

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ МИР

II. Электродинамика

Сергей С. Степанов

Это электронная версия книги. Она находится в процессе создания. Последнюю версию документа можно найти по адресу <http://synset.com>. Все замечания и предложения просьба присылать по почте phys@synset.com или оставлять на сайте, на страницах обсуждения книги.

(printed: 2 июля 2017 г.)

Оглавление

0.1	Введение	7
0.2	Обозначения	9
1	Уравнения Максвелла	11
1.1	Закон Кулона	12
1.2	Скалярный потенциал	16
1.3	Электрический дипольный момент	18
1.4	Поле равномерно движущегося заряда	20
1.5	Дифференциальные уравнения Максвелла	24
1.6	Сохранение заряда	28
1.7	Интегральные уравнения Максвелла	30
2	Магнитное поле	35
2.1	Магнитостатика	36
2.2	Замкнутый контур с током	40
2.3	Магнитный дипольный момент	42
2.4	Потенциалы поля	46
2.5	Симметрии уравнений Максвелла	48
2.6	Преобразования Лоренца для полей	52
2.7	Потенциалы и ток как 4-векторы	56
3	Электромагнитные волны	59
3.1	Решение уравнений Максвелла в пустоте	60
3.2	Реально ли электромагнитное поле?	64
3.3	Законы сохранения	68
3.4	Применение законов сохранения	72
3.5	Решение волновых уравнений для потенциалов	76
3.6	Дипольное излучение	78
3.7	Примеры дипольного излучения	82
3.8	Произвольно движущийся заряд *	84
4	Теория поля	91
4.1	Ковариантный формализм	92
4.2	Закон Кулона	96
4.3	Электродинамика	98
4.4	Движение заряда в постоянных полях *	104
4.5	Действие и лагранжиан	108
4.6	Лагранжиан заряда во внешнем поле	112
4.7	Лагранжиан электромагнитного поля	116
4.8	Взаимодействие зарядов без поля *	118

5 Законы сохранения	123
5.1 Энергия частицы во внешнем поле	124
5.2 Тензор энергии-импульса поля	128
5.3 Ковариантность интегральных величин	132
5.4 Момент импульса поля	136
5.5 Классический спин	138
5.6 Симметрии и законы сохранения	144
5.7 Неоднозначность локальных токов	150
5.8 Интегралы лагранжиана без поля	154
6 Самодействие	157
6.1 Электромагнитная масса	158
6.2 Решение проблемы 3/4	160
6.3 Классический радиус электрона	164
6.4 Самодействие электрона	166
6.5 Примеры самодействия	170
6.6 Ковариантная запись силы самодействия	172
6.7 Нелинейная электродинамика *	174
6.8 Солитоны *	180
7 Электромагнитные волны - 2	189
7.1 Плоская электромагнитная волна	190
7.2 Комплексные обозначения	192
7.3 Общее решение волновых уравнений	194
7.4 Потенциал в кулоновской калибровке	198
7.5 Заряд в поле плоской волны	200
7.6 Световое давление	204
7.7 Момент импульса	206
8 Кватернионы	209
8.1 Кватернионы	210
8.2 Ковариантные обозначения *	214
8.3 Вращения в 3-пространстве	216
8.4 Преобразования Лоренца	220
8.5 Кватернионная электродинамика	224
8.6 Уравнения движения	226
8.7 Законы сохранения	228
9 Спиноры	231
9.1 Спиноры	232
9.2 Спинорные тензоры	234
9.3 Симметричный спинорный тензор	238

9.4	Спиноры и уравнения Максвелла	240
9.5	Уравнение Дирака	248
9.6	Алгебра матриц Дирака	252
9.7	Преобразование биспинора	258
9.8	Принцип калибровочной инвариантности	262
Н: Помощь		263
М: Математическое приложение		299
I	Векторный анализ	300
II	Интегральные теоремы	306
III	Комплексные числа	310
IV	Функция Дирака	312
V	Фурье преобразования	314
VI	Экстремум и множители Лагранжа	316

0.1 Введение

Вторая часть книги “Релятивистский мир” посвящена теории поля. Основное внимание будет сосредоточено на частном случае полевой теории – классической электродинамики. Впрочем, многие из рассмотренных вопросов остаются справедливыми и для полей различной природы.

Исторически, эксперименты со светом и анализ свойств уравнений Максвелла привели к построению теории относительности. Однако, исторический путь не всегда самый короткий, а главное – не всегда логически безупречен. Как мы видели в первой части книги, теория относительности – это фундаментальная теория и она применима ко всем видам взаимодействий. Её логическая структура такова, что основные соотношения могут быть получены из аксиом классической механики и не требуют дополнительных предположений. Фундаментальная скорость, равная скорости света, возникает в результате уменьшения числа аксиом, лежащих в основе теории (принцип параметрической неполноты).

После того как основные свойства пространства и времени установлены, можно рассматривать конкретные взаимодействия. При этом теория относительности накладывает достаточно жёсткие ограничения на математическую структуру соответствующих теорий. Например, как мы увидим, электродинамику можно получить при помощи лишь из закона Кулона и инвариантности заряда.

Как и в предыдущей части, сложность материала идёт по нарастающей. В первых трёх главах электродинамика формулируется в трёхмерных обозначениях. Затем мы перейдём к ковариантному формализму и повторно получим уравнения Максвелла, как из закона Кулона, так и при помощи лагранжевого метода. Достаточно много времени уделяется законам сохранения и тем трудностям, которые возникают в полевых теориях. В частности будет проанализирована проблема электромагнитной массы, отсутствие светового давления на пробный заряд и особенности сохранения момента импульса электромагнитной волны.

Подробно рассматриваются кватернионы. С одной стороны, их использование существенно упрощает описание композиции преобразований Лоренца и даёт изящную матричную формулировку уравнений Максвелла. С другой стороны, с их помощью проще всего прийти к новому типу математических объектов – спиноров, более общих по сравнению с 4-векторами и тензорами. Они, в свою очередь, лежат в основе биспинорных полей, которые на квантовом уровне описывают фундаментальные частицы подобные электрону.

▷ Во второй части, как и в первой, принятая система единиц в которой скорость света $c = 1$. Правила восстановления в формулах константы c и соответствующие примеры собраны в приложении “Системы отсчёта”. Там же можно найти запись уравнений Максвелла в системах СИ и СГС.

Как и раньше, часто предлагается решить задачи или восстановить тот или иной вывод. Такие упражнения помечены символом ($\Leftarrow H_i$), где i – номер решения, которое можно найти в приложении “Помощь”. Некоторые вопросы вынесены в “*Математическое приложение*”. Оно не является учебником по математике, но при внимательном чтении позволяет, не только вспомнить материал, но иногда и освоить его с нуля. Рекомендуется также параллельно прорабатывать книгу “*Векторы, тензоры и формы. Инструкция к использованию*” [1], решая приведенные там задачи.

В тексте приведены ссылки на предыдущую часть, которые снабжены префиксом V_1 . Например, “глава $V_1:1$ ” означает первую главу предыдущей части, а “стр. $V_1:137$ ” – соответствующую страницу там же.

