfrac{3\lambda}{32\pi^2}\,\ln\dfrac{s^2}{m^2}}. \tag{9.31}$$

Так как в первом порядке вершинная функция была пропорциональна $\lambda$ (сечение $d\sigma \sim \lambda^2$), это выражение можно интерпретировать, как эффективную зависимость константы связи от энергии столкновения. Такую функцию $\bar{\lambda}(s)$ называют *бегущей константой связи*. Подчеркнём, что константами модели по-прежнему считаются $\lambda$ и $m$, а функция (9.31) является лишь форм-фактором (множителем), возникающим в сечении рассеяния, который мы сравниваем с его постоянным значением в первом порядке по теории возмущений.

С ростом энергии столкновения $s$, бегущая "константа" связи $\bar{\lambda}(s)$ увеличивается (это впрочем, видно и во втором порядке теории возмущений). При больших энергиях, частицы могут "приближаться" друг к другу на малые расстояния, поэтому, также говорят, что их взаимодействие усиливается на малых расстояниях. Впрочем, строго говоря, это утверждение справедливо только, пока справедлива теория возмущений: $\ln s/m^2 \ll 32\pi^2/(3\lambda) \sim 105/\lambda$ (поправка по $\lambda$ много меньше 1).

# Глава 10

# Функциональные методы

Использование функциональных производных (производных по функциям) оказывается очень мощным математическим аппаратом получения различных соотношений в квантовой теории поля. Этому подходу посвящена настоящая глава. Будут введены понятия производящих функционалов для функций Грина и получено уравнение Швингера, тесно связанное с уравнением Дайсона.

Ещё одним методом описания квантовых систем является функциональное интегрирование. Он эквивалентен каноническому подходу (глава 2) и иногда оказывается более удобным. Сначала мы рассмотрим функциональное интегрирование в нерелятивистской квантовой механике. Затем обобщим его на случай квантовой теории поля.

---

**Квантовый мир**

**Сергей С. Степанов**

Эта книга находится в процессе создания. Её последняя версия и другие материалы находятся на сайте: http://synset.com. Там же можно найти первый том: **I. Механика**
Замеченные ошибки и вопросы просьба присылать по адресу: steps137, затем собачка и gmail.com.

(c) 2015. Печать: 2 июля 2017 г.

## 1 Функциональные производные

Рассмотрим линейную функцию $n$ переменных $J_1$, ..., $J_n$, заданную при помощи чисел $f_1, ..., f_n$:

$$F = F(J_1, ..., J_n) = \sum_{k=1}^{n} f_k J_k.$$

Её частная производная по $J_i$ определяется обычным образом:

$$\frac{\partial F}{\partial J_i} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \Big\{ \sum_{k=1}^{n} f_k \left(J_k + \epsilon \delta_{ki}\right) - \sum_{k=1}^{n} f_k J_k \Big\} = f_i. \tag{10.1}$$

При помощи интеграла в непрерывном случае, можно определить линейный *функционал*:

$$F[J(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) J(x)\, dx, \tag{10.2}$$

который при фиксированной функции $f(x)$ даёт некоторое число, если вместо функции $J(x)$ подставить её конкретный вид, например $J(x) = x^2$ или $J(x) = \sin(x)$. Таким образом, функционал ставит в соответствие каждой функции $J(x)$ некоторое число. Определим по аналогии с (10.1) *функциональную производную*:

$$\frac{\delta F}{\delta J(x)} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \Big\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(y)(J(y) + \epsilon \delta(x-y))\, dy - \int_{-\infty}^{\infty} f(y) J(y)\, dy \Big\} = f(x).$$

Это определение можно использовать для произвольного функционала. В частности, когда он является просто функцией имеем:

$$\frac{\delta J(y)}{\delta J(x)} = \delta(x-y), \tag{10.3}$$

что является непрерывным обобщением формулы $\partial J_i / \partial J_j = \delta_{ij}$ для дискретных величин. Если под интегралом стоит нелинейная функция $\mathcal{L}(J)$, можно написать:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(J(y))\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J(y)}\, \delta(x-y)\, dy = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial J(x)}.$$

Для доказательства необходимо разность $\mathcal{L}(J(y) + \epsilon\delta(x-y)) - \mathcal{L}(J(y))$ разложить в ряд по $\epsilon$ и перейти к пределу $\epsilon \to 0$. Подобным образом вычисляются функциональные производные и в более сложных случаях. При этом всегда можно иметь ввиду аналогию с обычными частными производными.

• Далее мы будем работать с функциями, зависящими от 4-координат $\mathrm{x} = \{t, \mathbf{x}\}$. Для них в соотношении подобном (10.3) в правой части стоит 4-мерная функция Дирака:

$$\frac{\delta J_{\mathrm{y}}}{\delta J_{\mathrm{x}}} = \delta(\mathrm{x}-\mathrm{y}) = \delta_{\mathrm{xy}}.$$

При этом используются индексные обозначения: $J_{\mathrm{x}} \equiv J(\mathrm{x})$, а функция Дирака записывается как символа Кронекера. Кроме этого, интегрируя по всему 4-пространству часто будет опускаться элемент 4-объёма:

$$\int J(\mathrm{x})\, D(\mathrm{x},\mathrm{y})\, J(\mathrm{y})\, d^4x\, d^4y \equiv \int\limits_{\mathrm{x,y}} J_{\mathrm{x}}\, D_{\mathrm{xy}}\, J_{\mathrm{y}}.$$

Коммутаторы с функциональными производными можно вычислять как в координатном представлении квантовой механики. Например, найдём коммутатор $\delta/\delta J_{\mathrm{x}}$ с $J_{\mathrm{y}}^n$, где $n$ – некоторое число. Ставя справа от коммутатора произвольный функционал $\Psi = \Psi[J]$, имеем:

$$\Big[\frac{\delta}{\delta J_{\mathrm{x}}},\, J_{\mathrm{y}}^n\Big]\,\Psi = \frac{\delta(J_{\mathrm{y}}^n\Psi)}{\delta J_{\mathrm{x}}} - J_{\mathrm{y}}^n\,\frac{\delta\Psi}{\delta J_{\mathrm{x}}} = n J_{\mathrm{y}}^{n-1}\,\delta_{\mathrm{xy}}\,\Psi + J_{\mathrm{y}}^n\,\frac{\delta\Psi}{\delta J_{\mathrm{x}}} - J_{\mathrm{y}}^n\,\frac{\delta\Psi}{\delta J_{\mathrm{x}}}.$$

Функциональная производная произведения находится аналогично частным производным для обычных функций. Опуская функционал $\Psi$ (в силу его произвольности), имеем:

$$\Big[\frac{\delta}{\delta J_{\mathrm{x}}},\, J_{\mathrm{y}}^n\Big] = n\,\delta_{\mathrm{xy}}\,J_{\mathrm{y}}^{n-1}. \tag{10.4}$$

Приведём ещё один пример:

$$\Big[\frac{\delta^n}{\delta J_{\mathrm{y}}^n},\, J_{\mathrm{x}}\Big] = n\,\delta_{\mathrm{xy}}\,\frac{\delta^{n-1}}{\delta J_{\mathrm{y}}^{n-1}}. \tag{10.5}$$

Этот коммутатор можно получить аналогичным образом, рекурсивно вычисляя $n$-тую функциональную производную. Возможен и другой приём. Обозначим функциональную производную как оператор $\hat{D}_{\mathrm{x}}$:

$$\hat{D}_{\mathrm{x}} = \frac{\delta}{\delta J_{\mathrm{x}}}, \qquad \hat{J}_{\mathrm{x}} = J_{\mathrm{x}}, \qquad [\hat{D}_{\mathrm{x}},\, \hat{J}_{\mathrm{y}}] = \delta_{\mathrm{xy}}.$$

Аналогично импульсному представлению квантовой механики, перейдём в "$D$-представление", в котором:

$$\hat{D}_{\mathrm{x}} = D_{\mathrm{x}}, \qquad \hat{J}_{\mathrm{x}} = -\frac{\delta}{\delta D_{\mathrm{x}}}, \qquad [\hat{D}_{\mathrm{x}},\, \hat{J}_{\mathrm{y}}] = \delta_{\mathrm{xy}}.$$

Теперь вычисление коммутатора (10.5) сводится к коммутатору (10.4).

## 2 Производящий функционал для функций Грина

• Введём функцию времени и координат $J_{\rm x} = J({\rm x}) = J(t, \mathbf{x})$, которую будем называть классическим током или просто током. Определим следующий функционал от этого тока:

$$S[J] = \Big\langle {\rm T}\, \exp\Big\{ \imath \int\limits_{\rm x} (\hat{\mathcal{L}}_{int} + J_{\rm x}\hat{\varphi}_{\rm x}) \Big\} \Big\rangle, \tag{10.6}$$

где для скалярного поля в модели $\varphi^4$ лагранжиан взаимодействия равен $\hat{\mathcal{L}}_{int} = -(\lambda/4!)\,\hat{\varphi}^4_{\rm x}$. Усреднение ведётся по вакууму *свободной* теории, а операторы поля $\hat{\varphi}_{\rm x}$ взяты в представлении взаимодействия (стр. 82, 111). Выше шляпками мы подчеркнули величины, являющиеся операторами. Над током шляпки нет, так как это обычная функция. Далее шляпки будем опускать.

Когда ток равен нулю: $J = 0$ (частный случай функции), функционал будем записывать как $S[0]$. Он, в соответствии с формулой (**??**), стр. **??**, равен хронологическому среднему по вакууму от оператора эволюции:

$$S[0] = \big\langle S(\infty, -\infty) \big\rangle = \big\langle {\rm T}\, \exp(-\frac{\imath\lambda}{4!} \int\limits_{\rm x} \varphi^4_{\rm x}) \big\rangle.$$

Функционал $S[J]$ позволяет находить функции Грина и поэтому его называют *производящим функционалом*. Действительно, возьмём функциональную производную:

$$\frac{\delta S}{\delta J_{{\rm x}_1}} = \imath \left\langle {\rm T}\, \varphi_{{\rm x}_1}\, e^{\imath \int\limits_{\rm x} (\mathcal{L}_{int} + J_{\rm x}\varphi_{\rm x})} \right\rangle.$$

Она берётся как обычная частная производная так, как если бы переменные x и $\rm x_1$ были индексами. При этом, благодаря символу хронологического порядка, можно переставлять местами операторы поля. Ещё одна производная равна:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta J_{{\rm x}_1} \delta J_{{\rm x}_2}} = \imath^2 \left\langle {\rm T}\, \varphi_{{\rm x}_1} \varphi_{{\rm x}_2}\, e^{\imath \int\limits_{\rm x} (\mathcal{L}_{int} + J_{\rm x}\varphi_{\rm x})} \right\rangle.$$

Таким образом, в силу соотношения (5.13), стр.111 для точной 2-точечной функции Грина получаем:

$$\mathrm{G}({\rm x}_1, {\rm x}_2) = \frac{1}{\imath^2}\, \frac{1}{S}\, \frac{\delta^2 S}{\delta J_{{\rm x}_1} \delta J_{{\rm x}_2}}\Big|_{J=0}. \tag{10.7}$$

Аналогично, при помощи $n$-той производной записываются $n$-точечные функции Грина.

• Найдём производящий функционал для свободной теории ($\lambda = 0$):

$$S_0[J] = \Big\langle \mathrm{T}\, e^{\imath \int\limits_{\mathrm{x}} J_{\mathrm{x}}\varphi_{\mathrm{x}}} \Big\rangle. \tag{10.8}$$

Вычислим его производную и разложим экспоненту в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{\imath}\frac{\delta S_0}{\delta J_{\mathrm{x}}} = \Big\langle \mathrm{T}\,\varphi_{\mathrm{x}}\, e^{\imath \int\limits_{\mathrm{y}} J_{\mathrm{y}}\varphi_{\mathrm{y}}} \Big\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\imath^n}{n!} \int\limits_{\mathrm{y}_1 \ldots \mathrm{y}_n} \Big\langle \mathrm{T}\varphi_{\mathrm{x}}\, J_{\mathrm{y}_1}\varphi_{\mathrm{y}_1} \ldots J_{\mathrm{y}_n}\varphi_{\mathrm{y}_n} \Big\rangle.$$

Индексы интегрирования (аргументы функций) являются немыми и их можно переобозначить любым символом, что мы и делаем, чтобы различать степени от интеграла при разложении экспоненты. К этому среднему (токи в нём не участвуют и выносятся) можно применить теорему Вика (стр. 67). Так как оператор $\varphi_{\mathrm{x}}$ спаривается $n$ раз, а переменные интегрирования можно переименовать, получаем множитель $n$:

$$\int\limits_{\mathrm{y}_1 \ldots \mathrm{y}_n} \Big\langle \mathrm{T}\,\varphi_{\mathrm{x}}\,\varphi_{\mathrm{y}_1} \ldots \varphi_{\mathrm{y}_n} \Big\rangle = n \int\limits_{\mathrm{y}_1} \Big\langle \mathrm{T}\,\varphi_{\mathrm{x}}\,\varphi_{\mathrm{y}_1} \Big\rangle \int\limits_{\mathrm{y}_2 \ldots \mathrm{y}_n} \Big\langle \mathrm{T}\,\varphi_{\mathrm{y}_2} \ldots \varphi_{\mathrm{y}_n} \Big\rangle.$$

Поэтому:

$$\frac{1}{\imath}\frac{\delta S_0}{\delta J_{\mathrm{x}}} = \imath \int\limits_{\mathrm{y}_1} D_{\mathrm{x}\mathrm{y}_1} J_{\mathrm{y}_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\imath^{n-1}}{(n-1)!} \int\limits_{\mathrm{y}_2 \ldots \mathrm{y}_n} \Big\langle \mathrm{T}\, J_{\mathrm{y}_2}\varphi_{\mathrm{y}_2} \ldots J_{\mathrm{y}_n}\varphi_{\mathrm{y}_n} \Big\rangle,$$

где $D_{\mathrm{x}\mathrm{y}} = \big\langle \mathrm{T}\,\varphi_{\mathrm{x}}\varphi_{\mathrm{y}} \big\rangle$ – функция Грина свободных частиц. Сдвигая индекс $n' = n - 1$ и сворачивая ряд снова в экспоненту, получаем уравнение:

$$\frac{\delta S_0}{\delta J_{\mathrm{x}}} = -\int\limits_{\mathrm{y}} D_{\mathrm{x}\mathrm{y}} J_{\mathrm{y}}\; S_0. \tag{10.9}$$

Несложно проверить, что его решение с учётом условия $S_0[0] = 1$, следующего из (10.8), имеет вид:

$$S_0[J] = \exp\Big\{ -\frac{1}{2} \int\limits_{\mathrm{x},\mathrm{y}} J_{\mathrm{x}}\, D_{\mathrm{x}\mathrm{y}}\, J_{\mathrm{y}} \Big\}. \tag{10.10}$$

Вычислим ещё одну производную от (10.9):

$$\frac{\delta^2 S_0}{\delta J_{\mathrm{x}_1} \delta J_{\mathrm{x}_2}} = -D_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2} S_0 + \int\limits_{\mathrm{x},\mathrm{y}} D_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}} D_{\mathrm{x}_2\mathrm{y}}\, J_{\mathrm{x}} J_{\mathrm{y}}\, S_0.$$

Положив $J = 0$, получаем двухточечную функцию Грина свободной частицы $D_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2} = D(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2)$, см. (10.7).

• Найдём теперь производящий функционал при $\lambda \neq 0$ для теории с $\mathcal{L}_{int} = -(\lambda/4!)\,\varphi^4_{\rm x}$. Разобьём в (10.6) экспоненту суммы на произведение экспонент (это можно сделать для операторов, так как они находятся под хронологическим произведением). Первый сомножитель разложим в ряд Тейлора:

$$S[J] = \Big\langle \mathrm{T}\; e^{\imath \int\limits_{\rm x} \mathcal{L}_{int}}\; e^{\imath \int\limits_{\rm x} J_{\rm x}\varphi_{\rm x}} \Big\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\imath\lambda)^n}{4!^n n!} \int\limits_{\rm x_1 \ldots x_n} \big\langle \mathrm{T}\, \varphi^4_{\rm x_1} \ldots \varphi^4_{\rm x_n}\, e^{\imath \int\limits_{\rm x} J_{\rm x}\varphi_{\rm x}} \big\rangle .$$

Операторы поля запишем при помощи дифференцирования функционала $S_0$:

$$S[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\imath\lambda)^n}{4!^n n!} \int\limits_{\rm x_1 \ldots x_n} \frac{\delta^4}{\delta J^4_{\rm x_1}} \ldots \frac{\delta^4}{\delta J^4_{\rm x_n}}\, S_0,$$

Сворачивая ряд обратно в экспоненту, имеем:

$$S[J] = \exp\Big\{ \frac{-\imath\lambda}{4!} \int\limits_{\rm x} \frac{\delta^4}{\delta J^4_{\rm x}} \Big\}\, S_0[J]. \qquad (10.11)$$

Естественно, это соотношение является достаточно формальным и для реальных вычислений экспоненту снова необходимо разложить в ряд. Например, найдём последовательно производные

$$\frac{\delta S_0}{\delta J_{\rm x}} = -\int\limits_{\rm y} D_{\rm xy} J_{\rm y}\, S_0, \qquad \frac{\delta^2 S_0}{\delta J^2_{\rm x}} = -D_{\rm xx} S_0 + \Big[\int\limits_{\rm y} D_{\rm xy} J_{\rm y}\Big]^2 S_0,$$

$$\frac{\delta^3 S_0}{\delta J^3_{\rm x}} = 3 D_{\rm xx} \int\limits_{\rm y} D_{\rm xy} J_{\rm y}\, S_0 \;-\; \Big[\int\limits_{\rm y} D_{\rm xy} J_{\rm y}\Big]^3 S_0,$$

$$\frac{\delta^4 S_0}{\delta J^4_{\rm x}} = 3 D^2_{\rm xx} S_0 \;-\; 6 D_{\rm xx} \Big[\int\limits_{\rm y} D_{\rm xy} J_{\rm y}\Big]^2 S_0 \;+\; \Big[\int\limits_{\rm y} D_{\rm xy} J_{\rm y}\Big]^4 S_0.$$

Поэтому, для функционала $S[J]$ по формуле (10.11), в первом порядке по $\lambda$, имеем:

$$S[J] = S_0[J] + \frac{-\imath\lambda}{4!} \int\limits_{\rm x} \Big\{ 3 D^2_{\rm xx} \;-\; 6 D_{\rm xx} \Big[\int\limits_{\rm y} D_{\rm xy} J_{\rm y}\Big]^2 \;+\; \Big[\int\limits_{\rm y} D_{\rm xy} J_{\rm y}\Big]^4 \Big\}\, S_0[J].$$

Вакуумное среднее оператора эволюции можно теперь записать следующим образом:

$$\big\langle S \big\rangle = S[0] = 1 - \frac{\imath\lambda}{8} \int\limits_{\rm x} D^2_{\rm xx} + \ldots,$$

где учтено $S_0[0] = 1$. Этот же результат был ранее получен на стр. 114.

• При нахождении функций Грина (10.7) результат необходимо разделить на $S[0]$, поэтому удобно ввести нормированный производящий функционал

$$Z[J] = \frac{S[J]}{S[0]} = \langle 0|\mathrm{T}\, e^{\imath \int\limits_{\mathrm{x}} J_{\mathrm{x}}\varphi_{\mathrm{x}}}|0\rangle, \tag{10.12}$$

где во втором равенстве оператор $\varphi_{\mathrm{x}}$ взят в представлении Гейзенберга и $|0\rangle$ – вакуум полной теории. Этот функционал даёт функции Грина:

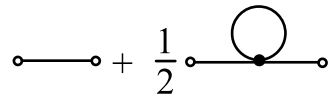
$$\mathrm{G}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n) = \frac{1}{\imath^n} \frac{\delta^n Z}{\delta J_{\mathrm{x}_1} ... \delta J_{\mathrm{x}_n}}\Big|_{J=0}. \tag{10.13}$$

При делении $S[J]$ на $S[0]$, независящий от тока член $3D_{\mathrm{xx}}^2$ сокращается:

$$Z[J] = Z_0[J] + \frac{-\imath\lambda}{4!} \int\limits_{\mathrm{x}} \Big\{ -6D_{\mathrm{xx}} \Big[ \int\limits_{\mathrm{y}} D_{\mathrm{xy}} J_{\mathrm{y}} \Big]^2 + \Big[ \int\limits_{\mathrm{y}} D_{\mathrm{xy}} J_{\mathrm{y}} \Big]^4 \Big\}\, Z_0[J]. \tag{10.14}$$

Теперь несложно записать выражение для 2-точечной функции Грина. Вторые производные от $Z_0[J] = S_0[J]$ при $J = 0$ дадут свободную функцию Грина, а производные от второй части выражения приводят к:

$$\mathrm{G}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = D_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2} - \frac{\imath\lambda}{2} \int\limits_{\mathrm{x}} D_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}} D_{\mathrm{xx}} D_{\mathrm{xx}_2} =$$



При взятии производных стоит помнить, что в финальном выражении мы должны положить $J = 0$, и можно сразу опускать слагаемые, которые пропорциональны $J$ после взятия второй производной. Поэтому фактически производная берётся только от первого слагаемого в фигурных скобках, а минус уходит от множителя $\imath^2 = -1$ в (10.13).

Аналогично находится 4-точечная функция Грина. Первое слагаемое $Z_0[J]$ даёт сумму трёх слагаемых с произведением несвязных свободных пропагаторов. Четвёртая производная от второго слагаемого в фигурных скобках даст $-\imath\lambda D_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}} D_{\mathrm{x}_2\mathrm{x}} D_{\mathrm{x}_3\mathrm{x}} D_{\mathrm{x}_4\mathrm{x}}$. Кроме этого возникнет ещё 6 слагаемых, аналогичных свободной 4-точечной функции Грина, но с частично "одетыми" пропагаторами (см. стр. 116).

В силу соотношения (10.13) или (10.12) можно также написать:

$$Z[J] = 1 + \frac{\imath^2}{2!} \int\limits_{\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2} \mathrm{G}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)\, J_{\mathrm{x}_1} J_{\mathrm{x}_2} + \frac{\imath^4}{4!} \int\limits_{\mathrm{x}_1,...,\mathrm{x}_4} \mathrm{G}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_4)\, J_{\mathrm{x}_1} ... J_{\mathrm{x}_4} + ...,$$

т.е. в $\varphi^4$ теории производящий функционал раскладывается по чётным степеням токов, а коэффициентами этого разложения являются точные функции Грина.

## 3 Связные функции Грина

• Введём ещё один функционал:

$$W[J] = \ln Z[J]. \tag{10.15}$$

В отличии от $Z[J]$ он даёт только связные части функций Грина:

$$\mathrm{G}_{\text{связ}}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n W}{\delta J_{\mathrm{x}_1} ... \delta J_{\mathrm{x}_n}}\Big|_{J=0}. \tag{10.16}$$

Продемонстрируем это на примере 4-точечной функции. Обозначим $W_{\mathrm{x}} = \delta W/\delta J_{\mathrm{x}}$ и т.д. Возьмём первую и вторую функциональные производные:

$$W_{\mathrm{x}_1} = \frac{1}{Z} Z_{\mathrm{x}_1}, \qquad W_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2} = \frac{1}{Z} Z_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2} - \frac{1}{Z^2} Z_{\mathrm{x}_1} Z_{\mathrm{x}_2}.$$

Третья производная по $J_{\mathrm{x}_3}$ равна:

$$W_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3} = \frac{1}{Z} Z_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3} + \frac{2}{Z^3} Z_{\mathrm{x}_1} Z_{\mathrm{x}_2} Z_{\mathrm{x}_3} - \frac{1}{Z^2} \left( Z_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2} Z_{\mathrm{x}_3} + Z_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_3} Z_{\mathrm{x}_2} + Z_{\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3} Z_{\mathrm{x}_1} \right).$$

Хронологические произведения нечетного числа операторов поля равны нулю: $\langle 0|\mathrm{T}\,\varphi_{\mathrm{x}}|0\rangle = \langle 0|\mathrm{T}\,\varphi_{\mathrm{x}}\varphi_{\mathrm{y}}\varphi_{\mathrm{z}}|0\rangle = 0$. Поэтому, при $J = 0$ будут равны нечётные производные от функционала $Z$. Учитывая это, при взятии четвёртой производной по $J_{\mathrm{x}_4}$, удерживаем только слагаемые не обращающиеся в ноль при $J = 0$:

$$W_{\mathrm{x}_1 ... \mathrm{x}_4}\big|_{J=0} = Z_{\mathrm{x}_1 ... \mathrm{x}_4}\Big|_{J=0} - \left( Z_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2} Z_{\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4} + Z_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_3} Z_{\mathrm{x}_2\mathrm{x}_4} + Z_{\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3} Z_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_4} \right)\Big|_{J=0},$$

где учтено, что, в силу определения, $Z[0] = 1$. В результате:

$$\mathrm{G}_{\text{связ}}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_4) = \mathrm{G}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_4) - \mathrm{G}_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2} \mathrm{G}_{\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4} - \mathrm{G}_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_3} \mathrm{G}_{\mathrm{x}_2\mathrm{x}_4} - \mathrm{G}_{\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3} \mathrm{G}_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_4},$$

что соответствует выделению из точной функции Грина $\mathrm{G}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_4)$ трёх слагаемых с несвязным произведением 2-точечных функций (стр.135).

В теории возмущений $Z = Z_0 \left(1 + Z_1\lambda + Z_2\lambda^2 + Z_3\lambda^3 + ...\right)$. Логарифм от этого ряда равен:

$$W = \ln Z_0 + Z_1\,\lambda + \left( Z_2 - \frac{1}{2} Z_1^2 \right) \lambda^2 + \left( Z_3 - Z_1 Z_2 + \frac{1}{3} Z_1^3 \right) \lambda^3 + ..., \tag{10.17}$$

т.е. коэффициенты разложения обоих функционалов достаточно просто связаны между собой. Отметим также, что $W[0] = 0$.

Вводя “связный функционал” для свободных функций Грина:

$$W_0[J] = \ln Z_0[J] = -\frac{1}{2}\int\limits_{\mathrm{x,y}} J_{\mathrm{x}}\, D_{\mathrm{xy}}\, J_{\mathrm{y}} \tag{10.18}$$

при помощи (10.17) и (10.14), запишем явный вид функционала $W[J]$ в первом порядке по теории возмущений:

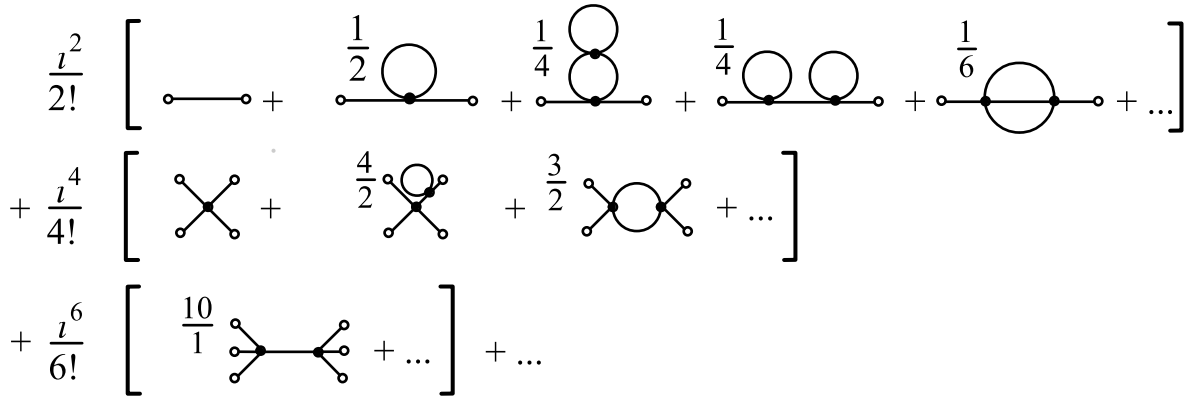
$$W[J] = W_0[J] + \frac{-\imath\lambda}{4!}\int\limits_{\mathrm{x}}\Big\{ -6D_{\mathrm{xx}}\Big[\int\limits_{\mathrm{y}} D_{\mathrm{xy}}J_{\mathrm{y}}\Big]^2 + \Big[\int\limits_{\mathrm{y}} D_{\mathrm{xy}}J_{\mathrm{y}}\Big]^4\Big\}. \tag{10.19}$$

Как мы видим, этот функционал является конечным полиномом по токам $J$ (и так будет во всех порядках по теории возмущений).

В силу (10.16), производящий функционал $W[J]$ можно также записать в виде разложения по токам с коэффициентами, являющимися связными функциями Грина:

$$W[J] = \frac{\imath^2}{2!}\int\limits_{\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2} \mathrm{G}_{\text{связ}}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)\, J_{\mathrm{x}_1}J_{\mathrm{x}_2} + \frac{\imath^4}{4!}\int\limits_{\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_4} \mathrm{G}_{\text{связ}}(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_4)\, J_{\mathrm{x}_1}\ldots J_{\mathrm{x}_4} + \ldots$$

Его можно представить при помощи диаграмм Фейнмана в координатном представлении, если дополнительно к обычным правилам, считать, что с каждой внешней вершиной (белый кружок) связан ток $J_{\mathrm{x}}$, по аргументу которого ведётся интегрирование:




Эти диаграммы можно получить дифференцируя производящий функционал $Z_0[J]$ в (10.11) с последующим переходом по формулам (10.17) к функционалу $W[J]$. Впрочем, можно сразу воспользоваться результатами предыдущих глав, где эти диаграммы были найдены при помощи теоремы Вика. Напомним, что по внешним линиям (токам) необходимо провести симметризацию (чтобы получить симметричные функции Грина). Число соответствующих диаграмм, возникающих после симметризации указывается в числителе симметрийных коэффициентов (стр. 127).

## 4 Вершинные функции

• Перейдём теперь к производящему функционалу для вершинных функций. Ранее мы определили в импульсном пространстве усечённые связные функции Грина:

$$\mathrm{G_{ус}}(\mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_n) = \frac{\mathrm{G_{связ}}(\mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_n)}{\mathrm{G}(\mathrm{p}_1) \cdot ... \cdot \mathrm{G}(\mathrm{p}_n)}. \tag{10.20}$$

В координатном представлении их связь задаётся интегральным уравнением:

$$\mathrm{G_{связ}}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n) = \int \mathrm{G}_{\mathrm{x}_1\mathrm{y}_1} ... \, \mathrm{G}_{\mathrm{x}_n\mathrm{y}_n} \, \mathrm{G_{ус}}(\mathrm{y}_1, ..., \mathrm{y}_n) \, d^4\mathrm{y}_1 ... d^4\mathrm{y}_n, \tag{10.21}$$

где $\mathrm{G}_{\mathrm{xy}} \equiv \mathrm{G}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$. Вершинными функциями называются одночастично неприводимые усечённые функции Грина. Их фурье образ, как и у связных функций (стр. 122), имеет вид:

$$(2\pi)^4 \delta(\mathrm{p}_1 + ... + \mathrm{p}_n) \, \Gamma^{(n)}(\mathrm{p}_1, ..., \mathrm{p}_n) = \int \Gamma^{(n)}(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_n) e^{\imath \sum \mathrm{x}_i \mathrm{p}_i} \, d^4\mathrm{x}_1 ... d^4\mathrm{x}_n.$$

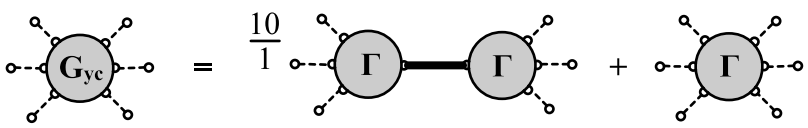
Двухточечная вершинная функция, по определению, равна обратному точному пропагатору $\Gamma^{(2)}(\mathrm{p}) = \mathrm{G}(\mathrm{p})/\mathrm{G}^2(\mathrm{p}) = 1/\mathrm{G}(\mathrm{p})$. Она выражается через функцию собственной энергии $\Sigma(\mathrm{p})$:

$$\imath\Gamma^{(2)}(\mathrm{p}) = \frac{\imath}{\mathrm{G}(\mathrm{p})} = \mathrm{p}^2 - m^2 - \Sigma(\mathrm{p}).$$

В координатном представлении эту связь можно записать в виде уравнения:

$$\delta_{\mathrm{xy}} = \int\limits_{\mathrm{z}} \Gamma^{(2)}_{\mathrm{xz}} \mathrm{G}_{\mathrm{zy}} = \imath(\partial^2 + m^2)_{\mathrm{x}} \mathrm{G}_{\mathrm{xy}} + \imath \int\limits_{\mathrm{z}} \Sigma_{\mathrm{xz}} \mathrm{G}_{\mathrm{zy}}. \tag{10.22}$$

Четырёхточечная связная функция Грина в $\varphi^4$-теории всегда является одночастично неприводимой и совпадает с вершинной 4-функцией. Шеститочечная связная функция может иметь одночастично приводимые диаграммы и выражается через вершинные функции с четырьмя и шестью аргументами (внешними линиями):




Одночастично неприводимым является второе после равенства слагаемое, тогда как первое собирает в себе все одночастично приводимые диаграммы. Оно определяется точным пропагатором (жирная линия), соединяющим две 4-точечные вершинные функции.

• Связные функции Грина получаются в результате взятия производных по токам от функционала $W[J]$. Точный пропагатор $\mathrm{G_{xy}}$ является связным и равен (с обратным знаком) второй производной от $W[J]$. Мы хотим, чтобы 2-точечная вершинная функция $\Gamma^{(2)}_{\mathrm{xy}}$ также определялась второй производной от некоторого функционала $\Gamma$. В соответствии с (10.22) вторые производные от $W$ и $\Gamma$ должны быть обратными друг другу. Это достигается при помощи *преобразования Лежандра*. Рассмотрим такое преобразование в простейшем случае функций одной переменной.

Пусть задана функция $f = f(x)$. Введём новую переменную $u = u(x)$, которая находится из уравнения $u = df/dx$. Определим функцию $g(u)$, такую, что $dg/du = x$. Между исходной функцией $f(x)$ и функцией $g(u)$ существует следующая связь:

$$f(x) + g(u) = xu, \qquad \frac{df}{dx} = u, \qquad \frac{dg}{du} = x.$$

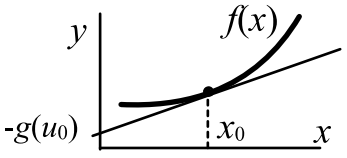
Действительно, беря производную по $x$, получаем тождество:

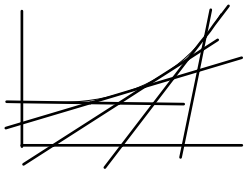
$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{du}\frac{du}{dx} = u + x\frac{du}{dx} \qquad => \qquad u + x\frac{du}{dx} = u + x\frac{du}{dx}.$$

Смысл этих манипуляций состоит в том, что вторая производная $f$ обратна второй производной $g$. Это доказывается взятием производной по $u$ от соотношения $u = df/dx$:

$$1 = \frac{d^2f}{dx^2}\frac{dx}{du} = \frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^2g}{du^2},$$

где при вычислении $dx/du$ во втором равенстве подставлено $x = dg/du$. Уравнение $f(x) + g(u) = xu$ имеет смысл множества прямых, касательных к $f(x)$, огибающая которых и является функцией $f(x)$:



Уравнение касательной к $f(x)$ в точке $x_0$ равно $y - f(x_0) = u_0 \cdot (x - x_0)$, где $u_0 = f'(x_0)$. Учитывая определение $g(u)$ имеем $y = u_0 x - g(u_0)$. Таким образом, $-g(u_0)$ равно точке пересечения касательной и оси $y$. Различные $x_0$ формируют множество всех касательных.

Преобразование Лежандра можно проводить и в многомерном случае:

$$f(x_1, ..., x_n) + g(u_1, ..., u_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} = u_i, \qquad \frac{\partial g}{\partial u_i} = x_i.$$

Его геометрический смысл будет аналогичен: множество гиперплоскостей, касательных к поверхности $y = f(x_1, ..., x_n)$.

Выполним преобразование Лежандра в функциональном случае. Кроме тока $J_{\rm x} \equiv J({\rm x})$ введём ещё одну функцию $\Phi_{\rm x} \equiv \Phi({\rm x})$ и определим функционал $\Gamma[\Phi]$ при помощи соотношений:

$$\Gamma[\Phi] = W[J] - \imath \int\limits_{\rm x} J_{\rm x}\Phi_{\rm x}, \qquad \frac{\delta W}{\delta J_{\rm x}} = \imath\Phi_{\rm x}, \qquad \frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi_{\rm x}} = -\imath J_{\rm x}. \tag{10.23}$$

Вершинные функции получаются из $\Gamma[\Phi]$ по следующей формуле:

$$\Gamma^{(n)}({\rm x}_1, ..., {\rm x}_n) = \frac{1}{\imath^n}\,\frac{\delta^n\Gamma}{\delta\Phi_{{\rm x}_1}\,...\,\delta\Phi_{{\rm x}_n}}\Big|_{\Phi=0}. \tag{10.24}$$

Мнимую единицу мы выделили чтобы выполнялось соотношение:

$$\Phi_{\rm x} = \frac{1}{\imath}\frac{\delta W}{\delta J_{\rm x}} = \frac{1}{Z}\,\frac{1}{\imath}\frac{\delta Z}{\delta J_{\rm x}} = \frac{1}{Z}\left\langle {\rm T}\,\varphi_{\rm x}\, e^{\,\imath\int\limits_{\rm y}(\mathcal{L}_{int}+J_{\rm y}\varphi_{\rm y})}\right\rangle. \tag{10.25}$$

Проверим, что из (10.23) и (10.24), действительно, получаются вершинные функции. Возьмём производную по $\Phi_{{\rm x}_2}$ от $\Phi_{{\rm x}_1} = -\imath\,\delta W/\delta J_{{\rm x}_1}$:

$$\delta_{{\rm x}_1{\rm x}_2} = -\imath\int\limits_{\rm x}\frac{\delta^2 W}{\delta J_{{\rm x}_1}\delta J_{\rm x}}\,\frac{\delta J_{\rm x}}{\delta\Phi_{{\rm x}_2}} = \int\limits_{\rm x}\frac{\delta^2 W}{\delta J_{{\rm x}_1}\delta J_{\rm x}}\,\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Phi_{\rm x}\delta\Phi_{{\rm x}_2}} \equiv \int\limits_{\rm x} W_{{\rm x}_1{\rm x}}\Gamma_{{\rm x}{\rm x}_2}, \tag{10.26}$$

где для краткости в последнем равенстве введены сокращённые обозначения для производных функционалов по соответствущим переменным:

$$W_{\rm x} \equiv \frac{\delta W}{\delta J_{\rm x}}, \qquad \Gamma_{\rm x} \equiv \frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi_{\rm x}}, \qquad W_{\rm xy} \equiv \frac{\delta^2 W}{\delta J_{\rm x}\delta J_{\rm y}}, \qquad \Gamma_{\rm xy} \equiv \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Phi_{\rm x}\delta\Phi_{\rm y}}, ...$$

Полагая $J = \Phi = 0$ в (10.26), получаем:

$$\delta({\rm x}_1 - {\rm x}_2) = \int {\rm G}({\rm x}_1, {\rm x})\,\Gamma^{(2)}({\rm x}, {\rm x}_2)\,d^4{\rm x}, \tag{10.27}$$

что эквивалентно (10.22). Аналогично берутся производные более высокого порядка. При этом в силу неявной зависимости $J$ от $\Phi$:

$$\frac{\delta W_{{\rm x}_1{\rm x}_2...}}{\delta\Phi_{\rm y}} = \int\limits_{\rm z}\frac{\delta W_{{\rm x}_1{\rm x}_2...}}{\delta J_{\rm z}}\frac{\delta J_{\rm z}}{\delta\Phi_{\rm y}} = \imath\int\limits_{\rm z} W_{{\rm z}{\rm x}_1{\rm x}_2...}\,\Gamma_{{\rm z}{\rm y}}.$$

Так, производная (10.26) по $\Phi_{{\rm x}_3}$ равна:

$$0 = \imath\int\limits_{\rm xy} W_{{\rm x}_1{\rm x}{\rm y}}\,\Gamma_{{\rm x}{\rm x}_2}\Gamma_{{\rm y}{\rm x}_3} + \int\limits_{\rm x} W_{{\rm x}_1{\rm x}}\,\Gamma_{{\rm x}{\rm x}_2{\rm x}_3}$$

(функция Дирака не зависит от токов и производная от неё равна нулю).

При помощи (10.26) это уравнение можно переписать в виде:

$$0 = \imath \int\limits_{\mathrm{xyz}} W_{\mathrm{xyz}}\, \Gamma_{\mathrm{x}\mathrm{x}_1} \Gamma_{\mathrm{y}\mathrm{x}_2} \Gamma_{\mathrm{z}\mathrm{x}_3} + \Gamma_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3}.$$

Беря его производную по $\Phi_{\mathrm{x}_4}$, получаем:

$$0 = \imath^2 \int\limits_{\mathrm{xyzu}} W_{\mathrm{xyzu}}\, \Gamma_{\mathrm{x}\mathrm{x}_1} \Gamma_{\mathrm{y}\mathrm{x}_2} \Gamma_{\mathrm{z}\mathrm{x}_3} \Gamma_{\mathrm{u}\mathrm{x}_4} + \Gamma_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4}$$

$$+ \ \imath \int\limits_{\mathrm{xyz}} W_{\mathrm{xyz}} \left\{ \Gamma_{\mathrm{x}\mathrm{x}_1\mathrm{x}_4} \Gamma_{\mathrm{y}\mathrm{x}_2} \Gamma_{\mathrm{z}\mathrm{x}_3} + \Gamma_{\mathrm{x}\mathrm{x}_1} \Gamma_{\mathrm{y}\mathrm{x}_2\mathrm{x}_4} \Gamma_{\mathrm{z}\mathrm{x}_3} + \Gamma_{\mathrm{x}\mathrm{x}_1} \Gamma_{\mathrm{y}\mathrm{x}_2} \Gamma_{\mathrm{z}\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4} \right\}.$$

Третья производная от $W$ при $J = 0$ даёт 3-точечную функцию Грина, которая в $\varphi^4$-теории равна нулю. Поэтому при $J = \Phi = 0$ вторая строка равна нулю и мы получаем:

$$\int \mathrm{G}_{\text{связ}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{u})\ \Gamma^{(2)}_{\mathrm{x}\mathrm{x}_1}\, \Gamma^{(2)}_{\mathrm{y}\mathrm{x}_2}\, \Gamma^{(2)}_{\mathrm{z}\mathrm{x}_3}\, \Gamma^{(2)}_{\mathrm{u}\mathrm{x}_4}\ d^4\mathrm{x}\, d^4\mathrm{y}\, d^4\mathrm{z}\, d^4\mathrm{u} = \Gamma^{(4)}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4).$$

Продолжим брать производные по $\Phi_{\mathrm{x}_5}$ и $\Phi_{\mathrm{x}_6}$:

$$0 = \imath^4 \int\limits_{\mathrm{xyzuvw}} W_{\mathrm{xyzuvw}}\ \Gamma_{\mathrm{x}\mathrm{x}_1} \Gamma_{\mathrm{y}\mathrm{x}_2} \Gamma_{\mathrm{z}\mathrm{x}_3} \Gamma_{\mathrm{u}\mathrm{x}_4} \Gamma_{\mathrm{v}\mathrm{x}_5} \Gamma_{\mathrm{w}\mathrm{x}_6} + \Gamma_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4\mathrm{x}_5\mathrm{x}_6}$$

$$+\imath^2 \int\limits_{\mathrm{xyzu}} W_{\mathrm{xyzu}} \Big\{ \Gamma_{\mathrm{x}\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3} \Gamma_{\mathrm{y}\mathrm{x}_4} \Gamma_{\mathrm{z}\mathrm{x}_5} \Gamma_{\mathrm{u}\mathrm{x}_6} + 9 \text{ perm} \Big\} + \ldots,$$

где 9 perm соответствует ещё 9 аналогичным слагаемым с переставленными аргументами $\mathrm{x}_i$. Многоточие в конце содержит слагаемые, обращающиеся в ноль при $J = \Phi = 0$. Так как $\imath^6 = -1$, 6-точечная вершинная функция при $J = \Phi = 0$ равна $-\Gamma_{\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_6}$. Аналогично для 6-точечной связной функции Грина. В результате:

$$-\Gamma^{(6)}_{\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_6} = \int\limits_{\mathrm{x} \ldots \mathrm{w}} \mathrm{G}^{\text{связ}}_{\mathrm{x} \ldots \mathrm{w}}\ \Gamma^{(2)}_{\mathrm{x}\mathrm{x}_1} \ldots \Gamma^{(2)}_{\mathrm{w}\mathrm{x}_6} - \int\limits_{\mathrm{xy}} \Gamma^{(4)}_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3\mathrm{x}}\, \mathrm{G}_{\mathrm{xy}}\, \Gamma^{(4)}_{\mathrm{y}\mathrm{x}_4\mathrm{x}_5\mathrm{x}_6} - 9 \text{ perm},$$

где учтена связь 4-точечной функции Грина и вершинной функции. Таким образом, $\Gamma^{(6)}_{\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_6}$ с обратным знаком равна одночастично неприводимой вершинной функции.

## 5 Уравнение Швингера

Найдём функциональное уравнение, которому удовлетворяет производящий функционал $Z[J] = S[J]/S[0]$ для функций Грина. Вычислим первую производную от функционала $S = S[J]$ в (10.11):

$$\frac{\delta S}{\delta J_{\rm x}} = -\exp\Big\{\int\limits_{\rm z} \frac{-\imath\lambda}{4!}\,\frac{\delta^4}{\delta J_{\rm z}^4}\Big\}\int\limits_{\rm y} D_{\rm xy} J_{\rm y}\, S_0[J].$$

Так как производные (и функциональные в том числе) коммутируют, производная по $J_{\rm x}$ пронесена через экспоненту в представлении (10.11) и взята от функционала $S_0[J]$, равного (10.10). Поменяем местами экспоненту и $J_{\rm y}$. Для этого воспользуемся следующим коммутатором:

$$\Big[e^{\,\alpha\int\limits_{\rm y}\frac{\delta^4}{\delta J_{\rm z}^4}},\, J_{\rm y}\Big] = 4\alpha\,\frac{\delta^3}{\delta J_{\rm y}^3}\; e^{\,\alpha\int\limits_{\rm z}\frac{\delta^4}{\delta J_{\rm z}^4}}. \tag{10.28}$$

Он вычисляется аналогично (10.5), стр.207, переходом в $D$-представление. В результате:

$$\frac{\delta S}{\delta J_{\rm x}} = -\int\limits_{\rm y} D_{\rm xy} J_{\rm y}\, S - 4\frac{(-\imath\lambda)}{4!}\int\limits_{\rm y} D_{\rm xy}\frac{\delta^3}{\delta J_{\rm y}^3}\; S.$$

Разделив это уравнение на $S[0]$, окончательно, имеем:

$$\frac{\delta Z}{\delta J_{\rm x}} = \frac{\imath\lambda}{6}\int\limits_{\rm y} D_{\rm xy}\,\frac{\delta^3 Z}{\delta J_{\rm y}^3} - \int\limits_{\rm y} D_{\rm xy}\, J_{\rm y}\, Z. \tag{10.29}$$

Это функциональное уравнение называется *уравнением Швингера* в интегральной форме. Его можно также переписать в дифференциальной форме:

$$(\partial^2 + m^2)\,\frac{\delta Z}{\delta J_{\rm x}} = \frac{\lambda}{6}\,\frac{\delta^3 Z}{\delta J_{\rm x}^3} + \imath J_{\rm x}\, Z, \tag{10.30}$$

учитывая, что свободная функция Грина удовлетворяет уравнению:

$$(\partial^2 + m^2)\, D_{\rm xy} = -\imath\,\delta_{\rm xy}. \tag{10.31}$$

При помощи уравнения Швингера можно получать различные соотношения между функциями Грина. Выведем, например, ещё одним способом уравнение Дайсона (стр. 141).

Возьмём производную (10.29) по $J_{\rm y}$ (заменив под интегралами сначала переменную $y$ на $z$):

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta J_{\rm x}\delta J_{\rm y}} = \frac{\imath\lambda}{6}\int\limits_{\rm z} D_{\rm xz}\,\frac{\delta^4 Z}{\delta J_{\rm z}^3\delta J_{\rm y}} - D_{\rm xy}\,Z - \int\limits_{\rm z} D_{\rm xz}J_{\rm z}\,\frac{\delta Z}{\delta J_{\rm y}}.$$

Положив $J=0$ и учитывая значения точных функций Грина:

$$\mathrm{G}_{\rm xy} = -\frac{\delta^2 Z}{\delta J_{\rm x}\delta J_{\rm y}}\Big|_{J=0}, \qquad \mathrm{G}_{\rm zzzy} = \frac{\delta^4 Z}{\delta J_{\rm z}^3\delta J_{\rm y}}\Big|_{J=0},$$

а также $Z[0]=1$ и равенство нулю при $J=0$ первой производной от $Z[J]$, имеем:

$$\mathrm{G}_{\rm xy} = D_{\rm xy} - \frac{\imath\lambda}{6}\int\limits_{\rm z} D_{\rm xz}\,\mathrm{G}_{\rm zzzy}. \tag{10.32}$$

Аналогично, беря более высокие производные, можно получать связи между $n$-точечными функциями Грина.

Делая в уравнении Швингера подстановку $Z=e^W$, несложно записать уравнение для производящего функционала связных функций Грина:

$$(\partial^2 + m^2)\,W_{\rm x} = \frac{\lambda}{6}\left\{W_{\rm xxx} + 3\,W_{\rm x}\,W_{\rm xx} + W_{\rm x}^3\right\} + \imath\,J_{\rm x}, \tag{10.33}$$

где производные обозначены следующим образом $W_{\rm x}\equiv\delta W/\delta J_{\rm x}$ и т.д.

Иногда удобно вводить функциональную функцию Грина:

$$\mathrm{G}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2|J) = -\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_{\mathrm{x}_1}\,\delta J_{\mathrm{x}_2}}. \tag{10.34}$$

По аргументу $J$ она является функционалом, а по $\mathrm{x}_1$ и $\mathrm{x}_2$ – "обычной" функцией. С её помощью можно записать функциональную 4-точечную функцию Грина:

$$\mathrm{G}(\mathrm{x}_1,...,\mathrm{x}_4|J) = \frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J_{\mathrm{x}_1}\ldots\delta J_{\mathrm{x}_4}} = -\frac{\delta^2\mathrm{G}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2|J)}{\delta J_{\mathrm{x}_3}\delta J_{\mathrm{x}_4}}, \tag{10.35}$$

которая также является "смешанным" объектом. Понятно, что обычные функции Грина получаются из функциональных при $J=0$:

$$\mathrm{G}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2) = \mathrm{G}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2|0), \qquad \mathrm{G}(\mathrm{x}_1,...,\mathrm{x}_4) = \mathrm{G}(\mathrm{x}_1,...,\mathrm{x}_4|0).$$

Несложно записать при помощи (10.30) уравнение которому удовлетворяют эти функционалы.

## 6 Функциональный интеграл

Интеграл по траекториям, рассмотренный на стр. **??**, фактически является интегралом по всем возможным функциям. Подобное интегрирование можно использовать и в квантовой теории поля.

При помощи функционального интеграла запишем выражение для производящего функционала функций Грина в следующем виде:

$$S[J] = N \int \delta\varphi \exp\Big\{ \imath \int (\mathcal{L} + J\varphi)\, d^4\mathrm{x} \Big\}, \tag{10.36}$$

где $N$ – некоторая константа, а $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi)$ – лагранжиан системы:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\,\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\,\varphi^4.$$

Так поле зависит от координат и времени, функциональный интеграл по $\delta\varphi$ понимается как непрерывное обобщение произведения функциональных интегралов в квантовой механике:

$$\delta\varphi = \delta\varphi(\mathrm{x}_1)\,\delta\varphi(\mathrm{x}_2)\,..., \tag{10.37}$$

где точки $\mathrm{x}_i$ покрывают всё 4-пространство, а $\delta\varphi(\mathrm{x}_i)$ определяется как предельный переход $n$-кратных интегралов (**??**). Таким образом, в каждом элементарном объёме 4-пространства вокруг точки $\mathrm{x}_i$ вводится динамическая переменная $\varphi_i = \varphi(\mathrm{x}_i)$ для которой функциональный интеграл по $\delta\varphi_i$ аналогичен (**??**). Произведение всех таких интегралов по всему пространству даёт:

$$\int \delta\varphi = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi_i(\mathrm{x}_1)}{\sqrt{2\pi}} \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi_j(\mathrm{x}_2)}{\sqrt{2\pi}} ... \tag{10.38}$$

Такое же обобщение функционального интегрирования имеет место в квантовой механике в случае нескольких степеней свободы $q_1$, $q_2$, ....

Удобно, как обычно, предполагать наличие бесконечно малого комплексного сдвига $m^2 \mapsto m^2 - \imath\epsilon$, при котором (пока $\epsilon \neq 0$) подынтегральная функция по $\varphi$ убывает на бесконечности, так как $\imath\,(\imath\epsilon)\varphi^2 = -\epsilon\varphi^2$. Этот сдвиг приводит к свободным функциям Грина с соответствующим обходом полюса при $\mathrm{p}^2 = m^2$.

Убедимся, что определение (10.36), действительно, воспроизводит полученные ранее результаты.

• Найдём значение интеграла в случае свободного поля ($\lambda = 0$). Совершая интегрирование по частям для члена $(\partial\varphi)^2$, запишем $S_0[J]$ в виде:

$$S_0[J] = N \int \delta\varphi \ \exp\Big\{\imath \int \big( -\frac{1}{2}\varphi\,(\partial^2 + m^2)\varphi + J\varphi\big)\, d^4\mathrm{x}\Big\}. \qquad (10.39)$$

Сделаем сдвиг переменной интегрирования:

$$\varphi(\mathrm{x}) \mapsto \varphi(\mathrm{x}) + \varphi_0(\mathrm{x}),$$

где функция $\varphi_0(\mathrm{x})$ удовлетворяет уравнению

$$(\partial^2 + m^2)\varphi_0(\mathrm{x}) = J(\mathrm{x}). \qquad (10.40)$$

Подобная замена проводится как и в обычном $n$-кратном интеграле. Так как по каждому $\varphi_i = \varphi(\mathrm{x}_i)$ интегрирование ведётся от $-\infty$ до $+\infty$, на пределы интегрирования замена не скажется. Выражение в интеграле под экспонентой поменяется следующим образом:

$$-\frac{1}{2}\varphi(\partial^2 + m^2)\varphi - \frac{1}{2}\varphi_0(\partial^2 + m^2)\varphi_0 - \varphi(\partial^2 + m^2)\varphi_0 + J\varphi + J\varphi_0,$$

где в третьем слагаемом сложены $\varphi\,(\partial^2 + m^2)\,\varphi_0$ и $\varphi_0\,(\partial^2 + m^2)\,\varphi$, переходящие друг в друга в результате двухкратного интегрирования по частям. Благодаря уравнению (10.40), третье и четвёртое слагаемые сокращаются, а второе равняется $-(1/2)J\varphi_0$. В результате, $S_0[J]$ разбивается на два множителя:

$$S_0[J] = \exp\Big\{\frac{\imath}{2}\int J\varphi_0\, d^4\mathrm{x}\Big\}\ N \int \delta\varphi\ e^{-\imath\int \frac{1}{2}\varphi(\partial^2+m^2)\varphi\, d^4\mathrm{x}}.$$

Функциональный интеграл не зависит от тока $J$ и равен некоторой константе. Функцию $\varphi_0(\mathrm{x})$, удовлетворяющую уравнению (10.40), можно выразить через ток при помощи функции Грина:

$$\varphi_0(\mathrm{x}) = \imath \int D(\mathrm{x}-\mathrm{y})J(\mathrm{y})\, d^4\mathrm{y}, \qquad (\partial^2 + m^2)D(\mathrm{x}-\mathrm{y}) = -\imath\delta(\mathrm{x}-\mathrm{y}).$$

Действуя оператором $\partial^2 + m^2$ на первое соотношение и учитывая второе, получаем (10.40). Выберем теперь константу $N$, так, чтобы функциональный интеграл по $\delta\varphi$ сократился. В результате, окончательно, получаем:

$$S_0[J] = \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\int J(\mathrm{x})\, D(\mathrm{x}-\mathrm{y})\, J(\mathrm{y})\Big\}, \qquad (10.41)$$

что совпадает с аналогичным выражением на стр. 209.

• Рассмотрим теперь случай $\lambda \neq 0$. Функциональный интеграл

$$S[J] = N \int \delta\varphi \exp\Big\{ \imath \int \Big( \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\,\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\,\varphi^4 + J\varphi \Big)\, d^4\mathrm{x} \Big\}, \quad (10.42)$$

можно приближённо вычислить, раскладывая в ряд неквадратичный член, "мешающий" гауссовому интегрированию:

$$S[J] = N \int \delta\varphi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\imath\lambda)^k}{4!^k\, k!} \Big[ \int\limits_{\mathrm{x}} \varphi_{\mathrm{x}}^4 \Big]^k \exp\Big\{ \imath \int (\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\,\varphi^2 + J\varphi)\, d^4\mathrm{x} \Big\}.$$

Заменим $\varphi^{4k}$ на функциональные производные по $J$ и вынесем их за интеграл:

$$S[J] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\imath\lambda)^k}{4!^k\, k!} \Big[ \int\limits_{\mathrm{x}} \frac{\delta^4}{\delta J_{\mathrm{x}}^4} \Big]^k N \int \delta\varphi \exp\Big\{ \imath \int (\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\,\varphi^2 + J\varphi)\, d^4\mathrm{x} \Big\}.$$

Сворачивая ряд в экспоненту мы снова приходим к соотношению (10.11), стр. 210:

$$S[J] = \exp\Big\{ \frac{-\imath\lambda}{4!} \int\limits_{\mathrm{x}} \frac{\delta^4}{\delta J_{\mathrm{x}}^4} \Big\}\, S_0[J].$$

Таким образом, функциональный интеграл даёт нам ещё один инструмент вычисления производящих функционалов, а, следовательно, и функций Грина. Впрочем, пока мы ограничиваемся теорией возмущений, особых преимуществ от его введения не видно.

Ситуация меняется, когда рассматриваются калибровочные теории. В этом случае между квантовыми операторами возникают связи (калибровочные условия), которые достаточно удобно учитывать в технике функционального интегрирования.

Ещё одно преимущество функционального интеграла проявляется при использовании численных расчётов на компьютере. В этом случае "всё" пространство разбивается на "небольшие" объёмы и получившийся $n$-кратный интеграл вычисляется тем или иным (обычно статистическим) методом. Этот подход позволяет получать непертурбативные результаты (работающие при различных значениях параметров $\lambda$ и $m$).

Наконец, функциональные интегралы оказываются эффективными при наличии в модели нетривиальных классических решений. Когда это происходит, функциональный интеграл можно вычислить методом перевала, в котором ведущим приближением служит классическое решение. Мы вернёмся к этим вопросам в последующих главах книги.

• В заключение покажем, как при помощи функционального интеграла можно получить уравнение Швингера. Будем исходить из следующего соотношения:

$$\int \delta\varphi \, \frac{\delta}{\delta\varphi_{\mathrm{x}}} \, e^{\imath \int\limits_{\mathrm{y}} (\mathcal{L} + J_{\mathrm{y}}\varphi_{\mathrm{y}})} = 0, \tag{10.43}$$

где x – фиксированная точка 4-пространства. При функциональном интегрировании $\delta\varphi$ является произведением интегралов по всем точкам 4-пространства. Интеграл, соответствующий x, оказывается интегралом от дифференциала или разностью значений подинтегральной функции при $\varphi = \infty$ и $\varphi = -\infty$. Пусть в лагранжиане

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\varphi\,(\partial^2 + m^2)\,\varphi - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$$

у квадрата массы присутствует малый комплексный сдвиг $m^2 \mapsto m^2 - \imath\epsilon$. Тогда экспонента содержит убывающий при больших $\varphi$ член $-\epsilon\varphi^2/2$ и функциональный интеграл (10.43) будет равен нулю.

Беря функциональную производную в (10.43), получаем:

$$\imath \int \delta\varphi \left\{ -(\partial^2 + m^2)\varphi_{\mathrm{x}} - \frac{\lambda}{3!}\,\varphi_{\mathrm{x}}^3 + J_{\mathrm{x}} \right\} e^{\imath \int (\mathcal{L} + J_{\mathrm{x}}\varphi_{\mathrm{x}})} = 0$$

или, заменяя степени поля на функциональные производные по току:

$$\imath \int \delta\varphi \left\{ -(\partial^2 + m^2)\frac{1}{\imath}\frac{\delta}{\delta J_{\mathrm{x}}} - \frac{\lambda}{3!}\,\frac{1}{i^3}\frac{\delta^3}{\delta J_{\mathrm{x}}^3} + J_{\mathrm{x}} \right\} e^{\imath \int (\mathcal{L} + J_{\mathrm{x}}\varphi_{\mathrm{x}})} = 0.$$

Так как ток в интегрировании не участвует, выражение в фигурных скобках можно вынести за интеграл:

$$-(\partial^2 + m^2)\frac{1}{\imath}\frac{\delta S[J]}{\delta J_{\mathrm{x}}} - \frac{\lambda}{3!}\,\frac{1}{i^3}\frac{\delta^3 S[J]}{\delta J_{\mathrm{x}}^3} + J_{\mathrm{x}} = 0, \tag{10.44}$$

что совпадает с уравнением Швингера (10.30), стр. 218.

# I Классические поля

- $\mathbf{H}_1$ *Получение фурье-образа* (стр. 27)

- $\mathbf{H}_2$ *Замена* $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p}' = -\mathbf{p}$ (стр. 27)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(p)\,dp = -\int\limits_{\infty}^{-\infty} f(p')\,dp' = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(p')\,dp'$$

- $\mathbf{H}_3$ *Условие на фурье-компоненты* (стр. 27)

- $\mathbf{H}_4$ *Сохранение тока* (стр. 31)

- $\mathbf{H}_5$ *Унитарное преобразование* (стр. 33)

- $\mathbf{H}_6$ *Обратное преобразование* (стр. 36)

- $\mathbf{H}_7$ *Матрица бесконечно малых преобразований* (стр. 36)

- $\mathbf{H}_8$ *Преобразование для* $\mathbf{\Sigma}^{\mu\nu}$ (стр. 37)

- $\mathbf{H}_9$ *Коммутатор для* $[\mathbf{\Sigma}^{\alpha\beta}, \mathbf{\Sigma}^{\mu\nu}]$ (стр. 37)
- $\mathbf{H}_{10}$ *Производные от лагранжиана* (стр. **??**)

- $\mathbf{H}_{11}$ *Собственные векторы и значения матрицы* $\mathbf{n\sigma}$ (стр. **??**)

Из уравнения $\mathbf{n\sigma}w = sw$ следует $(\mathbf{n\sigma})^2 w = s\mathbf{n\sigma}w = s^2 w$. Так как для единичного вектора $(\mathbf{n\sigma})^2 = 1$, то $s^2 = 1$ или $s = \pm 1$. Пусть $s = 1$:

$$\begin{pmatrix} n_z & n_x - \imath n_y \\ n_x + \imath n_y & -n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

откуда $w_1 = n_z w_1 + (n_x - \imath n_y) w_2$ или $w_1 = w_2(n_x - \imath n_y)/(1 - n_z)$. Введём два угла сферической системы координат $\mathbf{n} = \{s_\theta c_\phi,\ s_\theta s_\phi, c_\theta\}$. Тогда

$$w_1 = \frac{e^{-\imath\phi}\sin\theta}{1-\cos\theta}\, w_2 = \frac{e^{-\imath\phi}}{\mathrm{tg}(\theta/2)}\, w_2.$$

Нормируя собственный вектор $w^+ w = |w_1|^2 + |w_2|^2 = 1$, получаем $|w_2|^2 = \sin^2(\theta/2)$. При извлечении корня фазу можно выбрать любой и для симметрии между $w_1$ и $w_2$ удобно считать, что $w_2 = e^{\imath\phi/2}\sin(\theta/2)$. Поэтому:

$$w^{(1)} = \begin{pmatrix} e^{-\imath\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{+\imath\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad w^{(-1)} = \begin{pmatrix} -e^{-\imath\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{+\imath\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix},$$

где $w^{(-1)}$ находится аналогично (с $s = -1$). Заметим, что $w^{(1)+} w^{(-1)} = 0$.

## II Функции Грина

• $\mathbf{H}_{12}$ *Двухточечная функция в третьем порядке по* $\lambda$ (стр. **??**)
Спарим сначала внешние линии:

$$(x_1x_2x^4y^4z^4) = (x_1x_2)\,(x^4y^4z^4) + 12\,(x_1x)\,(x^3y^4z^4)$$

$$= (x_1x_2)(x^4y^4z^4) + 36\,(x_1x)\,(x_2x)\,(x^2y^4z^4) + 96\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x^3y^3z^4)$$

Теперь спарим внутреннии линии:

$$(x^2y^4z^4) = (xx)\,(y^4z^4) + 8\,(xy)\,(xy^3z^4)$$

$$= (xx)\,(y^4z^4) + 24\,(xy)\,(xy)\,(y^2z^4) + 24\,(xy)\,(xz)\,(y^3z^3)$$

и

$$(x^3y^3z^4) = 2\,(xx)\,(xy^3z^4) + 3\,(xy)\,(x^2y^2z^4) + 4\,(xz)\,(x^2y^3z^3)$$

$$= 6\,(xx)\,(xy)\,(y^2z^4) + 8\,(xx)\,(xz)\,(y^3z^3)$$

$$+3\,(xy)\,(xx)\,(y^2z^4) + 6\,(xy)\,(xy)\,(xyz^4) + 12\,(xy)\,(xz)\,(xy^2z^3)$$

$$+4\,(xz)\,(xx)\,(y^3z^3) + 12\,(xz)\,(xy)\,(xy^2z^3) + 12\,(xz)\,(xz)\,(xy^3z^2)$$

• $\mathbf{H}_{13}$ *Шеститочечная функция в третьем порядке по* $\lambda$ (стр. **??**)
Вычисляем только связные диаграммы:

$$(x_1x_2x_3x_4x_5x_6x^4y^4z^4) = 12\,(x_1x)\,(x_2x_3x_4x_5x_6x^3y^4z^4)$$
$$= 36\,(x_1x)\,(x_2x)\,(x_3x_4x_5x_6x^2y^4z^4) + 96\,(x_1x)\,(x_2y)(x_3x_4x_5x_6x^3y^3z^4)$$
$$= 72\,(x_1x)\,(x_2x)\,(x_3x)(x_4x_5x_6xy^4z^4) + 288\,(x_1x)\,(x_2x)\,(x_3y)(x_4x_5x_6x^2y^3z^4)$$
$$+288\,(x_1x)\,(x_2y)(x_3x)(x_4x_5x_6x^2y^3z^4) + 288\,(x_1x)\,(x_2y)(x_3y)(x_4x_5x_6x^3y^2z^4)$$
$$+384\,(x_1x)\,(x_2y)(x_3z)(x_4x_5x_6x^3y^3z^3)$$
$$= 72\,(x_1x)\,(x_2x)\,(x_3x)\,(x_4x)\,(x_5x_6y^4z^4)$$
$$+576\,(x_1x)\,(x_2x)\,(x_3x)\,(x_4y)(x_5x_6xy^3z^4)$$
$$+576\,(x_1x)\,(x_2x)\,(x_3y)\,(x_3x)\,(x_5x_6xy^3z^4)$$
$$+864\,(x_1x)\,(x_2x)\,(x_3y)\,(x_3y)\,(x_5x_6x^2y^2z^4)$$
$$+1152\,(x_1x)\,(x_2x)\,(x_3y)\,(x_3z)\,(x_5x_6x^2y^3z^3)$$
$$+576\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3x)\,(x_5x_6xy^3z^4)$$
$$+864\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3y)\,(x_5x_6x^2y^2z^4)$$
$$+1152\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3z)\,(x_5x_6x^2y^3z^3)$$
$$+864\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3y)\,(x_4x)\,(x_5x_6x^2y^2z^4)$$
$$+576\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3y)\,(x_4y)\,(x_5x_6x^3yz^4)$$
$$+1152\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3y)\,(x_4z)\,(x_5x_6x^3y^2z^3)$$
$$+1152\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3z)\,(x_4x)(x_5x_6x^2y^3z^3)$$
$$+1152\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3z)\,(x_4y)(x_5x_6x^3y^2z^3)$$
$$+1152\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3z)\,(x_4z)(x_5x_6x^3y^3z^2)$$

---

• $\mathbf{H}_{14}$ *Четырёхточечная функция в третьем порядке по* $\lambda$ (стр. **??**)
Вычисляем только связные диаграммы:

$$(x_1x_2x_3x_4x^4y^4z^4) = 12\,(x_1x)\,(x_2x_3x_4x^3y^4z^4)$$
$$= 36\,(x_1x)\,(x_2x)\,(x_3x_4x^2y^4z^4) + 96\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3x_4x^3y^3z^4)$$
$$= 72\,(x_1x)\,(x_2x)\,(x_3x)\,(x_4xy^4z^4) + 288\,(x_1x)\,(x_2x)\,(x_3y)\,(x_4x^2y^3z^4)$$
$$+288\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3x)\,(x_4x^2y^3z^4) + 288\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3y)\,(x_4x^3y^2z^4)$$
$$+384\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3z)\,(x_4x^3y^3z^3)$$
$$= 72\,(x_1x)\,(x_2x)\,(x_3x)\,(x_4x)\,(y^4z^4) + 576\,(x_1x)\,(x_2x)\,(x_3x)\,(x_4y)\,(xy^3z^4)$$
$$+288\,(x_1x)\,(x_2x)\,(x_3y)\,(x_4x)\,(x^2y^3z^4) + 864\,(x_1x)\,(x_2x)\,(x_3y)\,(x_4y)\,(x^3y^2z^4)$$

$$+1152\,(x_1x)\,(x_2x)\,(x_3y)\,(x_4z)\,(x_4x^3y^3z^3)$$
$$+576\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3x)\,(xx)(xy^3z^4) + 864\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3x)\,(xy)(x^2y^2z^4)$$
$$+1152\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3x)\,(xz)(x^2y^3z^3)$$
$$+864\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3y)\,(x_4x)\,(x^2y^2z^4) + 576\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3y)\,(x_4y)\,(x^3yz^4)$$
$$+1152\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3y)\,(x_4z)\,(x^3y^2z^3)$$
$$+1152\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3z)\,(x_4x)(x^2y^3z^3) + 1152\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3z)\,(x_4y)(x^3y^2z^3)$$
$$+1152\,(x_1x)\,(x_2y)\,(x_3z)\,(x_4z)(x^3y^3z^2)$$

---

## III Регуляризация

- $\mathbf{H}_{15}$ *Взятие производной по* $p^\mu$ (стр. **??**)

## IV Теория симметрии

• $\mathbf{H}_{16}$ *Инвариантность уравнений Ньютона* (стр. **??**)

Запишем уравнение в штрихованной системе отсчёта:

$$\frac{d^2x_i'}{dt'^2} = \sum_{j\neq i}^{n} f(|x_i' - x_j'|)$$

и подставим преобразования $t' = t$, $x' = x - vt$ с $v = const$. Так как

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v, \qquad \frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

имеем

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \sum_{j\neq i}^{n} f(|x_i - vt - (x_j - vt)|) = \sum_{j\neq i}^{n} f(|x_i - x_j|).$$

Таким образом в нештрихованной системе уравнение не изменило своего вида, т.е. оказалось инвариантным.

---

• $\mathbf{H}_{17}$ *Определяющие соотношения для* $\mathbf{D_3}$ (стр. 282)

Единичный элемент "$e$" и два порождающих элемента $a$ и $c$ дают 6 элементов:

$$e, \quad a, \quad a^2 = b, \quad c, \quad ac = d, \quad ca = f.$$

Другие элементы можно было бы получать перемножением $\{a, b, c, d, f\}$. Однако определяющие соотношения блокируют эту деятельность. Например, $d^2 = (ac)^2 = e$, $df = acca = a^2 = b$. Несколько сложнее:

$$f^2 = (ca)(ca) = (ca)(ca)c^2 = c(ac)^2c = c^2 = e.$$

---

• $\mathbf{H}_{18}$ *Сопряжённая группа* (стр. 282)

Замкнутость умножения доказана на стр. 282. Ассоциативность очевидна, в силу ассоциативности умножения элементов групп. Аналогично ясно появление единичного элемента, который будет общим для всех подгрупп: $geg^{-1} = gg^{-1} = e$. Наконец, пусть $h$ и $h^{-1}$ принадлежат $\mathbf{H}$ и обратны друг другу. Тогда обратными будут и их сопряжения:

$$h' \cdot h'^{-1} = (ghg^{-1}) \cdot (gh^{-1}g^{-1}) = ghh^{-1}g^{-1} = geg^{-1} = gg^{-1} = e.$$

---

• $\mathbf{H}_{19}$ *Унитарные матрицы образуют группу* (стр. **??**)

Пусть матрицы $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$ удовлетворяют условию унитарности. Тогда их произведение также будет унитарной матрицей:

$$(\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2)^+(\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2) = \mathbf{U}_2^+\mathbf{U}_1^+\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_2^+\mathbf{1}\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_2^+\mathbf{U}_2 = \mathbf{1},$$

где учтено, что при транспонировании произведения матриц они транспонируются и меняются местами. Аналогично, если матрица $\mathbf{U}$ унитарна $(\mathbf{U}^+ = \mathbf{U}^{-1})$, то и обратная к ней $\mathbf{U}^{-1}$ будет унитарной:

$$(\mathbf{U}^{-1})^+\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{1} \qquad => \qquad (\mathbf{U}^{-1})^+ = \mathbf{U} \qquad => \qquad \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^+.$$

• $\mathbf{H}_{20}$ *Связь матриц* (стр. 290)

Перегруппируем члены в произведении, полученном 2-м способом:

$$\mathbf{T_{(b)}T_{(a)}} = \mathbf{1}+(b^k+a^k)\mathbf{X}_k+\phi^k_{ij}b^ia^j\mathbf{X}_k+(b^ib^j+a^ia^j)\mathbf{Y}_{ij}+(b^ia^j+a^ib^j)\mathbf{Y}_{ij}+...$$

Сравнивая с $\mathbf{T_{(b)}T_{(a)}}$, полученном 1-м способом, имеем:

$$\phi^k_{ij}b^ia^j\mathbf{X}_k + (b^ia^j + a^ib^j)\mathbf{Y}_{ij} = b^ia^j\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j.$$

Беря производные по $b^p$, $a^q$ и учитывая, что $\mathbf{Y}_{ij} = \mathbf{Y}_{ji}$, получаем требуемое соотношение.