0.2 Обозначения

- a, b, c, ...** — 3-мерные векторы (жирный шрифт);
a × b — векторное произведение;
r — радиус-вектор с декартовыми координатами x, y, z ;
n — единичный вектор ($\mathbf{n}^2 = 1$);
 c — скорость света; принята система единиц $c = 1$ (см. стр. ??);
 $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$ — фактор Лоренца для скорости **v**;
 $\Gamma = (\gamma - 1)/v^2 = \gamma^2/(\gamma + 1)$ — модифицированный фактор Лоренца;
 E, \mathbf{p}, m — энергия, импульс и масса частицы;
L, S — момент импульса и спин;
 s_α, c_α — сокращения для синуса $\sin \alpha$ и косинуса $\cos \alpha$;
 $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \operatorname{th} x$ — гиперболические синус, косинус и тангенс;
 $\operatorname{ash} x, \operatorname{ach} x, \operatorname{ath} x$ — обратные гиперболические функции;
 ∇ — оператор набла;
 $\nabla \mathbf{A}, \nabla \times \mathbf{A}$ — дивергенция и ротор;
E, B — электрическое и магнитное поля;
 i, j, k, \dots — латинские индексы, принимающие значения от 1 до 3;
 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ — греческие индексы, принимающие значения от 0 до 4;
 $ds^2 = dt^2 - dr^2$ — квадрат интервала в 4-мерном пространстве;
 $A^\alpha, F^{\alpha\beta}$ — 4-векторы и тензоры;
A, F — 4-векторы и тензоры в безиндексной форме;
 $\delta_{ij}, \delta_\beta^\alpha$ — 3-мерный и 4-мерный символ Кронекера;
 $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор, $g_{\alpha\beta} = \operatorname{diag}\{1, -1, -1, -1\}$;
 $\varepsilon_{ijk}, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — 3-мерный и 4-мерный символ Леви-Чивиты, $\varepsilon_{0123} = 1$;

Глава 1

Уравнения Максвелла

Джеймс Клерк Максвелл записал свои уравнения, опираясь на эксперименты Кулона, Эрстеда, Ампера и Фарадея. Эти уравнения привели к преобразованиям Лоренца и, в конечном счёте, к теории относительности. Однако в этой главе мы пойдём обратным путём. При помощи закона Кулона и преобразований Лоренца будут получены уравнения Максвелла.

С этой главы начинает активно применяться дифференциальный векторный анализ, поэтому имеет смысл просмотреть математическое приложение на страницах 300-309. В первых трёх главах мы будем в основном использовать трёхмерные обозначения. Более компактному (ковариантному) подходу описания полевых теорий посвящены главы, начиная с четвёртой.

1.1 Закон Кулона

▷ Мир вещественных тел, непосредственно воспринимаемый чувствами, очень привычен в повседневном опыте. Поэтому для возникновения понятия “поля” потребовались длительная эволюция и достаточно высокий уровень физической абстракции. Известно, что неподвижный заряд Q действует на другой заряд q силой Кулона:

$$\mathbf{F} = \frac{qQ}{r^3} \mathbf{r}. \quad (1.1)$$

Заряды могут быть как положительными, так и отрицательными. Сила взаимодействия зависит от их произведения. Следовательно, заряды одинакового знака отталкиваются, а противоположного – притягиваются. Введём *электрическое поле* \mathbf{E} следующим образом:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}, \quad \mathbf{F} = q \mathbf{E}. \quad (1.2)$$

Напряжённость электрического поля, т.е. значение векторной функции \mathbf{E} , зависит от расстояния r и заряда Q , но *не зависит* от значения заряда q . Такое отделение “источника” силы Q от объекта воздействия q является удобным, но достаточно формальным способом введения поля. В дальнейшем мы учём конечность скорости распространения электромагнитного взаимодействия и выяснимся, что поле является *реально существующим* физическим объектом. Электрическое поле обозначается той же буквой, что и энергия. Чтобы не было путаницы, в этой главе будем обозначать энергию движения частицы, как $\mathbb{E} = m/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$.

▷ Закон Кулона с хорошей степенью точности справедлив как на очень малых расстояниях, так и на достаточно больших. Тем не менее, с физической точки зрения выражение (1.2) не вполне удовлетворительно. Если заряд Q – точечный, то при $r = 0$ получается бесконечное значение поля и, следовательно, силы воздействия на заряд q . Попробуем временно устранить эту проблему, модифицируя закон Кулона (1.2) при помощи малой константы a :

$$\mathbf{E} = \frac{Q \mathbf{r}}{(r^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (1.3)$$

При $a = 0$ получается исходное выражение (1.2), однако для $a \neq 0$ напряжённость \mathbf{E} конечна при $r = 0$. Подобное устранение сингулярности (бесконечности) называется *регуляризацией*.

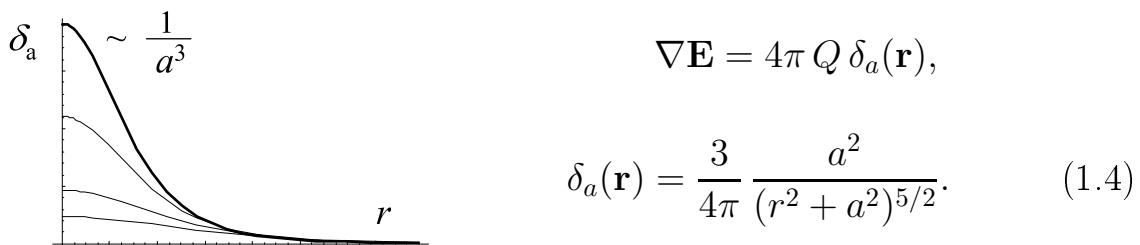
▷ Дивергенция радиус вектора \mathbf{r} и градиент его длины $r = \sqrt{\mathbf{r}^2}$ равны (стр. 302):

$$\nabla \mathbf{r} = 3, \quad \nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Вычислим дивергенцию поля (1.3) как производную произведения:

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{Q \nabla \mathbf{r}}{(r^2 + a^2)^{3/2}} + Q \mathbf{r} \nabla (r^2 + a^2)^{-3/2} = \frac{3Q}{(r^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{Q \mathbf{r}}{(r^2 + a^2)^{5/2}} 2r \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем:



При уменьшении параметра a , функция $\delta_a(\mathbf{r})$ становится всё более высокой и узкой (см. рисунок). Множитель $3/4\pi$ выделен, так чтобы интеграл от $\delta_a(\mathbf{r})$ по всему пространству ($d^3\mathbf{r} \equiv dV$) был равен единице:

$$\int \delta_a(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \frac{3a^2}{4\pi} \int_0^\infty \int_{4\pi} \frac{r^2 dr d\Omega}{(r^2 + a^2)^{5/2}} = \int_0^\infty \frac{3\chi^2 d\chi}{(1 + \chi^2)^{5/2}} = \frac{\chi^3}{(1 + \chi^2)^{3/2}} \Big|_0^\infty = 1.$$

Вычисление интеграла проводится в сферических координатах. Интегрирование по телесному углу $d\Omega$ даёт 4π . Затем сделана замена $\chi = r/a$. Значение интеграла остаётся единичным при $a \rightarrow 0$, хотя функция $\delta(\mathbf{r}) = \delta_0(\mathbf{r})$ в этом пределе становится разрывной:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & r \neq 0 \\ \infty, & r = 0 \end{cases}, \quad \int \delta(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 1. \quad (1.5)$$

Функция $\delta(\mathbf{r})$ с такими свойствами называется *трёхмерной функцией Дирака* (стр. 314). Она удобна при описании точечного заряда, когда он сосредоточен в сколь угодно малом объёме. В этом случае дивергенция электрического поля равна нулю везде, кроме точки $r = 0$, где она обращается в бесконечность. Заметим, что если формально вычислить $\nabla \mathbf{E}$ для закона Кулона (1.2), то получится ноль при любом значении r . Поэтому дифференцирование *сингулярных функций* требует определённой аккуратности (например, проведение регуляризации).

- При помощи функции Дирака (1.5) закон Кулона (1.2) можно представить в форме дифференциального уравнения:

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi Q \delta(\mathbf{r}). \quad (1.6)$$

Интеграл по замкнутой поверхности, окружающей заряд Q , по теореме Гаусса (стр. 300), даёт интегральную версию этого же уравнения:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi Q. \quad (1.7)$$

▷ Следующим экспериментальным фактом является *принцип суперпозиции*:

поле, создаваемое несколькими зарядами, равно векторной сумме напряжённостей поля от каждого заряда.

Отсюда следует, что закон Кулона в дифференциальной форме (1.6) можно записать в виде следующего уравнения (*закон Гаусса*):

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho(\mathbf{r}), \quad (1.8)$$

где функция $\rho(\mathbf{r})$ называется *плотностью заряда*:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n Q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (1.9)$$

Она выражается через значения зарядов Q_1, \dots, Q_n , находящихся в точках пространства $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$. Интегральный закон Кулона (1.7) остаётся неизменным, однако Q , в правой части, имеет смысл суммарного заряда в объёме, окружённом поверхностью S .