---

• $\mathbf{H}_{21}$ *Генераторы группы* $\mathbf{SO}(2)$ (стр. **??**)

Найдём генератор группы поворотов в плоскости $\mathbf{SO}(2)$ (множество ортогональных матриц 2x2 с единичным определителем), разложив матрицу в ряд по углу (параметру) $a$:

$$\mathbf{T}(a) = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix} = \mathbf{1}+a\,\mathbf{X}+..., \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Конечный поворот с параметром $a$ можно представить в виде произведения $N$ бесконечно малых преобразований с параметром $\Delta a = a/N$:

$$\mathbf{T}(a) = \underbrace{\mathbf{T}_{\Delta a}...\mathbf{T}_{\Delta a}}_{N \text{ раз}} = (1+\Delta a\mathbf{X})^N = \left(1+\frac{a\,\mathbf{X}}{N}\right)^N \to e^{a\,\mathbf{X}} = \mathbf{1}\cos a+\mathbf{X}\sin a.$$

Результат $\mathbf{T}(a) = e^{a\mathbf{X}}$ получается в пределе $N \to \infty$ (по определению числа "$e$") и является достаточно общим в теории групп. Раскладывая экспоненту $e^{a\,\mathbf{X}}$ в ряд Тейлора, можно снова восстановить $\sin a$ и $\cos a$. Для этого надо учесть, что: $\mathbf{X}^2 = -\mathbf{1}$, $\mathbf{X}^3 = -\mathbf{X}$, $\mathbf{X}^4 = \mathbf{1}$, $\mathbf{X}^5 = \mathbf{X}, ...$

---

• $\mathbf{H}_{22}$ *Антисимметричность и линейность коммутаторов* (стр. **??**)

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{AB}-\mathbf{BA} = -(\mathbf{BA}-\mathbf{AB}) = -[\mathbf{B},\mathbf{A}].$$

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}+\mathbf{C}] = \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})-(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{AB}-\mathbf{BA}+\mathbf{AC}-\mathbf{CA} = [\mathbf{A},\mathbf{B}]+[\mathbf{A},\mathbf{C}].$$

---

• $\mathbf{H}_{23}$ *Коммутатор произведения* (стр. **??**)

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}]\mathbf{C}+\mathbf{B}[\mathbf{A},\mathbf{C}] = \mathbf{ABC}-\mathbf{BAC}+\mathbf{BAC}-\mathbf{BCA} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})-(\mathbf{BC})\mathbf{A}.$$

---

• $\mathbf{H}_{24}$ *Тождество Якоби* (стр. 290)

$$[\mathbf{C},\,\mathbf{AB}-\mathbf{BA}]+[\mathbf{A},\,\mathbf{BC}-\mathbf{CB}]+[\mathbf{B},\,\mathbf{CA}-\mathbf{AC}] =$$

$$= \mathbf{C}(\mathbf{AB})-\mathbf{C}(\mathbf{BA})+\mathbf{A}(\mathbf{BC})-\mathbf{A}(\mathbf{CB})+\mathbf{B}(\mathbf{CA})-\mathbf{B}(\mathbf{AC})$$

$$-(\mathbf{AB})\mathbf{C}+(\mathbf{BA})\mathbf{C}-(\mathbf{BC})\mathbf{A}+(\mathbf{CB})\mathbf{A}-(\mathbf{CA})\mathbf{B}+(\mathbf{AC})\mathbf{B} = 0.$$

---

• $\mathbf{H}_{25}$ *Операторная алгебра для группы* $\mathbf{SO}(3)$ (стр. 294)

Учитывая выражения для генераторов группы вращения (G.16) можно записать явный вид операторов $\hat{X}_i = \{\hat{X}_x, \hat{X}_y, \hat{X}_z\} = -(\mathbf{X}_i)_{\alpha\beta} x_\beta \partial_\alpha$:

$$\hat{X}_x = y\partial_z - z\partial_y, \qquad \hat{X}_y = z\partial_x - x\partial_z, \qquad \hat{X}_z = x\partial_y - y\partial_x,$$

где $\partial_x = \partial/\partial x$, и т.д. Найдём коммутатор $[\hat{X}_x, \hat{X}_y]$:

$$(y\partial_z - z\partial_y)(z\partial_x - x\partial_z)F = y\partial_z(z\partial_x F) - y\partial_z x\partial_z F - z\partial_y z\partial_x F + z\partial_y x\partial_z F,$$

$$(z\partial_x - x\partial_z)(y\partial_z - z\partial_y)F = z\partial_x y\partial_z F - z\partial_x z\partial_y F - x\partial_z y\partial_z F + x\partial_z(z\partial_y F).$$

Раскрывая производную произведения $y\partial_z(z\partial_x F) = y\partial_x F + yz\partial_z\partial_x F$, ..., и вычитая эти два выражения, получаем: $[\hat{X}_x, \hat{X}_y] = -\hat{X}_z$, где опущена произвольная функция $F$ на которую действуют операторы.

---

• $\mathbf{H}_{26}$ *Элемент матрицы преобразований* $|\Lambda^0{}_0| \geqslant 1$ (стр. 299)

Запишем условие ортогональности ($\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{g}\mathbf{\Lambda}\mathbf{g}$):

$$(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^T\mathbf{\Lambda})^\alpha{}_\beta = (\tilde{\Lambda}^T)^\alpha{}_\gamma \Lambda^\gamma{}_\beta = \tilde{\Lambda}_\gamma{}^\alpha \Lambda^\gamma{}_\beta = \delta^\alpha_\beta.$$

Полагая индексы равным нулю $\alpha = \beta = 0$ и расписывая сумму, имеем:

$$\tilde{\Lambda}_0{}^0\Lambda^0{}_0 + \tilde{\Lambda}_1{}^0\Lambda^1{}_0 + \tilde{\Lambda}_2{}^0\Lambda^2{}_0 + \tilde{\Lambda}_3{}^0\Lambda^3{}_0 = 1.$$

Так как матрица $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ получается из $\mathbf{\Lambda}$ свёрткой с двумя метрическими тензорами, то:

$$\tilde{\Lambda}_0{}^0 = g_{00}\Lambda^0{}_0 g^{00} = \Lambda^0{}_0, \qquad \tilde{\Lambda}_1{}^0 = g_{11}\Lambda^1{}_0 g^{00} = -\Lambda^1{}_0,$$

и т.д. Поэтому: $(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + (\Lambda^1{}_0)^2 + (\Lambda^2{}_0)^2 + (\Lambda^3{}_0)^2 \geqslant 1$.

---

• $\mathbf{H}_{27}$ *Обратный элемент группы Пуанкаре* (стр. 300)

$$(\mathrm{a},\ \mathbf{\Lambda}) \cdot (-\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathrm{a},\ \mathbf{\Lambda}^{-1}) = (\mathrm{a} - \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathrm{a},\ \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^{-1}) = (0, \mathbf{1}).$$

---

• $\mathbf{H}_{28}$ *Трансляции – инвариантная подгруппа* (стр. 300)

$$(\mathrm{b},\ \mathbf{\Lambda}) \cdot (\mathrm{a},\ \mathbf{1}) \cdot (\mathrm{b},\ \mathbf{\Lambda})^{-1} = (\mathrm{b} + \mathbf{\Lambda}\mathrm{a},\ \mathbf{\Lambda}) \cdot (-\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathrm{b},\ \mathbf{\Lambda}^{-1}) = (\mathbf{\Lambda}\mathrm{b},\ \mathbf{1}).$$

---

• $\mathbf{H}_{29}$ *Коммутатор* $[\hat{J}_{\alpha\beta},\ \hat{P}_\gamma\hat{P}^\gamma]$ (стр. **??**)

Воспользуемся тождеством $[\hat{A},\ \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A},\ \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A},\ \hat{C}]$:

$$[\hat{J}_{\alpha\beta},\ \hat{P}_\gamma\hat{P}^\gamma] = [\hat{J}_{\alpha\beta},\ \hat{P}_\gamma]\hat{P}^\gamma + \hat{P}_\gamma[\hat{J}_{\alpha\beta},\ \hat{P}^\gamma] = -[\hat{P}_\gamma,\ \hat{J}_{\alpha\beta}]\hat{P}^\gamma - \hat{P}^\gamma[\hat{P}_\gamma,\ \hat{J}_{\alpha\beta}].$$

Подставляя коммутатор (G.25), стр. 301, имеем:

$$[\hat{J}_{\alpha\beta},\ \hat{P}_\gamma\hat{P}^\gamma] = -\imath(g_{\gamma\alpha}\hat{P}_\beta - g_{\gamma\beta}\hat{P}_\alpha)\hat{P}^\gamma - \imath\hat{P}^\gamma(g_{\gamma\alpha}\hat{P}_\beta - g_{\gamma\beta}\hat{P}_\alpha),$$

или сворачивая с метрически тензором, окончательно:

$$[\hat{J}_{\alpha\beta},\ \hat{P}_\gamma\hat{P}^\gamma] = -\imath(\hat{P}_\beta\hat{P}_\alpha - \hat{P}_\alpha\hat{P}_\beta) - \imath(\hat{P}_\alpha\hat{P}_\beta - \hat{P}_\beta\hat{P}_\alpha) = 0.$$

---

# Интегралы

---

**Квантовый мир**

**Сергей С. Степанов**

Эта книга находится в процессе создания. Её последняя версия и другие материалы находятся на сайте: http://synset.com. Там же можно найти первый том: **I. Механика**
Замеченные ошибки и вопросы просьба присылать по адресу: steps137, затем собачка и gmail.com.

(c) 2015. Печать: 2 июля 2017 г.

## I.1 Теорема Коши

• В 1748 Леонард Эйлер опубликовал замечательную формулу:

$$e^{\imath\phi} = \cos\phi + \imath \sin\phi, \tag{I.1}$$

которая заменяет собой всю тригонометрию, позволяя легко вывести любое соотношение с sin и cos. Например, при возведении формулы Эйлера в $n$-ю степень получается *формула Муавра*:

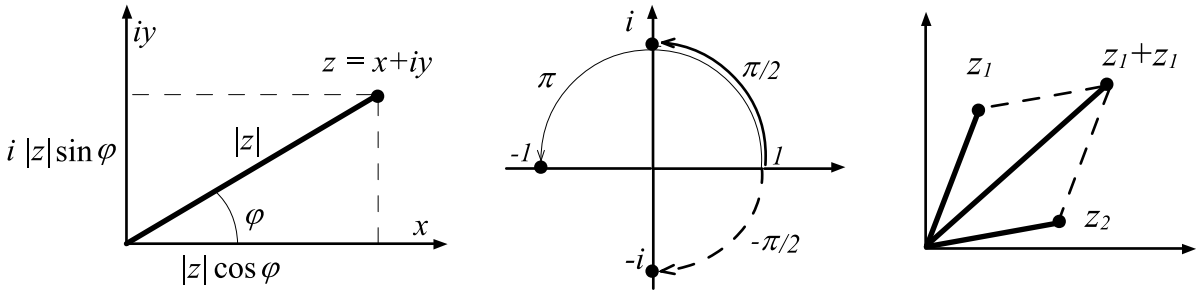
$$\cos(n\phi) + \imath \sin(n\phi) = \big(\cos\phi + \imath \sin\phi\big)^n,$$

дающая тригонометрические функции кратных углов. Доказать (I.1) можно, например, раскладывая левую и правую часть в ряд Тейлора.

▷ Произвольное комплексное число:

$$z = x + \imath\, y = |z|\, e^{i\phi} = |z|\, (\cos\phi + \imath\, \sin\phi)$$

определяется действительной $x$ и мнимой $y$ частями *или* модулем $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ и *аргументом* (углом) $\phi = \mathrm{arctg}(y/x)$. Рассмотрим декартовую плоскость. По оси $x$ отложим действительную часть, а по оси $y$ - комплексную вместе с мнимой единицей. Тогда любое комплексное число представляет собой точку на этой плоскости, а действительная и мнимая части являются проекциями на координатные оси:




Мнимая единица имеет единичный модуль и аргумент, равный $\pi/2$, а аргумент "-1" равен $\pi$. Сложение двух комплексных чисел геометрически эквивалентно сложению векторов (выше третий рисунок). Для комплексных числе не определено упорядочивание $z_1 < z_2$ и т.п.

▷ Аргумент комплексного числа определён с точностью до целого числа полных оборотов. Это означает, что $|z|\, e^{\imath\phi}$ и $|z| e^{\imath\,(\phi+2\pi k)}$ – одно и тоже число ($k = 1, 2, ...$). Поэтому, при извлечении корня $n$-той степени:

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n} \exp\left\{\imath\, \frac{\phi + 2\pi k}{n}\right\}, \qquad k = 0, 1, .., n-1, \tag{I.2}$$

при $k = 0, 1, .., n-1$ получаются различные комплексные числа. *Любое* алгебраическое уравнение $n$-й степени всегда имеет $n$ решений, часть из которых может оказаться комплексными.

• Производная функции $f(z)$, зависящей от комплексного числа $z$, определяется аналогично производной по действительной переменной:

$$\frac{df(z)}{dz}\Big|_{z=z_0} = f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}. \qquad \text{(I.3)}$$

Предел существует, если нет разницы от способа приближения $z$ к $z_0$. Это сильное требование накладывает ограничение на действительную и мнимую части функции. Так, если $z = x + \imath y$ и $f(z) = u(x,y) + \imath\, v(x,y)$, то должны выполняться *условия Коши-Римана*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad \text{(I.4)}$$

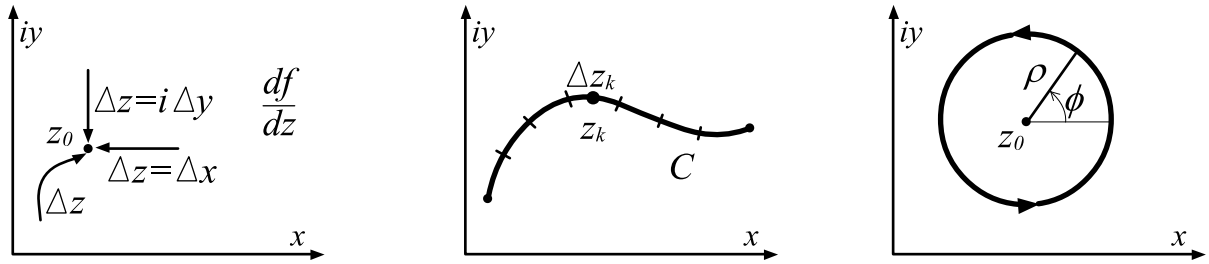
Они следуют из определения (I.3), если выбрать $\Delta z = \Delta x$ (стремимся к точке $z_0$ на комплексной плоскости в горизонтальном направлении) и $\Delta z = \imath\Delta y$ (стремимся сверху вниз), см. ниже первый рисунок.

▷ *Аналитической функцией* называется функция $f(z)$, дифференцируемая во всех точках некоторой области комплексной плоскости и имеющая в этой области непрерывную производную. Для аналитической функции должны выполнятся условия Коши-Римана (I.4). Область аналитичности может совпадать со всей комплексной плоскостью или только с некоторой её частью (или частями). Если *комплексная* функция имеет производную первого порядка, то она имеет и производную любого порядка. Аналитическая функция может быть разложена в ряд Тейлора и наоборот, такая разложимость означает аналитичность.

▷ Интегрирование в комплексной плоскости осуществляется вдоль фиксированной кусочно-гладкой кривой $C$. Такую кривую можно задать в параметрическом виде $z(t) = x(t) + \imath\, y(t)$, где $t$ – действительный параметр, "нумерующий" точки кривой. Для вычисления интеграла кривая разбивается на $n$ частей $\Delta z_1$,...,$\Delta z_n$ и находится предел суммы:

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\,\Delta z_k,$$

где $z_k$ – произвольная точка, принадлежащая $k$-тому сегменту кривой.




Кривая $C$ по которой проводится интегрирование может иметь начало и конец, может уходить на бесконечность или быть замкнутой.

▷ В качестве примера рассмотрим интеграл от $f(z) = 1/(z - z_0)$, по *замкнутой* кривой, представляющей собой окружность радиуса $\rho$ вокруг точки $z_0$. Зададим её в параметрическом виде $z = z_0 + \rho\, e^{\imath\phi}$ с $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$:

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z - z_0} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\imath\rho e^{\imath\varphi}\, d\phi}{\rho e^{\imath\varphi}} = \imath \int\limits_0^{2\pi} d\phi = 2\pi\, \imath, \tag{I.5}$$

где учтено, что $dz = \imath\rho e^{\imath\varphi}\, d\phi$ при $\rho = const$ (см. третий рисунок на предыдущей странице). Интеграл не зависит ни от радиуса окружности $\rho$, ни от положения точки $z_0$. Кроме этого, при выбранной параметризации кривой, её обход проводится *против часовой стрелки*. Функция $1/(z - z_0)$ не является аналитической в точке $z = z_0$. Однако, так как контур через эту точку не проходит, интеграл по нему хорошо определён.

▷ Рассмотрим функцию $f(z)$, являющуюся аналитической в некоторой односвязной (без дырок) области $D$. Интеграл от такой функции по любому *замкнутому* контуру $C$, лежащему в $D$ *равен нулю*:

$$\oint\limits_C f(z)\, dz = 0. \tag{I.6}$$

Это исключительно важное утверждение называется *теоремой Коши*. Она непосредственно следует из условий Коши-Римана (I.4). Действительно, записывая $f(z) = u(x, y) + \imath\, v(x, y)$ и $dz = dx + \imath\, dy$ имеем:

$$\oint\limits_C f(z)\, dz = \oint\limits_C (u\, dx - v\, dy) + \imath \oint\limits_C (v\, dx + u\, dy). \tag{I.7}$$

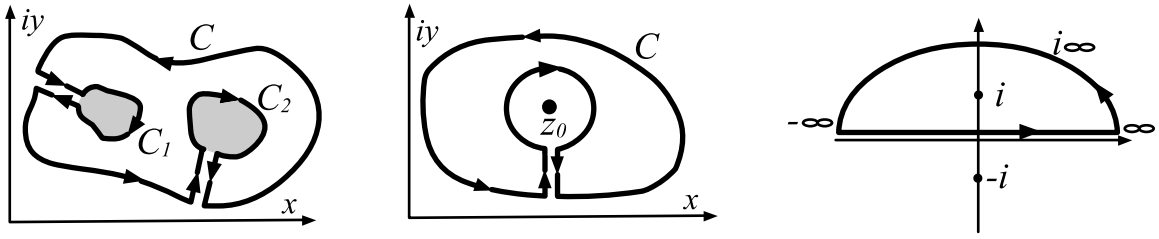
Интегралы в правой части можно рассматривать как обычные контурные интегралы в плоскости $(x, y)$ по замкнутой кривой $C$. Для таких интегралов справедлива теорема Стокса, позволяющая перейти от интеграла по замкнутому контуру $C$ к интегралу по площади $S$, который этот окружает контур:

$$\oint\limits_C (F_x\, dx + F_y\, dy) = \oint\limits_C \mathbf{F}\, d\mathbf{l} = \int\limits_S [\nabla \times \mathbf{F}]\, d\mathbf{S} = \int\limits_S \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dxdy.$$

Переходя в (I.7) к поверхностным интегралам и учитывая условия Коши-Римана (I.4), несложно получить ноль.

Из теоремы Коши следует, что интеграл по незамкнутому контуру зависит только от положения начальной и конечной точки, а сам контур можно, без изменения значения интеграла, произвольным образом деформировать (в области аналитичности функции).

▷ Теорему Коши легко обобщить на многосвязную область. Пусть внутри контура $C$ функция $f(z)$ аналитична везде, кроме нескольких областей (на первом рисунке ниже они заштрихованы). Тогда можно эти области неаналитичности окружить контурами $C_1$, $C_2$ и соединить их с основным контуром:




Интегралы по бесконечно близким сегментам кривой, соединяющей $C$ и $C_i$ равны нулю (интегрирование идёт во встречных направлениях: на одной $\Delta z > 0$, а на соседней $\Delta z < 0$). Поэтому, интеграл по контуру $C$, плюс интегралы по $C_1$ и $C_2$ по теореме Коши, будет равен нулю (интегрирование по $C$ ведётся против часовой стрелки, а по $C_i$ – против).

▷ Аналогичным образом можно вычислить интеграл от *произвольной* аналитической функции $f(z)$, делённой на $z - z_0$, по *произвольному* контуру $C$, который *окружает* точку $z_0$:

$$\oint_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = 2\pi\imath\, f(z_0). \tag{I.8}$$

Действительно, окружим $z = z_0$ окружностью малого радиуса $\rho \to 0$ (выше второй рисунок). Аналитическая функция $f(z)$ в окрестности $z = z_0$ равна $f(z_0)$ и может быть вынесена за интеграл, после чего используется соотношение (I.5). Дифференцируя (I.8) $n$ раз по $z_0$ несложно получить:

$$\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi\imath}{n!}\,\frac{d^n f(z_0)}{dz^n}. \tag{I.9}$$

▷ Если функция внутри замкнутого контура $C$ (обход против часовой стрелки) содержит несколько полюсов $z_i$, разной степени то интеграл от неё равен сумме *вычетов*:

$$\oint_C F(z)\,dz = 2\pi\imath \sum_i \operatorname{res} F(z_i), \tag{I.10}$$

где для полюса $(n+1)$-й степени вычет равен

$$F(z) = \frac{f(z)}{(z - z_i)^{n+1}}, \qquad \operatorname{res} F(z_i) = \frac{1}{n!}\,\frac{d^n f(z_i)}{dz^n}$$

(предполагается, что функция $f(z)$ в окрестности $z_i$ аналитична).

## I.2 Многозначные функции

• Функции комплексной переменной $f(z)$ могут быть неоднозначными, т.е. одному и тому же значению $z$ соответствует несколько (иногда бесконечно много) различных значений $f$. Это новый тип неоднозначности по сравнению с "простыми" неоднозначностями действительных функций типа $\arcsin(x)$.

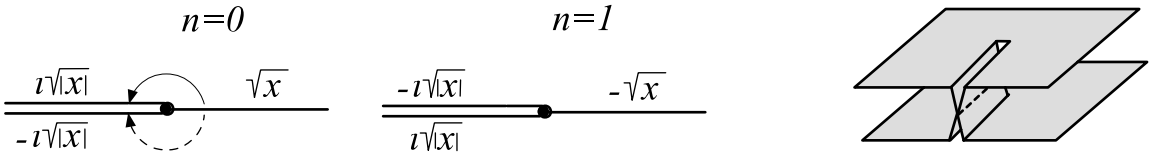
Рассмотрим в качестве примера функцию $\xi = \sqrt{z}$, обратную к $z = \xi^2$. Пусть $z = r\,e^{\imath\phi}$, где $r > 0$. Изменение угла на $2\pi$: $\phi \mapsto \phi + 2\pi$ возвращает нас к той же точке комплексной плоскости. Однако, значение функции $\sqrt{z}$ там уже другое ($e^{\imath\pi} = -1$):

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\,e^{\imath\frac{\phi}{2}} \qquad \mapsto \qquad \sqrt{z} = \sqrt{r}\,e^{\imath\frac{\phi}{2}+\imath\pi} = -\sqrt{r}\,e^{\imath\frac{\phi}{2}}$$

Делая ещё один оборот, возвращаемся к исходному значению. Таким образом, это двузначная функция. Аналогичные рассуждения показывают, что функция $z^{1/n}$ при целом $n$ является $n$-значной функцией, см. (I.2).

Чтобы придать описанию многозначных функций наглядности, используют *поверхность Римана*. Эта поверхность является совокупностью комплексных плоскостей, называемых *листами*. На каждом листе задаётся своё однозначное множество значений функции. Переход с одного листа на другой, даёт новую *ветвь* многозначной функции (новые её значения). Для непрерывности таких переходов, листы разрезаются вдоль некоторых линий и соединяются друг с другом этими разрезами. Разрезы делают так, чтобы любые перемещения по листу, при которых не происходит пересечения разреза, не покидали данного листа (не приводили к многозначности).

Например, для описания функции $\sqrt{z} = \sqrt{r}\,e^{\imath\phi/2}$, возьмём две комплексные плоскости и разрежем их вдоль действительной полуоси $x < 0$:




Пусть на первом листе ($n = 0$) вдоль действительной полуоси $x > 0$ функция равна $\sqrt{r} \equiv \sqrt{|z|} = \sqrt{x}$. Поворачиваясь на угол $\phi = \pi$ на *верхнем* берегу разреза получаем значение функции $\imath\sqrt{|x|}$. Чтобы получить значение функции на нижнем берегу разреза *этого же листа*, необходимо положить $\phi = -\pi$ (чтобы не пересечь разрез, подходим к нему снизу). В результате получаем значение $-\imath\sqrt{|x|}$. Аналогичным образом находится значение функции $\sqrt{x}$ в любой точке первого листа.

Будем считать, что при пересечении разреза первого листа сверху, мы переходим на нижний берег второго листа ($n = 1$). На нём значение функции будет таким же как и при "выходе" с первого листа. Поворот на угол $2\pi$ (от действительной оси $x$ первого листа) соответствует снова действительной оси, но уже второго листа. Функция на ней равна $\sqrt{r}\, e^{\imath 2\pi/2} = -\sqrt{|z|}$. Наконец, поворот на $3\pi$ даёт точки на верхнем берегу второго листа. Дальнейшее увеличение угла возвращает на первый лист со стороны его нижнего разреза. Для действительного $x > 0$ на первом листе справедливо правило вычисления корня из отрицательных чисел:

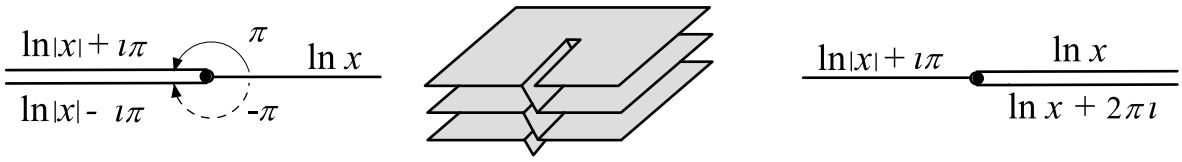
$$\sqrt{-x \pm \imath\epsilon} = \pm\imath\sqrt{x}, \tag{I.11}$$

где $\epsilon \to +0$ – бесконечно малое положительное число, символизирующее верхний ($\imath\epsilon$) и нижний ($-\imath\epsilon$) берега разреза.

Ещё один пример многозначной функции – это *логарифм* $\xi = \ln z$ – функция, обратная к $z = e^{\xi}$. Записывая $z = |z|\, e^{\imath(\phi+2\pi n)}$, $\phi = [0...2\pi]$ имеем бесконечное число *ветвей* функции:

$$\ln z = \ln|z| + \imath\,(\phi + 2\pi n), \qquad\qquad n = 0, \pm1, \pm2, ...$$

Так как на положительной действительной полуоси логарифм $\ln x$ хорошо определён, удобно провести разрез вдоль отрицательной части оси $x < 0$:




На нижней части разреза $(n+1)$-я ветвь логарифма принимает то же значение, что и $n$-я ветвь на верхней стороне и поверхность Римана похожа на бесконечный винт.

*Главным значением логарифма* называют его значение на первом листе (где он равен $\ln x$ на действительной полуоси $x > 0$). На этом листе для действительного $x > 0$ и $\epsilon \to +0$:

$$\ln(-x \pm \imath\epsilon) = \ln(x) \pm \imath\pi \tag{I.12}$$

При описании многозначной функции $\ln z$, можно сделать разрез и вдоль положительной полуоси $x > 0$ (выше третий рисунок). В этом случае на первом листе на верхнем берегу разреза ($x > 0$) можно положить $\ln(x+\imath\epsilon) = \ln(x)$. Тогда на нижнем берегу: $\ln(x-\imath\epsilon) = \ln(x)+2\pi\imath$, а на действительной отрицательной полуоси $x < 0$: $\ln(-|x|) = \ln|x| + \imath\pi$.

• Рассмотрим ещё один пример многозначной функции:

$$f(z) = \sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{(z-1)(z+1)}. \qquad \text{(I.13)}$$

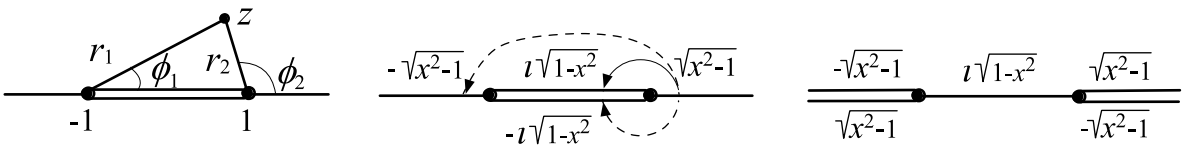
Она имеет 2 особые точки $z = \pm 1$, в которых выражение под корнем меняет свой знак. Поэтому параметризацию Эйлера $z = re^{\imath\phi}$ удобно изменить следующим образом:

$$z = -1 + r_1\, e^{\imath\phi_1} = 1 + r_2\, e^{\imath\phi_2}$$

(это две эквивалентные "нумерации" комплексного числа при помощи пары действительных чисел $(r_1, \phi_1)$, либо $(r_2, \phi_2)$, где $r_i > 0$). Функцию (I.13) теперь можно записать следующим образом:

$$f(z) = \sqrt{r_1 r_2}\ \ \exp\Big[\imath\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\Big]. \qquad \text{(I.14)}$$

Проведём разрез между особыми точками $[-1, 1]$. Пусть на действительной оси при $x > 1$ функция равна $\sqrt{x^2 - 1}$. Будем, отталкиваясь от этой линии, вычислять значения функции на всей комплексной плоскости, двигаясь так, чтобы *не пересечь* разрез (всё время остаёмся на первом листе римановой поверхности).




При движении от $x > 1$ к $-1 < x < 1$ *сверху* (тонкая линия со стрелкой на втором рисунке) угол $\phi_1$ возвращается к нулевому значению, а $\phi_2$ становится равными $\pi$. Поэтому на верхнем берегу разреза $(y = +0)$ функция получает фазовый множитель $e^{\imath(0+\pi)/2} = \imath$. Аналогично, при движении снизу к нижнему берегу разреза $(y = -0)$, получаются углы $\phi_1 = 0$ и $\phi_2 = -\pi$, поэтому фазовый множитель равен $e^{\imath(0-\pi)/2} = -\imath$. Наконец, на действительную часть оси $x < -1$ можно попасть, например, сверху, обойдя разрез. При этом $\phi_1 = \phi_2 = \pi$, поэтому $e^{\imath(\pi+\pi)/2} = -1$.

Пересекая разрез, мы попадаем на второй лист римановой поверхности. Например, обойдя точку ветвления $z = 1$ через разрез и вернувшись на действительную полуось $z > 1$ получим $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 2\pi$, поэтому на втором листе функция имеет уже множитель $-1$. Если бы такой обход был сделан вокруг обоих точек ветвления (разрез не пересекается и мы остаёмся на первом листе), то $\phi_1 = \phi_2 = 2\pi$ и значение функции не меняется. Стоит также поверить, что функция двузначна и для её описания достаточно двух листов. Функцию (I.13) можно также определить и при помощи разрезов, нарисованных на третьем рисунке выше.

• Рассмотренные выше особые точки функций $\sqrt{z}$, $\ln z$, $\sqrt{z^2-1}$ являются точками *ветвления*. Такие точки всегда возникают парами. Разрез является линией, соединяющей пары точек ветвления. Так, для функции $\sqrt{z}$, кроме $z=0$, существует также ветвление в *бесконечно удалённой точке*: если $z=1/\xi$, то $\sqrt{z}=1/\sqrt{\xi}$ и $\xi=0$ – точка ветвления $\sqrt{\xi}$. Аналогичную точку ветвления содержит логарифм. У функции $\sqrt{z^2-1}$, бесконечно удалённая точка не является точкой ветвления, что позволяет сделать разрез конечным, а его обход не меняет значения функции.

В общем случае принята следующая классификация особых точек функции (точек в которых аналитичность нарушается). Пусть $z_0$ некоторая точка комплексной плоскости к которой стремится $z$. Эта точка будет:

▷ *устранимой* особой точкой, если есть конечный предел: $\sin(z)/z$;

▷ *полюсом*, если предел существует, но бесконечен: $1/z$, $\sin(z)/z^2$;

▷ *существенно* особой точкой, если предела нет: $\sqrt{z}$, $\exp(1/z)$.

Предел не должен зависеть от способа стремления к $z_0$ и в отличии от функции действительной переменной возможностей (путей) для $z \to z_0$ существенно больше.

Рядом Лорана в окрестности $|z-z_0|<r$ некоторой точки $z_0$ называется сумма ($r$ – *радиус сходимости*):

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n = \ldots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1\,(z-z_0) + \ldots$$

Слагаемые с коэффициентами $c_{-1}$, $c_{-2}$, ... называются *главной частью*. Чтобы особая точка была устранимой, необходимо и достаточно, чтобы в ряде Лорана отсутствовала главная часть (т.е. это ряд Тейлора). Особая точка является полюсом, если главная часть содержит конечное число слагаемых. Наконец, для функций с бесконечным числом слагаемых в главной части, точка $z_0$ является существенно особой. Например:

$$\exp\frac{1}{z} = 1 + \frac{z^{-1}}{1} + \frac{z^{-2}}{2!} + \frac{z^{-3}}{3!} + \ldots$$

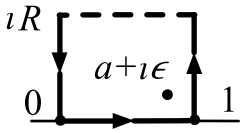
имеет при $z=0$ существенно особую точку. На языке предела это означает, что при движении вдоль действительной оси слева $x \to -0$ результат равен $\exp(-1/0)=0$, тогда как при движении справа: $\exp(1/0)=\infty$, т.е предел отсутствует. В случае функции $\exp(1/z^2)$ результат стремления вдоль действительной оси слева и справа совпадает, однако вдоль комплексной оси от него отличается, поэтому $z=0$ также существенно особая точка (что видно и при разложении в ряд Лорана).

## I.3 Различные интегралы

- Докажем соотношение:

$$\int\limits_0^1 \frac{dz}{z-a-\imath\epsilon} = \begin{cases} \ln\dfrac{a-1}{a}, & a>1, \quad a<0 \\ \ln\dfrac{1-a}{a}+\imath\pi, & 0<a<1. \end{cases} \tag{I.15}$$

Когда параметр $a=[0...1]$, подынтегральная функция имеет полюс на контуре интегрирования. Для его обхода введен бесконечно малый комплексный сдвиг $\epsilon \to +0$ ($\epsilon > 0$). В силу теоремы Коши, интеграл по замкнутому контуру (далее $R\to\infty$) равен $2\pi\imath$ (простой полюс):




$$2\pi\imath = \int\limits_0^1 \frac{dz}{z-a-\imath\epsilon} + \int\limits_1^{1+\imath R} \frac{dz}{z-a-\imath\epsilon} + \int\limits_{\imath R}^0 \frac{dz}{z-a-\imath\epsilon}.$$

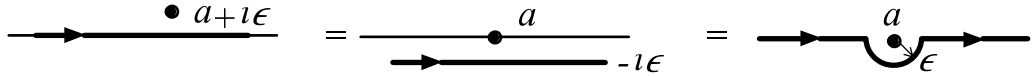
На $\imath R \to \imath\infty$ (пунктир) подынтегральная функция стремиться к нулю. На левом вертикальном отрезке контура $z=\imath y$, а на правом $z=1+\imath y$:

$$\int\limits_0^1 \frac{dz}{z-a-\imath\epsilon} = 2\pi\imath + \int\limits_0^R \frac{\imath dy}{\imath y - a} - \int\limits_0^R \frac{\imath dy}{1-a+\imath y},$$

Умножая числитель и знаменатель первого интеграла на $\imath y+a$, а второго на $1-a-\imath y$ и проводя интегрирование с $R\to\infty$, приходим к (I.15). Этот же результат можно получить более формально:

$$\int\limits_0^1 \frac{dz}{z-a-\imath\epsilon} = \ln(z-a-\imath\epsilon)\Big|_0^1 = \ln(1-a)-\ln(-a-\imath\epsilon) = \ln(1-a)-\{\ln a-\imath\pi\},$$

где учтено соотношение (I.12). Отметим, что правило обхода полюса $\imath\epsilon$ можно сделать тремя эквивалентными способами (сдвинуть полюс, сдвинуть контур и обойти полюс по малой окружности):




(I.16)

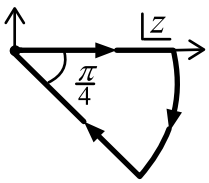
Если $\epsilon<0$, то результат получается аналогичным, но со знаком минус при $\imath\pi$. При помощи интеграла (I.15), несложно доказать соотношение:

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{dz}{z^2-a^2-\imath\epsilon} = \frac{\imath\pi}{a} + \frac{1}{a}\ln\frac{1-a}{1+a}, \qquad 0<a<1. \tag{I.17}$$

Для этого учитывается чётность функции и она разбивается на две дроби (как обычно, при $\epsilon\to 0$ и $a>0$ полагаем $2a\epsilon=\epsilon$ и пренебрегаем $\epsilon^2$).