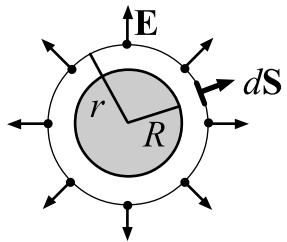
▷ Пусть точечные заряды расположены очень близко, так что имеет смысл говорить о непрерывном распределении заряда. Тогда его плотность определяется при помощи предела:

$$\sum_i Q_i = \int_{V \rightarrow 0} \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \approx \rho(\mathbf{r}) V \quad \Rightarrow \quad \rho(\mathbf{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \sum_i Q_i,$$

где суммируются все заряды, попавшие в объём V , окружающий точку пространства \mathbf{r} . На практике математический предел не вычисляется. Берётся малый объём V , и плотность считается равной отношению заряда, содержащегося в объёме, к величине этого объёма. Такая процедура “сглаживания” суммы сингулярных функций Дирака (1.9) приводит к тому, что плотность заряда $\rho(\mathbf{r})$ в ряде случаев оказывается гладкой (“обычной”) функцией координат.

• Напряжённость поля принято изображать в виде стрелок, направление которых совпадает с вектором \mathbf{E} , а их количество, проходящее через единицу поверхности, пропорционально модулю напряжённости $|\mathbf{E}|$. Если есть симметрия в распределении заряда, при помощи уравнения (1.7) иногда можно легко находить напряжённость электрического поля.

▷ Рассмотрим, например, однородный шар радиуса R , плотность заряда внутри которого постоянна. Выделенных направлений нет и, в силу сферической симметрии, “стрелки” электрического поля выглядят так, как это показано на рисунке ниже и напряжённость равна:



$$\mathbf{E} = Q \begin{cases} \frac{\mathbf{r}}{r^3} & r > R \\ \frac{\mathbf{r}}{R^3} & r \leq R. \end{cases}$$

Действительно, окружим шар сферой радиуса $r > R$ площадью $4\pi r^2$. Вектор $d\mathbf{S}$ параллелен \mathbf{E} , а на сфере модуль напряжённости постоянен:

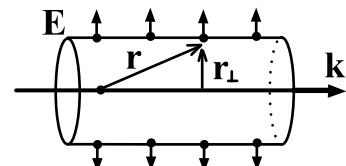
$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = |\mathbf{E}| 4\pi r^2 = 4\pi Q \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{E}| = \frac{Q}{r^2},$$

т.е. вне шара выполняется закон Кулона. Если же $r \leq R$, то заряд внутри сферы равен произведению объёма $4\pi r^3/3$ на плотность:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = |\mathbf{E}| 4\pi r^2 = 4\pi \rho \frac{4\pi}{3} r^3 = 4\pi Q \frac{r^3}{R^3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = Q \frac{\mathbf{r}}{R^3}.$$

▷ Проверьте ($\Leftarrow H_1$), что поле, бесконечной тонкой, однородно заряженной нити с зарядом $\mu = Q/L$ на единицу длины L , равно:

$$|\mathbf{E}| = \frac{2\mu}{r_\perp}, \quad \mathbf{E} = 2\mu \frac{\mathbf{k} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{k}]}{[\mathbf{r} \times \mathbf{k}]^2},$$



где \mathbf{r}_\perp – составляющая радиус-вектора, перпендикулярная к нити (см. рисунок), а \mathbf{k} – единичный вектор, направленный вдоль неё. Стоит вычислить $\nabla \mathbf{E}$, проведя регуляризацию выражения ($\Leftarrow H_2$). Заметим, что выделенных направлений вдоль нити нет. Поэтому ещё одна симметричная конфигурация поля, когда вектор \mathbf{E} касателен цилинду, окружающему нить (поперёк направления нити), не является подходящей. Нет оснований “закрутить” поле \mathbf{E} в одну или в другую сторону.

1.2 Скалярный потенциал

▷ Вторая операция которую можно проделать с векторной функцией при помощи оператора набла, – это ротор. Для любого сферически симметричного поля $f(r) \mathbf{r}$ ротор равен нулю. Действительно, так как:

$$\nabla f(r) = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \nabla \times \mathbf{r} = 0,$$

поэтому:

$$[\nabla \times f(r) \mathbf{r}] = f(r) [\nabla \times \mathbf{r}] - [\mathbf{r} \times \nabla] f(r) = -f'(r) \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r} = 0.$$

В частности, ротор электрического поля заряда (1.2) равен нулю. В силу принципа суперпозиции, это справедливо для любого статического распределения заряда. Поэтому уравнения *электростатики* имеют вид:

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (1.10)$$

▷ Последнее уравнение, выражающее центральный характер кулоновского поля точечного заряда, выполняется автоматически, если:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad (1.11)$$

где функция $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ называется скалярным *потенциалом*. Действительно: $\nabla \times \mathbf{E} = -[\nabla \times \nabla] \varphi = 0$. Подстановка $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ в $\nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho$, даёт *уравнение Пуассона* с оператором Лапласа $\Delta = \nabla^2$:

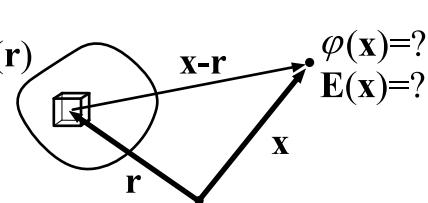
$$\Delta \varphi = -4\pi \rho. \quad (1.12)$$

Кулоновский потенциал поля точечного заряда равен

$$\varphi = \frac{Q}{r}, \quad (1.13)$$

что проверяется вычислением его градиента (1.11) и сравнением с (1.2).

▷ Потенциал и напряжённость можно представить в интегральном виде, просуммировав кулоновские поля от зарядов малых объёмов:



$$\rho(\mathbf{r}) \quad \mathbf{x}-\mathbf{r} \quad \varphi(\mathbf{x})=? \quad \mathbf{E}(\mathbf{x})=?$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^3} \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}. \quad (1.15)$$

Значения напряжённости поля и потенциал вычисляются в точке пространства $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ (“жирный” \mathbf{x} – это вектор, а не координата x). Интегрирование проводится по радиус-вектору \mathbf{r} , пробегающему все заряды $\rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}$ в каждом элементарном объёме $d^3 \mathbf{r}$.

▷ Пусть заряд q движется в стационарном (не зависящим от времени) электрическом поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Его полная энергия:

$$\mathcal{E} = \mathbb{E} + q\varphi = \text{const}, \quad (1.16)$$

будет *сохраняться*. Действительно, производная энергии движения \mathbb{E} по времени равна произведению скорости заряда \mathbf{u} и действующей на него силы: $d\mathbb{E}/dt = \mathbf{u}\mathbf{F}$ (стр. V₁:138). Вдоль траектории заряда $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, производная потенциала по времени равна $d\varphi/dt = (\partial\varphi/\partial\mathbf{r}) d\mathbf{r}/dt$, поэтому:

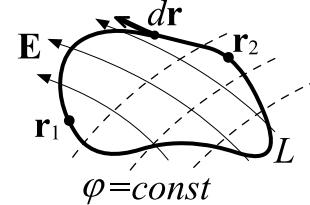
$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{u}\mathbf{F} + q \frac{d\varphi}{dt} = q \mathbf{u}\mathbf{F} + q \mathbf{u}\nabla\varphi = q \mathbf{u}\mathbf{F} - q \mathbf{u}\mathbf{E} = 0.$$

Таким образом, потенциал φ можно интерпретировать, как потенциальную энергию единичного заряда:

$$\mathcal{E} = \frac{m}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} + U(\mathbf{r}), \quad U(\mathbf{r}) = q\varphi(\mathbf{r}). \quad (1.17)$$

▷ При помощи теоремы Стокса (стр. 307), равенство нулю ротора электрического поля (1.10) можно записать в интегральном виде:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0,$$



где интегрирование проводится по замкнутому контуру L . Сила, действующая на заряд q , равна $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, а $\mathbf{F} d\mathbf{r}$ – это работа, совершаемая при перемещении заряда на $d\mathbf{r}$. Поэтому подобный интегральный закон выражает равенство нулю работы перемещения заряда по замкнутому контуру. Если контур незамкнут, то работа:

$$A = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} q \nabla\varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = -q \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\varphi = q\varphi(\mathbf{r}_1) - q\varphi(\mathbf{r}_2)$$

равна разнице потенциалов в начальной и конечной точках (изменению потенциальной энергии) и *не зависит* от формы пути.