• Рассмотрим гауссовый интеграл с мнимой единицей в показателе экспоненты:

$$\int_0^\infty e^{-\imath z^2}\,dz.$$




Он встречается в функциональных интегралах квантовой теории. Вычислим его в комплексной плоскости по замкнутому контуру, изображенному на рисунке. На бесконечно удалённом криволинейном участке контура $z = R\,e^{\imath\phi}$, поэтому показатель экспоненты $-\imath z^2 = -\imath R^2\,(\cos 2\phi + \imath \sin 2\phi)$. Если $\phi$ меняется от 0 до $-\pi/4$, значения $\sin 2\phi$ меньше нуля и при $R \to \infty$ подынтегральная функция на криволинейном участке равна нулю. Так как внутри контура интегрирования особых точек нет, по теореме Коши имеем:

$$\int_0^\infty e^{-\imath z^2}\,dz = \int_0^{\infty\,(1-\imath)/\sqrt{2}} e^{-\imath z^2}\,dz = \frac{1-\imath}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-\rho^2}\,d\rho = \frac{1-\imath}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \text{(I.18)}$$

где в последнем интеграле сделана замена $z = \rho\,(1-\imath)/\sqrt{2}$, $-\imath z^2 = -\rho^2$. Число $(1-\imath)/\sqrt{2} = \sqrt{2}/(1+\imath)$ равно $1/\sqrt{\imath}$, где корень из мнимой единицы (двузначная функция!) равен его первому значению $\sqrt{\imath} = (1+\imath)/\sqrt{2}$:

$$\int_0^\infty e^{-\imath z^2}\,dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\imath}}.$$

В более общем случае справедлив интеграл:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{\imath}{2}\,a\,z^2 + bz}\,dz = \sqrt{\frac{2\pi}{\imath a}}\,e^{\frac{b^2}{2\imath a}}. \qquad \text{(I.19)}$$

Таким образом, при наличии мнимой единицы можно пользоваться формулой (F.1), стр. 260 заменяя $a \mapsto \imath a$, с оговоркой о значении корня из $\imath$.

Справедливы также значения интегралов:

$$\int_0^\infty \cos z^2\,dz = \int_0^\infty \sin z^2\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, \qquad \text{(I.20)}$$

получающиеся при разложении в (I.18) экспоненты по формуле Эйлера.

• При $\alpha^2 > 1$ справедлив следующий интеграл

$$I_0 = \int\limits_0^\pi \frac{d\theta}{\alpha - \cos\theta} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\alpha - \cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}. \qquad \text{(I.21)}$$

Сделаем подстановку $z = e^{\imath\theta}$. При изменении $\theta$ от 0 до $2\pi$ комплексное число $z$ описывает единичную окружность. Выражая косинус по формуле Эйлера $\cos\theta = (z + 1/z)/2$, получаем:

$$I = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\imath\, dz}{z^2 - 2\alpha z + 1} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\imath\, dz}{(z - z_0)(z - 1/z_0)} = 2\pi\imath\, \frac{\imath}{z_0 - 1/z_0},$$

где $z_0 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$ и в последнем равенстве учтено, что при $\alpha > 1$ внутрь окружности попадает один полюс в точке $z = z_0$.

Когда $1 > \alpha^2$, то $z_0 = \alpha \pm \imath\sqrt{1 - \alpha^2}$. В этом случае $|z_0| = 1$ и полюс попадает на контур интегрирования. Это соответствует полюсу в исходном интеграле, при $\cos\theta = \alpha$. Аналогично (I.15) необходимо доопределять правило обхода такого полюса. Можно это сделать при помощи комплексного сдвига $\alpha \mapsto \alpha \pm \imath\epsilon$. Тогда при извлечении корня в (I.21) от отрицательного числа необходимо пользоваться правилом (I.11):

$$\sqrt{(\alpha + \imath\epsilon)^2 - 1} = \sqrt{-(1 - \alpha^2) + 2\imath\alpha\epsilon} = \mathrm{sign}(\alpha)\, \imath\sqrt{1 - \alpha^2}.$$

Также вычисляется ещё один интеграл, возникающий (стр. 253) при интегрировании по углам 4-мерной сферической системы координат:

$$I_2 = \int\limits_0^\pi \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{\alpha - \cos\theta} = \pi\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}\right). \qquad \text{(I.22)}$$

В этом случае внутри окружности оказывается два полюса: $z = 0$ (полюс второго порядка) и $z = z_0 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$ (первый порядок):

$$I_2 = -\frac{\imath}{4} \oint\limits_{|z|=1} \frac{(z^2 - 1)^2\, dz}{z^2(z - z_0)(z - 1/z_0)}.$$

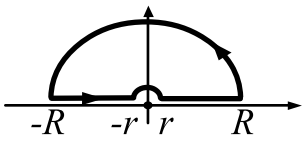
Поэтому интеграл равен сумме двух вычетов:

$$I_2 = \frac{2\pi}{4}\, \frac{(z_0^2 - 1)^2}{z_0^2(z_0 - 1/z_0)} + \frac{2\pi}{4} \Big[\frac{(z^2 - 1)^2}{(z - z_0)(z_0 - 1/z_0)}\Big]'_{z=0}.$$

Аналогичным образом можно находить интегралы от тригонометрических функций по диапазону $[0..\pi]$ или $[0..2\pi]$

• В качестве примера вычисления интеграла от многозначной функции, докажем следующее равенство:

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{\pi}{4}$$




Сначала найдём интеграл от функции $\ln z/(1+z^2)$ замкнутому по контуру, изображенному на рисунке. Бесконечность временно заменена на большое число $R$. С этим радиусом контур замкнут в верхней полуплоскости. Точка ветвления логарифма *обходится* по окружности малого радиуса $r \to 0$. Тем самым считается, что в исходном интеграле контур интегрирования сдвинут вверх на бесконечно малую величину.

Кроме точки ветвления $z = 0$, подынтегральная функция имеет полюсы в точках $z = \pm\imath$ (решения уравнения $z^2 + 1 = 0$). Полюс $z = \imath$ попадает внутрь контура, поэтому по теореме Коши (I.9) с $n = 1$ имеем:

$$\left[\int\limits_R + \int\limits_r + \int\limits_{-R}^{-r} + \int\limits_r^R\right] \frac{f(z)\,dz}{(z-\imath)^2} = 2\pi\imath \left[\frac{\ln z}{(z+\imath)^2}\right]'_{z=\imath} = \frac{\pi^2\imath}{4} - \frac{\pi}{2},$$

где четыре интеграла соответствуют четырем частям замкнутого контура и учтено, что $\ln\imath = \imath\pi/2$. Первый интеграл по полуокружности радиуса $R$ равен нулю (на бесконечности функция убывает как $1/R^4$). Второй интеграл по полуокружности радиуса $r$ ($z = r\,e^{\imath\phi}$, $r = const$, $dz = r\imath e^{\imath\phi}\,d\phi$) также равен нулю при $r \to 0$ ($r \ln r \to 0$):

$$\int\limits_0^\pi \frac{\ln r + \imath\phi}{(1+r^2)^2}\; r\imath\, e^{\imath\phi}\,d\phi \to 0.$$

Последний интеграл на контуре $[r,\, R]$ при $r \mapsto 0$ и $R \to \infty$ совпадает с искомым интегралом $I$. Для вычисления оставшегося интеграла по $[-R, -r]$ учтём, что $\ln(-x) = \ln|x| + \imath\pi$ (так как на $[r,\, R]$ функция $\ln x$ – "обычный" действительный логарифм). Если сделать замену $x \mapsto -x$, то его действительная часть совпадает с интегралом $I$:

$$2I + \int\limits_0^\infty \frac{\pi\,\imath\,dx}{(1+x^2)^2} = 2I + \frac{\imath\pi}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2\imath}{4} - \frac{\pi}{2}.$$

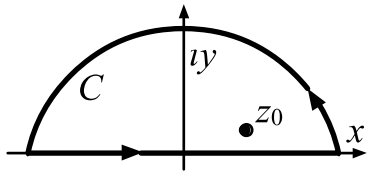
Интеграл от $\pi\imath/(1+x^2)^2$ снова вычисляется по теореме Коши (пределы делаются равными $[-\infty, \infty]$). Таким образом $I = -\pi/4$.

## I.4 Дисперсионные соотношения

Требование аналитичности накладывает на функцию очень сильные ограничения. Например, теорема Коши в форме (I.8) означает, что аналитическую функцию $f(z)$ можно восстановить по её значениям на любом замкнутом контуре, лежащем в области аналитичности. На этом факте построена техника разнообразных дисперсионных соотношений.

Рассмотрим в качестве примера функцию $f(z)$ о которой известно, что она убывает при $|z| \to \infty$ и не имеет особых точек в верхней полуплоскости. Тогда для $\mathrm{Im}(z_0) > 0$ по теореме Коши имеем:

$$2\pi\imath\, f(z_0) = \oint\limits_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\,dx}{x - z_0},$$




где отброшен интеграл на бесконечной полуокружности. Устремим $z_0$ сверху на действительную ось, т.е. $z_0 = x_0 + \imath\epsilon$ Тогда при $\epsilon \to 0$:

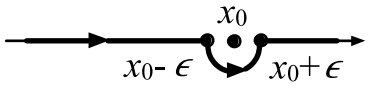
$$2\pi\imath\, f(x_0) = \mathrm{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\,dx}{x - x_0} + \imath\pi\, f(x_0), \tag{I.23}$$

где введен символ главного значения интеграла, как предела:

$$\mathrm{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\Big[\int\limits_{-\infty}^{x_0-\epsilon} + \int\limits_{x_0+\epsilon}^{\infty}\Big] F(x)\,dx. \tag{I.24}$$

Действительно, полюс $x = x_0$ приближается к контуру интегрирования (действительной оси) *сверху*. Поэтому, обходя его *снизу* по полуокружности радиуса $\epsilon$, имеем три интеграла:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} = \int\limits_{-\infty}^{x_0-\epsilon} + \int\limits_{\epsilon} + \int\limits_{x_0+\epsilon}^{\infty}$$




Первый и третий дают главное значение (I.24), а интеграл по полуокружности $z = x_0 + \epsilon\, e^{\imath\phi}$ от $\phi = -\pi$ до $\phi = 0$ при $\epsilon \to 0$ даёт $\imath\pi\, f(x_0)$. Иногда такой способ обхода полюса на контуре интегрирования записывают в виде соотношения:

$$\frac{1}{x \pm \imath\epsilon} = \mathrm{P}\frac{1}{x} \mp \imath\pi\,\delta(x), \tag{I.25}$$

где $\delta(x)$ – функция Дирака и это тождество необходимо понимать как обобщённую функцию, которая должна интегрироваться с некоторой гладкой функцией (стр. 267), что даёт (I.23).

Таким образом, из (I.23) следует, что:

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi\imath}\,\mathrm{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{x-x_0}. \tag{I.26}$$

Беря действительную и мнимую части этого соотношения, получаем связь $\mathrm{Im}f(z)$ и $\mathrm{Re}f(z)$ при действительных $z=x$:

$$\mathrm{Re}\,f(x_0) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,f(x)}{x-x_0}\,dx, \qquad \mathrm{Im}\,f(x_0) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}\,f(x)}{x-x_0}\,dx. \tag{I.27}$$

Именно в такой форме эти формулы были получены в Крамерсом и Кронигом в теории дисперсии лучей, поэтому они получили название *дисперсионных соотношений.*

Пусть некоторая *линейная* система характеризуется функцией Грина $G(t)$, такой, что отклик $x(t)$ системы на воздействие $g(t)$ определяется интегралом

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-t')\,g(t')\,dt'.$$

Выполнение *принципа причинности* подразумевает, что $G(t)=0$ при $t<0$, т.е. на отклик $x(t)$ в момент времени $t$ могут влиять только воздействия $g(t)$ в более ранние моменты времени $t'<t$. Это, в свою очередь, означает, что фурье-образ $G(\omega)$ функции Грина:

$$G(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\,e^{-\imath\omega t}\,d\omega$$

не имеет особых точек при $\mathrm{Im}\,\omega>0$. Действительно, если это так, то замыкая контур в верхней полуплоскости ($e^{-\imath(\imath\infty)t}=0$ при $t<0$), получаем, в силу теоремы Коши, $G(t)=0$. Таким образом, функция $G(\omega)$ должна удовлетворять дисперсионным соотношениям (I.27).

Например, делая преобразование Фурье для гармонического осциллятора $\ddot{x}+\omega_0^2 x+2\gamma\dot{x}=g(t)$, имеем:

$$G(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-2\imath\gamma\omega}, \qquad x(\omega)=G(\omega)\,g(\omega).$$

Функция $G(\omega)$ имеет два полюса $-\imath\gamma\pm\sqrt{\omega_0^2-\gamma}$, лежащие при $\gamma>0$ (затухание) в нижней полуплоскости. Стоит проверить, что $G(\omega)$ удовлетворяет дисперсионным соотношениям (I.27).

## I.5 Поворот Вика

Докажем справедливость следующей формулы (как обычно, предполагается, что $\epsilon \to +0$):

$$I_3(a) = \int \frac{d^4\mathrm{k}}{(\mathrm{k}^2 + a + \imath\epsilon)^3} = \frac{\imath\pi^2}{2}\,\frac{1}{a+\imath\epsilon}. \tag{I.28}$$

Вычисление интегралов по 4-импульсам $\mathrm{k} = \{k_0, \mathbf{k}\}$, квадрат которых в псевдоевклидовом пространстве Минковского равен $\mathrm{k}^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2$, удобнее вычислять в евклидовом пространстве. *При* $\epsilon > 0$ *можно* сделать замену $k_0 = \imath k_4$, которая называется *поворотом Вика*. Это утверждение докажем ниже, а пока проведём вычисления при помощи такой замены:

$$I_3(a) = \int \frac{\imath\, dk_4\, d^3\mathbf{k}}{(-k_4^2 - \mathbf{k}^2 + a + \imath\epsilon)^3} = \int\limits_0^\infty \frac{-\imath\, r^3 dr\, \Omega_4}{(r^2 - a - \imath\epsilon)^3} = \int\limits_0^\infty \frac{-\imath\pi^2\, t\, dt}{(t - a - \imath\epsilon)^3}.$$

Квадрат 4-вектора $\mathrm{k}^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2$, знакопеременный в пространстве Минковского, становится знакоопределённым в новых координатах: $-k_4^2 - \mathbf{k}^2$, имея с точностью до знака евклидову метрику. Вычисление интеграла проводится а 4-мерных сферических евклидовых координатах, см. (F.14), стр. 263. Затем делается замена $t = r^2$ и учитывается, что $\Omega_4 = 2\pi^2$. Делая ещё одну замену $z = t - a - \imath\epsilon$, окончательно, получаем:

$$I_3(a) = -\imath\pi^2 \int\limits_{-a-\imath\epsilon}^{\infty-\imath\epsilon} \Big(\frac{1}{z^2} + \frac{a+\imath\epsilon}{z^3}\Big)\, dz = \frac{\imath\pi^2}{2}\,\frac{1}{a+\imath\epsilon}$$

(интеграл по $z = x - \imath\epsilon$ ведём по переменной $x$ от $-a$ до $\infty$).

Дифференцируя (I.28) по $a$ несложно доказать соотношение:

$$I_n(a) = \int \frac{d^4\mathrm{k}}{(\mathrm{k}^2 + a + \imath\epsilon)^n} = \frac{(n-3)!}{(n-1)!}\,\frac{\imath\pi^2}{(a+\imath\epsilon)^{n-2}}, \tag{I.29}$$

которое является конечным при $n > 2$. Приведём также значение интеграла, зависящее от 4-импульса p:

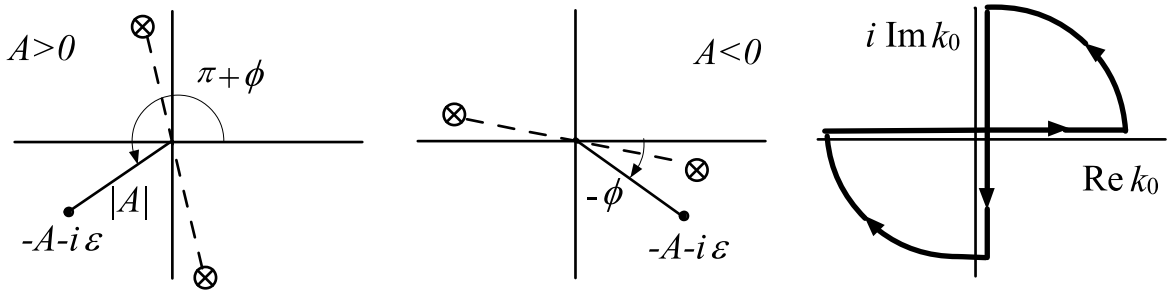
$$I_n(a, \mathrm{p}) = \int \frac{d^4\mathrm{k}}{(\mathrm{k}^2 - 2\mathrm{kp} + a + \imath\epsilon)^n} = \frac{(n-3)!}{(n-1)!}\,\frac{\imath\pi^2}{(a - \mathrm{p}^2 + \imath\epsilon)^{n-2}}. \tag{I.30}$$

Его можно привести к (I.29) заменой $\mathrm{k} = \mathrm{k}' + \mathrm{p}$.

• Продемонстрируем теперь осмысленность замены $k_0 = \imath k_4$. В знаменателе подынтегральной функции стоит $k_0^2 - \mathbf{k}^2 + a + \imath\epsilon$. Поэтому, при интегрировании по $k_0$ в комплексной плоскости $k_0$ есть два полюса, положение которых находятся из квадратного уравнения

$$k_0^2 = -A - \imath\epsilon, \qquad A = a - \mathbf{k}^2.$$

В зависимости от значений $\mathbf{k}^2$ и $a$, величина $A$ может иметь произвольный знак. Если $A > 0$, комплексное число в правой части квадратного уравнения имеет аргумент $\pi + \phi$, где $\phi$ – малый угол, возникающий благодаря комплексному сдвигу $\epsilon$. Извлекая корень, получаем два значения (двузначная функция): $(-A - \imath\epsilon)^{1/2} = |A|^{1/2}\, e^{\imath(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{2} + n\pi)}$, $n = 0, 1$. Эти два корня отмечены крестиками на первом рисунке ниже:




Если же $A < 0$, то фаза комплексного числа $|A| - \imath\epsilon$ отрицательна и квадратное уравнение имеет два решения: $(-A - \imath\epsilon)^{1/2} = |A|^{1/2}\, e^{-\imath\frac{\phi}{2} + \imath n\pi}$, поэтому, полюсы расположены так, как это изображено на втором рисунке. Таким образом, независимо от знака $A$, полюсы оказываются во 2-й и 4-й четвертях комплексной плоскости.

Вычислим интеграл по замкнутому контуру, изображённому выше на третьем рисунке. Так как особые точки не попадают внутрь контура, интеграл по теореме Коши будет равен нулю:

$$\oint = \int_{-\infty}^{\infty} + \int_{\imath\infty}^{-\imath\infty} = 0 \qquad => \qquad \int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\imath\infty}^{\imath\infty},$$

где опущены интегралы по криволинейным участкам, так как функция убывает как $1/k_0^6$. Таким образом, вместо интеграла по $k_0$ от $-\infty$ до $+\infty$ вдоль действительной оси $k_0$, можно интегрировать по комплексной оси $-\imath\infty$ до $+\imath\infty$ или, что тоже самое, по $k_4$ от $-\infty$ до $+\infty$, где $k_0 = \imath k_4$.

Подчеркнём, что замену $k_0 = \imath k_4$ можно делать только когда в знаменателе стоит $+\imath\epsilon$. В случае обратного знака: $-\imath\epsilon$, разрешена замена $k_0 = -\imath k_4$. Это проверяется повторением рассуждений (контур замыкается во 2-й и 4-й четвертях плоскости). Альтернативно – можно взять комплексное сопряжение (I.28).

## I.6 Интегрирование по 4-мерной сфере

В сферических $N$-мерных координатах полный телесный угол равен $\Omega_N = 2\pi^{N/2}/\Gamma(N/2)$, стр. 263. Поэтому, если подынтегральная функция зависит от радиус-вектора $r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_N^2}$ и интегрирование ведётся по $N$-мерной сфере радиуса $R$, то:

$$\int\limits_{r<R} f(|\mathbf{x}|)\, d^N\mathbf{x} = \Omega_N \int\limits_0^R r^{N-1}\, dr\ f(r). \tag{I.31}$$

Для 4-мерного пространства $\Omega_4 = 2\pi^2$, поэтому, например, при $a > 0$:

$$\int\limits_{r<R} \frac{d^4\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2 + a} = \pi^2 R^2 + \pi^2 a \ln\frac{a}{a+R^2} \ \approx\ \pi^2 R^2 + \pi^2 a \ln\frac{a}{R^2}, \tag{I.32}$$

где приближенное равенство записано при больших $R$ и отброшены слагаемые порядка $1/R$ и меньше. Дифференцируя по $a$, имеем:

$$\int\limits_{r<R} \frac{d^4\mathbf{x}}{(\mathbf{x}^2 + a)^2} \ \approx\ \pi^2 \ln\frac{R^2}{a} - \pi^2, \qquad \int\limits_{r<R} \frac{d^4\mathbf{x}}{(\mathbf{x}^2 + a)^3} \ \approx\ \frac{\pi^2/2}{a}. \tag{I.33}$$

Если в *сходящемся* интеграле есть выделенное направление (вектор $\mathbf{p}$), то при $R \to \infty$ можно сделать сдвиг (замену $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{p}$):

$$\int \frac{d^4\mathbf{x}}{(\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x}\mathbf{p} + a)^3} = \frac{\pi^2/2}{a - \mathbf{p}^2}. \tag{I.34}$$

Для интеграла типа (I.32) подобная замена изменит пределы интегрирования и лучше использовать формулу ($p = |\mathbf{p}|$):

$$\int\limits_{r<R} f(|\mathbf{x}|,\, \mathbf{p}\mathbf{x})\, d^N\mathbf{x} = \Omega_{N-1} \int\limits_0^R r^{N-1}\, dr \int\limits_0^\pi \sin^{N-2}\theta\, d\theta\, f(r,\, p\, r\, \cos\theta), \tag{I.35}$$

которая получается при переходе к сферическим координатам ($\theta = \theta_1$):

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 &=& r\cos\theta_1 \\ x_2 &=& r\sin\theta_1\, \cos\theta_2 \\ x_3 &=& r\sin\theta_1\, \sin\theta_2\, \cos\theta_3 \\ ... & & \\ x_N &=& r\sin\theta_1\, \sin\theta_2 ... \sin\theta_{N-1}, \end{array}\right.$$

где $\theta_{N-1} = [0...2\pi]$, а остальные углы $\theta_i = [0...\pi]$. Объём:

$$d^N\mathbf{x} = r^{N-1}\, \sin^{N-2}\theta_1\, \sin^{N-3}\theta_2 ... \sin\theta_{N-2}\, dr\, d\theta_1 ... d\theta_{N-1}$$

находится, как обычно, при помощи якобиана.

Учитывая значения интеграла (I.22), стр. 246, несложно провести интегрирование по углу в следующем интеграле:

$$\int\limits_{r<R} \frac{d^4\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x}\mathbf{p} + a} = \frac{\pi^2}{p^2}\Big[\frac{R^4}{4} + \frac{aR^2}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{R^2} \sqrt{(1-4p^2)\,t^2 + 2at + a^2}\,dt\,\Big].$$

При этом $\alpha = (r^2+a)/2rp$, $t = r^2$. Интегрируя по $t$ и по-прежнему удерживая только члены нулевого порядка по $R$, получаем:

$$\int\limits_{r<R} \frac{d^4\mathbf{x}}{\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x}\mathbf{p} + a} \approx \pi^2\Big[R^2 + (a-\mathbf{p}^2)\ln\Big(\frac{a-\mathbf{p}^2}{R^2}\Big) - \frac{\mathbf{p}^2}{2}\Big], \qquad \text{(I.36)}$$

где предполагается, что $a > \mathbf{p}^2$. Случай $a < \mathbf{p}^2$ требует доопределения обхода полюса. Например, если $a \mapsto a - \imath\epsilon$, то под логарифмом надо поставить модуль и добавить $\imath\pi^2\,(\mathbf{p}^2 - a)$ (значение логарифма на нижнем берегу разреза даёт $-\imath\pi$, см. стр. 241).

В случае интегралов по 4-импульсу в пространстве Минковского, делаем поворот Вика (замены $p_0 = \imath p_4$ и $k_0 = \imath k_4$) и, ограничивая евклидов импульс $k_4^2 + \mathbf{k}^2 < Q^2$, имеем:

$$\int \frac{d^4\mathrm{k}}{\mathrm{k}^2 - 2\mathrm{p}\mathrm{k} + a + \imath\epsilon} \;\approx\; \frac{\pi^2}{\imath}\Big[Q^2 + (\mathrm{p}^2 - a)\ln\Big(\frac{\mathrm{p}^2 - a - \imath\epsilon}{Q^2}\Big) + \frac{\mathrm{p}^2}{2}\Big]. \qquad \text{(I.37)}$$

Дифференцируя по $a$, можно получить интеграл:

$$\int \frac{d^4\mathrm{k}}{(\mathrm{k}^2 - 2\mathrm{p}\mathrm{k} + a + \imath\epsilon)^2} \;\approx\; \frac{\pi^2}{\imath}\Big[\,1 \,+\, \ln\Big(\frac{\mathrm{p}^2 - a - \imath\epsilon}{Q^2}\Big)\,\Big], \qquad \text{(I.38)}$$

а дифференцируя по $p_\mu$:

$$\int \frac{k_\mu\, d^4\mathrm{k}}{(\mathrm{k}^2 - 2\mathrm{p}\mathrm{k} + a + \imath\epsilon)^2} \;\approx\; \frac{\pi^2}{\imath}\,p_\mu\Big[\,\frac{3}{2} \,+\, \ln\Big(\frac{\mathrm{p}^2 - a - \imath\epsilon}{Q^2}\Big)\,\Big]. \qquad \text{(I.39)}$$

Аналогичными дифференцированиями по $a$ или $p_\mu$, получаются другие подобные интегралы. В частности $(n-1)$-я производная от (I.37) по $a$ снова даёт (I.30).

Квадрат 4-вектора $\mathrm{p}^2$, в отличии от квадрата евклидового вектора $\mathbf{p}^2$, может иметь как положительный знак (времениподобный 4-вектор), так и отрицательный знак (пространственноподобный вектор). Соответственно, параметр $a$ также имеет произвольный знак. Если в результате под логарифмом возникает знак минус, необходимо пользоваться правилом (I.12), стр. 241.

## I.7 Интегралы в $d$-мерном пространстве

Вычислим следующий интеграл в $d$-мерном пространстве Минковского $\mathrm{k}^2 = k_0^2 - k_1^2 - ... - k_{d-1}^2$ (предполагаем малый ($\epsilon \to +0$) комплексный сдвиг параметра $a \mapsto a + \imath\epsilon$):

$$\int \frac{d^d\mathrm{k}}{(\mathrm{k}^2 - 2\mathrm{kp} + a)^n} = \int \frac{d^d\mathrm{k}}{(\mathrm{k}^2 - \mathrm{p}^2 + a)^n}.$$

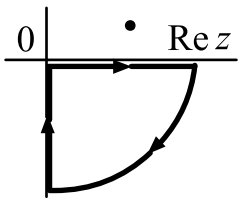
Во втором равенстве, в *считая, что* интеграл сходится, проведится замена $\mathrm{k} \mapsto \mathrm{k} + \mathrm{p}$. Сделаем поворот Вика, чтобы получить евклидовый квадрат вектора в $d$ измерениях $\mathrm{k}_E^2$.

$$= \int \frac{\imath\, d^d\mathrm{k}_E}{(-\mathrm{k}_E^2 - \mathrm{p}^2 + a)^n} = \imath\,\Omega_d\,(-1)^n \int\limits_0^\infty \frac{k^{d-1}\,dk}{(k^2 + \mathrm{p}^2 - a)^n}.$$

Во втором равенстве выполнено интегрирование по углам сферической $d$-мерной системы координат (телесный угол $\Omega_d$). Учтём выражение (F.6), стр. 261 для бета-функции:

$$\int\limits_0^\infty \frac{z^{2\beta-1}\,dz}{(z^2 + A - \imath\epsilon)^{\alpha+\beta}} = \frac{B(\alpha,\beta)}{2\,A^\alpha}. \tag{I.40}$$

Это соотношение справедливо при любом знаке $A$. Если $A > 0$, оно непосредственно следует из (F.6), стр. 261. При $A < 0$ необходимо замкнуть контур, как показано на рисунке ниже. Полюс в него не попадает, поэтому при $2\alpha + 1 > 0$ интеграл от 0 до $\infty$ равен интегралу




$$-\int\limits_{-\imath\infty}^0 \frac{z^{2\beta-1}\,dz}{(z^2 + A)^{\alpha+\beta}} = \int\limits_0^\infty \frac{(-\imath)^{2\beta}\,t^{2\beta-1}\,dt}{(-t^2 - |A|)^{\alpha+\beta}},$$

где сделана замена $z = -\imath t$. Так как $(-\imath)^{2\beta} = ((-\imath)^2)^\beta = (-1)^\beta$, вынося минус из знаменателя $(-1)^{\alpha+\beta}$, получаем случай положительного $|A|$, в результате чего возникает множитель $(-|A|)^\alpha = A^\alpha$. Заметим, что знак $\epsilon$ роли не играет, и при $\epsilon < 0$ необходимо контур замкнуть в первой четверти комплексной плоскости ($z = \imath t$), получив тоже выражение.

Таким образом:

$$\int \frac{d^d\mathrm{k}}{(\mathrm{k}^2 - 2\mathrm{kp} + a)^n} = \imath(-1)^n \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\,\frac{\Gamma(n - d/2)\,\Gamma(d/2)}{\Gamma(n)}\,\frac{1}{(\mathrm{p}^2 - a)^{n-d/2}},$$

где подставлено значение телесного угла (F.14) в $d$ измерениях и определение бета-функции (F.6).

Окончательно (напомним, что $a \mapsto a \pm \imath\epsilon$), вводя параметр $\nu$ отклонения от "обычной" размерности $d = 4 - 2\nu$, получаем:

$$I_n(\mathrm{p}) = \int \frac{d^d\mathrm{k}/(2\pi)^d}{(\mathrm{k}^2 - 2\mathrm{kp} + a)^n} = \imath\,(4\pi)^{\nu-2}\,\frac{(-1)^n}{\Gamma(n)}\,\frac{\Gamma(n-2+\nu)}{(\mathrm{p}^2-a)^{n-2+\nu}}. \qquad \text{(I.41)}$$

Из этого интеграла, дифференцированием по $p_\alpha$ можно получить ряд других интегралов. Так,

$$\int \frac{k_\alpha\, d^d\mathrm{k}/(2\pi)^d}{(\mathrm{k}^2 - 2\mathrm{kp} + a)^n} = \frac{1}{2(n-1)}\,\frac{\partial I_{n-1}}{\partial p_\alpha}.$$

С другой стороны, для правой части (I.41), имеем:

$$\frac{\partial I_{n-1}}{\partial p_\alpha} = 2(n-1)\,p^\alpha I_n(\mathrm{p}), \qquad I_{n-1} = (n-1)\frac{a-\mathrm{p}^2}{n-3+\nu}\,I_n.$$

Поэтому

$$\int \frac{k_\alpha\, d^d\mathrm{k}/(2\pi)^d}{(\mathrm{k}^2 - 2\mathrm{kp} + a)^n} = p_\alpha\, I_n(\mathrm{p}). \qquad \text{(I.42)}$$

Аналогично

$$\int \frac{k_\alpha k_\beta\, d^d\mathrm{k}/(2\pi)^d}{(\mathrm{k}^2 - 2\mathrm{kp} + a)^n} = \Big\{p_\alpha p_\beta - \frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}\,\frac{\mathrm{p}^2-a}{n-3+\nu}\Big\}\,I_n(\mathrm{p}) \qquad \text{(I.43)}$$

и

$$\int \frac{k_\alpha k_\beta k_\gamma\, d^d\mathrm{k}/(2\pi)^d}{(\mathrm{k}^2 - 2\mathrm{kp} + a)^n} = \Big\{p_\alpha p_\beta p_\gamma - \frac{g_{\{\alpha\beta}p_{\gamma\}}}{2}\,\frac{\mathrm{p}^2-a}{n-3+\nu}\Big\}I_n(\mathrm{p}), \qquad \text{(I.44)}$$

где $g_{\{\alpha\beta}p_{\gamma\}} = g_{\alpha\beta}p_\gamma + g_{\alpha\gamma}p_\beta + g_{\beta\gamma}p_\alpha$. Обратим внимание, что в $d$-мерном пространстве Минковского

$$g_{\alpha\beta}\,g^{\alpha\beta} = \delta^\alpha_\alpha = d = 4 - 2\nu.$$

Поэтому, в частности:

$$\int \frac{\mathrm{k}^2\, d^d\mathrm{k}/(2\pi)^d}{(\mathrm{k}^2 - 2\mathrm{kp} + a)^n} = \Big\{\mathrm{p}^2 - (2-\nu)\,\frac{\mathrm{p}^2-a}{n-3+\nu}\Big\}\,I_n(\mathrm{p}). \qquad \text{(I.45)}$$

и

$$\int \frac{\mathrm{k}^2\, k_\alpha\, d^d\mathrm{k}/(2\pi)^d}{(\mathrm{k}^2 - 2\mathrm{kp} + a)^n} = p_\alpha\,\Big\{\mathrm{p}^2 - (3-\nu)\,\frac{\mathrm{p}^2-a}{n-3+\nu}\Big\}\,I_n(\mathrm{p}). \qquad \text{(I.46)}$$

Аналогично вычисляется интеграл с произвольным полиномом по k в числителе.

## I.8 Фейнмановская параметризация

Когда при вычислении интегралов возникает произведение пропагаторов $D(\mathrm{k})D(\mathrm{q})...$, где $D(\mathrm{k}) = \imath/(\mathrm{k}^2 - m^2 + \imath\epsilon)$, можно перейти к сумме знаменателей пропагаторов. Для этого удобна факторизационная формула Фейнмана, получающаяся из следующего элементарного вычисления:

$$\frac{1}{B-A}\int\limits_A^B \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{B-A}\Big(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\Big) = \frac{1}{AB}.$$

Так как в $A$ и $B$ есть сдвиг $\imath\epsilon$, особенность $z = 0$ не попадает на контур интегрирования. Делая замену $z = x\,A + (1-x)\,B$, имеем:

$$\frac{1}{AB} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{[x\,A + (1-x)\,B]^2}. \tag{I.47}$$

Продифференцировав $n-1$ раз по $A$ и $m-1$ раз по $B$, можно получить более общее соотношение, справедливое и для не целых $n$ и $m$:

$$\frac{1}{A^n B^m} = \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\Gamma(m)}\int\limits_0^1 \frac{x^{n-1}(1-x)^{m-1}\,dx}{[x\,A + (1-x)\,B]^{n+m}}. \tag{I.48}$$

Получим теперь факторизацию с тремя знаменателями. Используем сначала (I.47) для произведения $BC$, а затем применим (I.48) с $n = 2$ и $m = 1$:

$$\frac{1}{ABC} = \int\limits_0^1 \frac{dy}{[y\,B + (1-y)\,C]^2\,A} = 2\int\limits_0^1 \frac{x\,dx\,dy}{[xy\,B + x(1-y)\,C + (1-x)\,A]^3}.$$

В интеграле по $dy$ сделаем замену $y' = x\,y$ и опустим штрих:

$$\frac{1}{ABC} = 2\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy\,\frac{1}{[(1-x)\,A + y\,B + (x-y)\,C]^3} \tag{I.49}$$

Эквивалентно, сделав замену $x' = 1 - x$ (и снова опуская шрифт) можно написать:

$$\frac{1}{ABC} = 2\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy\,\frac{1}{[x\,A + y\,B + (1-x-y)\,C]^3}. \tag{I.50}$$

Этому интегралу можно придать более симметричный вид.

Для этого поставим в интеграле по $dy$ пределы от 0 до 1 и умножим на ступенчатую функцию Хэвисайда $\theta(1-x-y)$, которая обрезает диапазон интегрирования по $y$ к $[0...1-x]$.

$$\frac{1}{ABC} = 2\int\limits_0^1 \frac{\theta(1-x-y)\,dx\,dy}{[x\,A + y\,B + (1-x-y)\,C]^3}. \tag{I.51}$$

Затем, при помощи функции Дирака и новой переменной $z = 1-x-y$, введём ещё один интеграл по $z$. Так как $z$ лежит в диапазоне $[-1...1]$, чтобы ноль $\delta$-функции попал в диапазон интегрирования для $z$ поставим пределы $[-1...1]$:

$$\frac{1}{ABC} = 2\int\limits_0^1 dx\,dy \int\limits_{-1}^1 dz\,\frac{\delta(1-x-y-z)\,\theta(z)}{[z\,A + y\,B + z\,C]^3}. \tag{I.52}$$

Наличие функции Хевисайда $\theta(z)$, возникшей в (I.51), обрезает интеграл по $z$ к $[0...1]$. В общем случае справедлива следующая формула:

$$\frac{1}{A_1 ... A_n} = (n-1)!\int\limits_0^1 \frac{\delta(1-x_1-...-x_n)\,dx_1 ... dx_n}{[x_1\,A_1 + ... + x_n\,A_n]^n}. \tag{I.53}$$

При $n = 3$ получается (I.52). Считая эту формулу верной при некотором $n$, несложно, повторив вывод (I.52), доказать её справедливость при $n+1$. Заметим, что при выполнении одного интегрирования с $\delta$-функцией в (I.53), например, с $x_n = 1 - x_1 - ... - x_{n-1}$ – изменяются пределы интегрирования. Действительно, ноль $\delta$-функции может быть расположен в интервале от $-(n-2)$ до 1. Чтобы не отслеживать попал ноль в исходный интервал $[0...1]$ или нет, удобно расширить пределы интегрирования до $[-(n-2)...1]$, поставив под интегралом $\theta(x_n)$, а затем уже интегрировать по $x_n$.