▷ Так как электрическое поле равно градиенту потенциала (с обратным знаком), то оно всегда перпендикулярно поверхности постоянного потенциала $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const}$ (стр. 300). Такие поверхности называются *эквипотенциальными*. Перемещение заряда вдоль эквипотенциальной поверхности происходит перпендикулярно вектору силы и не меняет энергии заряда. Например, для центрально-симметричного поля точечного заряда, эквипотенциальные поверхности являются сферами.

1.3 Электрический дипольный момент

▷ Если заряды сосредоточены в небольшой области пространства, то можно найти приближенное значение интегралов (1.14), (1.15), в удалении от зарядов. Будем считать, что $r \ll |\mathbf{x}|$, и, пренебрегая вторым порядком малости по $r/|\mathbf{x}|$, запишем разложение:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{r})^2}} \approx (\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x}\mathbf{r})^{-1/2} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \left(1 - \frac{2\mathbf{x}\mathbf{r}}{\mathbf{x}^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x}\mathbf{r}}{|\mathbf{x}|^3},$$

где в последнем приближенном равенстве учтено разложение $(1 + \varepsilon)^a \approx 1 + a\varepsilon$. Вводя полный заряд Q , как интеграл по объёму от плотности заряда и вектор *дипольного момента* \mathbf{d} :

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad \mathbf{d} = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad (1.18)$$

выражение для потенциала (1.14) можно записать в следующем виде:

$$\varphi(\mathbf{x}) \approx \frac{Q}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{x}\mathbf{d}}{|\mathbf{x}|^3}. \quad (1.19)$$

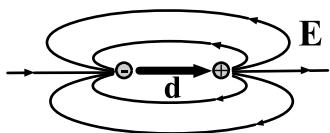
▷ Градиент потенциала даёт электрическое поле: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Градиент от первого слагаемого приводит к кулоновскому полю, а градиент от второго вычисляется, как производная произведения:

$$\nabla \frac{\mathbf{x}\mathbf{d}}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{\nabla(\mathbf{x}\mathbf{d})}{|\mathbf{x}|^3} + (\mathbf{x}\mathbf{d}) \nabla \frac{1}{(\mathbf{x}^2)^{3/2}} = \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{x}|^3} - (\mathbf{x}\mathbf{d}) \frac{3}{2} \frac{2\mathbf{x}}{(\mathbf{x}^2)^{5/2}},$$

где при взятии производной проигнорирована сингулярность, так как нас интересует значение поля на больших расстояниях от начала координат. Вводя единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, окончательно имеем:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) \approx Q \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{3(\mathbf{n}\mathbf{d})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{|\mathbf{x}|^3}. \quad (1.20)$$

Ведущее кулоновское приближение сферически симметрично. Дипольное слагаемое нарушает эту симметрию, так как появляется выделенное направление, определяемое вектором \mathbf{d} . Например, для двух зарядов:



$$\mathbf{d} = \sum q_k \mathbf{r}_k = q_1 \mathbf{r}_1 + q_2 \mathbf{r}_2.$$

Дипольный момент направлен от отрицательного заряда к положительному. Для одинаковых по модулю зарядов ($q_1 = -q_2 = q$), момент равен заряду, умноженному на расстояние между зарядами: $\mathbf{d} = q(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. В этом случае $Q = q_1 + q_2 = 0$ и \mathbf{E} на оси диполя убывает как $2|\mathbf{d}|/|\mathbf{x}|^3$.

▷ Найдём силу, действующую на диполь во внешнем электрическом поле. Будем считать, что диполь достаточно маленький по сравнению со степенью неоднородности электрического поля. Поэтому последнее разложим в ряд Тейлора по каждой компоненте:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}(0) + x \frac{\partial \mathbf{E}(0)}{\partial x} + y \frac{\partial \mathbf{E}(0)}{\partial y} + z \frac{\partial \mathbf{E}(0)}{\partial z} + \dots = \mathbf{E}_0 + (\mathbf{r} \nabla) \mathbf{E}_0 + \dots,$$

где $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}(0)$ и производная во втором слагаемом вычисляется в начале координат, где расположен диполь. Суммарную силу, действующую на систему точечных зарядов, можно переписать в виде интеграла:

$$\mathbf{F} = \sum Q_k \mathbf{E}_k = \int \mathbf{E} \rho d^3 \mathbf{r}.$$

Если $\rho = \rho(\mathbf{r}) = \sum Q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)$, то интеграл переходит в сумму по всем зарядам. Подставляя разложение для электрического поля, имеем

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{E}_0 \int \rho d^3 \mathbf{r} + \int (\mathbf{r} \nabla) \mathbf{E}_0 \rho d^3 \mathbf{r} = Q \mathbf{E}_0 + (\mathbf{d} \nabla) \mathbf{E}_0,$$

где введены полный заряд системы Q и дипольный момент \mathbf{d} (1.18), а постоянные коэффициенты разложения поля вынесены за интеграл.

Так как ротор электрического поля в электростатике равен нулю, справедливо тождество, получаемое раскрытием двойного векторного произведения по формуле “бац минус цаб” (стр. V₁:302):

$$\mathbf{d} \times [\nabla \times \mathbf{E}_0] = \nabla(\mathbf{d} \mathbf{E}_0) - (\mathbf{d} \nabla) \mathbf{E}_0 = 0.$$

Поэтому выражение для силы можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{F} \approx Q \mathbf{E}_0 + \nabla(\mathbf{d} \mathbf{E}_0). \quad (1.21)$$

Сила равна градиенту потенциальной энергии со знаком минус: $\mathbf{F} = -\nabla U$, следовательно, потенциальная энергия электрически нейтрального диполя ($Q = 0$) равна:

$$U \approx -\mathbf{d} \mathbf{E}_0. \quad (1.22)$$

Потенциальная энергия достигает минимума, когда диполь разворачивается по электрическому полю. Подобный разворот возникает в результате воздействия суммарного момента силы, который мы запишем в первом приближении по неоднородности электрического поля:

$$\mathbf{N} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{E} \rho d^3 \mathbf{r} \approx \mathbf{d} \times \mathbf{E}_0. \quad (1.23)$$

Когда \mathbf{d} и \mathbf{E}_0 параллельны, момент силы становится нулевым.

1.4 Поле равномерно движущегося заряда

• В электростатике электрическое поле создаётся некоторым распределением неподвижных зарядов. Если поле \mathbf{E} известно, можно ставить задачу о движении в нём небольшого заряда q . Такой заряд называют *пробным*, если его собственное поле мало по сравнению с “внешним” полем \mathbf{E} (поле \mathbf{E} слабо искажается полем заряда q). Например, пусть большой заряд Q неподвижен, а маленький заряд q движется с некоторой скоростью \mathbf{u} . Эта скорость будет изменяться под воздействием силы Кулона, так, что

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (1.24)$$

где \mathbf{p} – импульс заряда q с массой m и сила Кулона \mathbf{F} определяется радиус-вектором \mathbf{r} , проведенным от Q к q :

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}}, \quad \mathbf{F} = \frac{qQ}{r^3} \mathbf{r}. \quad (1.25)$$

Отметим, что для силы записано такое же выражение, как и для неподвижных зарядов. Другими словами, далее будем постулировать, что сила Кулона не зависит от скорости \mathbf{u} пробного заряда q . Допустив это, можно выяснить, как поменяется сила, если её источник Q движется с некоторой скоростью \mathbf{v} . Для этого воспользуемся соответствующими преобразованиями теории относительности.