Отметим ещё одну возможность факторизации, которую называют $\alpha$-представлением. Она основана на следующем интеграле:

$$\frac{\imath}{A + \imath\epsilon} = \int\limits_0^\infty e^{\imath\alpha\,(A+\imath\epsilon)}\,d\alpha. \tag{I.54}$$

Наличие $\imath\alpha\,\imath\epsilon = -\alpha\epsilon$ гарантирует сходимость этого интеграла ($A$ предполагается действительным).

# Специальные функции

---

**Квантовый мир**

**Сергей С. Степанов**

Эта книга находится в процессе создания. Её последняя версия и другие материалы находятся на сайте: http://synset.com. Там же можно найти первый том: **I. Механика**
Замеченные ошибки и вопросы просьба присылать по адресу: steps137, затем собачка и gmail.com.

(c) 2015. Печать: 2 июля 2017 г.

## F.1 Гамма-функция

• Базовый *гауссов интеграл* имеет вид:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \tag{F.0}$$

Это соотношение доказывается возведением в квадрат с последующим переходом к полярным координатам:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr \int\limits_{0}^{2\pi} d\phi = \pi.$$

Выделяя полный квадрат и сдвигая переменную интегрирования, несложно вычислить также интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2+bx}\,dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\;e^{\frac{b^2}{2a}}. \tag{F.1}$$

• Пусть $\mathbf{A} \equiv A_{ij}$ – симметричная ($A_{ij} = A_{ji}$), несингулярная ($\det \mathbf{A} \neq 0$), действительная матрица $n$x$n$ с положительными собственными значениями, а $\mathbf{b} \equiv b_i$ – вектор с $n$ компонентами. Тогда справедлив следующий $n$-кратный гауссовый интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{x}}\,d^n x = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det \mathbf{A}}}\;e^{\frac{1}{2}\mathbf{b}\cdot\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}}. \tag{F.2}$$

Действительно, всегда можно выбрать симметричную матрицу $C_{ij}$, такую, что $\mathbf{CAC} = \mathbf{1}$. Она строится при помощи собственных векторов и значений $\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}^{(\alpha)} = a_\alpha\,\mathbf{u}^{(\alpha)}$ следующем образом: $C_{ij} = u_i^{(\alpha)} u_j^{(\alpha)}/\sqrt{a_\alpha}$ (по $\alpha$ сумма). В силу того, что $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}^{-1}$, имеем $\mathbf{C}^2 = \mathbf{A}^{-1}$. Сделаем замену переменных (по $j$ сумма):

$$x_i = C_{ij}\,y_j, \qquad d^n x = \det\left|\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right| d^n y = \det \mathbf{C}\,d^n y = \frac{d^n y}{\sqrt{\det \mathbf{A}}}.$$

Квадратичная форма $\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$ при такой замене переходит в $\mathbf{y}^2$ и интеграл разбивается на произведение $n$ одномерных гауссовых интегралов (F.1) с одинаковыми $a = 1$ и различными $b$, равными $b_i C_{ik}$. Поэтому, в результате интегрирования, в показателе экспоненты будет стоять $b_i C_{ik} b_j C_{jk} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{C}^2\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}$, что и требовалось доказать.

Дифференцируя интеграл (F.1) по $b$ или (F.2) по $b_k$, несложно получать гауссовы интегралы в которых экспонента умножается на полином $x$.

• *Гамма-функция* определяется при помощи следующего интеграла:

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt. \tag{F.3}$$

Интегрирование по частям при $z > 0$

$$\Gamma(z+1) = -\int\limits_0^\infty t^z\, de^{-t} = z \int\limits_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t} dt$$

приводит к рекуррентному соотношению:

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z). \tag{F.4}$$

При $z = 1$ интеграл вычисляется элементарно, а при $z = 1/2$ он сводится заменой $t = x^2$ к гауссовому интегралу (F.0):

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \tag{F.5}$$

Произвольные целые и полуцелые значения $z > 0$ получаются при помощи (F.4). В частности $\Gamma(n+1) = n!$, где $n = 0, 1, 2....$

• Делая в (F.3) замену $t = x^2$, несложно получить:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = 4 \int\limits_0^\infty x^{2\alpha-1}\, y^{2\beta-1}\, e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy.$$

Перейдём к полярным координатам $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ (интегрирование ведётся в первом квадранте $x, y > 0$, поэтому $\phi = 0...\pi/2$):

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = 4 \int\limits_0^\infty r^{2(\alpha+\beta)-1}\, e^{-r^2}\, dr \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-1}\phi\ \sin^{2\beta-1}\phi\, d\phi.$$

Интегрируя по $r$ и вводя *бета-функцию*

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \tag{F.6}$$

можно записать значение интегралов, которые равны $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$:

$$= 2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-1}\phi\ \sin^{2\beta-1}\phi\, d\phi = 2 \int\limits_0^\infty \frac{t^{2\beta-1} dt}{(1+t^2)^{\alpha+\beta}} = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx,$$

где последовательно сделаны замены замены $\mathrm{tg}\,\phi = t$ и $x = 1/(1+t^2)$.

• Интеграл (F.3) в определении гамма-функции сходится при $z > 0$ или для комплексных чисел при $\mathrm{Re}(z) > 0$. Соотношение (F.4) позволяет аналитически продолжить гамма-функцию в область отрицательных значений $z$. Так как $\Gamma(z+2) = \Gamma(z+1+1) = (z+1)\Gamma(z+1) = z(z+1)\Gamma(z)$ и т.д., имеем:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z\,(z+1)\,...\,(z+n-1)}. \qquad \text{(F.7)}$$

Выберем для данного $z \leqslant 0$ достаточно большое натуральное число $n$, такое, что $z+n > 0$. Тогда числитель в (F.7) является конечным числом, а $\Gamma(z)$ имеет простые полюса при $z = 0, -1, -2, ...$

Найдём поведение гамма-функции в окрестности такого полюса. Запишем разложение в ряд Тейлора для $\Gamma(1+\epsilon)$, считая, что $\epsilon \to 0$:

$$\Gamma(1+\epsilon) \approx 1 + \epsilon\,\Gamma'(1) = 1 - \gamma\epsilon, \qquad \text{(F.8)}$$

где введена *постоянная Эйлера-Маскерони*:

$$\gamma = -\Gamma'(1) = -\int\limits_0^\infty \ln t\, e^{-t}\, dt = 0.5772156649... \qquad \text{(F.9)}$$

Полагая в (F.4) $z = \epsilon$, имеем:

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{\epsilon} \approx \frac{1}{\epsilon} - \gamma. \qquad \text{(F.10)}$$

В общем случае, положим в (F.7) $z = -n + \epsilon$:

$$\Gamma(-n+\epsilon) = \frac{\Gamma(\epsilon)}{(-1)^n\, n!\,(1-\frac{\epsilon}{n})...(1-\frac{\epsilon}{1})} \approx \frac{\Gamma(\epsilon)}{(-1)^n\, n!}\,\big(1+\frac{\epsilon}{n}\big)...\big(1+\frac{\epsilon}{1}\big).$$

Перемножая скобки с точностью до первого порядка малости по $\epsilon$ и умножая в этом же приближении на (F.10), получаем:

$$\Gamma(-n+\epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{1}{\epsilon} + \Psi_1(n+1) + O(\epsilon)\right], \qquad \text{(F.11)}$$

где введена *логарифмическая производная* гамма-функции:

$$\Psi_1(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \gamma = \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}. \qquad \text{(F.12)}$$

Последнее равенство проверяется взятием производной от логарифма (F.7) при $z = n+1$. Отметим также формулу для более длинного разложения: Первые полюсы (F.11) равны:

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \frac{1}{2}\left(\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}\right)\epsilon - \frac{1}{6}\left(\gamma^3 + \frac{\gamma\pi^2}{2} + 2\,\zeta(3)\right)\epsilon^2 + ..., \qquad \text{(F.13)}$$

где $\zeta(3) = 1.202...$ – дзета-функция Римана.

• При помощи гауссова интеграла и гамма-функции можно получить значение объёма и телесного угла в $n$-мерном евклидовом пространстве. В 2-мерном случае (плоскость) элемент объёма в полярных координатах равен $d^2x = rdr\,d\phi = rdr\,d\Omega$. Поэтому объём 2-мерной сферы радиуса $R$ (круг) равен $V_2 = \pi R^2$, а полный телесный угол $\Omega_2 = 2\pi$. Аналогично для трёхмерного пространства $d^3x = r^2 dr\,d\Omega$, поэтому $V_3 = (4/3)\pi R^3$ и $\Omega_3 = 4\pi$. Чтобы обобщить эти соотношения на $n$-мерное пространство вычислим:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}\,d^nx = \int\limits_0^{\infty} e^{-r^2}\,r^{n-1}\,dr \int d\Omega = \pi^{n/2},$$

где последнее равенство получено возведением в $n$-ю степень (первый интеграл) равенства (F.0). Теперь несложно записать $n$-мерный телесный угол и объём $n$-мерной сферы радиуса $R$ (в интеграле по $r$ делаем замену $r^2 = t$):

$$\Omega_n = \frac{2\,\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \qquad\qquad V_n = \frac{\Omega_n R^n}{n}. \tag{F.14}$$

В частности для 4-мерного пространства $\Omega_4 = 2\pi^2$.

• При помощи гамма-функции (F.3) можно получить формулу, позволяющую вычислять факториал $n! = \Gamma(n+1)$ при больших $n$. Запишем $t^n\,e^{-t} = e^{f(t)}$. Функция $f(t) = -t + n\ln t$ имеет максимум в точке $t_0 = n$. Разложим её в ряд в окрестности этой точки ($f'(n) = 0$):

$$f(t) = f(n) + f''(n)(t-n)^2/2 + \ldots = -n + n\ln n - (t-n)^2/2n + \ldots$$

Поэтому

$$n! \approx e^{-n+n\ln n}\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{(t-n)^2}{2n}}dt \approx e^{-n+n\ln n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-n)^2}{2n}}dt = e^{-n+n\ln n}\sqrt{2\pi n}.$$

Во втором интеграле нижний предел заменён на $-\infty$, так как при большом $n$ максимум экспоненты уходит далеко вправо и становится всё более узким, поэтому интеграл от $-\infty$ до 0 практически равен нулю. Таким образом, мы получаем *формулу Стирлинга*:

$$\Gamma(n+1) = n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \tag{F.15}$$

которая уже при $n = 10$ дает относительную ошибку, меньшую 1%.

## F.2 Функции Дирака и Хевисайда

• *Функция Дирака* или *δ-функция* равна везде нулю, кроме одной точки, где её значение бесконечно. При этом интеграл, включающий эту точку, равен единице. В одномерном случае:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = 0 \\ 0 & \text{при } x \neq 0 \end{cases}, \qquad \int\limits_a^b \delta(x)\,dx = 1, \qquad \delta(-x) = \delta(x). \quad \text{(F.16)}$$

Конкретное значение границ $a$ и $b$ не играет роли, так как дельта-функция равна нулю при $x \neq 0$. При интегрировании с гладкой функцией, имеющей в окрестности $x = x_0$ значение $f(x_0)$, имеем:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\delta(x - x_0)\,dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{при } x_0 \in [a, b] \\ 0 & \text{при } x_0 \notin [a, b] \end{cases}.$$

Это соотношение часто записывается следующим образом:

$$f(x)\,\delta(x - x_0) = f(x_0)\,\delta(x - x_0). \qquad \text{(F.17)}$$

Для функции Дирака справедливо тождество

$$\delta(f(x) - f(x_0)) = \delta(f'(x_0)\,(x - x_0)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|}, \qquad \text{(F.18)}$$

где проведено разложение в ряд Тейлора $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$ и $|f'(x_0)|$ выносится заменой переменной интегрирования $x' = x\,f'(x_0)$ (если $f'(x_0) < 0$ изменяется знак пределов интегрирования, откуда получается модуль).

Существует множество гладких функций, зависящих от параметра $\epsilon$, которые имеют своим пределом $\delta$-функцию при $\epsilon \to 0$:

$$\frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}}\,\exp\left[-\frac{x^2}{2\epsilon^2}\right], \qquad \frac{\epsilon/\pi}{x^2 + \epsilon^2}, \qquad \frac{1}{\pi x}\,\sin\!\left(\frac{x}{\epsilon}\right). \qquad \text{(F.19)}$$

Интеграл этих функций от $-\infty$ до $\infty$ равен единице, а максимум в точке $x = 0$ стремится к бесконечности при $\epsilon \to 0$.

Трёхмерная функция Дирака определяется аналогично одномерной. Если её аргумент равен нулю, то она равна бесконечности, иначе нулю. При этом интеграл по произвольному объёму, окружающему точку сингулярности, равняется единице. В декартовых координатах 3-мерную Дирака можно записать через произведение одномерных:

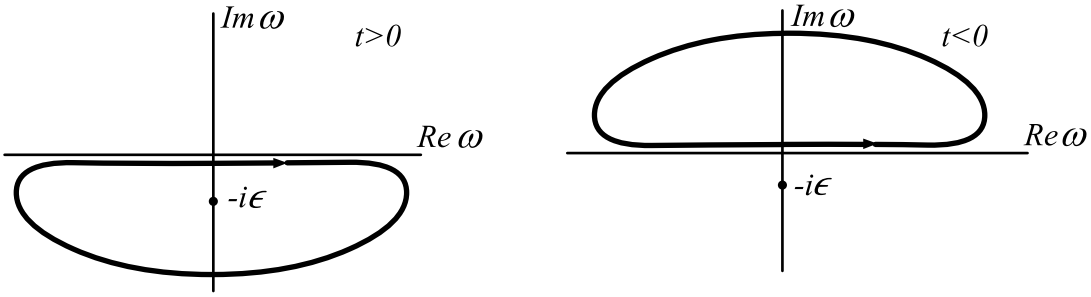
$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z), \qquad \int \delta(\mathbf{r})\,dV = 1.$$

Также можно определить функции Дирака произвольной размерности.

• Введём также разрывную *θ-функцию Хевисайда*:

$$\theta(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{array} \right\} = \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\imath\, e^{-\imath\omega x}}{\omega+\imath\epsilon}\,\frac{d\omega}{2\pi}. \qquad \text{(F.20)}$$

Второе равенство проверяется по теореме Коши, интегрированием по замкнутому контуру в комплексной плоскости $\omega$:




Если $x>0$, то контур можно замкнуть в нижней полуплоскости (левый рисунок), т.к. при $\omega\to -\imath\infty$ интеграл по замыкающему контуру благодаря экспоненте равен нулю (дополнительный знак минус, т.к. интегрирование идёт по часовой стрелке). Если же $x<0$, то замыкание надо проводить в верхней полуплоскости (правый рисунок) и т.к. полюс в этот контур не попадает, получается ноль.

Производная от функции Хевисайда равна $\delta$-функции:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} \equiv \theta'(x) = \delta(x). \qquad \text{(F.21)}$$

Действительно, вычислим по частям интеграл от произвольной функции по интервалу $[a,b]$, содержащему точку $x=0$:

$$\int\limits_a^b f(x)\theta'(x)dx = f(x)\theta(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)\theta(x)dx = f(b) - \int\limits_0^b f'(x)dx = f(0),$$

где во равенстве учтено, что $\theta(a)=0$ при $a<0$ и по этой же причине обрезан предел интегрирования.

Аналогично $\delta$-функции, можно записать непрерывное и дифференцируемое приближение к разрывной функции Хевисайда:

$$\theta(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{1+e^{-2x/\epsilon}}, \qquad \delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\mathrm{ch}^{-2}(x/\epsilon)}{2\epsilon}, \qquad \text{(F.22)}$$

где ещё один аппроксиматор к $\delta$-функции получен при помощи соотношения (F.21).

• Периодическую функцию $f(t+T) = f(t)$, где $T = b - a$ можно представить на отрезке $t = [a...b]$ в виде ряда:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{i2\pi kt/T}, \qquad c_n = \int_a^b f(t) \, e^{-i2\pi nt/T} \, \frac{dt}{T}. \tag{F.23}$$

Заданная таким образом функция $f(t)$ периодична и разложена по полному набору линейно независимых ортогональных функций $e^{i2\pi kt/T}$. Второе соотношение для коэффициентов $c_n$ проверяется в результате несложного интегрирования. Функция $f(t)$ будет действительной: $f^*(t) = f(t)$, если $c_k^* = c_{-k}$.

Возьмём симметричный интервал $[a,\, b] = [-T/2,\, T/2]$ и введём новые коэффициенты $\phi_k = T\, c_k$. Обозначив $t_k = 2\pi k/T$, запишем *ряд Фурье*:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_k \; e^{it_k x} \; \frac{1}{T}, \qquad \phi_k = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \; e^{-it_k x} \; dx.$$

Величины $t_k$ можно рассматривать как новую переменную, изменение которой равно $\Delta t = t_k - t_{k-1} = 2\pi/T$. Устремим $T$ к бесконечности. По определению интеграла, выражение для $f(x)$ можно записать в виде:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \; e^{itx} \; dt, \qquad \phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \; e^{-itx} \; dx, \tag{F.24}$$

где $\phi(t)$ становится непрерывной функцией параметра $t = t_k$. Соотношения (F.24) называются *интегральным фурье-преобразованием.*

Для функции Дирака справедливо интегральное представление, которое часто встречается в книге:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath\, t\, x} \, \frac{dt}{2\pi} = \delta(x). \tag{F.25}$$

Неформально его можно получить обрезав пределы интегрирования интервалом $[-L/2, L/2]$, а затем устремить $L$ в бесконечность, воспользовавшись третей функцией в (F.19) с $\epsilon = 2/L$.

Понятно, что подстановка одного интеграла (F.24) в другой должна приводить к тождественному результату. При помощи интегрального представления функции Дирака (F.25) несложно проверить, что это действительно так.

• Заметим, что с математической точки зрения определение функции Дирака (F.16) бессмысленно, так как интеграл Римана от всюду равной нулю (кроме одной точки) функции неопределен. Поэтому требуется более формальный подход к таким "странным" функциям, класс которых принято называть обобщёнными функциями. В общем случае

> *обобщённая функция* определяется как *линейный функционал* в векторном пространстве "хороших функций".

*Функционал* $F[f(x)]$ – это правило по которому данной функции $f(x)$ ставится в соответствие число (вещественное или комплексное). Линейность функционала, как обычно, означает, что

$$F[\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)] = \alpha_1 F[f_1(x)] + \alpha_2 F[f_2(x)],$$

где $\alpha_i$ – произвольные константы, а $f_i(x)$ – произвольные функции.

Обозначим линейный функционал $F[f(x)]$ при помощи круглых скобок, внутри которых через запятую сначала записывается *имя* обобщённой функции (имя функционала), а затем указывается *произвольная* "хорошая" функция: $(F, f)$.

Функция Дирака $\delta(x)$ как функционал *определяется* следующим образом:

$$\big(\delta,\, f\big) = f(0). \tag{F.26}$$

В этом определении нет интегралов, подобных (F.16), а просто утверждается, что при действии функционала $\delta$ на любую функцию $f(x)$ получается число, равное значению $f(0)$. Аналогично, функция Хевисайда задаётся соотношением:

$$\big(\theta,\, f\big) = \int\limits_0^\infty f(x)\, dx. \tag{F.27}$$

Обратим внимание, что в определении $\theta$-функции как функционала, не играет роли её значение при $x = 0$ и его можно положить любым, так как значение интеграла одна точка не изменит. При обычном подходе к функциям, если две функции отличаются значением в одной точке – то это различные функции. Обобщённые функции являются функционалами и говорить об их значении в точке смысла не имеет.

Обобщённые функции можно складывать и умножать на число, однако, в отличие от "обычных" функций, произведение обобщённых функций, вообще говоря, не определено.

## F.3 Функции Бесселя

• Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$z^2\,y''(z) + z\,y'(z) + (z^2 - \nu^2)\,y(z) = 0, \tag{F.28}$$

где $\nu$ – произвольный вещественный параметр. Функция Бесселя первого рода $J_\nu(z)$ является конечным при $z = 0$ решением такого уравнения и может быть разложена в степенной ряд:

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \Big(\frac{z}{2}\Big)^{2k+\nu}. \tag{F.29}$$

Функция Бесселя второго рода (или функция Неймана, иногда обозначаемая как $Y_\nu$) – это сингулярное в нуле решение уравнения (F.28):

$$N_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}, \tag{F.30}$$

где в случае целого $\nu = n$ берётся предел $\nu \to n$ и $J_{-n}(z) = (-1)^\nu\,J_n(z)$. Линейная комбинация функций первого и второго рода даёт общее решение уравнения (F.28).

Модифицированные функции Бесселя возникают при замене $z \mapsto \imath z$, для которой уравнение (F.28) переходит в:

$$z^2\,y''(z) + z\,y'(z) - (z^2 + \nu^2)\,y(z) = 0. \tag{F.31}$$

Конечное в нуле решение этого уравнения называется модифицированной функцией Бесселя первого рода $I_\nu(z)$, а сингулярное – модифицированной функцией второго рода $K_\nu(z)$ или функцией Макдональда.

В книге встречаются следующие интегральные представления:

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(z\sin\phi)\,d\phi, \qquad K_0(z) = \int\limits_0^\infty e^{-z\,\mathrm{ch}\,\phi}\,d\phi, \tag{F.32}$$

$$N_0(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin(z\sin\phi)\,d\phi - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-z\,\mathrm{sh}\,\phi}\,d\phi. \tag{F.33}$$

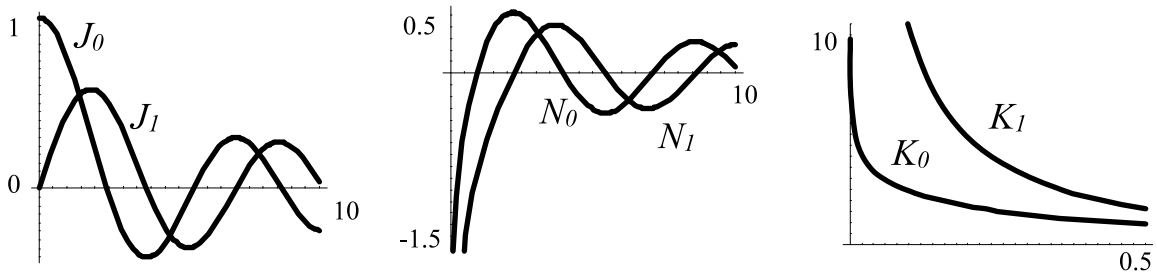
Так как $\sin\phi$ симметричен относительно $\pi/2$, интегрирование для $J_0(z)$ и $N_0(z)$ можно вести от 0 до $\pi/2$, умножив интегралы на 2.

Производные функций Бесселя равны:

$$J_0'(z) = -J_1(z), \qquad N_0'(z) = -N_1(z), \qquad K_0'(z) = -K_1(z),$$

что можно проверить при помощи интегральных представлений, подставляя затем их в уравнения (F.28), (F.31).

Поведение функций Бесселя при $\nu = 0, 1$ представлено ниже на графиках:




Функции Бесселя и Неймана, осциллируя, стремятся при $z \to \infty$ к нулю. Модифицированная функция Бесселя второго рода убывает монотонным образом. Модифицированная функция первого рода $I_\nu(z)$ – монотонно растёт и $I_0(0) = 1$, $I_0(0) = 0$.

В нуле модифицированная функция Бесселя стремится к $-\infty$, а функция Неймана к $+\infty$. При этом:

$$\lim_{z\to 0}\left\{2K_0(z) + \pi N_0(z)\right\} = 0. \tag{F.34}$$

Этот предел получается непосредственно из определений (F.32) и (F.33). Действительно, первый интеграл в (F.33) при $z = 0$ равен нулю, а в интегралах от 0 до $\infty$ раскладываем в ряд Тейлора по $z$ экспоненты (убеждаясь, что слагаемые порядка $O(z^n)$ конечны). Кроме этого, очевидно, что для функций Бесселя справедливы значения $J_0(0) = 1$ и $J_1(0) = 0$.

Функции Бесселя и Неймана при больших $z$ имеют такое асимптотическое поведение:

$$J_\nu(z) \to \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\Big(z - \frac{2\nu+1}{4}\,\pi\Big), \quad N_\nu(z) \to \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\Big(z - \frac{2\nu+1}{4}\,\pi\Big). \tag{F.35}$$

Модифицированная функция Бесселя, независимо от значения индекса, при $z \to \infty$ имеет поведение:

$$K_\nu(z) \to \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}. \tag{F.36}$$

В окрестности нуля ($z \to 0$) поведение функций следующее:

$$J_\nu(z) \sim \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \tag{F.37}$$

$$N_0(z) \sim \frac{2}{\pi}\Big[\ln\Big(\frac{z}{2}\Big) + \gamma\Big], \qquad N_{\nu>0}(z) \sim -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\Big(\frac{2}{z}\Big)^\nu. \tag{F.38}$$

$$K_0(z) \sim -\Big[\ln\Big(\frac{z}{2}\Big) + \gamma\Big], \qquad K_{\nu>0}(z) \sim \frac{\Gamma(\nu)}{2}\Big(\frac{2}{z}\Big)^\nu. \tag{F.39}$$

За доказательством этих соотношений, стоит обратиться к соответствующей литературе.

## F.4 Функция Паули-Йордана

В квантовой теории поля часто встречается интеграл следующего вида

$$D_0(\mathrm{x}) = \int e^{-\imath\,\mathrm{px}}\,\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p}, \tag{F.40}$$

который называют *функцией Паули-Йордана*. Выше $\mathrm{p} = \{\omega_p,\, \mathbf{p}\}$ и $\omega_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Эта функция является частным решением уравнения:

$$(\partial^2 + m^2)\, D_0(\mathrm{x}) = 0 \tag{F.41}$$

и может быть также записана как 4-кратный интеграл:

$$D_0(\mathrm{x}) = \int e^{-\imath\,\mathrm{px}}\,\theta(k_0)\,\delta(\mathrm{k}^2 - m^2)\,\frac{d^4\mathrm{p}}{(2\pi)^3}. \tag{F.42}$$

Проинтегрируем (F.40) в сферических координатах: $d^3\mathbf{p} = p^2 dp\,\sin\theta d\theta d\phi$, $\mathbf{px} = pr\cos\theta$, $p = |\mathbf{p}|$, $r = |\mathbf{x}|$. После интегрирования по углу $\theta$ возникает сумма двух экспонент, во второй из которых делаем замену $p \mapsto -p$ и получаем интеграл по $p$ от $-\infty$ до $\infty$:

$$D_0(t,\,\mathbf{x}) = \frac{-1}{8\pi^2 r}\,\frac{\partial f}{\partial r}, \qquad f(t,r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\imath t\sqrt{p^2+m^2}+\imath pr}}{\sqrt{p^2+m^2}}\,dp. \tag{F.43}$$

При помощи замены $p = m\,\mathrm{sh}\,\phi$ можно также написать:

$$f(t,r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\imath m\,(t\,\mathrm{ch}\,\phi - r\,\mathrm{sh}\,\phi)}\,d\phi. \tag{F.44}$$

Рассмотрим пространственно подобный 4-вектора $\mathrm{x}^2 = t^2 - r^2 < 0$, для которого возможна параметризация:

$$t = \sqrt{-\mathrm{x}^2}\,\mathrm{sh}\,\phi_0, \qquad r = \sqrt{-\mathrm{x}^2}\,\mathrm{ch}\,\phi_0, \qquad \mathrm{th}\,\phi_0 = \frac{t}{r}.$$

Подставляя её в (F.44), получаем:

$$f(t,r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\imath m\sqrt{-\mathrm{x}^2}\,\mathrm{sh}\,\phi}\,d\phi, \qquad \mathrm{x}^2 < 0, \tag{F.45}$$

где учтено тождество $\mathrm{sh}(\phi - \phi_0) = \mathrm{sh}\,\phi\,\mathrm{ch}\,\phi_0 - \mathrm{ch}\,\phi\,\mathrm{sh}\,\phi_0$. Кроме этого, так как интегрирование ведётся от $-\infty$ до $\infty$, сдвигом переменной интегрирования можно убрать $\phi_0$ и мы сразу положили $\phi_0 = 0$.

Для времени-подобного случая $\mathrm{x}^2 = t^2 - r^2 > 0$ необходима другая параметризация (считаем, что $t > 0$):

$$t = \sqrt{\mathrm{x}^2}\,\mathrm{ch}\,\phi_0, \qquad r = \sqrt{\mathrm{x}^2}\,\mathrm{sh}\,\phi_0, \qquad \mathrm{th}\,\phi_0 = \frac{r}{t},$$

которая с учётом тождества $\mathrm{ch}(\phi - \phi_0) = \mathrm{ch}\,\phi\,\mathrm{ch}\,\phi_0 - \mathrm{sh}\,\phi\,\mathrm{sh}\,\phi_0$ и опускания константы $\phi_0$ даёт:

$$f(t,r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\imath m\sqrt{\mathrm{x}^2}\,\mathrm{ch}\,\phi}\,d\phi, \qquad \mathrm{x}^2 > 0, \quad t > 0. \tag{F.46}$$

Так как $\mathrm{sh}\,\phi$ нечётная функция, интеграл (F.45) является действительным. В тоже время (F.46) имеет мнимую часть. Запишем это в следующем виде ($t > 0$):

$$f(t,r) = \begin{cases} 2\,K_0(m\sqrt{-\mathrm{x}^2}), & \mathrm{x}^2 < 0 \\ -\pi\,N_0(m\sqrt{\mathrm{x}^2}) - \imath\pi\,J_0(m\sqrt{\mathrm{x}^2}), & \mathrm{x}^2 > 0, \end{cases} \tag{F.47}$$

где введены: функция Бесселя $J_0(z)$, модифицированная функция Бесселя $K_0(z)$ и функция Неймана $N_0(z)$. Ниже мы приведём для них более сходящиеся интегральные представления, чем те, что непосредственно следуют из (F.45), (F.46). В случае $t < 0$, необходимо взять комплексное сопряжение $f$, так как из (F.44) следует, что $f(-|t|,\,r) = f^*(|t|,\,r)$.

При помощи $\theta$-функции запишем $f(t,r)$ в виде одного выражения:

$$f(t,r) = 2\theta(-\mathrm{x}^2)\,K_0(m\sqrt{-\mathrm{x}^2}) - \pi\,\theta(\mathrm{x}^2)\,N_0(m\sqrt{\mathrm{x}^2}) - \imath\pi\,\theta(\mathrm{x}^2)\,J_0(m\sqrt{\mathrm{x}^2}).$$

Учтём, что (см. стр. 269):

$$\theta'(x) = \delta(x), \qquad J_0(0) = 1, \qquad \lim_{z\to 0}\{2K_0(z) + \pi N_0(z)\} = 0.$$

Так как $f(t,r)$ зависит от инварианта $\mathrm{x}^2$, при взятии его производной $\partial\mathrm{x}^2/\partial r = -2r$ в знаменателе (F.43) $r$ сокращается и $D_0(\mathrm{x})$ зависит только от $\mathrm{x}^2$. Этого следовало ожидать, так как в интеграле (F.40) отношение $d^3\mathbf{p}/\omega$ является инвариантом преобразований Лоренца (стр. 52). В результате приходим к следующему выражению:

$$D_0(\mathrm{x}) = -\frac{\imath s(t)}{4\pi}\,\delta(\mathrm{x}^2) + \tag{F.48}$$

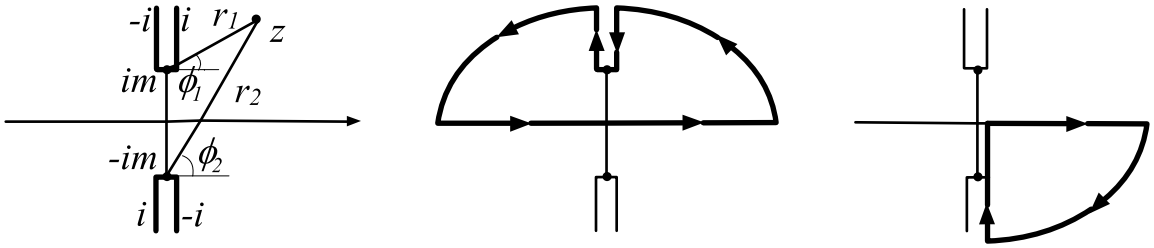
$$+\frac{m\,\theta(-\mathrm{x}^2)}{4\pi^2\sqrt{-\mathrm{x}^2}}\,K_1(m\sqrt{-\mathrm{x}^2}) + \frac{m\,\theta(\mathrm{x}^2)}{8\pi\sqrt{\mathrm{x}^2}}\,\{N_1(m\sqrt{\mathrm{x}^2}) + \imath\,s(t)\,J_1(m\sqrt{\mathrm{x}^2})\},$$

где введена функция знака времени $s(t) = \mathrm{sign}(t)$, равная 1 при $t > 0$ и -1 при $t < 0$ (что получается взятием комплексного сопряжения).

• Преобразуем интегралы (F.45) и (F.46) к более сходящемуся виду. Для этого вернёмся к (F.43) и положим $t = 0$ (для случая $\mathrm{x}^2 < 0$).

$$f(0,r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\imath pr}}{\sqrt{p^2+m^2}}\, dp. \qquad \text{(F.49)}$$

Продолжим подынтегральную функцию в комплексную плоскость. Корень $\sqrt{p^2+m^2}$ имеет две точки ветвления $\pm\imath m$ от которых проведём разрезы вдоль комплексных осей в $\imath\infty$ и $-\imath\infty$ (ниже первый рисунок):




Аргумент комплексной функции $w = \sqrt{z^2+m^2}$ равен сумме аргументов функций $\sqrt{z \pm \imath m}$ (их произведение даёт $w$). Если $z = \imath m + r_1 e^{\imath\phi_1}$, то $\sqrt{z-\imath m} = r_1^{1/2} e^{\imath\phi_1/2}$. На правом берегу верхнего разреза $\phi_1 = \pi/2$, а на левом $\phi_1 = -3\pi/2$ (перейти разрез мы не можем, обходим снизу). Для $\sqrt{z+\imath m} = r_2^{1/2} e^{\imath\phi_2/2}$ и на верхней полуоси $\phi_2 = \pi/2$. Поэтому на верхнем разрезе справа аргумент $\arg w = \pi/4 + \pi/4 = \pi/2$ (что соответствует множителю $\imath$), а на левом берегу разреза $-3\pi/4 + \pi/4 = -\pi/2$ (т.е. $-\imath$). Аналогично находятся значения аргумента на берегах нижнего разреза.

Так как $r > 0$, замкнём контур интегрирования в верхней полуплоскости, обойдя разрезы так, как это показано выше на втором рисунке. Внутри контура особых точек нет, поэтому по теореме Коши интеграл по нему равен нулю. Кроме этого, благодаря наличию в подынтегральной функции множителя $e^{\imath pr}$, равны нулю интегралы по $z = Re^{\imath\phi}$ вдоль дуг $\phi = (0..\pi/2)$ и $\phi = (\pi/2...\phi)$ при $R \to \infty$. Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} + \int\limits_{\imath m-\epsilon}^{\imath\infty-\epsilon} + \int\limits_{\imath\infty+\epsilon}^{\imath m+\epsilon} = 0 \qquad => \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} = -\int\limits_{\imath m-\epsilon}^{\imath\infty-\epsilon} + \int\limits_{\imath m+\epsilon}^{\imath\infty+\epsilon}.$$

Учитывая значения функции $w = \sqrt{z^2+m^2}$ на левом $(-\epsilon)$ и правом $(+\epsilon)$ берегах разреза, получаем:

$$f(0,r) = 2\int\limits_{m}^{\infty} \frac{e^{-\rho r}\, d\rho}{\sqrt{\rho^2-m^2}},$$

где сделана замена переменной интегрирования $p = \imath\rho$, $dp = \imath d\rho$. Это уже вполне респектабельный интеграл (до тех пор пока $r > 0$).

Для времени подобного случая $\mathrm{x}^2 > 0$ можно положить $r = 0$, и учесть чётность подынтегральной функции:

$$f(t,0) = 2\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\imath t\sqrt{p^2+m^2}}}{\sqrt{p^2+m^2}}\,dp.$$

Теперь контур интегрирования необходимо замкнуть так, как это изображено выше на третьем рисунке. Действительно на нижней дуге $z = Re^{\imath\phi}$, $\phi = (0..-\pi/2)$ и аргументы $\sqrt{z \pm \imath m}$ меняются в пределах $(0..-\pi/4)$. Поэтому аргумент $w = \sqrt{z^2+m^2}$ изменяется от 0 до $-\pi/2$. Для этих углов синус отрицательный. Так как под экспонентой $w$ умножается на $-\imath$, получаем под интегралом множитель $e^{t\,R\sin(\arg w)} \to 0$ при $R \to \infty$. Поэтому интеграл от 0 до $\infty$ по теореме Коши равен интегралу от $\epsilon$ до $-\imath\infty + \epsilon$:

$$f(t,0) = 2\int\limits_m^\infty \frac{e^{-t\sqrt{\rho^2-m^2}}\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-m^2}} - 2\imath\int\limits_0^m \frac{e^{-\imath t\sqrt{m^2-\rho^2}}d\rho}{\sqrt{m^2-\rho^2}},$$

где сделана замена $p = -\imath\rho$.