▷ Пусть точечный заряд Q находится в начале системы отсчёта S' . Сила с которой он действует на пробный заряд q в системе S' , равна:



Найдём, как выглядит это же взаимодействие в “неподвижной” системе отсчёта S , мимо которой система S' движется с постоянной скоростью \mathbf{v} . Базовыми являются преобразования Лоренца (стр. V₁:31):

$$t' = \gamma(t - \mathbf{v}\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \gamma\mathbf{v}t + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}), \quad (1.27)$$

где используется следующее сокращение:

$$\Gamma = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} = \frac{\gamma - 1}{v^2} \quad (1.28)$$

и $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ – фактор Лоренца, а $v = |\mathbf{v}|$ – величина скорости.

▷ Из преобразований Лоренца непосредственно следует закон сложения скоростей для $\mathbf{u} = d\mathbf{u}/dt$ и $\mathbf{u}' = d\mathbf{u}'/dt'$:

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} - \gamma \mathbf{v} + \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{u})}{\gamma(1 - \mathbf{v}\mathbf{u})}. \quad (1.29)$$

Отсюда (или из инвариантности интервала $ds^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2 = inv$ вдоль траектории частицы: $dt' \sqrt{1 - \mathbf{u}'^2} = dt \sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$) можно получить:

$$\sqrt{\frac{1 - \mathbf{u}^2}{1 - \mathbf{u}'^2}} = \gamma(1 - \mathbf{v}\mathbf{u}). \quad (1.30)$$

▷ Сила определяется как скорость изменения импульса (1.24). Для частицы, движущейся со скоростью \mathbf{u} , четвёрка величин $\{\mathbf{u}\mathbf{F}, \mathbf{F}\}/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$ преобразуется также как и $\{t, \mathbf{r}\}$ (стр. V₁:141), т.е. по формулам (1.27). Это, с учётом (1.30), даёт преобразование для вектора силы:

$$\frac{\mathbf{F}}{\gamma(1 - \mathbf{v}\mathbf{u})} = \mathbf{F}' + \gamma \mathbf{v}(\mathbf{u}'\mathbf{F}') + \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{F}'). \quad (1.31)$$

(слева величины в системе S , а справа – в S' , поэтому по сравнению с (1.27) изменён знак у скорости: $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$).

▷ Рассмотрим момент времени $t = 0$ (когда начала систем совпадают). Из преобразований Лоренца (1.27) следует ($\Leftarrow H_3$):

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}'^2 = \mathbf{r}^2 + \gamma^2 (\mathbf{v}\mathbf{r})^2, \quad \mathbf{v}\mathbf{r}' = \gamma(\mathbf{v}\mathbf{r}). \quad (1.32)$$

Умножая первое соотношение на \mathbf{u}' из (1.29), имеем ($\Leftarrow H_4$):

$$\mathbf{u}'\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{u}\mathbf{r}}{\gamma(1 - \mathbf{v}\mathbf{u})} - \gamma(\mathbf{v}\mathbf{r}).$$

Подставим в правую часть преобразования (1.31) силу Кулона для неподвижного заряда \mathbf{F}' в системе S' (1.26) и выражения для \mathbf{r}' , $\mathbf{u}'\mathbf{r}'$, $\mathbf{v}\mathbf{r}'$:

$$\frac{\mathbf{F}}{\gamma(1 - \mathbf{v}\mathbf{u})} = \frac{qQ}{r'^3} \{ \mathbf{r}' + \gamma \mathbf{v}(\mathbf{u}'\mathbf{r}') + \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}') \} = \frac{qQ}{r'^3} \left\{ \mathbf{r} + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{u}\mathbf{r})}{1 - \mathbf{v}\mathbf{u}} \right\}.$$

При переходе ко второму равенству учтено, что $(\gamma + 1)\Gamma = \gamma^2$.

Выражая $r' = \sqrt{\mathbf{r}'^2}$ через $r = \sqrt{\mathbf{r}^2}$ при помощи (1.32), окончательно получаем силу, действующую на заряд q в “неподвижной” системе S :

$$\mathbf{F} = \frac{qQ\gamma}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2)^{3/2}} (\mathbf{r} + \mathbf{u} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{r}]). \quad (1.33)$$

Если бы кулоновская сила в (1.26) была регуляризована (стр. 12), то в знаменателе дополнительно появилось бы слагаемое $+a^2$.

▷ Обратим внимание, что при выводе (1.33) дополнитльно использовался постулат инвариантности заряда частицы:

$$Q' = Q. \quad (1.34)$$

Аналогично массе считается, что заряд – это собственная характеристика объекта, не зависящая от его скорости. Если зарядом считать *число* заряженных элементарных частиц (например, электронов), то утверждение (1.34) выглядит достаточно естественным. Впрочем, в классической электродинамике заряд принимает непрерывные значения и к (1.34) нужно относиться именно как к постулату.

▷ Сила (1.33) состоит из двух слагаемых, второе из которых зависит не только от q , но и от скорости пробного заряда \mathbf{u} . Поэтому эту компоненту силы удобно записать при помощи нового поля. В результате получается *сила Лоренца*:

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E} + q [\mathbf{u} \times \mathbf{B}], \quad (1.35)$$

где кроме электрического \mathbf{E} введено *магнитное* \mathbf{B} поле:

$$\mathbf{E} = \frac{Q \gamma \mathbf{r}}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2)^{3/2}}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (1.36)$$

Поле \mathbf{E} связано с выделением части силы не зависящей от характеристики пробного заряда q . Аналогично от силы “отрываются” величины q и \mathbf{u} , что даёт \mathbf{B} . Появление в выражении для силы скорости пробного заряда, неизбежно приводит к необходимости введения двух видов полей.

▷ В книге принята система единиц, в которой $c = 1$. Для восстановления константы c , необходимо умножить величины, имеющие размерность времени в некоторой степени, на c в той же степени. При этом, скорость \mathbf{u} и импульс \mathbf{p} делятся на c , сила \mathbf{F} – на c^2 :

$$t \mapsto ct, \quad \mathbf{u} \mapsto \frac{\mathbf{u}}{c}, \quad \mathbf{p} \mapsto \frac{\mathbf{p}}{c}, \quad \mathbf{F} \mapsto \frac{\mathbf{F}}{c^2}. \quad (1.37)$$

Чтобы *нерелятивистский* закон Кулона (1.1) не изменился, заряд необходимо разделить на c , поэтому из (1.36):

$$Q \mapsto \frac{Q}{c}, \quad \mathbf{E} \mapsto \frac{\mathbf{E}}{c}, \quad \mathbf{B} \mapsto \frac{\mathbf{B}}{c}. \quad (1.38)$$

Так, сила Лоренца и связь полей движущегося со скоростью \mathbf{v} заряда с восстановленной константой c имеют вид:

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E} + \frac{q}{c} [\mathbf{u} \times \mathbf{B}], \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}]. \quad (1.39)$$

Дальше мы будем по-прежнему использовать систему $c = 1$, считая, что восстановление c в любой формуле не составит для Читателя труда.

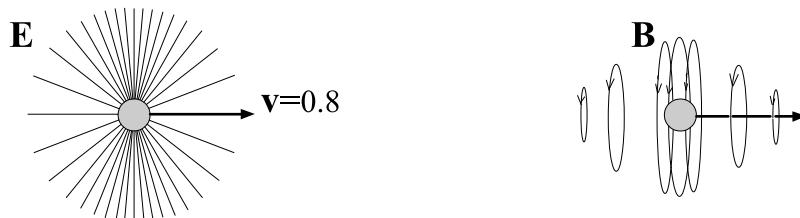
▷ Вводя угол θ между радиус-вектором и скоростью: $\mathbf{v}\mathbf{r} = vr \cos \theta$, перепишем выражение для напряжённости электрического поля (1.36) следующим образом:

$$\mathbf{E} = \frac{Q \mathbf{r}}{r^3} \frac{\gamma}{(1 + \gamma^2 v^2 \cos^2 \theta)^{3/2}}, \quad (1.40)$$

На одном и том же расстоянии напряжённость поля достигает минимального значения в точках, находящихся на линии движения заряда Q , когда $\theta = 0$ и максимального – на плоскости, перпендикулярной к скорости и проходящей через заряд Q ($\theta = \pi/2$). Например, для электрического поля:

$$|\mathbf{E}_{min}| = \frac{1}{\gamma^2} \frac{Q}{r^2}, \quad |\mathbf{E}_{max}| = \gamma \frac{Q}{r^2}. \quad (1.41)$$

“Густота” линий напряженности символизирует величину поля, поэтому электрическое поле движущегося заряда выглядит примерно так, как изображено на левом рисунке:



Образно говоря, силовые линии “сплющиваются”, прижимаясь к плоскости, перпендикулярной скорости заряда \mathbf{v} . На правом рисунке изображены силовые линии магнитного поля. Так как $\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}$, магнитные линии оказываются замкнутыми (правило штопора, стр. V1:300). В отличие от электрической составляющей силы, для которой линии напряжённости начинаются на заряде, магнитное поле не имеет зарядов. Это *релятивистский эффект*, родственный замедлению времени, aberrации и т.п.

Магнитное поле \mathbf{B} (пока силовое воздействие $q [\mathbf{u} \times \mathbf{B}]$, зависящее от скорости пробного заряда) возникает благодаря преобразованию силы между двумя системами отсчёта. Как мы сейчас увидим, уравнения Maxwella – это “лишь” закон Кулона плюс преобразования Лоренца. Магнит, притягивающий металл, является самым первым известным человечеству релятивистским эффектом (после видимого света). Отношение магнитной силы к электрической имеет порядок $uv/c^2 \ll 1$, поэтому магнитные эффекты очень малы. Относительная лёгкость наблюдения магнитной силы связана с электрической нейтральностью (отсутствие заряда) окружающих нас объектов (проводов, магнитов). Она “скрывает” очень большую электрическую составляющую силы $q\mathbf{E}$.

1.5 Дифференциальные уравнения Максвелла

▷ В первых двух разделах, при помощи закона Кулона для неподвижного заряда и принципа суперпозиции, были получены уравнения электростатики (1.10). Выясним, каким дифференциальным уравнениям удовлетворяют электрическое и магнитное поле движущегося заряда (1.36).

Проведя регуляризацию, вычислим ($\ll H_5$) сначала дивергенцию от электрического поля:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \frac{Q \gamma \mathbf{r}}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2 + a^2)^{3/2}} = 4\pi Q \delta_a(\mathbf{r}), \quad (1.42)$$

где, аналогично стр. 12, введена функция:

$$\delta_a(\mathbf{r}) = \frac{3}{4\pi} \frac{\gamma a^2}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2 + a^2)^{5/2}}. \quad (1.43)$$

При $r \neq 0$, если $a \rightarrow 0$, функция δ_a равна нулю. При $r = 0$, $a \rightarrow 0$ она стремится к бесконечности. Убедимся, что в этом пределе δ_a не зависит от скорости \mathbf{v} и равна δ -функции Дирака. Для этого проинтегрируем электрическое поле по сфере, окружающей заряд ($|d\mathbf{S}| = r^2 d\Omega$):

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{Q \gamma}{(1 + \gamma^2 v^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} \sin \theta d\theta.$$

Интегрирование проводится по сферическим углам на фиксированном расстоянии r от заряда. Ось z направлена вдоль скорости. Интеграл по углу ϕ даёт множитель 2π . В интеграле по θ сделаем замену $z = \cos \theta$:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_{-1}^1 \frac{2\pi Q \gamma dz}{(1 + \gamma^2 v^2 z^2)^{3/2}} = \frac{2\pi Q \gamma z}{(1 + \gamma^2 v^2 z^2)^{1/2}} \Big|_{-1}^{+1} = 4\pi Q.$$

Таким образом, поток через сферу, окружающую заряд, при $a \rightarrow 0$ равен $4\pi Q$. Следовательно, для движущегося заряда по-прежнему справедливо электростатическое уравнение:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi Q \delta(\mathbf{r}). \quad (1.44)$$

Несмотря на то, что вектор напряжённости электрического поля *не обладает* сферической симметрией, дивергенция имеет такое же сингулярное значение, как и в случае неподвижного заряда.

▷ Вычислим теперь дивергенцию от магнитного поля (1.36):

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] = -\mathbf{v} \cdot [\nabla \times \mathbf{E}].$$

Так как $\nabla \times \mathbf{r} = 0$, ротор электрического поля (1.36) равен:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -[\mathbf{r} \times \nabla] \frac{Q \gamma}{(r^2 + \gamma^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})^2)^{3/2}} = \frac{3 Q \gamma^3 [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{(r^2 + \gamma^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})^2)^{5/2}}. \quad (1.45)$$

В силу $\mathbf{v} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] = [\mathbf{v} \times \mathbf{v}] \mathbf{r} = 0$, дивергенция магнитного поля равна нулю во всём пространстве, включая положение электрического заряда:

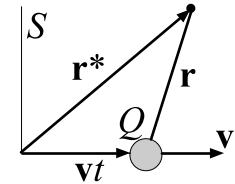
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.46)$$

▷ Выше был выбран момент времени $t' = t = 0$, когда заряд Q находился в началах систем S и S' . Так как заряд вместе с S' движется, поле в фиксированной точке $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{v}t$ неподвижной системы отсчёта S изменяется. Поэтому для произвольного положения заряда необходимо везде подставить $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}^* - \mathbf{v}t$ (звёздочку будем опускать). В частности:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = Q \gamma \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}t}{\{(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)^2 + \gamma^2 (\mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{v}t))^2\}^{3/2}}. \quad (1.47)$$

Производную электрического поля по времени можно вычислить следующим образом (по i сумма от 1 до 3):

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial (r_i - v_i t)} \frac{\partial (r_i - v_i t)}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r_i} v_i = -(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{E}.$$



Используя это соотношение, найдём ротор магнитного поля (1.36):

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] = \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{E}.$$

Воспользовавшись уравнением $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$ и подставив вместо $-(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{E}$ производную электрического поля по времени, получаем:

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.48)$$

где $\mathbf{j} = Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \mathbf{v}$ называется *плотностью тока* точечного заряда.

▷ Аналогично производной электрического поля, производная магнитного поля по времени равна:

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{v} \nabla) [\mathbf{v} \times \mathbf{E}].$$

В силу тождества $(\mathbf{v} \nabla) [\mathbf{v} \times \mathbf{r}] = 0$ ($\lessdot H_6$) можно вынести $\mathbf{v} \times \mathbf{r}$ за оператор набла и получить ($\lessdot H_7$):

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = [\mathbf{v} \times \mathbf{r}] (\mathbf{v} \nabla) \frac{Q \gamma}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v} \mathbf{r})^2)^{3/2}} = \frac{3 Q \gamma (1 + \gamma^2 v^2) [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] (\mathbf{v} \mathbf{r})}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v} \mathbf{r})^2)^{5/2}},$$

где для краткости $t = 0$. Учитывая, что $1 + \gamma^2 v^2 = \gamma^2$, в правой части получим ротор электрического поля (1.45), поэтому:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.49)$$

Если магнитное поле постоянно или отсутствует, ротор электрического поля равен нулю, как это было в электростатике. В общем же случае ротор \mathbf{E} отличен от нуля.