Таким образом, для $\mathrm{x}^2 < 0$, делая замену $\rho = m\,\mathrm{ch}\,\phi$ и восстанавливая инвариантный квадрат 4-вектора $x^\nu$, имеем:

$$f(t,r) = 2\int\limits_0^\infty e^{-m\sqrt{-\mathrm{x}^2}\,\mathrm{ch}\,\phi}\,d\phi, \qquad \mathrm{x}^2 < 0, \tag{F.50}$$

Аналогично, если $\mathrm{x}^2 < 0$, в первом интеграле делаем замену $\rho = m\,\mathrm{ch}\,\phi$, а во втором $\rho = m\cos\phi$:

$$f(t,r) = 2\int\limits_0^\infty e^{-m\sqrt{\mathrm{x}^2}\,\mathrm{sh}\,\phi}\,d\phi - 2\imath\int\limits_0^{\pi/2} e^{-\imath m\sqrt{\mathrm{x}^2}\sin\phi}d\phi, \qquad \mathrm{x}^2 > 0. \tag{F.51}$$

Расписывая по формуле Эйлера экспоненту:

$$2\int\limits_0^\infty e^{-m\sqrt{\mathrm{x}^2}\,\mathrm{sh}\,\phi}\,d\phi - 2\int\limits_0^{\pi/2}\sin(m\sqrt{\mathrm{x}^2}\sin\phi)\,d\phi - 2\imath\int\limits_0^{\pi/2}\cos(m\sqrt{\mathrm{x}^2}\sin\phi)\,d\phi$$

и, учитывая определения функций Бесселя (стр. 268), получаем (F.47).

## F.5 Функции Грина

Простейшим обобщением уравнения свободного скалярного поля (стр. 26) является уравнение с источником

$$(\partial^2 + m^2)\varphi = j, \tag{F.52}$$

где $j = j(t, \mathbf{x})$ – заданная функция времени и координат. Для его решения служат функции Грина, удовлетворяющие уравнению:

$$(\partial^2 + m^2)\Delta(\mathrm{x}) = \delta(\mathrm{x}), \tag{F.53}$$

в правой части которого стоит 4-мерная функция Дирака $\delta(\mathrm{x}) = \delta(t)\delta(\mathbf{x})$. При помощи функции Грина решение (F.52) записывается следующим образом:

$$\varphi(\mathrm{x}) = \varphi_0(\mathrm{x}) + \int \Delta(\mathrm{x}-\mathrm{y})\, j(\mathrm{y})\, d^4y, \tag{F.54}$$

где $\varphi_0(\mathrm{x})$ – общее решение уравнения без тока $(\partial^2 + m^2)\varphi_0 = 0$. Действительно, действуя оператором $\partial^2 + m^2$ на (F.54), имеем:

$$(\partial^2 + m^2)\varphi = \int (\partial^2 + m^2)\Delta(\mathrm{x}-\mathrm{y})\, j(\mathrm{y})\, d^4y = \int \delta(\mathrm{x}-\mathrm{y})\, j(\mathrm{y})\, d^4y = j(\mathrm{x}).$$

Запишем для функции Грина и $\delta$-функции фурье-интегралы по 4-импульсу:

$$\Delta(\mathrm{x}) = \int \Delta(\mathrm{p})\, e^{-i\mathrm{px}}\, \frac{d^4\mathrm{p}}{(2\pi)^4}, \qquad \delta(\mathrm{x}) = \int e^{-i\mathrm{px}}\, \frac{d^4\mathrm{p}}{(2\pi)^4}. \tag{F.55}$$

Подставляя их в уравнение (F.53), получаем

$$(-\mathrm{p}^2 + m^2)\Delta(\mathrm{p}) = 1.$$

Перепишем фурье-образ функции Грина в следующем виде:

$$-\Delta(\mathrm{p}) = \frac{1}{\mathrm{p}^2 - m^2} = \frac{1}{p_0^2 - \omega_p^2} = \frac{1}{2\omega_p}\left(\frac{1}{p_0 - \omega_p} - \frac{1}{p_0 + \omega_p}\right),$$

где $\omega_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Если $\mathrm{p}^2 = m^2$ или $p_0 = \pm\omega_0$, при интегрировании по $dp_0$ от $-\infty$ до $\infty$ в (F.55) возникает два полюса. Поэтому необходимо доопределение правил обхода этих полюсов. Эти правила приводят к различным функциям Грина. Наиболее важные из них – три: запаздывающая, опережающая и причинная функции Грина.

• *Запаздывающая* функция Грина получается, когда оба полюса сдвинуты на бесконечно малую величину $\epsilon \to +0$ в отрицательную сторону комплексной оси $p_0$:

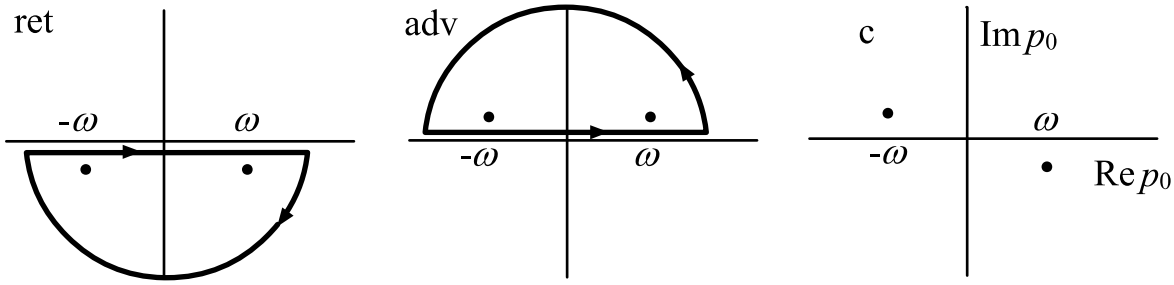
$$-2\omega_p\,\Delta_{\rm ret}({\rm p}) = \frac{1}{p_0-\omega_p+\imath\epsilon} - \frac{1}{p_0+\omega_p+\imath\epsilon}. \qquad \text{(F.56)}$$

Это соответствует 4-кратному фурье-интегралу с модифицированным знаменателем:

$$\Delta_{\rm ret}({\rm x}) = -\int \frac{e^{-\imath{\rm px}}}{{\rm p}^2-m^2+\imath p_0\,\epsilon}\,\frac{d^4{\rm p}}{(2\pi)^4}. \qquad \text{(F.57)}$$

На самом деле, при приведении к общему знаменателю (F.56), возникает комбинация $2\imath p_0\epsilon-\epsilon^2$. Так как $\epsilon$ бесконечно мала, член второго порядка $\epsilon^2$ можно отбросить. По этой же причине можно заменить $2\epsilon$ на $\epsilon$, так как предел при $\epsilon\to 0$ от этого не изменится. Однако "включить" $p_0$ в $\epsilon$ уже нельзя (при интегрировании по $p_0$ от $-\infty$ до $\infty$ он меняет знак, а предел $\epsilon\to+0$ предполагает, что $\epsilon>0$).

При $t>0$ экспонента $e^{-\imath p_0 t}$ равна нулю когда $p_0\to-\imath\infty$. Поэтому можно замкнуть контур интегрирования по $p_0$ в нижней части комплексной плоскости $p_0$ без изменения значения интеграла (ниже первый рисунок):




По теореме Коши, интеграл по замкнутому контуру с обходом по часовой стрелке равен $-2\pi\imath$ на сумму вычетов. Поэтому

$$\Delta_{\rm ret}({\rm x}) = \int \frac{\imath\,d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3\,2\omega_p}\left(e^{-\imath{\rm px}}-e^{\imath{\rm px}}\right), \qquad t>0, \qquad \text{(F.58)}$$

где во втором слагаемом сделана замена $\mathbf{p}\mapsto-\mathbf{p}$, чтобы перейти от $\omega_p t+\mathbf{px}$ к ковариантному выражению px. При этом компоненты 4-импульса уже являются зависимыми: ${\rm p}=\{\omega_p,\mathbf{p}\}$ и положено $\epsilon=0$.

При $t<0$ контур можно замкнуть в верхней полуплоскости, и так как полюсы в него не попадают:

$$\Delta_{\rm ret}({\rm x}) = 0, \qquad \text{при} \qquad t<0, \qquad \text{(F.59)}$$

т.е. запаздывающая функция Грина при отрицательных временах равна нулю.

• Аналогично определяется *опережающая* функция Грина

$$-2\omega_p\,\Delta_{\rm adv}({\rm p}) = \frac{1}{p_0-\omega_p-\imath\epsilon} - \frac{1}{p_0+\omega_p-\imath\epsilon}, \tag{F.60}$$

в которой полюса подняты в положительную часть комплексной оси $p_0$ (второй рисунок на предыдущей странице):

$$\Delta_{\rm adv}({\rm x}) = -\int \frac{e^{-\imath{\rm px}}}{{\rm p}^2-m^2-\imath p_0\,\epsilon}\,\frac{d^4{\rm p}}{(2\pi)^4}. \tag{F.61}$$

По теореме Коши, интегрирование против часовой стрелке равно $2\pi\imath$ на вычеты, поэтому интеграл по $p_0$ равен:

$$\Delta_{\rm adv}({\rm x}) = \int \frac{\imath\,d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3\,2\omega_p}\Big(e^{\imath{\rm px}} - e^{-\imath{\rm px}}\Big), \qquad t<0, \tag{F.62}$$

а при положительных временах функция равна нулю

$$\Delta_{\rm adv}({\rm x}) = 0, \qquad \text{при} \qquad t>0. \tag{F.63}$$

Таким образом, опережающая функция Грина в некотором роде является антиподом к запаздывающей функции Грина.

• Возможно ещё одно определение функции Грина, которое часто встречается в квантовой теории поля. В этой функции, называемой *причинной*, левый полюс $p_0=-\omega_p$ сдвинут вверх, а правый $p_0=\omega_p$ вниз относительно действительной оси:

$$-2\omega_p\,\Delta_{\rm c}({\rm p}) = \frac{1}{p_0-\omega_p+\imath\epsilon} - \frac{1}{p_0+\omega_p-\imath\epsilon}, \tag{F.64}$$

что соответствует 4-кратному интегралу:

$$\Delta_{\rm c}({\rm x}) = -\int \frac{e^{-\imath{\rm px}}}{{\rm p}^2-m^2+\imath\,\epsilon}\,\frac{d^4{\rm p}}{(2\pi)^4}. \tag{F.65}$$

Это выражение, делённое на $\imath$ называется *пропагатором*. Интегрируя по $p_0$, в силу теоремы Коши, имеем:

$$\Delta_{\rm c}({\rm x}) = \int \frac{\imath\,d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_p}\Big(\theta(t)\,e^{-\imath{\rm px}} + \theta(-t)\,e^{\imath{\rm px}}\Big), \tag{F.66}$$

где $\theta(t)$ – ступенчатая функция Хевисайда, стр. 265. Так как полюсы находятся по обе стороны действительной оси, причинная функция Грина отлична от нуля как при $t>0$, так и при $t<0$.

• Функции Грина можно выразить через функцию Паули-Йордана (F.40):

$$-\imath\Delta_{\rm ret}({\rm x}) = \theta(t)\left\{D_0({\rm x}) - D_0(-{\rm x})\right\}, \quad -\imath\Delta_{\rm adv}({\rm x}) = \theta(-t)\left\{D_0(-{\rm x}) - D_0({\rm x})\right\}$$

и

$$-\imath\Delta_{\rm c}({\rm x}) = \theta(t)\, D_0({\rm x}) + \theta(-t)\, D_0(-{\rm x}). \tag{F.67}$$

Используя выражение функции Паули-Йордана через функции Бесселя (F.48), несложно записать запаздывающую функцию Грина:

$$\Delta_{\rm ret}({\rm x}) = \frac{\theta(t)}{2\pi}\left\{\delta({\rm x}^2) - \theta({\rm x}^2)\,\frac{m}{2\sqrt{{\rm x}^2}}\,J_1(m\sqrt{{\rm x}^2})\right\}. \tag{F.68}$$

Опережающая функция отличается только множителем с функцией Хевисайда:

$$\Delta_{\rm adv}({\rm x}) = \frac{\theta(-t)}{2\pi}\left\{\delta({\rm x}^2) - \theta({\rm x}^2)\,\frac{m}{2\sqrt{{\rm x}^2}}\,J_1(m\sqrt{{\rm x}^2})\right\}. \tag{F.69}$$

Обе функции являются действительными и равны нулю вне светового конуса при ${\rm x}^2 < 0$. Причинная функция Грина имеет комплексную часть:

$$\Delta_{\rm c}({\rm x}) = \frac{\delta({\rm x}^2)}{4\pi} \tag{F.70}$$

$$-\frac{m\,\theta({\rm x}^2)}{8\pi\sqrt{{\rm x}^2}}\left\{J_1(m\sqrt{{\rm x}^2}) - \imath N_1(m\sqrt{{\rm x}^2})\right\} + \frac{\imath m\,\theta(-{\rm x}^2)}{4\pi^2\sqrt{-{\rm x}^2}}\,K_1(m\sqrt{-{\rm x}^2}).$$

Приведём поведение причинной функции Грина в окрестности светового конуса ${\rm x}^2 \sim 0$:

$$\Delta_{\rm c}({\rm x}) \approx \frac{\delta({\rm x}^2)}{4\pi} - \frac{\imath}{4\pi^2{\rm x}^2} + \frac{\imath m^2}{8\pi^2}\,\ln m\sqrt{|{\rm x}^2|}, \tag{F.71}$$

получаемое из поведения функций Бесселя и Неймана в нуле. Как мы видим, причинная функция Грина существенно сингулярна.

Выбор конкретной функции Грина в решении (F.54) зависит от физического смысла получаемого решения. Обычно предполагается, что ток $j({\rm x})$ создаёт поле (является его источником). В этом случае *принцип причинности* (следствие возникает позже причины) требует использовать запаздывающую функцию Грина $\Delta_{\rm ret}$, которая равна нулю при $t < 0$. Другими словами, в интеграле (F.54) по $d^4{\rm y} = dy_0 d^3\mathbf{y}$ ненулевой вклад дают только времена $x^0 > y^0$. В результате, поле в момент времени $x_0$ определяется значениями источника в более ранний момент времени $y_0$.

# Теория групп

В этом приложении мы рассмотрим основы теории групп. После определения основных понятий, изучены группы вращения $\mathbf{O}(3)$, группа Лоренца $\mathbf{O}(1,3)$ и группа Пуанкаре $\mathbf{P}(1,3)$. Групповой подход даёт ещё один способ квантования полей. Анализируя преобразования группы Пуанкаре, мы получим коммутаторы оператора поля с операторами суммарного 4-импульса, момента и заряда поля. Будут найдены также коммутационные соотношения между этими величинами.

---

**Квантовый мир**

**Сергей С. Степанов**

Эта книга находится в процессе создания. Её последняя версия и другие материалы находятся на сайте: http://synset.com. Там же можно найти первый том: **I. Механика**
Замеченные ошибки и вопросы просьба присылать по адресу: steps137, затем собачка и gmail.com.

(c) 2015. Печать: 2 июля 2017 г.

## G.1 Теория групп

*Симметрия* – это набор операций $x, y, z, ...$ по преобразованию системы, которые эту систему или часть её свойств оставляют неизменной. Операциями могут быть повороты, сдвиги, перестановки элементов и т.п. действия. Записывая преобразования друг за другом $x \cdot y$ мы обозначаем их последовательное выполнение – сначала $x$, затем $y$. В результате получается новая операция $z = x \cdot y$. У каждой операции существует ей обратная $x^{-1}$, а единичной считается операция $e$, которая "ничего не делает". Композиция $(x \cdot y) \cdot z$ означает, что сначала выполняют $x$, затем $y$ и на результат воздействуют операцией $z$. Это действие ассоциативно и равно: $x \cdot (y \cdot z)$ (сначала выполняется $x$, затем находят композицию преобразований $(y \cdot z)$ и её применяют к результату преобразования $x$). Анализом подобных операция занимается теория групп.

*Группа* – это множество элементов на котором задана всюду определённая бинарная функция $x \cdot y$ обладающая свойствами:

- ▷ для любых $x, y$ существует $z$ : $z = x \cdot y$
- ▷ ассоциативность для любых $x,\ y,\ z$ : $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- ▷ существует $e$, такой, что для любого $x$ : $x \cdot e = e \cdot x = x$
- ▷ для любого $x$ существует $x^{-1}$ : $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e.$

Количество элементов множества называется *порядком группы*. Группы могут быть *конечными* или *бесконечными*. Бесконечные группы, в свою очередь, бывают *дискретными* или *непрерывными*.

Пусть множество состоит из 6 элементов $\{e, a, b, c, d, f\}$. Представим в табличном виде два варианта группового умножения:

$\mathbf{C_6}$ :

| | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ | $\bullet$ |
| $b$ | $c$ | $d$ | $f$ | $\bullet$ | $a$ |
| $c$ | $d$ | $f$ | $\bullet$ | $a$ | $b$ |
| $d$ | $f$ | $\bullet$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $f$ | $\bullet$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |

$\mathbf{D_3}$ :

| | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $\bullet$ | $d$ | $f$ | $c$ |
| $b$ | $\bullet$ | $a$ | $f$ | $c$ | $d$ |
| $c$ | $f$ | $d$ | $\bullet$ | $b$ | $a$ |
| $d$ | $c$ | $f$ | $a$ | $\bullet$ | $b$ |
| $f$ | $d$ | $c$ | $b$ | $a$ | $\bullet$ |

В заголовках строчек (по вертикали) стоят имена первого сомножителя, в заголовках колонок (по горизонтали) – второго. На пересечении строки и колонки находится значение их произведения. В $\mathbf{C_3}$: $a \cdot b = c$, $c \cdot a = d$, и т.д. Если результатом оказывается единичный элемент, то вместо "$e$" стоит жирная точка, позволяющая легко находить в таблице обратные элементы. В рамку мы обводим часть таблицы умножения не единичных элементов. Приведенные выше группы $\mathbf{C_6}$ и $\mathbf{D_3}$ имеют порядок 6.

• Для $n$ элементов возможно $n^{n\cdot n}$ таблиц умножения. Однако очень немногие из них удовлетворяют групповым аксиомам. Так, при $n = 6$ возможно $6^{36}$ таблиц, но только 2 из них будет *различными* группами! Кроме исходных аксиом группа может обладать дополнительными свойствами. Например, группы с коммутирующим умножением $x \cdot y = y \cdot x$ называются *абелевыми*. Группа $\mathbf{C_6}$ – абелева. Группа $\mathbf{D_3}$ – неабелева: $(a \cdot c = d) \neq (c \cdot a = f)$.

• Из $z \cdot x = z \cdot y$ следует, что $x = y$ (*регулярность слева*). Это доказывается умножением уравнения слева на $z^{-1}$ и использованием ассоциативности. Аналогично, $x = y$ следует из $x \cdot z = y \cdot z$ (*регулярность справа*). Поэтому в групповых таблицах в любой строке или колонке *ни какой элемент не встречается дважды* (для строки с заголовком $z$ и различными колонками $x$ и $y$ элементы $z \cdot x$ и $z \cdot y$ стоящие на их пересечениях должны различаться).

• *Единичный элемент в группе всегда один.* Докажем это. Если единичных элементов два: $e_1$ и $e_2$, то по определению "единичности" $e_1$, его умножение на $e_2$ даст $e_1 \cdot e_2 = e_2$. Это же соотношение, по определению "единичности" $e_2$, должно дать $e_1 \cdot e_2 = e_1$. От сюда следует, что $e_1 = e_2$.

• *Каждый $x$ имеет только один обратный ему элемент.* Если бы у $x$ было два обратных $x_1$ и $x_2$, то умножая $e = x \cdot x_1$ слева на $x_2$, получим:

$$x_2 = x_2 \cdot (x \cdot x_1) = (x_2 \cdot x) \cdot x_1 = e \cdot x_1 = x_1.$$

Поэтому в каждой строке, и в каждом столбце таблицы умножения должна стоять *только одна точка* (единичный элемент).

• Если $x$ и $y$ не равны единичному, то их произведение $x \cdot y$ не может быть равно $x$ или $y$. В противном случае, умножая, например, $x \cdot y = x$ слева на $x^{-1}$ получим $y = e$. Поэтому в строке или колонке соответствующих некоторому элементу $a$, он *сам стоять не может*, и находится только в заголовке (см. таблицы для $\mathbf{C_6}$, $\mathbf{D_3}$). В результате, каждая строчка и колонка таблицы, включая их заголовки, являются подмножеством различных перестановок элементов группы.

• Что бы найти элемент обратный произведению двух элементов, достаточно перемножить в обратном порядке обратные к ним элементы:

$$(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}.$$

Действительно, используя ассоциативность, имеем:

$$(x\cdot y)^{-1}\cdot(x\cdot y) = (y^{-1}\cdot x^{-1})\cdot(x\cdot y) = y^{-1}\cdot(x^{-1}\cdot x)\cdot y = y^{-1}\cdot e\cdot y = y^{-1}y = e.$$

Аналогичное правило справедливо и для произведения нескольких элементов: $(x \cdot y \cdot z)^{-1} = z^{-1} \cdot y^{-1} \cdot x^{-1}$, и т.д.

• Иногда несколько элементов перемножаясь, порождают все остальные элементы группы. Такие элементы называются *системой порождающих элементов*. Минимальное количество независимых элементов, необходимых для задания всей таблицы умножения называется *рангом группы*. При помощи порождающих элементов, группа записывается в виде угловых скобок, внутри которых до вертикальной черты перечисляются порождающие элементы (кроме единичного), а после – *определяющие соотношения*, т.е. правила которые необходимо учитывать при порождении других элементов (знак умножения опускаем):

$$\mathbf{C_6} = \left\langle a | a^6 = e \right\rangle, \qquad \mathbf{D_3} = \left\langle a, c | a^3 = e,\ c^2 = e,\ (ac)^2 = e \right\rangle.$$

Так, $\mathbf{C_6}$ означает, что умножение элемента $a$ самого на себя: $a^2 = a \cdot a$ и т.д. будет приводить к новым элементам, пока мы не сделаем это шесть раз: $a^6 = e$, получив единичный элемент. Группа замыкается, состоит из 6-ти элементов, имеющих (в обозначениях таблицы $\mathbf{C_6}$ на стр. 280) вид: $\{e, a, a^2 = b, a^3 = c, a^4 = d, a^5 = f\}$. Аналогично ($\lessdot \mathrm{H}_{17}$) для группы $\mathbf{D_3}$.

• *Подгруппа* $\mathbf{H}$ – это подмножество $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$, элементов группы $\mathbf{G}$ для которых выполняются *все* групповые свойства (есть единичный, у каждого элемента – обратный, и при умножении возникают только элементы из подгруппы: $h_i,\ h_j,\ h_i \cdot h_j \in \mathbf{H}$). Так, $\mathbf{C}_3 = \{e, a, b\} = \left\langle a | a^3 = e \right\rangle \subset \mathbf{D}_3$. Единичный элемент $\{e\}$ и саму группу $\mathbf{G}$ называют *собственными* подгруппами $\mathbf{G}$. Более нетривиальные подгруппы – *несобственными*.

Если у группы $\mathbf{G}$ известна подгруппа $\mathbf{H}$, то можно попытаться найти другие подгруппы. Для этого, выбирается фиксированный элемент $g$ группы ($g \in \mathbf{G}$), не принадлежащий $\mathbf{H}$ ($g \notin \mathbf{H}$) и строится *сопряжённая подгруппа* $\mathbf{H}' = g\mathbf{H}g^{-1}$, элементы которой получаются умножением всех элементов $\mathbf{H}$ слева на $g$, а справа на $g^{-1}$. То, что такое множество элементов образует группу, легко проверяется ($\lessdot \mathrm{H}_{18}$). Так, результат умножения остаётся внутри $\mathbf{H}'$:

$$h'_i h'_j = (g\, h_i\, g^{-1}) \cdot (g\, h_j\, g^{-1}) = g\,(h_i\, h_j)\, g^{-1} = g h_k g^{-1} = h'_k \in \mathbf{H}'.$$

Подгруппа $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ называется *инвариантной*, если её сопряжение с *любым* элементом $\mathbf{G}$ снова дает $\mathbf{H}$ (новая подгруппа не возникает). Тогда для любого $g \in \mathbf{G}$ имеем: $g^{-1}\, h_i\, g = h_j \in \mathbf{H}$ или иначе $h_i\, g = g\, h_j$. Например, для $\{e, a, b\} \subset \mathbf{D_3}$ будет $c \cdot \{e, a, b\} \cdot c^{-1} = \{a, b, a\}$ и т.д. Таким образом, это инвариантная подгруппа. Неинвариантны: $\{e, c\}$, $\{e, d\}$ и $\{e, f\}$. Заметим, что при сопряжении элемента $h_i$ получается, вообще говоря, *другой* элемент $h_j$ инвариантной подгруппы. Все подгруппы абелевой группы являются инвариантными. Группа, не имеющая инвариантных подгрупп (кроме себя и единицы), называется *простой*.

• Одна и та же группа в конкретных приложениях может иметь различные реализации, которые называют *представлениями группы*. Рассмотрим, например, группу $\mathbf{C_4} = \langle a | a^4 = e \rangle = \{e, a, b, c\}$ с таблицей умножения (слева):

$\mathbf{C_4}$ :

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $\bullet$ |
| $b$ | $c$ | $\bullet$ | $a$ |
| $c$ | $\bullet$ | $a$ | $b$ |

||

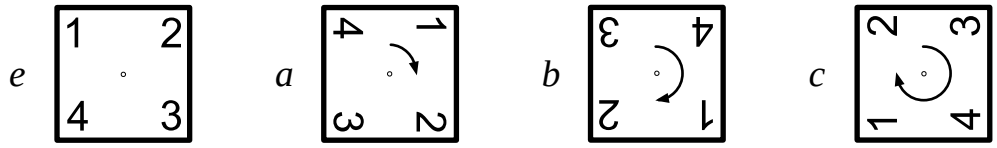
| | $\imath$ | $-1$ | $\imath^*$ |
|---|---|---|---|
| $\imath$ | $-1$ | $\imath^*$ | $1$ |
| $-1$ | $\imath^*$ | $1$ | $\imath$ |
| $\imath^*$ | $1$ | $\imath$ | $-1$ |

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 2 |

Это *абстрактная* абелева ($x \cdot y = y \cdot x$) группа. Её элементам можно придать различный содержательный смысл. Например $\{e, a, b, c\} = \{1, \imath, -1, \imath^*\}$, где 1, $-1$ – обычные числа, $\imath$ – мнимая единица, а $\imath^*$ – её комплексное сопряжение. Другое представление можно построить, считая элементы группы целыми числами $\{e, a, b, c\} = \{0, 1, 2, 3\}$ с групповым умножением $x \cdot y$ : $(x+y) \bmod 4$, где плюс – обычное арифметическое сложение, а "$z \bmod 4$" – операция получения остатка от деления $z$ на 4 (выше третья таблица). Возможно также матричное представление:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, для группы $\mathbf{C_4}$ справедливо геометрическое представление, состоящее из поворотов квадрата вокруг центра, без отражений:




Последовательность (композиция) двух поворотов $\{a, b, c\}$ формирует групповую таблицу $\mathbf{C_4}$.

• Две группы называются *изоморфными*, если с точностью до переобозначения элементов их таблицы умножения совпадают.

Две группы $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}'$ *гомоморфны*, если существует соответствие между их элементами. При этом, можно ввести всюду определённую функцию $g'_k = \Psi(g_i)$, *сохраняющую умножения*: $\Psi(g_i\, g_j) = \Psi(g_i)\Psi(g_j)$. Если $\Psi$ имеет обратную (соответствие взаимно-однозначно), то это изоморфизм. Группа $\mathbf{G}'$ называется *образом* ($\operatorname{Im}\Psi$) отображения: $\mathbf{G}' = \Psi(\mathbf{G})$. Множество элементов переходящих при гомоморфизме $\mathbf{G}' = \Psi(\mathbf{G})$ в единичный элемент $e' \in \mathbf{G}'$ называется *ядром гомоморфизма* ($\ker\Psi$).

Например, множество несингулярных матриц ($\det\mathbf{A} \neq 0$) образует группу. Определитель произведения $\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$ устанавливает гомоморфное отображение из группы матриц в группу ненулевых вещественных чисел. Ядром отображения будут все матрицы с $\det\mathbf{A} = 1$.

## G.2 Представления групп

Группа – это *абстрактное* множество элементов на котором задана бинарная операция, удовлетворяющая соответствующим аксиомам. Представлением группы является *реализация* этого множества при помощи тех или иных математических объектов. *Матричным представлением* (далее просто представлением) группы называется множество матриц фиксированной размерности, произведение которых воспроизводит групповую таблицу умножения. Более точно, если $g$ – элемент группы, $g^{-1}$ – ему обратный, $e$ – единичный элемент, а $\mathbf{T}(g)$ матрица, которая ставится в соответствие элементу $g$, то

$$\mathbf{T}(g_1)\mathbf{T}(g_2) = \mathbf{T}(g_1 g_2), \qquad \mathbf{T}(e) = 1, \qquad \mathbf{T}(g^{-1}) = \mathbf{T}^{-1}(g). \tag{G.1}$$

Представление $\mathbf{T}(g)$ называется *точным*, если множество матриц изоморфно множеству элементов группы (каждому элементу соответствует матрица и все эти матрицы различны). Гомоморфное отображение (нескольким элементам группы соответствует одна матрица) также считается представлением группы.

Матрицы $n$x$n$ являются линейными операторами, которые могут действовать (умножаться) на вектор (столбик из $n$ элементов), в результате чего получается новый столбик (по $j$ сумма от 1 до $n$):

$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}(g) \cdot \mathbf{x}, \qquad\qquad x'_i = T_{ij}\, x_j.$$

Подобные линейные операторы можно реализовать и более сложными конструкциями, чем матрицы конечной размерности. Однако мы ограничимся именно этим классом представлений.

Если задано некоторое представление размерности $n$ (матрицы $n$x$n$), то при помощи *несингулярной* матрицы $\mathbf{S}$ ($\det \mathbf{S} \neq 0$) той же размерности всегда можно построить другое представление:

$$\mathbf{T}'(g) = \mathbf{S}\,\mathbf{T}(g)\,\mathbf{S}^{-1}. \tag{G.2}$$

Несложно видеть, что подобное преобразование сохраняет групповое умножение:

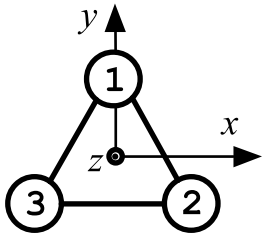
$$\mathbf{T}'(g_1)\mathbf{T}'(g_2) = \mathbf{S}\,\mathbf{T}(g_1)\mathbf{T}(g_2)\,\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\,\mathbf{T}(g_1 g_2)\,\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{T}'(g_1 g_2),$$

поэтому матрицы $\mathbf{T}'(g)$ также являются представлением группы $\mathbf{G}$. Представления связанные преобразованием (G.2) называются *эквивалентными*. Если же два представления не могут быть связаны (G.2), то они неэквивалентны. Подчеркнем, что в (G.2) для *всех* матриц данного представления $\mathbf{T}(g)$ используется *одна* и та же матрица $\mathbf{S}$.

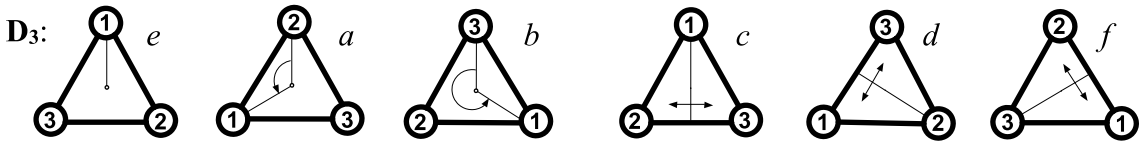
• Рассмотрим дискретную неабелеву группу $\mathbf{D_3}$:

$\mathbf{D_3}$ :

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | • | $d$ | $f$ | $c$ |
| $b$ | • | $a$ | $f$ | $c$ | $d$ |
| $c$ | $f$ | $d$ | • | $b$ | $a$ |
| $d$ | $c$ | $f$ | $a$ | • | $b$ |
| $f$ | $d$ | $c$ | $b$ | $a$ | • |




Её элементы можно представить как операции вращения и переворота треугольника, которые сохраняют его положение в пространстве:




Элемент $a$ соответствует повороту на $120^o$ вокруг оси $z$. Его можно записать при помощи матрицы $\mathbf{T}(a)$ вращения на угол $2\pi/3$. Аналогично запишем матрицу $\mathbf{T}(b)$, поворота на двойной угол $4\pi/3$:

$$\mathbf{T}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{T}(a) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{T}(b) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Переворот на $180^o$ вокруг оси $y$ (элемент $c$) изменяет ориентацию осей $x$ и $z$. Оставшиеся две матрицы можно получить при помощи перемножения уже записанных матриц, так как $d = a \cdot c$ и $f = c \cdot a$:

$$\mathbf{T}(c) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{T}(d) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{T}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Эти 6 матриц имеют таблицу умножения совпадающую с групповой таблицей $\mathbf{D_3}$. Если мы перейдём от матриц 3x3 к матрицам 2x2, отбросив последнюю строчку и колонку, то получим множество из 6 *различных* матриц, которые также является представлением группы. Эта же группа допускает неточное представление при помощи следующего гомоморфного отображения:

$$\mathbf{T}(e) = \mathbf{T}(a) = \mathbf{T}(b) = 1, \qquad \mathbf{T}(c) = \mathbf{T}(d) = \mathbf{T}(f) = -1.$$

Матрицами в этом случае выступают просто числа. Несмотря на "потерю" информации, такое представление удовлетворяет определению (G.1). Например: $\mathbf{T}(a)\mathbf{T}(c) = 1 \cdot (-1) = -1 = \mathbf{T}(a \cdot c) = \mathbf{T}(f)$. Понятно, что обычная единица 1 является неточным представлением любой группы.

• В примере с группой $\mathbf{D}_3$ мы построили 4 представления: матрицы 3x3, матрицы 2x2 и одномерные представления $\{1, -1\}$ и $\{1\}$. Посмотрим ещё раз на матрицы 3x3. Они состоят из диагональных блоков 2x2 и 1x1. Каждый из этих блоков снова является представлением группы. Говорят, что представление *вполне приводимо*, если все его матрицы можно представить в эквивалентном блочно-диагональном виде:

$$\mathbf{T}(g) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1(g) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2(g) & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_3(g) \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{T}_i(g)$ - матрицы, вообще говоря, различной размерности (но одинаковой для данного блока у всех матриц представления).

Иногда, чтобы обнаружить приводимость представления необходимо выполнить преобразование $\mathbf{T}'(g) = \mathbf{S}\,\mathbf{T}(g)\,\mathbf{S}^{-1}$. Если ни при какой матрице $\mathbf{S}$ блочно-диагональный вид для всех матриц представления не получается, то говорят, что представление *неприводимо*. Блоки в матрицах 3x3 приводимого представления группы $\mathbf{D_3}$ являются матрицами неприводимых представлений.

Представление будет также *приводимым*, когда нулю равен только нижний левый блок матриц:

$$\mathbf{T}(g) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1(g) & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2(g) \end{pmatrix}.$$

Если матрицы $\mathbf{T}_1(g)$ и/или $\mathbf{T}_2(g)$ приводимы, то для них можно получить аналогичную блочную конструкцию, и т.д. Разберемся, почему эта матрица является приводимой. Например, перемножим матрицы 3x3:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & A_1 \\ c_1 & d_1 & B_1 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & A_2 \\ c_2 & d_2 & B_2 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 & *\,*\,* \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 & *\,*\,* \\ 0 & 0 & C_1C_2 \end{pmatrix}.$$

В результирующей матрице диагональные блоки 2x2 и 1x1 состоят из тех же элементов, что и в соответствующих блоках исходных матриц. Поэтому эти блоки могут быть выбраны в качестве матриц представления меньшей размерности (звездочками отмечены два элемента содержащие смесь элементов из различных блоков).

Для матриц конечной размерности, если представление приводимо (нулевая матрица в левом нижнем углу), то оно будет и вполне приводимым (блочно-диагональные матрицы). Дальше мы будем рассматривать только блочно-диагональные матрицы, опуская слово “вполне”.

Выяснение всех неприводимых представлений данной группы важно, так как с их помощью можно сконструировать любое приводимое представление. Разложение представления на неприводимые представления записывается следующим образом:

$$\mathbf{T}(g) = \mathbf{T}_1(g) \oplus \mathbf{T}_2(g) \oplus \mathbf{T}_3(g) \oplus ...,$$

где $\mathbf{T}_i(g)$ – матрицы меньшей размерности, чем $\mathbf{T}(g)$.