▷ Соотношения (1.44), (1.46), (1.48), (1.49) являются дифференциальными уравнениями, которым удовлетворяют электрическое и магнитное поле движущегося с постоянной скоростью \mathbf{v} заряда Q . Эти уравнения линейны, что является отражением *принципа суперпозиции*. Поэтому, если в пространстве находится множество зарядов, движущихся с различными постоянными скоростями, результирующее электромагнитное поле будет равно векторной сумме напряжённостей полей, создаваемых каждым зарядом. В этом случае плотность заряда и плотность тока равны сумме δ -функций Дирака:

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \sum_a Q_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \sum_a Q_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \mathbf{v}_a,$$

где $\mathbf{r}_a(t)$ – положение a -того заряда Q_a , а \mathbf{v}_a – его скорость. Выше предполагалось, что скорости всех зарядов постоянны. Соответственно, их траектории равны $\mathbf{r}_a(t) = \mathbf{r}_{a0} + \mathbf{v}_a t$, где $\mathbf{r}_{a0}, \mathbf{v}_a = const$.

Как и в электростатике, можно перейти к непрерывному пределу, усредняя точечные заряды в небольшом объёме (стр. 14). Тогда плотность заряда $\rho = \rho(t, \mathbf{r})$ будет “гладкой” функцией координат. Аналогично гладкой становится векторная функция, определяющая плотность тока зарядов $\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \rho \mathbf{v}$, где \mathbf{v} – средняя скорость движения зарядов в объёме.

▷ Выпишем ещё раз полученные уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{array} \quad \begin{array}{l} \nabla \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{array} \right. \quad (1.50)$$

Хотя скорость \mathbf{v} зарядов считалась постоянной, это не означает независимость полей от времени (поле летящего мимо наблюдателя с постоянной скоростью заряда изменяется со временем, что приводит к появлению производных по t). В дальнейшем будем предполагать, что уравнения (1.50) справедливы и для зарядов движущихся с *ускорением*. Это утверждение может быть проверено только экспериментально. Вполне возможен мир, где в уравнениях Максвелла есть дополнительные слагаемые, зависящие от ускорения зарядов (возможно, умноженные на малые константы). Уравнения Максвелла (1.50) позволяют описать множество явлений. Если отвлечься от квантовых эффектов, все предсказания классической теории Максвелла подтверждаются на опыте. Поэтому простейшая их форма (1.50), следующая из закона Кулона и теории относительности имеет достаточно веские основания.

▷ Обратим внимание, что уравнения Максвелла линейны не только по полям, но и по плотностям заряда и тока (например, нет членов вида $\mathbf{E}\rho$). Благодаря этой линейности, можно использовать принцип суперпозиции, суммируя независимо поля, создаваемые различными зарядами (на самом деле, конечно, всё наоборот: постулировав принцип суперпозиции, мы получили линейные уравнения).

Любопытно, что уравнение для дивергенции электрического поля оказывается более общим, чем закон Кулона в исходной записи (1.2). В качестве решения оно имеет как сферически симметричный вектор \mathbf{E} при $\mathbf{v} = 0$, так и более общее решение в виде сплюснутого “ёжика” напряжённостей электрического поля движущегося заряда (1.36).

▷ Уравнения Максвелла (1.50) должны быть дополнены силой Лоренца, действующей со стороны электромагнитных полей на движущийся со скоростью \mathbf{u} точечный заряд q :

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E} + q [\mathbf{u} \times \mathbf{B}]. \quad (1.51)$$

Обычно задают распределения плотности заряда ρ и тока \mathbf{j} , затем, решая уравнения Максвелла, получают поля \mathbf{E} и \mathbf{B} . С их помощью вычисляется величина силы, действующая на небольшой заряд q , движущийся в этом электромагнитном поле. Впрочем, далее будет рассмотрена и более общая постановка задачи, когда заряды “создающие” поля и заряды, двигающиеся в этих полях рассматриваются равноправным образом.

1.6 Сохранение заряда

▷ Два из 4-х уравнений Максвелла (1.50) содержат в себе важное соотношение, связывающее плотности зарядов и токов. Умножим уравнение для ротора магнитного поля $\nabla \times \mathbf{B}$ слева на оператор ∇ :

$$\nabla[\nabla \times \mathbf{B}] = [\nabla \times \nabla] \mathbf{B} = 0 = 4\pi \nabla \mathbf{j} + \frac{\partial \nabla \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.52)$$

Учитывая, что $\nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho$, получим *уравнение непрерывности*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (1.53)$$

которое выражает *закон сохранения заряда*. Это ясно видно, если уравнение непрерывности, при помощи теоремы Гаусса, переписать в интегральной форме, проинтегрировав по некоторому объёму V :

$$I = -\frac{dQ}{dt}, \quad (1.54)$$

где введены полный заряд Q , находящийся внутри объёма, и *ток* I :

$$Q = \int_V \rho dV, \quad I = \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (1.55)$$

Таким образом, изменение заряда в объёме (производная по времени) связано с током I , проходящим через поверхность, которая окружает объём. Рассмотрим перемещение зарядов через поверхность подробнее.

▷ Пусть v_n – нормальная (перпендикулярная) к поверхности составляющая скорости зарядов. Выделим небольшую площадку на поверхности и прилегающий к ней небольшой объём $dS v_n dt$ (правый рисунок):



Количество заряда, которое через площадку dS покидает этот объём за время dt , равно

$$dQ = \rho dV = \rho v_n dt dS = (\rho \mathbf{v} d\mathbf{S}) dt = \mathbf{j} d\mathbf{S} dt.$$

Другими словами, за время dt из объёма dV уйдут все заряды, имеющие в направлении $d\mathbf{S}$ скорость v_n и находящиеся не далее расстояния $v_n dt$ от поверхности. Если \mathbf{j} направлен наружу, то заряд в объёме уменьшается, если вовнутрь – увеличивается. Говоря об уменьшающемся заряде, мы считаем, что он имеет положительный знак.

▷ Отметим локальный характер закона сохранения в форме уравнения непрерывности (1.53). Изменение заряда сколь угодно малом объёме сопровождается перемещением зарядов через границу этого объёма. В принципе, можно представить себе и глобальный закон сохранения. Например, заряд, исчезнув в одном месте, одновременно появляется в другом, отдалённом месте. Однако такой закон сохранения противоречил бы теории относительности. Действительно, в силу относительности одновременности, подобное исчезновение и появление одновременное в одной системе отсчёта, не будет одновременным в других системах. Если мы хотим, чтобы закон сохранения выполнялся для всех наблюдателей, то он должен иметь локальный характер.

Сохранение заряда выглядит достаточно простым и естественным законом. Особенно, если под зарядом понимать число заряженных частиц. Электрон имеет отрицательный заряд, протон имеет такой же по модулю, но положительный заряд, и т.д. Если частицы не уничтожаются, то заряд в объёме равен числу частиц с положительным зарядом, минус число частиц с отрицательным зарядом. Наблюдения за различными реакциями взаимодействия элементарных частиц показывают, что, даже если частицы уничтожаются или рождаются, суммарный заряд, тем не менее, всегда остаётся неизменным.

▷ В классической электродинамике заряд принимает непрерывные значения. На самом деле наш мир устроен таким образом, что существует минимальное значение заряда. Он характеризуется безразмерной *постоянной тонкой структуры*:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137.035\,999\,679(94),$$

где e – заряд электрона, \hbar – постоянная Планка и c – скорости света. Заряды элементарных частиц равны или кратны заряду электрона. Исключение составляют кварки – структурные элементы сильно взаимодействующих частиц адронов (например, протона и нейтрона). Их заряд равен $1/3$ и $2/3$ от заряда электрона. Впрочем, в свободном состоянии эти “частицы” ни когда не наблюдались.

Причина квантования заряда пока не вполне понятна, как и не понята природа значения безразмерной константы α . Например, протон, в отличии от электрона, имеет довольно сложную структуру. Тем не менее их заряды по модулю равны. Отметим, что благодаря квантованию заряда, окружающее вещество, в конечном счёте, является электронейтральным. Если бы заряды принимали произвольные значения, образование нейтральных атомов было бы крайне затруднительно.