Векторы $\mathbf{x}$ на которые действуют матрицы являются элементами векторного пространства $\mathbf{L}$. Для них определено коммутативное и ассоциативное сложение

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}, \qquad (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

и умножение вектора на число:

$$(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}, \qquad \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}, \qquad (\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x}).$$

Кроме этого существует выделенный нулевой вектор $\mathbf{0}$, такой, что для любого вектора $\mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{x}$ и умножение вектора на 1 его не меняет $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Вектор $n$-мерного векторного пространства может быть записан в виде столбика из $n$ чисел $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ ...\ x_n)^T$. В векторном пространстве можно ввести $n$ базисных векторов $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ по которым раскладываем любой вектор ($c_k$ – числа):

$$\mathbf{x} = c_1\,\mathbf{e}_1 + c_2\,\mathbf{e}_2 + ... + c_n\,\mathbf{e}_n.$$

Для $n = 3$ можно выбрать $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)^T,\ \mathbf{e}_2 = (0,1,0)^T,\ \mathbf{e}_3 = (0,0,1)^T$ и тогда $c_i = x_i$.

Матрицы являются линейными операторами (которые каждому вектору ставят в соответствие другой вектор $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$). Линейность означает, что:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{T}\mathbf{y}, \qquad \mathbf{T}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{T}\mathbf{x}.$$

Векторное пространство на которое действуют матрицы приводимого представления разбиваются на классы $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_3$, ... число которых равно числу блоков на диагонали матриц. Внутри каждого класса происходят независимые преобразования подмножества компонент этих векторов на которые "действует" данный блок матрицы. Так, в примере с $\mathbf{D}_3$ представление 3x3 следующим образом действует на векторы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 \\ b_1\beta_1 \end{pmatrix}.$$

В случае приводимого представления векторное пространство и базис расщепляются на векторные подпространства меньшей размерности.

## G.3 Линейные преобразования

• При описании симметрий пространства и времени важную роль играют бесконечные непрерывные группы, элементы которых "нумеруются" одним или несколькими непрерывными параметрами. Такие группы называются *параметрическими* или *группами Ли*. Важным подмножеством этих групп являются линейные преобразования.

Рассмотрим вектор $n$ величин $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ ("координаты"), и набор $s$ параметров $\mathbf{a} = (a^1, ..., a^s)$, определяющих линейное *преобразование*, которое мы запишем в матричном виде (по $\beta$ – сумма от 1 до $n$):

$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{x} \qquad \text{или} \qquad x'_\alpha = T_{\alpha\beta}(\mathbf{a})\, x_\beta.$$

Последовательность матричных преобразований снова является матричным преобразованием. Например, если от координат $\mathbf{x}$ мы переходим к $\mathbf{x}'$, а затем к $\mathbf{x}''$, это можно записать в виде одной матрицы:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}_1\, \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}'' = \mathbf{T}_2\, \mathbf{x}', \qquad => \qquad \mathbf{x}'' = \mathbf{T}_3\, \mathbf{x} = (\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1)\, \mathbf{x}.$$

В композиции преобразований $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$ правая матрица – это первое преобразование, а левая – второе (порядок матриц обратный по сравнению с порядком умножением элементов абстрактных групп).

Матричное умножение обладает ассоциативностью. Групповое преобразование замкнуто. Это означает, что если $\mathbf{T}(\mathbf{a})$ и $\mathbf{T}(\mathbf{b})$ два последовательных преобразования с параметрами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то их матричное умножение $\mathbf{T}(\mathbf{c}) = \mathbf{T}(\mathbf{b})\mathbf{T}(\mathbf{a})$ также будет преобразованием с параметром $\mathbf{c}$. Единице группы соответствует единичная матрица $\mathbf{1}$ с единицами на диагонали и нулями для других элементов. Кроме этого мы требуем, чтобы матрицы были несингулярными ($\det \mathbf{T} \neq 0$) и каждая из них имела обратную. Подходящим выбором способа параметризации всегда можно добиться чтобы: $\mathbf{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$ (единичное преобразование).

Если коэффициенты матриц $n$x$n$ являются комплексными числами, то такая группа обозначается следующим образом: $\mathbf{GL}(n, C)$. Подгруппой этой группы будет множество матриц с действительными коэффициентами: $\mathbf{GL}(n, R)$, где $\mathbf{G}$ – group, $\mathbf{L}$ – linear, $C$ – complex, $R$ – real.

*Унитарная* группа $\mathbf{U}(n)$ – это множество матриц $n$x$n$, для которых: $\mathbf{U}^+\mathbf{U} = \mathbf{1}$. *Специальная унитарная* группа $\mathbf{SU}(n)$ – подгруппа всех унитарных матриц, имеющих единичный определитель: $\det \mathbf{U} = 1$.

*Ортогональная группа* $\mathbf{O}(n)$ – это множество действительных ортогональных матриц $n$x$n$: $\mathbf{O}^T\mathbf{O} = \mathbf{1}$. Она является частным случаем (подгруппой) унитарной группы. *Специальная ортогональная* группа $\mathbf{SO}(n)$ – подгруппа всех ортогональных матриц, с единичным определителем.

• Так как последовательные матричные преобразования $\mathbf{T}(\mathbf{a})$, $\mathbf{T}(\mathbf{b})$ снова приводят к преобразованию, то существует некоторая функция, при помощи которой можно получить значения итоговых параметров:

$$\mathbf{T}(\mathbf{c}) = \mathbf{T}(\mathbf{b})\,\mathbf{T}(\mathbf{a}), \qquad \mathbf{c} = \phi(\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

Такая *функция композиции* $\mathbf{c} = \phi(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ (сначала на $\mathbf{a}$, затем на $\mathbf{b}$) удовлетворяет некоторым функциональным уравнениям. Так, из *ассоциативности* $(\mathbf{T_c} \cdot \mathbf{T_b}) \cdot \mathbf{T_a} = \mathbf{T_c} \cdot (\mathbf{T_b} \cdot \mathbf{T_a})$ следует:

$$\phi(\phi(\mathbf{c}, \mathbf{b}),\ \mathbf{a}) = \phi(\mathbf{c}, \phi(\mathbf{b}, \mathbf{a})). \tag{G.3}$$

Единичное (при $\mathbf{a} = \mathbf{0}$) преобразование даёт:

$$\phi(\mathbf{a}, \mathbf{0}) = \phi(\mathbf{0}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}. \tag{G.4}$$

Важную роль играет поведение функции $\phi(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ в окрестности единичного преобразования (нулевого параметра $\mathbf{a}$). Разложим $\phi(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ в ряд Тейлора (по повторяющимся индексам суммирование от 1 до $s$):

$$c^k = \phi^k(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = b^k + a^k + \phi^k_{ij}\, b^i\, a^j + F^k_{ij}\, b^i\, b^j + G^k_{ij}\, a^i\, a^j + ...,$$

где верхний индекс является *не степенью*, а *номером параметра*. Для первых двух слагаемых разложения сразу учтено условие (G.4). Сохраняя порядок малости, подставим это разложение в уравнение ассоциативности (G.3). Чтобы не погрязнуть в индексах опустим их, представив всё в "матричной" форме, и, сохраняя второй порядок малости, получим:

$$\phi(c + b + c\,\Phi b + cFc + bGb,\ a) = \phi(c,\ b + a + b\Phi a + bFb + aGa),$$

или ещё раз раскладывая функцию:

$$\begin{aligned}&(c + b + c\,\Phi b + cFc + bGb) + a + (c + b)\,\Phi\, a + (c + b)\,F\,(c + b) + a\,G\,a\\ &= c + (b + a + b\Phi a + bFb + aGa) + c\Phi(b + a) + cFc + (b + a)\,G\,(b + a).\end{aligned}$$

Члены линейные по параметрам, и пропорциональные $\Phi = \phi^k_{ij}$ успешно сокращаются, чего нельзя сказать о членах с $F$ и $G$. Поэтому условие ассоциативности (G.3) при любых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выполняется только когда $F^k_{ij} = 0$, $G^k_{ij} = 0$, и, следовательно, в окрестности нуля:

$$\phi^k(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \approx b^k + a^k + \phi^k_{ij}\, b^i\, a^j. \tag{G.5}$$

Антисимметричные по нижним индексам коэффициенты:

$$c^k_{ij} = \phi^k_{ij} - \phi^k_{ji} \tag{G.6}$$

называют *структурными константами*. Они играют фундаментальную роль в теории групп Ли.

• Разложим матрицу $\mathbf{T}(\mathbf{a})$ в окрестности единичного преобразования:

$$\mathbf{T}_{(\mathbf{a})} = \mathbf{1} + a^i\,\mathbf{X}_i + a^i\,a^j\,\mathbf{Y}_{ij} + ...,$$

где по повторяющимся индексам проводится суммирование. Обратим внимание, что нижние индексы у матриц $\mathbf{X}_i$, $\mathbf{Y}_{ij}$ – это их *номера*, а не элементы матриц! Для первого порядка малости по $\mathbf{a}$ нам необходимо $s$ матриц $\mathbf{X}_i$, где $s$ – число параметров. Для следующего члена разложения требуется уже $s^2$ матриц $\mathbf{Y}_{ij}$, однако благодаря симметричному тензору $a^i a^j$, на самом деле этих матриц $s(s+1)/2$, так как $\mathbf{Y}_{ij} = \mathbf{Y}_{ji}$. Для последовательности двух преобразований имеем:

$$\mathbf{T}_{(\mathbf{b})}\mathbf{T}_{(\mathbf{a})} = (\mathbf{1} + b^i\,\mathbf{X}_i + b^i\,b^j\,\mathbf{Y}_{ij} + ...)(\mathbf{1} + a^p\,\mathbf{X}_p + a^p\,a^q\,\mathbf{Y}_{pq} + ...).$$

Перемножим скобки с сохранением порядка малости по $a^i$ и $b^i$:

$$\mathbf{T}_{(\mathbf{b})}\mathbf{T}_{(\mathbf{a})} = \mathbf{1} + (b^i + a^i)\mathbf{X}_i + b^i a^j\,\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j + (b^i\,b^j + a^i\,a^j)\,\mathbf{Y}_{ij} + ...$$

С другой стороны, результат умножения $\mathbf{T}_{(\mathbf{b})}\mathbf{T}_{(\mathbf{a})}$ равен $\mathbf{T}(\phi(\mathbf{b},\mathbf{a}))$, поэтому, подставляя разложение (G.5), имеем:

$$\mathbf{T}_{(\mathbf{b})}\mathbf{T}_{(\mathbf{a})} = \mathbf{1} + (b^k + a^k + \phi^k_{ij}\,b^i a^j + ....)\,\mathbf{X}_k + (b^i + a^i + ...)\,(b^j + a^j + ...)\,\mathbf{Y}_{ij} + ...$$

Сравнивая $\mathbf{T}_{(\mathbf{b})}\mathbf{T}_{(\mathbf{a})}$, полученные двумя способами, находим ($\lessdot$ H$_{20}$):

$$\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j = \phi^k_{ij}\,\mathbf{X}_k + 2\mathbf{Y}_{ij}.$$

Запишем это же уравнение с переставленными индексами $i$, $j$, и вычтем его из исходного. Так как матрицы $\mathbf{Y}_{ij}$ по $i$ и $j$ симметричны, то:

$$[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = c^k_{ij}\,\mathbf{X}_k, \tag{G.7}$$

где $c^k_{ij} = \phi^k_{ij} - \phi^k_{ji}$ - структурные константы, и $[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{A}\,\mathbf{B} - \mathbf{B}\,\mathbf{A}$. Матрицы $\mathbf{X}_1$,...,$\mathbf{X}_s$ называют *генераторами группы*, а систему матричных уравнений (G.7) – *алгеброй Ли* (коммутатор ставит в соответствие двум матрицам – третью, являющуюся линейной комбинацией генераторов).

Для трёх матриц выполняется *тождество Якоби* ($\lessdot$ H$_{24}$):

$$[\mathbf{C},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] + [\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]] + [\mathbf{B},[\mathbf{C},\mathbf{A}]] = 0. \tag{G.8}$$

Подставляя в него $\mathbf{A} = \mathbf{X}_i$, $\mathbf{B} = \mathbf{X}_j$, $\mathbf{C} = \mathbf{X}_k$ и дважды применяя алгебру Ли (G.7), можно получить соотношение

$$c^p_{ij}c^q_{kp} + c^p_{jk}c^q_{ip} + c^p_{ki}c^q_{jp} = 0, \tag{G.9}$$

называемое *тождеством Якоби* для структурных констант. В нём происходит циклическая перестановка индексов $(i,j,k)$, а по $p$ – суммирование. Это тождество ограничивает возможные значения констант $c^k_{ij}$.

• При вычислении коммутаторов (G.7) можно использовать не матрицы, а дифференциальные операторы. Введем *инфинитезимальные операторы* связанные с матричными генераторами следующим образом:

$$\hat{X}_i = -(\mathbf{X}_i)_{\alpha\beta}\, x_\beta\, \partial_\alpha, \tag{G.10}$$

где $(\mathbf{X}_i)_{\alpha\beta}$ – матричные элементы $i$-того генератора, а $\partial_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$ – частная производная. Убедимся, что операторная алгебра имеет такие же структурные константы, что и матричная. Подставляя в коммутатор соотношение (G.10), действуя им на некоторую функцию координат $F = F(\mathbf{x})$ и вынося не зависящие от координат коэффициенты, имеем:

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j]\, F = (\mathbf{X}_i)_{\alpha\beta}\, (\mathbf{X}_j)_{\mu\nu}\, x_\beta\, \partial_\alpha(x_\nu\, \partial_\mu F) - (\mathbf{X}_j)_{\mu\nu}\, (\mathbf{X}_i)_{\alpha\beta}\, x_\nu\, \partial_\mu(x_\beta\, \partial_\alpha F).$$

Производные действуют на всё, что стоит справа, поэтому, вычисляя производную произведения имеем:

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j]\, F = (\mathbf{X}_j)_{\mu\alpha}\, (\mathbf{X}_i)_{\alpha\beta}\, x_\beta\, \partial_\mu F - (\mathbf{X}_i)_{\alpha\beta}\, (\mathbf{X}_j)_{\beta\nu}\, x_\nu\, \partial_\alpha F,$$

где переставлены матричные элементы и проведена свёртка с символами Кронекера. Переименовывая индексы, получаем:

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j]\, F = -[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j]_{\mu\beta}\, x_\beta\, \partial_\mu F = -c_{ij}^k (\mathbf{X}_k)_{\mu\beta}\, x_\beta\, \partial_\mu F = c_{ij}^k \hat{X}_k\, F.$$

Таким образом, коммутатор операторов инфинитезимальных преобразований, равен свертке операторов со структурными константами (функция $F$ произвольна и её можно опустить):

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = c_{ij}^k \hat{X}_k. \tag{G.11}$$

В общем случае можно рассматривать нелинейные преобразования

$$x_\alpha \mapsto x'_\alpha = f_\alpha(a^1, ...., a^s,\ x_1, ..., x_n), \qquad \text{или} \qquad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{x})$$

с законом композиции

$$\mathbf{f}\big(\mathbf{b},\ \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{x})\big) = \mathbf{f}\big(\phi(\mathbf{b}, \mathbf{a}),\ \mathbf{x}\big), \qquad \mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}. \tag{G.12}$$

Их свойства также определяются поведением функции $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ в окрестности единичного преобразования:

$$x'_\alpha = x_\alpha + u_{\alpha i}(\mathbf{x})\, a^i + ..., \qquad u_{\alpha i}(\mathbf{x}) = \left.\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{0}, \mathbf{x})}{\partial a^i}\right|_{\mathbf{a}=\mathbf{0}}.$$

При этом можно показать [1], что следующие генераторы

$$\hat{X}_i = -u_{\alpha i}(\mathbf{x})\, \partial_\alpha \tag{G.13}$$

удовлетворяют алгебре (G.11) с некоторыми структурными константами $c_{ij}^k$. Несложно видеть, что для линейных матричных преобразований *касательные векторы* равны $u_{\alpha i}(\mathbf{x}) = (\mathbf{X}_i)_{\alpha\beta}\, x_\beta$.

## G.4 Группы $\mathbf{O}(3)$ и $\mathbf{SO}(3)$

• Рассмотрим 3-мерное пространство с координатами $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$. Группой вращения $\mathbf{O}(3)$ называется линейное преобразование $\mathbf{x}' = \mathbf{R}\,\mathbf{x}$, которое не изменяет длины радиус-вектора: $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x} = x^2 + y^2 + z^2$ (значок $^T$ – транспонирование):

$$\mathbf{x}'^2 = \mathbf{x}'^T\mathbf{x}' = (\mathbf{R}\,\mathbf{x})^T\,\mathbf{R}\,\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\,\mathbf{R}^T\mathbf{R}\,\mathbf{x} = \mathbf{x}^2,$$

где учтено, что при транспонировании произведения матриц их порядок меняется $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$. Чтобы квадрат вектора не изменился $\mathbf{x}'^2 = \mathbf{x}^2$, должно выполняться *условие ортогональности*:

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{1}.$$

Другими словами, обратная матрица к матрице поворота, является просто её транспонированием. Напомним, что буква "**O**" в названии группы означает ортогональная, а тройка – размерность пространства.

Так как определитель при транспонировании матрицы не меняется, а определитель произведения матриц равен произведению их определителей, из условия ортогональности следует, что

$$(\det\mathbf{R})^2 = 1.$$

Матрица вращения вокруг оси $z$ на угол $\phi$ имеет единичный определитель:

$$\det\mathbf{R}_z = \det\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1.$$

Все матрицы вращения, имеющие единичный определитель образуют *специальную ортогональную группу* $\mathbf{SO}(3)$. Её также называют собственными преобразованиями или просто вращениями.

Кроме вращений, длину радиус-вектора оставляют неизменными преобразования инверсии (или отражения осей): $\{x, y, z\} \mapsto \{-x, -y, -z\}$. Матрица этого преобразования имеет вид:

$$\mathbf{I}_{xyz} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Это тоже ортогональная матрица, но имеющая определитель равный минус единице: $\det\mathbf{I}_{xyz} = -1$, поэтому она принадлежит к группе $\mathbf{O}(3)$, но не принадлежит к группе $\mathbf{SO}(3)$.

Матрица $\mathbf{I}_{xyz}$ вместе с единичной матрицей $\mathbf{1}$ образует *дискретную абелеву* группу из двух элементов $\mathbf{I} = \{\mathbf{1}, \mathbf{I}_{xyz}\}$. При этом элемент группы $\mathbf{I}_{xyz}$ является обратным самому себе: $\mathbf{I}_{xyz}^2 = \mathbf{1}$. Так как эта группа является "частным случаем" группы $\mathbf{O}(3)$, то она является её *подгруппой*, т.е. $\mathbf{I} \subset \mathbf{O}(3)$.

Можно рассмотреть дискретную абелеву группу ранга 4, в которой кроме единичной матрицы есть ещё три элемента:

$$\mathbf{I}_{xy} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{I}_{yz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{I}_{xz} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Они осуществляют инверсии пар осей и имеют единичный детерминант. Эта группа является подгруппой не только $\mathbf{O}(3)$, но $\mathbf{SO}(3)$, так как инверсия двух осей в 3-мерном пространстве всегда может быть реализована поворотом системы координат.

Подгруппой группы $\mathbf{O}(3)$ является также более широкая группа инверсий, когда отражается одна, две или три оси. Инверсии осей $x$, $y$ и $z$ имеют следующее матричное представление:

$$\mathbf{I}_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{I}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{I}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Стоит проверить что для $\mathbf{P} = \{\mathbf{1},\ \mathbf{I}_x,\ \mathbf{I}_y,\ \mathbf{I}_z,\ \mathbf{I}_{xy},\ \mathbf{I}_{xz},\ \mathbf{I}_{yz},\ \mathbf{I}_{xyz}\}$ выполняется аксиома замкнутости, а каждый элемент является обратным самому себе. Эта абелева группа включает в качестве подгруппы группу отражения всех трёх осей, что записывается в виде такой цепочки: $\mathbf{I} \subset \mathbf{P} \subset \mathbf{O}(3)$.

Инвертирование сразу трёх осей (или одной) переводит правую систему координат в левую и наоборот. После такого инвертирования ни каким поворотом нельзя вернуться в исходное состояние. Таким образом, все преобразования группы $\mathbf{O}(3)$ можно разбить на два класса – обычные вращения правой и левой системы координат. Это записывается в виде *прямого произведения* групп вращений и инверсий всех осей:

$$\mathbf{O}(3) = \mathbf{SO}(3) \times \mathbf{I}. \tag{G.14}$$

В данном случае прямое произведение означает, что рассматриваются последовательные преобразования $\mathbf{RI}_{xyz}$ или $\mathbf{R1}$, т.е. пары матриц из групп $\mathbf{SO}(3) = \{\mathbf{R}\}$ и $\mathbf{I} = \{\mathbf{1},\ \mathbf{I}_{xyz}\}$ матрично перемножаются. Так как матрицы $\mathbf{I}$ пропорциональны единичной, то $(\mathbf{R}_2\mathbf{I}_2)(\mathbf{R}_1\mathbf{I}_1) = (\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1)(\mathbf{I}_2\mathbf{I}_1)$.

• Рассмотрим подробнее группу вращений $\mathbf{SO}(3)$. Введём матрицу $\mathbf{A}$ небольшого отклонения от единичного преобразования (поворот на малые углы): $\mathbf{R} = \mathbf{1} + \mathbf{A} + ....$ Пренебрегая вторым порядком малости, запишем условие ортогональности:

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} \approx (\mathbf{1} + \mathbf{A}^T)(\mathbf{1} + \mathbf{A}) \approx \mathbf{1} + \mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \mathbf{1} \qquad => \qquad \mathbf{A}^T = -\mathbf{A}.$$

Операция транспонирования переставляет местами индексы, следовательно матрица $\mathbf{A}$ является антисимметричной. Она имеет три независимых элемента:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{G.15}$$

Величины $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ можно рассматривать как малые параметры преобразования. Генераторы группы $\mathbf{R} = \mathbf{1} + \mathbf{A} + ... = \mathbf{1} + a^i\mathbf{X}_i + ...$ имеют вид:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{G.16}$$

Прямым перемножением матриц несложно проверить, что они удовлетворяют следующей алгебре Ли:

$$[\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2] = -\mathbf{X}_3, \qquad [\mathbf{X}_3,\ \mathbf{X}_1] = -\mathbf{X}_2, \qquad [\mathbf{X}_2,\ \mathbf{X}_3] = -\mathbf{X}_1. \tag{G.17}$$

Поэтому структурные константы равны $c^3_{12} = c^2_{31} = c^1_{23} = -1$. Второй и третий коммутаторы получаются из первого, в результате *циклической перестановки* индексов: $\{1,2,3\} \mapsto \{3,1,2\} \mapsto \{2,3,1\}$. Стоит вычислить ($\lessdot \mathrm{H}_{25}$) эти коммутаторы операторным методом (стр. 291).

Коммутаторы (G.17) можно записать используя символ Леви-Чивиты:

$$[\mathbf{X}_i,\ \mathbf{X}_j] = -\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{X}_k$$

($\varepsilon_{123} = 1$, по $k$ сумма). Матрица инверсии трёх осей пропорциональна единичной, поэтому коммутирует с каждым генератором: $[\mathbf{X}_i,\ \mathbf{I}_{xyz}] = 0$. Кроме этого диагональными являются квадраты матриц генераторов:

$$\mathbf{X}_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_2^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_3^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

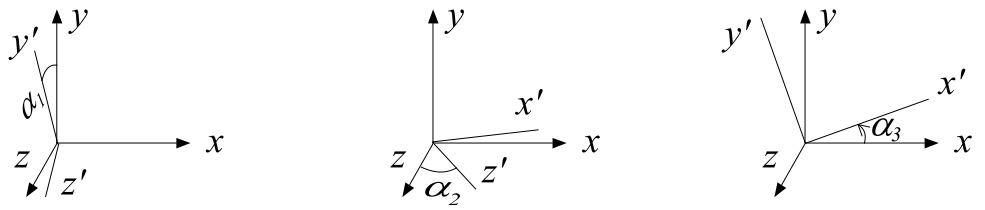
откуда следует, что $\mathbf{X}_1^3 = -\mathbf{X}_1$, и т.д. Сумма квадратов генераторов $\mathbf{C} = \mathbf{X}_1^2 + \mathbf{X}_2^2 + \mathbf{X}_3^3 = -2 \cdot \mathbf{1}$ пропорциональна единичной матрице, а следовательно коммутирует со всеми генераторами: $[\mathbf{C}, \mathbf{X}_i] = 0$. Подобная величина в теории групп называется *оператором Казимира*.

Генераторы $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ и $\mathbf{X}_3$ связаны с бесконечно малыми поворотами вокруг осей $x, y$ и $z$. Если обозначить $s_1 = \sin a_1$, $c_1 = \cos a_1$ и т.д., то повороты вокруг трёх осей будут иметь вид:

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & s_1 \\ 0 & -s_1 & c_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определители этих матриц равны 1, поэтому мы имеем дело с группой $\mathbf{SO}(3)$. Разложение их по параметрам $a_i$ приводит к генераторам $\mathbf{X}_i$.

Обратим внимание, что поворот в матрицах $\mathbf{R}_x$, $\mathbf{R}_y$, $\mathbf{R}_z$ происходит по правому винту (штопору) "вкручивающемуся" в направлении оси. Поэтому при повороте вокруг $y$ роль "первой" оси (от которой отсчитывается угол) играет $z$, а "второй' – $x$:




В результате матрицы $\mathbf{R}_x$ и $\mathbf{R}_z$ "блочно" одинаковы, а в матрице $\mathbf{R}_y$ по отношению к $\mathbf{R}_x$ переставлены местами строчки и аналогично колонки.

Группа $\mathbf{SO}(3)$ является неабелевой и последовательность поворотов играет роль. Например, если сначала повернуть систему вокруг оси $y$, а затем вокруг оси $x$, получим одну матрицу, а при выполнении этих поворотов в обратном порядке – другую:

$$\mathbf{R}_x\mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ s_1s_2 & c_1 & s_1c_2 \\ c_1s_2 & -s_1 & c_1c_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}_y\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} c_2 & s_1s_2 & -c_1s_2 \\ 0 & c_1 & s_1 \\ s_2 & -s_1c_2 & c_1c_2 \end{pmatrix}.$$

Неабелевость группы вращений связана с ненулевыми структурными константами. Понятно, что если коммутатор бесконечно малых поворотов (генераторов) отличен от нуля, то и матрицы произвольного поворота не будут между собой коммутировать. В группе $\mathbf{SO}(3)$ можно выделить и абелевы подгруппы. Например, вращение вокруг одной оси на различные углы является абелевой группой $\mathbf{SO}(2) \subset \mathbf{SO}(3)$.

Описание композиции вращений существенно упрощается при использовании кватернионной техники. Поэтому к группе $\mathbf{SO}(3)$ мы вернемся при рассмотрении соответствующей темы в главе **??**. В частности, получим явное выражение для функции композиции $\phi(\mathbf{b}, \mathbf{a})$.

## G.5 Группа Лоренца

• Группа Лоренца объединяет в себе преобразования Лоренца и повороты в обычном пространстве. Рассмотрим сначала 2-мерное пространство $x, y$ и время $t$, которые будут преобразуемыми величинами $\mathrm{x} = \{t, x, y\}$. Пространственные повороты не затрагивают время, поэтому соответствующее преобразование выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Разложение по углу $\phi$ даёт генератор вращений плоскости, который мы обозначим как $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразования Лоренца вдоль оси $x$ со скоростью $v_x$ и вдоль оси $y$ со скоростью $v_y$ запишем в первом порядке малости по скорости $\mathbf{v}$ ($\gamma \approx 1$), восстановив фундаментальную константу $c$, обозначив $\alpha = 1/c^2$ :

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha v_x & 0 \\ -v_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha v_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -v_y & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Соответствующие этим преобразованиям генераторы имеют вид:

$$\mathbf{L}_x = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{L}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Несложно проверить, что три матрицы $\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y$ и $\mathbf{R}$ удовлетворяют следующей алгебре Ли:

$$[\mathbf{L}_x, \mathbf{R}] = \mathbf{L}_y, \qquad [\mathbf{L}_y, \mathbf{R}] = -\mathbf{L}_x, \qquad [\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y] = \alpha\mathbf{R}.$$

В классической механике фундаментальная скорость "$c$" равна бесконечности, а $\alpha = 0$. Поэтому эта же алгебра для *группы Галилея* (повороты + смена системы отсчёта) имеет вид:

$$[\mathbf{L}_x, \mathbf{R}] = \mathbf{L}_y, \qquad [\mathbf{L}_y, \mathbf{R}] = -\mathbf{L}_x, \qquad [\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y] = 0.$$

Отличие состоит в последнем коммутаторе, который равен нулю.

Мы видели, что линейная группа преобразований определяется набором структурных констант, которые задают алгебру для генераторов:

$$[\mathbf{X}_i,\ \mathbf{X}_j] = c_{ij}^k\, \mathbf{X}_k.$$

Эти константы должны быть антисимметричными по нижним индексам $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$ и удовлетворять тождеству Якоби (стр. 290):

$$c_{ij}^p c_{kp}^q + c_{jk}^p c_{ip}^q + c_{ki}^p c_{jp}^q = 0.$$

В случае 3-параметрической группы $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3\} = \{\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y, \mathbf{R}\}$, рассмотренной выше, возможно 9 различных структурных констант, а тождество Якоби вырождается в одно нетривиальное ограничение, следующее из соотношения $[\mathbf{X}_1, [\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3]] + [\mathbf{X}_2, [\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_1]] + [\mathbf{X}_3, [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]] = 0$. Кроме этого, выбор способа параметризации произволен. Поэтому в рамках одной и той же группы, можно перейти к новым генераторам, являющимися линейной комбинацией старых. В рамках классификации, проделанной Луиджи Бианки показывается, что существует 4 независимых параметра, определяющих структурные константы и 9 нетривиальных групп Ли размерности 3.

Эти 4 структурные константы можно рассматривать как четвёрку потенциальных фундаментальных физических констант, определяющих ту или иную теорию преобразований между двумя системами отсчёта. При росте числа параметров группы, быстро растёт и число независимых структурных констант. Дополнительные ограничения на них накладывает *принцип соответствия*, так как в пределе нулевых фундаментальных констант должны получаться соотношения группы Галилея. Поэтому часть из структурных констант уже фиксированы. Далее можно использовать свойства изотропности пространства, которое на языке генераторов выражаются в равноправии (симметрии) между $\mathbf{L}_x$ и $\mathbf{L}_y$, и т.д. В результате число фундаментальных констант будет ещё сильнее уменьшаться. Однако на любом этапе можно остановиться, получив некоторое обобщение классической механики.

Таким образом на языке теории групп проявляется *принцип параметрической неполноты* [1], в соответствии с которым, уменьшение числа аксиом теории даёт более общую теорию. “Потеря информации” приводит к произволу, который иногда является параметрическим (в теории возникают произвольные константы, такие как $c$ или $\hbar$). Построение новых физических теорий может идти методом расширения исходных групп преобразований классической механики, при помощи введения новых ненулевых структурных констант. Они являются фундаментальными константами, определяющими свойства соответствующих механик.

• Рассмотрим 4-мерное пространство-время. Преобразуемыми величинами будут компоненты 4-вектора $\mathrm{x} = \{t, x, y, z\}$. В матрицы генераторов группы пространственных вращений (G.16), стр. 294 необходимо добавить нулевые столбик и строчку, так как при поворотах время не изменяется:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Генераторы лоренцевских бустов вдоль каждой оси получаются также как и в 2-мерном случае, рассмотренном выше. Положив фундаментальную скорость единице, имеем:

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{L}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прямым умножением матриц можно проверить, что эти генераторы удовлетворяют следующей алгебре Ли (по $k$ сумма):

$$[\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j] = -\varepsilon_{ijk}\mathbf{R}_k, \qquad [\mathbf{L}_i, \mathbf{R}_j] = -\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{L}_k, \qquad [\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j] = \varepsilon_{ijk}\mathbf{R}_k. \quad \text{(G.18)}$$

Особенно важны последние соотношения. Во-первых, именно они отличают группу Лоренца от группы Галилея, а во-вторых, в них выражен факт некоммутативности преобразований Лоренца. Два последовательных лоренцевских буста, выполненные с непараллельными скоростями не являются снова бустом. Итоговое преобразование является композицией буста и поворота (подробнее см.стр. **??**).

Заметим также, что все коммутаторы выглядят похожим образом и записываются при помощи символов Леви-Чивиты. Это отражает тот фундаментальный факт, что группа Лоренца является группой поворотов в 4-мерном псевдоевклидовом пространстве. В таком пространстве существует 6 плоскостей: $(t, x)$, $(t, y)$, ... $(y, z)$ вращение которых определяется 6-ю параметрами. Соответственно это 6-параметрическая неабелева группа. Инвариантом этой группы является световой конус:

$$\mathrm{x}^2 = t^2 - \mathbf{r}^2 = inv, \qquad \text{(G.19)}$$

имеющий смысл расстояния от начала координат в 4-мерном псевдоевклидовом пространстве. По аналогии с группой вращения, группу Лоренца обозначают следующим образом: $\mathbf{O}(1, 3)$, где первый аргумент – размерность времени, а второй – пространства.

Формально, *группа Лоренца* $\mathbf{O}(1,3)$ является множеством ортогональных матриц (стр. 20) 4x4 в псевдоевклидовом пространстве с метрическим тензором $\mathbf{g} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$, $\mathbf{g}^2 = \mathbf{1}$, $\mathbf{g}^T = \mathbf{g}$:

$$\mathrm{x}^2 = \mathrm{x}^T \mathbf{g}\, \mathrm{x} = \mathrm{x}'^T \mathbf{g}\, \mathrm{x}', \qquad \mathrm{x}' = \mathbf{\Lambda} \mathrm{x} \qquad => \qquad \mathbf{g}\mathbf{\Lambda}^T \mathbf{g}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{1}.$$

Так как $\det \mathbf{g} = -1$, то $(\det \mathbf{\Lambda})^2 = 1$ и определитель матрицы преобразования $\mathbf{\Lambda}$ может быть равен 1 или -1. Последний случай, аналогично обычным вращениям, реализуется в результате операций отражения нечетного числа осей в 4-мерном пространстве-времени. Например, изменение направления хода времени $t \mapsto -t$ или всех трёх пространственных осей $(x,y,z) \mapsto (-x,-y,-z)$, осуществляется следующими матрицами:

$$\mathbf{I}_t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{I}_\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Четверка матриц $\{\mathbf{1}, \mathbf{I}_t, \mathbf{I}_\mathbf{r}, \mathbf{I}_{t\mathbf{r}}\}$, где $\mathbf{I}_{t\mathbf{r}} = \mathbf{I}_t \mathbf{I}_\mathbf{r} = -\mathbf{1}$ (инверсия всех осей) образует дискретную группу. Эта группа, дополненная непрерывными преобразованиями, определяемыми генераторами $\mathbf{R}_i$, $\mathbf{L}_i$, описывает все возможные симметрии не меняющие инварианта (G.19).

Наличие дискретных симметрий приводит к тому, что все возможные преобразования разбиваются на подмножества, несводимые друг к другу при помощи непрерывных преобразований. Пусть исходной является правая система координат с "нормальным" направлением течения времени. При помощи, например, $\mathbf{I}_\mathbf{r}$ её можно превратить в левую систему координат, после чего, ни преобразованием Лоренца, ни поворотом нельзя вернутся к исходному состоянию. Аналогично с $\mathbf{I}_t$ и $\mathbf{I}_{t\mathbf{r}}$. Эти 4 подмножества, не соединяемые непрерывным преобразованием, классифицируют по знакам определителя матрицы $\mathbf{\Lambda}$ и её нулевого элемента: $\Lambda^0{}_0$ (который по модулю больше единицы, что следует из условия ортогональности для нулевых индексов $\lessdot$ H$_{26}$):

| | | | |
|---|---|---|---|
| *I.* | $\det \mathbf{\Lambda} = +1$ | $\Lambda^0{}_0 \geqslant +1$ | $\mathbf{1}$ |
| *II.* | $\det \mathbf{\Lambda} = -1$ | $\Lambda^0{}_0 \geqslant +1$ | $\mathbf{I}_\mathbf{r}$ |
| *III.* | $\det \mathbf{\Lambda} = -1$ | $\Lambda^0{}_0 \leqslant -1$ | $\mathbf{I}_t$ |
| *IV.* | $\det \mathbf{\Lambda} = +1$ | $\Lambda^0{}_0 \leqslant -1.$ | $\mathbf{I}_{t\mathbf{r}}$ |

Первый класс соответствует "обычным" преобразованиям Лоренца и вращениям правой системы координат. Он называется *собственной ортохронной группой Лоренца*. В последней колонке записаны матрицы дискретных преобразований, принадлежащие каждому классу (проверьте).

## G.6 Группа Пуанкаре

• *Группа Пуанкаре* $\mathbf{P}(1,3)$ объединяет группы Лоренца и трансляций:

$$x'^{\alpha} = a^{\alpha} + \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\, x^{\beta}. \tag{G.20}$$

Трансляции означают сдвиги начала отчёта времени и начала системы координат: $t' = t + a^0$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$. Группа Лоренца имеет 6 параметров (вектор скорости и углы вращений). Трансляция – это ещё 4 параметра. Поэтому группа Пуанкаре – 10-параметрическая группа с инвариантом, равным расстоянию в 4-мерном пространстве между двумя событиями:

$$(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)^2 = (t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = inv.$$

Группа Лоренца – это подгруппа группы Пуанкаре. Её инвариантом является как $(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)^2$, так и $\mathrm{x}^2$. В тоже время для группы Пуанкаре $\mathrm{x}^2$ не является инвариантом, так как он трансляционно неинвариантен.

Запишем два преобразования Пуанкаре в матричном виде:

$$\mathrm{x}_1 = \mathrm{a}_1 + \mathbf{\Lambda}_1 \mathrm{x}, \qquad \mathrm{x}_2 = \mathrm{a}_2 + \mathbf{\Lambda}_2 \mathrm{x}_1.$$

Подставим первое преобразование во второе: $\mathrm{x}_2 = \mathrm{a}_2 + \mathbf{\Lambda}_2 \mathrm{a}_1 + \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_1 \mathrm{x}$. Поэтому символическая запись закона групповой композиции имеет вид:

$$(\mathrm{a}_2,\ \mathbf{\Lambda}_2) \cdot (\mathrm{a}_1,\ \mathbf{\Lambda}_1) = (\mathrm{a}_2 + \mathbf{\Lambda}_2 \mathrm{a}_1,\ \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{\Lambda}_1). \tag{G.21}$$

Единичным элементом группы является $(0,\ \mathbf{1})$, а обратным к $(\mathrm{a},\ \mathbf{\Lambda})$ будет элемент $(-\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathrm{a},\ \mathbf{\Lambda}^{-1})$ ($\lessdot \mathrm{H}_{27}$). Множество всех трансляций $(\mathrm{a},\ \mathbf{1})$ (без преобразований Лоренца) являются *инвариантной подгруппой* группы Пуанкаре ($\lessdot \mathrm{H}_{28}$).

Преобразование группы Пуанкаре можно записать в матричном виде, если расширить матрицы до размерности 5:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 & a^0 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 & a^1 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 & a^2 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

При перемножении таких матриц 5x5 (композиция преобразований) последняя строчка матрицы изменяться не будет, как не будет изменяться равный единице 5-й элемент в столбике преобразуемого вектора.

Перемножать матрицы, для получения алгебры генераторов достаточно утомительно. Проще оказывается операторный подход (стр. 291). Матрицы генераторов $\mathbf{R}_i$, $\mathbf{L}_i$ группы Лоренца (стр. 298) приводят к следующим операторам $\hat{X}_i = -(\mathbf{X}_i)^\alpha_{\ \beta} x^\beta \partial_\alpha$ с такой же алгеброй для коммутаторов:

$$\hat{L}_x = t\partial_x + x\partial_t, \qquad \hat{L}_y = t\partial_y + y\partial_t, \qquad \hat{L}_z = t\partial_z + z\partial_t,$$
$$\hat{R}_x = y\partial_z - z\partial_y, \qquad \hat{R}_y = z\partial_x - x\partial_z, \qquad \hat{R}_z = x\partial_y - y\partial_x.$$

Шесть операторов $\hat{R}_i$, $\hat{L}_j$ можно объединить при помощи антисимметричного операторного тензора:

$$\hat{J}_{\alpha\beta} = \imath \begin{pmatrix} 0 & \hat{L}_x & \hat{L}_y & \hat{L}_z \\ -\hat{L}_x & 0 & -\hat{R}_z & \hat{R}_y \\ -\hat{L}_y & \hat{R}_z & 0 & -\hat{R}_x \\ -\hat{L}_z & -\hat{R}_y & \hat{R}_x & 0 \end{pmatrix} = \imath(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha).$$

Во втором равенстве, являющимся ковариантным представлением оператора $\hat{J}_{\alpha\beta}$, учтено, что $x_\alpha = \{t, -x, -y, -z\}$. В тоже время $\partial_1 = \partial/\partial x^1$ является обычной производной по $x$. Для предания $\hat{J}_{\alpha\beta}$ эрмитовости, в его определении дополнительно был введен множитель $\imath$.

Для трансляции $x'^\alpha = x^\alpha + a^\alpha$, величина $u^\alpha_k = \delta^\alpha_k$ (G.13), стр. 291 приводит к оператору инфинитезимального преобразования, который мы также сделаем эрмитовым:

$$\hat{P}_\alpha = \imath\partial_\alpha. \tag{G.22}$$

В квантовой теории, умноженный на постоянную Планка $\hbar$, он становится оператором 4-импульса. Найдём его коммутатор с оператором 4-вращений, который соответствует оператору момента импульса:

$$\hat{J}_{\alpha\beta} = x_\alpha \hat{P}_\beta - x_\beta \hat{P}_\alpha. \tag{G.23}$$

Действуя коммутаторами на произвольную функцию, имеем ($\imath^2 = -1$):

$$[\hat{P}_\alpha, \hat{P}_\beta] = 0, \tag{G.24}$$
$$[\hat{P}_\alpha,\ \hat{J}_{\mu\nu}] = \imath\,(g_{\alpha\mu}\hat{P}_\nu - g_{\alpha\nu}\hat{P}_\mu), \tag{G.25}$$
$$[\hat{J}_{\alpha\beta},\ \hat{J}_{\mu\nu}] = \imath\,(g_{\alpha\mu}\hat{J}_{\nu\beta} - g_{\alpha\nu}\hat{J}_{\mu\beta} + g_{\beta\mu}\hat{J}_{\alpha\nu} - g_{\beta\nu}\hat{J}_{\alpha\mu}). \tag{G.26}$$

Эти соотношения называются *алгеброй Пуанкаре*.

Некоммутативность операторов трансляций $\hat{P}_\alpha$ и 4-поворотов $\hat{J}_{\mu\nu}$ связана с неперестановочностью этих операций. Пусть, например, тело в начале координат поворачивается вокруг вертикальной оси на некоторый угол, а затем сдвигается в горизонтальной плоскости. Результат этих операций в обратной последовательности будет другой, как для положения тела, так и для его ориентации.

## G.7 Квантование полей

• Теория групп приводит к ещё одному подходу к аксиоматике квантовой теории поля. Пусть в данной системе отсчёта квантовая система находится в состоянии $|\Phi\rangle$. Преобразование к другой инерциальной системе отсчёта определяется матрицей $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\omega)$, где $\omega \equiv \omega_{\mu\nu}$ – антисимметричный тензор параметров преобразования, связанный с компонентами скорости $\mathbf{v}$ системы отсчёта и углов вращения $\mathbf{n}\phi$ координатных осей (стр. 36). Кроме этого, сделаем сдвиг координат на постоянный вектор $a^{\nu}$, т.е. рассмотрим *группу Пуанкаре*:

$$x'^{\mu} = a^{\mu} + \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\omega)\, x^{\nu}. \tag{G.27}$$

Вектор состояния в новой системе отсчёта также изменяется, причём оператор преобразования этого состояния должен быть унитарным, чтобы не изменилась его норма $\langle\Phi|\Phi\rangle = \langle\Phi'|\Phi'\rangle$ и вероятности переходов:

$$|\Phi'\rangle = \hat{U}(\mathrm{a}, \Lambda)\,|\Phi\rangle, \qquad \hat{U}\hat{U}^{+} = \hat{1}. \tag{G.28}$$

В случае бесконечно малого преобразования $\Lambda_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta}$ оператор $\hat{U}$ можно разложить в ряд по a и $\omega$:

$$\hat{U}(\mathrm{a},\, 1+\omega) \approx \hat{1} + \imath\hat{P}_{\mu}\, a^{\mu} - \frac{\imath}{2}\,\hat{J}_{\mu\nu}\,\omega^{\mu\nu} + ...,$$

где операторы $\hat{P}_{\mu}$ и $\hat{J}_{\mu\nu}$ (*генераторы* группы, умноженные на $\imath$) эрмитовы в силу унитарности $\hat{U}$ и действительности параметров $a^{\mu}$, $\omega^{\mu\nu}$:

$$\hat{U}\hat{U}^{+} \approx \hat{1} + \imath(\hat{P}_{\mu} - \hat{P}^{+}_{\mu})\, a^{\mu} - \frac{\imath}{2}\,(\hat{J}_{\mu\nu} - \hat{J}^{+}_{\mu\nu})\,\omega^{\mu\nu} + ... = \hat{1},$$

откуда следует: $\hat{P}^{+}_{\mu} = \hat{P}_{\mu}$ , $\hat{J}^{+}_{\mu\nu} = \hat{J}_{\mu\nu}$.

В квантовой теории поля постулируется, что эти операторы являются операторами 4-импульса $\hat{P}_{\mu}$ (однородность 4-пространства) и момента поля $\hat{J}_{\mu\nu}$ (изотропность 4-пространства). При этом они зависят от полевых операторов так-же как и соответствующие классические выражения.

Аналогично представлениям Гейзенберга и Шрёдингера, при вычислении среднего $\langle\Phi|\hat{A}|\Phi\rangle$ в новой системе отсчёта, можно использовать преобразованные векторы $\langle\Phi'|\hat{A}|\Phi'\rangle$ или усреднять по исходным векторам $\langle\Phi|\hat{A}'|\Phi\rangle$, но изменённый оператор:

$$\hat{A}' = \hat{U}^{+}\hat{A}\,\hat{U}, \qquad |\Phi'\rangle = |\Phi\rangle. \tag{G.29}$$

Примем за основу это определение изменения операторов при различных преобразованиях.

• Рассмотрим сдвиг (трансляционные преобразования) $\mathrm{x}' = \mathrm{x} + \mathrm{a}$ для оператора поля. Значение поля в одной и той же точке 4-пространства в обоих координатах неизменно:

$$\hat{\Psi}'_k(\mathrm{x}') = \hat{\Psi}_k(\mathrm{x}) = \hat{\Psi}_k(\mathrm{x}' - \mathrm{a}) \approx \hat{\Psi}_k(\mathrm{x}') - \partial'_\mu \hat{\Psi}_k(\mathrm{x}')\, a^\mu + \ldots$$

Опуская штрих у координат, можно записать:

$$\hat{\Psi}'_k(\mathrm{x}) \approx \hat{\Psi}_k(\mathrm{x}) - \partial_\mu \hat{\Psi}_k(\mathrm{x})\, a^\mu = \hat{U}^+ \hat{\Psi}_k(\mathrm{x}) \hat{U} \approx (1 - \imath \hat{P}_\mu a^\mu)\, \hat{\Psi}_k(\mathrm{x})\, (1 + \imath \hat{P}_\nu a^\nu).$$

Перемножая скобки, в первом порядке малости по $a^\mu$, получаем:

$$\imath \partial_\mu \hat{\Psi}_k(\mathrm{x}) = [\hat{\Psi}_k(\mathrm{x}),\, \hat{P}_\mu]. \tag{G.30}$$

Для $\mu = 0$ – это операторное уравнение Гейзенберга. Используя коммутационные соотношения (2.3), (2.4), стр. 46, можно проверить справедливость (G.30) и для $\mu = 1, 2, 3$. Например, для скалярного поля:

$$\imath \nabla \hat{\varphi}(\mathrm{x}) = \int [\hat{\varphi}_{\mathbf{x}},\, \hat{\pi}_{\mathbf{y}} \nabla \hat{\varphi}_{\mathbf{y}}]\, d^3\mathbf{y} = \imath \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla \hat{\varphi}_{\mathbf{y}}\, d^3\mathbf{y}.$$

(плюс в $P_i$, так как $P_i = -P^i$). При помощи уравнения (G.30) несложно проверить соотношение, обобщающее представление Гейзенберга:

$$\hat{\Psi}_k(\mathrm{x}) = e^{\imath \hat{\mathrm{P}} \cdot \mathrm{x}}\, \hat{\Psi}_k(0)\, e^{-\imath \hat{\mathrm{P}} \cdot \mathrm{x}}. \tag{G.31}$$

• Подобным образом можно рассмотреть фазовые преобразования (группа $\mathbf{U}(1)$) комплексного скалярного поля:

$$\hat{\Psi}(\mathrm{x}) \mapsto \hat{\Psi}'(\mathrm{x}) = e^{-\imath\alpha}\, \hat{\Psi}(\mathrm{x}).$$

Запишем преобразование вектора состояния при $\alpha \to 0$ в виде

$$\hat{U} \approx \hat{1} - \imath \hat{Q}\, \alpha + \ldots, \qquad \hat{Q}^+ = \hat{Q},$$

где эрмитов оператор $\hat{Q}$ является оператором заряда поля (стр. 31). Тогда

$$\hat{\Psi}' = (1 - \imath\alpha)\hat{\Psi} = \hat{U}^+ \hat{\Psi}\, \hat{U} = (\hat{1} + \imath \hat{Q}\, \alpha)\, \hat{\Psi}\, (\hat{1} - \imath \hat{Q}\, \alpha),$$

откуда:

$$\hat{\Psi}(\mathrm{x}) = [\hat{\Psi}(\mathrm{x}),\, \hat{Q}]. \tag{G.32}$$

Постулировав уравнения (G.30), (G.32) и им подобные, можно пойти в обратном направлении и установить коммутационные соотношения для операторов поля (проверьте, что (2.23), стр. 51 удовлетворяет (G.32)).

• Коммутаторы поля с оператором момента импульса зависят от трансформационных свойств поля. Не конкретизуя их, запишем преобразование в общем виде при помощи констант $\Sigma_{ij}^{\alpha\beta}$, введенных в главе 1 (стр. 37):

$$\Psi'_i(\mathrm{x}') \;\approx\; \Psi_i(\mathrm{x}) - \frac{\imath}{2}\,\Sigma_{ij}^{\mu\nu}\,\omega_{\mu\nu}\,\Psi^j(\mathrm{x}). \tag{G.33}$$

Координаты при бесконечно малых преобразованиях Лоренца преобразуются как $x'_\mu = x_\mu + \omega_{\mu\nu}\,x^\nu$. Поэтому трансформация функциональной зависимости поля (1.67) имеет вид:

$$\Psi'_i(\mathrm{x}) - \Psi_i(\mathrm{x}) = \delta\Psi_i(\mathrm{x}) = -\omega_{\mu\nu}\,x^\nu\,\partial^\mu\Psi_i(\mathrm{x}) - \frac{\imath}{2}\,\Sigma_{ij}^{\mu\nu}\,\omega_{\mu\nu}\,\Psi^j(\mathrm{x}). \tag{G.34}$$

Запишем преобразование (G.29) для этого случая:

$$(1 + \frac{\imath}{2}\,\hat{J}_{\mu\nu}\,\omega^{\mu\nu})\,\hat{\Psi}_k(\mathrm{x})\,(1 - \frac{\imath}{2}\,\hat{J}_{\alpha\beta}\,\omega^{\alpha\beta}) = \hat{\Psi}_k(\mathrm{x}) + \delta\hat{\Psi}_k(x).$$

Перемножая скобки с точностью до первого порядка малости по $\omega$, получаем:

$$\frac{\imath}{2}\,[\hat{\Psi}_k(\mathrm{x}),\,\hat{J}^{\mu\nu}]\,\omega_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu}\,x^\nu\,\partial^\mu\hat{\Psi}_k(\mathrm{x}) + \frac{\imath}{2}\,\Sigma_{kj}^{\mu\nu}\,\omega_{\mu\nu}\,\hat{\Psi}^j(\mathrm{x}).$$

Беря производную по $\omega_{\alpha\beta}$ при помощи соотношения (1.70), стр. 39, приходим к уравнению:

$$\imath(x^\alpha\partial^\beta - x^\beta\partial^\alpha)\,\hat{\Psi}_k(\mathrm{x}) + \Sigma_{kj}^{\alpha\beta}\,\hat{\Psi}^j(\mathrm{x}) = [\hat{\Psi}_k(\mathrm{x}),\,\hat{J}^{\alpha\beta}]. \tag{G.35}$$

По своей структуре оно аналогично коммутатору с 4-импульсом (G.30). Если в последнем слева стоит дифференциальный "оператор 4-импульса" квантовой механики $\hat{p}_\alpha = \imath\partial_\alpha$, то в (G.35) на поле действует дифференциальный оператор $x^\alpha\hat{p}^\beta - x^\beta\hat{p}^\alpha$, совпадающий с оператором 4-момента импульса частицы в релятивистской механике. Кроме этого, поле линейно деформируется при помощи спиновой матрицы $\Sigma_{ij}^{\alpha\beta}$. Результатом такого преобразования является коммутатор поля и его 4-момента импульса.

Проверим, что в уравнении (G.35) генератор $\hat{J}^{\alpha\beta}$ преобразований вектора состояния, действительно, является полным моментом поля (стр. 39):

$$\hat{J}^{\alpha\beta} = \int \hat{J}^{0,\alpha\beta}\,d^3\mathbf{x} = \hat{L}^{\alpha\beta} + \hat{S}^{\alpha\beta}, \tag{G.36}$$

где угловой и спиновый моменты

$$\hat{L}^{\alpha\beta} = \int (x^\alpha\,\hat{T}^{0\beta} - x^\beta\,\hat{T}^{0\alpha})\,d^3\mathbf{x}, \qquad \hat{S}^{\alpha\beta} = -\imath\Sigma_{ij}^{\alpha\beta}\int \hat{\Pi}^i\,\hat{\Psi}^j\,d^3\mathbf{x} \tag{G.37}$$

выражены через плотность тензора энергии импульса:

$$T^{0\nu} = \Pi^k\,\partial^\nu\Psi_k - g^{0\nu}\,\mathcal{L}, \qquad \Pi^k = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\Psi_k)},$$

где $\hat{\Pi}^k$ – канонический импульс, сопряжённый компоненте поля $\hat{\Psi}_k$.

С учётом аксиоматики канонического квантования (стр. 46), напишем коммутационное соотношение:

$$[\hat{\Psi}_i(t,\,\mathbf{x}),\,\hat{\Pi}^j(t,\,\mathbf{y})] = \imath\,\delta_i^j\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{G.38}$$

Вычислим коммутатор оператора поля со спиновой компонентой полного момента (опускаем зависимость от времени, которое считаем одинаковым во всех операторах):

$$[\hat{\Psi}_k(\mathbf{x}),\,\hat{S}^{\alpha\beta}] = -\imath\Sigma_{ij}^{\alpha\beta}\int[\hat{\Psi}_k(\mathbf{x}),\,\hat{\Pi}^i(\mathbf{y})\hat{\Psi}^j(\mathbf{y})]\,d^3\mathbf{y} = \Sigma_{kj}^{\alpha\beta}\hat{\Psi}^j(\mathbf{x}).$$

Таким образом, получается второе слагаемое в левой части (G.35).

Коммутатор с угловым моментом найдём для пространственных индексов $\alpha,\beta = 1,2,3$. В этом случае:

$$\hat{L}^{ij} = \int(x^i\,\hat{\Pi}^k\,\partial^j\hat{\Psi}_k - x^j\,\hat{\Pi}^k\,\partial^i\hat{\Psi}_k)\,d^3\mathbf{x}. \tag{G.39}$$

Повторяя предыдущие вычисления, получаем первое слагаемое левой части уравнения (G.35):

$$[\hat{\Psi}_k(t,\mathbf{x}),\,\hat{L}^{ij}] = \imath(x^i\partial^j - x^j\partial^i)\,\Psi_k(t,\mathbf{x}).$$

Отметим, что при помощи 3-мерного символа Леви-Чевита ($\varepsilon^{123}=1$) из пространственных компонент углового момента можно сформировать операторный 3-вектор (по $k$ сумма):

$$\hat{L}^i = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}\hat{L}^{jk} = \{\hat{L}^{23},\,\hat{L}^{31},\,\hat{L}^{12}\}. \tag{G.40}$$

Этот вектор коммутирует с полевым оператором следующим образом:

$$[\hat{\Psi}_p,\,\hat{L}^i] = \imath\,\varepsilon^{ijk}\,x^j\partial^k\,\Psi_p = [\mathbf{x}\times(-\imath\nabla)]^i\,\hat{\Psi}_p, \tag{G.41}$$

где учтено, что $\partial^k = \partial/\partial x_k = -\nabla^k$. В правой части этого соотношения стоит дифференциальный оператор момента импульса квантовой механики (глава **??**). Можно проверить, что операторы $\hat{L}^i$, $\hat{S}^i$ коммутируют также как этот оператор момента импульса:

$$[\hat{L}^i,\,\hat{L}^j] = \imath\,\varepsilon^{ijk}\,\hat{L}^k, \qquad [\hat{S}^i,\,\hat{S}^j] = \imath\,\varepsilon^{ijk}\,\hat{S}^k, \qquad [\hat{L}^i,\,\hat{S}^j] = 0, \tag{G.42}$$

где вектор спина $\hat{S}^i$ формируется из пространственных компонент тензора спина $\hat{S}^{ij}$ аналогично (G.40). Первое соотношение вычисляется при помощи (G.39) и (G.38). При вычислении второго потребуется коммутатор (1.63), стр. 37 для матриц $\Sigma_{ij}^{\alpha\beta}$.

## G.8 Коммутаторы 4-импульса и момента поля

Найдём коммутационные соотношения между операторами 4-импульса $P^\alpha$ и момента $J^{\alpha\beta}$ поля. Для этого рассмотрим унитарный оператор $\hat{U}(\mathrm{a},\,\Lambda)$ преобразования вектора состояния (G.28). Два последовательных преобразований вектора состояний эквивалентно одному преобразованию, поэтому оператор $\hat{U}$ образует группу с умножением:

$$\hat{U}(\mathrm{a}_2,\Lambda_2)\cdot\hat{U}(\mathrm{a}_1,\Lambda_1)=\hat{U}(\mathrm{a}_2+\Lambda_2\mathrm{a}_1,\;\Lambda_2\Lambda_1). \tag{G.43}$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$\hat{U}^1(\mathrm{a},\Lambda)=\hat{U}(-\Lambda^{-1}\mathrm{a},\;\Lambda^{-1}), \tag{G.44}$$

где учтены законы композиции преобразований Пункаре (стр. 300). Пользуясь (G.43) и (G.44) запишем

$$\hat{U}^{-1}(\mathrm{a},\,\Lambda)\,\hat{U}(\bar{\mathrm{a}},\,\bar{\Lambda})\,\hat{U}(\mathrm{a},\,\Lambda)=\hat{U}(-\Lambda^{-1}\mathrm{a}+\Lambda^{-1}\bar{\mathrm{a}}+\Lambda^{-1}\bar{\Lambda}\mathrm{a},\;\;\Lambda^{-1}\bar{\Lambda}\Lambda),$$

где $(\mathrm{a},\,\Lambda)$ и $(\bar{\mathrm{a}},\,\bar{\Lambda})$ – независимые преобразования сдвигов и поворотов. Пусть преобразования с чертой являются бесконечно малыми:

$$\hat{U}^{-1}(\mathrm{a},\,\Lambda)\,\hat{U}(\bar{\mathrm{a}},\,1+\bar{\omega})\,\hat{U}(\mathrm{a},\,\Lambda)=\hat{U}(\Lambda^{-1}\bar{\mathrm{a}}+\Lambda^{-1}\bar{\omega}\mathrm{a},\;\;1+\Lambda^{-1}\bar{\omega}\Lambda).$$

Записывая разложение оператора $\hat{U}$ при малых параметрах (стр. 302)

$$\hat{U}(\mathrm{a},\,1+\omega)=\hat{1}+\imath a_\mu\hat{P}^\mu-\frac{\imath}{2}\,\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} \tag{G.45}$$

и восстанавливая индексы, получаем:

$$\bar{a}_\mu\hat{U}^{-1}\hat{P}^\mu\hat{U}-\frac{1}{2}\,\bar{\omega}_{\mu\nu}\hat{U}^{-1}\hat{J}^{\mu\nu}\hat{U}=(\Lambda^{-1}_{\mu\nu}\bar{a}^\nu+\Lambda^{-1}_{\mu\nu}\bar{\omega}^{\nu\sigma}a_\sigma)\hat{P}^\mu-\frac{1}{2}\,\Lambda^{-1}_{\mu\sigma}\bar{\omega}^{\sigma\lambda}\Lambda_{\lambda\nu}\hat{J}^{\mu\nu},$$

где $\hat{U}=\hat{U}(\mathrm{a},\Lambda)$. Возьмём производную этого соотношения по $\bar{a}_\alpha$ и $\bar{\omega}_{\alpha\beta}$ (производную по антисимметричным параметрам необходимо брать по формуле (1.70), стр. 39):

$$\hat{U}^{-1}\hat{P}_\alpha\hat{U}=\Lambda_{\alpha\mu}\hat{P}^\mu, \tag{G.46}$$

$$\hat{U}^{-1}\hat{J}_{\alpha\beta}\hat{U}=\Lambda_{\alpha\mu}\Lambda_{\beta\nu}\hat{J}^{\mu\nu}+a_\alpha\Lambda_{\beta\mu}\hat{P}^\mu-a_\beta\Lambda_{\alpha\mu}\hat{P}^\mu, \tag{G.47}$$

где учтено, что, в силу условия ортогональности лоренцевской матрицы (стр. 20), можно положить $\Lambda^{-1}_{\alpha\beta}=\Lambda_{\beta\alpha}$. Сравнивая эти соотношения с (G.29), можно сделать вывод, что $\hat{P}_\alpha$ преобразуется как 4-вектор, а $\hat{J}_{\alpha\beta}$ – как 4-тензор при 4-вращениях и при сдвигах (выполненных *после* вращения) меняется аналогично моменту импульса в классической механике.

Пусть теперь оператор $\hat{U}(\mathrm{a},\,\Lambda)$ также зависит от бесконечно малых сдвигов и поворотов $\Lambda = 1 + \omega$. Тогда (G.46) имеет вид:

$$(1 - \imath a_\mu \hat{P}^\mu + \frac{\imath}{2}\,\omega_{\mu\nu}\hat{J}^{\mu\nu})\,\hat{P}_\alpha\,(1 + \imath a_\lambda \hat{P}^\lambda - \frac{\imath}{2}\,\omega_{\lambda\sigma}\hat{J}^{\lambda\sigma}) = (g_{\alpha\mu} + \omega_{\alpha\mu})\,\hat{P}^\mu.$$

Перемножая скобки в левой части с точностью до первого порядка малости по параметрам $a_\mu$, $\omega_{\mu\nu}$, получаем:

$$-\imath a^\mu\,[\hat{P}_\mu,\,\hat{P}_\alpha] + \frac{\imath}{2}\,\omega^{\mu\nu}\,[\hat{J}_{\mu\nu},\,\hat{P}_\alpha] = \omega_{\alpha\beta}\hat{P}^\beta.$$

Снова беря производные по $a_\alpha$, $\omega_{\alpha\beta}$, приходим к коммутаторам:

$$[\hat{P}_\alpha,\,\hat{P}_\beta] = 0, \qquad [\hat{P}_\alpha,\,\hat{J}_{\mu\nu}] = \imath(g_{\alpha\mu}\hat{P}_\nu - g_{\alpha\nu}\hat{P}_\mu). \tag{G.48}$$

Аналогично расписывается преобразование (G.47). В результате получается ещё раз второе соотношение (G.48) и коммутатор между компонентами оператора момента импульса:

$$[\hat{J}_{\alpha\beta},\,\hat{J}_{\mu\nu}] = \imath\,(g_{\alpha\mu}\,\hat{J}_{\nu\beta} - g_{\alpha\nu}\,\hat{J}_{\mu\beta} + g_{\beta\nu}\,\hat{J}_{\mu\alpha} - g_{\beta\mu}\,\hat{J}_{\nu\alpha}). \tag{G.49}$$

Коммутаторы (G.48) и (G.49) образуют *алгебру Пуанкаре* с генераторами (G.22), (G.23), стр. 301.

Антисимметричный тензор $J^{\alpha\beta}$ определяется двумя 3-векторами:

$$\mathbf{J} = \{J^{23},\,J^{31},\,J^{12}\}, \qquad \mathbf{G} = \{J^{10},\,J^{20},\,J^{30}\}. \tag{G.50}$$

Пользуясь (G.48), (G.49), можно проверить, что ($\varepsilon^{123} = 1$):

$$[\hat{J}^i,\,\hat{J}^j] = \imath\varepsilon^{ijk}\hat{J}^k, \quad [\hat{J}^i,\,\hat{G}^j] = \imath\varepsilon^{ijk}\hat{G}^k, \quad [\hat{G}^i,\,\hat{G}^j] = -\imath\varepsilon^{ijk}\hat{J}^k, \tag{G.51}$$

а коммутаторы с оператором 4-импульса $\hat{P}^\mu = \{\hat{H},\,\hat{\mathbf{P}}\}$ равны:

$$[\hat{J}^i,\,\hat{P}^j] = \imath\varepsilon^{ijk}\hat{P}^k, \quad [\hat{G}^i,\,\hat{P}^j] = \imath\hat{H}\delta_{ij}, \quad [\hat{G}^i,\,\hat{H}] = \imath\hat{P}^i. \tag{G.52}$$

Остальные коммутаторы нулевые:

$$[\hat{P}^i,\,\hat{H}] = 0, \qquad [\hat{P}^i,\,\hat{P}^j] = 0, \qquad [\hat{J}^i,\,\hat{H}] = 0, \tag{G.53}$$

т.е. с гамильтонианом $\hat{H}$ имеют общие собственные векторы оператор 3-импульса поля $\hat{\mathbf{P}}$ и 3-момента $\hat{\mathbf{J}}$. При этом, оператор $\hat{\mathbf{G}}$, хотя и соответствует сохраняющейся величине, но не коммутирует с гамильтонианом. Связано это с тем, что в его определении явным образом участвует время и закон сохранения имеет вид $d\hat{\mathbf{G}}/dt = \partial\hat{\mathbf{G}}/\partial t + \imath[\hat{H},\,\hat{\mathbf{G}}] = 0$.

• Некоммутативность операторов $\hat{P}_\alpha$ и $\hat{J}_{\mu\nu}$ связана с неперестановочностью операций сдвигов (трансляций) и поворотов. Из (G.48) следует, что 4-повороты коммутируют с квадратом 4-смещений (и вообще с любым операторным 4-скаляром):

$$[\hat{J}_{\alpha\beta},\, \hat{M}^2] = 0, \qquad \hat{M}^2 = \hat{P}_\alpha \hat{P}^\alpha \tag{G.54}$$

При помощи антисимметричного 4-тензора Леви-Чевиты ($\varepsilon_{0123} = 1$) определим *оператор Паули-Любанского*:

$$\hat{W}^\nu = \frac{1}{2}\, \varepsilon^{\nu\alpha\beta\gamma}\, \hat{J}_{\alpha\beta}\, \hat{P}_\gamma. \tag{G.55}$$

Он 4-ортогонален оператору сдвигов и коммутирует с ним:

$$\hat{W}_\nu \hat{P}^\nu = 0, \qquad [\hat{W}_\mu,\, \hat{P}_\nu] = 0. \tag{G.56}$$

Пользуясь свойствами 4-тензора Леви-Чевиты несложно получить

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda}\, \hat{W}^\lambda = \hat{J}_{\alpha\beta}\hat{P}_\gamma + \hat{J}_{\gamma\alpha}\hat{P}_\beta + \hat{J}_{\beta\gamma}\hat{P}_\alpha. \tag{G.57}$$

При помощи этого соотношения можно найти коммутатор $\hat{W}^\nu$ с оператором момента импульса:

$$[\hat{W}_\alpha,\, \hat{J}_{\mu\nu}] = \imath\, (g_{\alpha\mu}\hat{W}_\nu - g_{\alpha\nu}\hat{W}_\mu). \tag{G.58}$$

Наконец, коммутатор двух операторов $\hat{W}$ равен:

$$[\hat{W}^\mu,\, \hat{W}^\nu] = \imath\, \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \hat{P}_\alpha \hat{W}_\beta, \tag{G.59}$$

что проверяется при помощи (G.56) и (G.58).

Запишем оператор Паули-Любанского в векторных обозначениях:

$$\hat{W}^0 = \hat{\mathbf{J}}\hat{\mathbf{P}}, \qquad \hat{\mathbf{W}} = \hat{\mathbf{J}}\hat{H} - \hat{\mathbf{G}} \times \hat{\mathbf{P}}. \tag{G.60}$$

Рассмотрим "систему покоя" в которой собственные значения оператора $\hat{\mathbf{P}}$ равны нулю ($\mathbf{P} = \mathbf{0}$). В такой системе матричные элементы $\hat{W}^0$ равны нулю, а пространственные совпадают с полным моментом, умноженным на энергию (массу) поля. Поэтому $\hat{W}^\mu$ непосредственно связан с оператором спина $\hat{S}^\mu$ системы (полного момента в системе покоя):

$$\hat{W}^\mu = M\hat{S}^\mu,$$

где $M$ – масса системы, которую мы поставили без шляпки, так как она коммутирует со всеми операторами. В релятивистской механике частиц можно показать [1], что второе соотношение (G.60), записанное для $\mathbf{S}$, имеет смысл разницы полного момента и момента движения центра масс. Это является ещё одним определением спина системы.

• При помощи свертки операторов $\hat{J}_{\mu\nu}$ и $\hat{P}_\nu$, можно получить еще один оператор, который, как и $\hat{W}_\mu$, ортогонален оператору сдвигов $\hat{P}_\mu$:

$$\hat{N}_\mu = \hat{J}_{\mu\nu}\hat{P}^\nu. \tag{G.61}$$

Для него справедливы следующие коммутаторы:

$$[\hat{N}_\mu,\, \hat{P}_\nu] = \imath(\hat{P}_\mu\hat{P}_\nu - g_{\mu\nu}\,\hat{M}^2),$$
$$[\hat{N}_\alpha,\, \hat{J}_{\mu\nu}] = \imath\,(g_{\alpha\mu}\hat{N}_\nu - g_{\alpha\nu}\hat{N}_\mu),$$
$$[\hat{N}_\mu,\, \hat{W}_\nu] = \imath\,\hat{W}_\mu\hat{P}_\nu,$$

где при вычислении последнего коммутатора лучше использовать (G.58) и (G.59). Между собой эти операторы коммутируют так:

$$[\hat{N}_\mu,\, \hat{N}_\nu] = \imath\hat{M}^2\,\hat{J}_{\mu\nu}.$$

Обратим внимание на одинаковую структуру коммутаторов операторных 4-векторов $\hat{P}_\alpha$, $\hat{W}_\alpha$ и $\hat{N}_\alpha$ с тензорным оператором вращений $\hat{J}_{\mu\nu}$.

Это общий результат и так будет коммутировать любой операторный 4-вектор $\hat{A}_\alpha$ не зависящий от координат и времени:

$$[\hat{A}_\alpha,\, \hat{J}_{\mu\nu}] = \imath\,(g_{\alpha\mu}\hat{A}_\nu - g_{\alpha\nu}\hat{A}_\mu). \tag{G.62}$$

Связано это с тем, что $\hat{J}_{\mu\nu}$ определяет матрицу преобразования группы Лоренца. При этих преобразованиях 4-вектор должен преобразовываться следующим образом:

$$\hat{U}^{-1}(0,\Lambda)\,\hat{A}^\mu\,\hat{U}(0,\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\,\hat{A}^\nu. \tag{G.63}$$

Аналогично, любое тензорное выражение $\hat{S}_{\alpha\beta}$ будет коммутировать с $\hat{J}_{\mu\nu}$ как произведение двух операторов $\hat{A}_\alpha\hat{B}_\beta$.

Перечислим все независимые ненулевые 4-скаляры, которые можно определить при помощи введенных операторов:

$$\hat{P}_\mu\hat{P}^\mu, \qquad \hat{W}_\mu\hat{W}^\mu, \qquad \hat{N}_\mu\hat{N}^\mu, \qquad \hat{W}_\mu\hat{N}^\mu.$$

Первые два из них коммутируют со всеми операторами, являясь *операторами Казимира* группы Пуанкаре. При этом квадрат оператора Паули-Любанского равен:

$$\hat{W}_\mu\hat{W}^\mu = \hat{N}_\mu\hat{N}^\mu - \frac{M^2}{2}\,\hat{J}_{\mu\nu}\hat{J}^{\mu\nu}.$$

Обратим внимание, что хотя $[\hat{W}_\mu, \hat{P}_\nu] = 0$, различные компоненты оператора $\hat{W}_\mu$ между собой не коммутируют и в базисный набор можно взять только одну из них, например, $\hat{W}_0$.

# Литература


[1] Степанов С. С. *"Релятивисткий мир"*.

[2] *Справочник по специальным функциям* под ред. Абрамовица М., Стигана И., М.: Наука (1979)

[3] Давыдов А. С. *"Квантовая механика"*, ФМ, М.: 1963

[4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика: Квантовая механика*, Т3 (2002)

[5] Грин Х. *Матричная квантовая механика* : 2000

[6] Bender C. B., Wu T. T. *"Anharmonic Oscillator"*, Phys.Rev. V.184, N.5, pp.1231-1260, (1969)

[7] Попов В.С., Елецкий В.П., Турбинер А.В. *Высшие порядки теории возмущений и суммирование рядов в квантовой механике и теори поля*, препринт ИТЭФ (1978)

[8] Суслов И.М. *Расходящиеся ряды теории возмущений* ЖЭТФ, 127, 6, стр. 135-1402, (2005)

[9] Halliday I.G., Suranyi P. *Convergent perturbation series for the anharmonic oscillator* - Phys.Lett. (1979)

[10] Stevenson P.M. *Optimized perturbation theory* - Phys.Rev. (1981)

[11] Barone F.A., Boschi-Filho H., Farinac C. "*Three methods for calculating the Feynman propagator*", Am.J.Phys. V71, N5 (2003)

[12] Рамон П. *"Теория поля. Современный вводный курс"*, М.: Мир (1984)