1.7 Интегральные уравнения Максвелла

▷ Дополнительное понимание физического смысла уравнений Максвелла возникает при их записи в интегральном виде. Для этого необходимы теоремы Гаусса и Стокса (стр. 306). Прежде всего запишем *закон Гаусса* для электрического поля:

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho \quad \Rightarrow \quad \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi Q. \quad (1.56)$$

Как мы видели выше, закон Гаусса – это чуть больше, чем закон Кулона. Ему удовлетворяет как сферически симметричное электрическое поле неподвижного заряда, так и “сплюснутое” поле движущегося заряда.

Аналогичный закон Гаусса для магнитного поля:

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad (1.57)$$

свидетельствует об отсутствии магнитных зарядов. Подчеркнём ещё раз, что магнитное поле – это релятивистский эффект. Его источником является движение заряженных частиц.

Ниже на рисунке условно изображены интегральные теоремы Гаусса для электрического и магнитного полей:



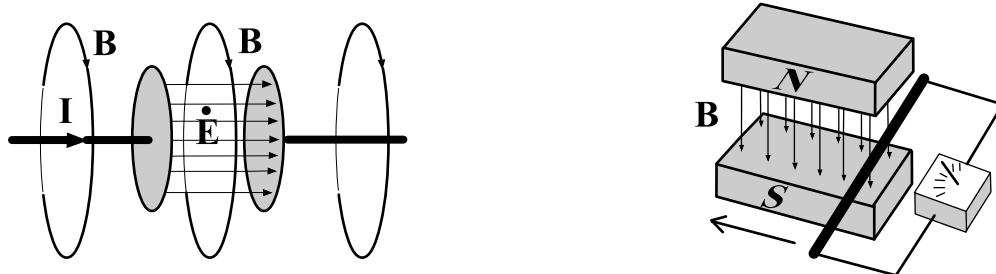
Если один или несколько зарядов находятся внутри объёма, окружённого поверхностью S , то их силовые линии будут “торчать наружу”, в результате чего поток через поверхность будет ненулевым. Напомним, что вектор элемента поверхности $d\mathbf{S}$ направлен перпендикулярно к поверхности и *наружу* из объёма. Поэтому, если все силовые линии выходят из объёма, то скалярное произведение $\mathbf{E} d\mathbf{S}$ оказывается положительным, а полный поток – ненулевым.

Для магнитного поля поток всегда равен нулю, независимо от того, находится ли движущийся заряд внутри или снаружи объёма. На рисунке выше он движется от читателя. Иногда на основании симметрии ковариантных уравнений электродинамики, которые рассмотрены в главе 4, высказывается гипотеза о возможности существования магнитных монополей (магнитных зарядов). Обнаружены они пока не были.

▷ Для ротора магнитного поля интегральная форма имеет вид:

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \oint_L \mathbf{B} d\mathbf{r} = 4\pi I + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S}, \quad (1.58)$$

где I – это ток зарядов (1.54), проходящих через площадь S . Из этого уравнения следует, что циркулирующее магнитное поле возникает как вокруг движущихся зарядов (ток), так и вокруг переменного электрического поля. Это уравнение часто называется *законом Ампера-Максвелла*.



Если в цепи переменного электрического тока (меняющего своё направление) находится конденсатор (две металлические пластины), то между ними возникает переменное электрическое поле. Оно, в свою очередь, порождает циркуляцию магнитного поля, такую же, как и вокруг проводов, по которым течёт ток (выше первый рисунок).

▷ Ротор электрического поля, в силу уравнений Максвелла, в общем случае не равен нулю:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (1.59)$$

Это уравнение выражает *закон электромагнитной индукции Фарадея*. Интегральная версия закона Фарадея, как и остальных интегральных соотношений, предполагает простую топологию контура и ограниченной им поверхности. Это означает, что контур, деформируя без разрывов, можно превратить в окружность, а поверхность деформировать в круг, находящийся внутри этой окружности. Допустимыми являются конфигурации контура и поверхности, которые из этого круга можно получить любыми изгибаниями и растягиваниями. Возможны также и более сложные топологии контуров и поверхностей (например, с дырками), требующие более аккуратного использование теоремы Стокса [1].

Заметим, что не стоит считать изменение потока магнитного поля причиной, а циркуляцию электрического поля – следствием. Функции \mathbf{E} и \mathbf{B} входят в уравнения Максвелла равноправным образом. Если есть циркуляция электрического поля, то будет присутствовать переменное магнитное поле. Как и наоборот.

▷ Закону Фарадея (1.58) можно придать более общую форму, справедливую и для контуров, меняющихся со временем. Пусть вдоль замкнутого контура L расположен *тонкий* проводник, в котором могут двигаться заряды. Запишем (1.59) в следующем виде:

$$\mathfrak{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (1.60)$$

где Φ – поток магнитного поля через поверхность, ограниченную контуром, а

$$\mathfrak{E} = \oint_L (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{r} \quad (1.61)$$

– *электродвижущая сила* (ЭДС). Это суммарная сила Лоренца, действующая на единичный заряд вдоль замкнутого контура. Для *неподвижного* контура магнитная составляющая ЭДС роли не играет. В этом случае скорость \mathbf{v} параллельна смещению $d\mathbf{r}$ вдоль контура и смешанное произведение $[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] d\mathbf{r} = [d\mathbf{r} \times \mathbf{v}] \mathbf{B} = 0$.

Закон Фарадея (1.60) справедлив и в случае постоянного магнитного поля, если контур меняется. Он может изменять свою площадь, менять ориентацию (например, вращаться в магнитном поле) или просто двигаться (второй рисунок на предыдущей странице).

Если в этих случаях происходит изменение магнитного потока, то в проводнике возникнет ЭДС и, следовательно, ток. Когда магнитное поле не меняется во времени, причина возникновения ЭДС кроется не в уравнении Максвелла $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, а в силе Лоренца. Рассмотрим, например, проводник в виде окружности, расположенной перпендикулярно однородному (постоянному) магнитному полю (электрическое поле отсутствует). Пусть радиус окружности увеличивается со временем $r = r(t)$. Соответственно увеличивается площадь поверхности, которую будем считать плоским кругом. Любой заряд в проводнике, в том числе, движется в радиальном направлении со скоростью $v = dr/dt$. В результате магнитной составляющей в силе Лоренца возникает ЭДС (1.61), равная $vB 2\pi r$, где $2\pi r$ – длина окружности. С другой стороны, изменение потока магнитного поля, возникающее из-за изменения площади, равно по модулю ЭДС:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(B\pi r^2)}{dt} = 2\pi r v B.$$

Стоит проанализировать знак, определяемый направлением магнитного поля и свойствами векторного произведения в определении ЭДС. Таким образом, закон Фарадея в форме (1.60) определяется сразу двумя факторами – одним из уравнений Максвелла и силой Лоренца.

• В основе теории Максвелла лежало множество экспериментов и теоретических размышлений. Хотя свойства магнитов были известны с очень древних времён, только в 1820 г. Гансом Христианом Эрстедом было обнаружено, что ток в проводнике, как и магнит, действует на стрелку компаса. В этом же году Андре Мари Ампер открыл аналогичное взаимодействие между двумя токами. Он связал природу магнетизма с круговыми токами, существующими в магнитах. Теперь известно, что свойства магнитной руды в основном определяются магнитным моментом электронов. Последний, впрочем, также связан с вращательной степенью свободы электрона. Следующим важным этапом явились опыты Майкла Фарадея (1831 г.), открывшего, что перемещающийся магнит приводит к появлению электрического тока в проводнике.

Работы Фарадея по теоретическому осмыслению природы электромагнетизма оказали сильное воздействие на Джеймса Клерка Максвелла, который придал им форму дифференциальных уравнений (1855 г.). Из этих уравнений следовало существование электромагнитных волн. Выяснение единой природы кулоновского взаимодействия, магнитных свойств вещества и света явилось величайшим достижением физики со времён построения классической механики и теории гравитации Ньютона. Современной, компактной форме записи уравнений Максвелла мы обязаны Хевисайду, Герцу и Гиббсу.

▷* Интересно выяснить, в какой степени уравнения Максвелла являются независимыми, считая, что выполняется уравнение непрерывности (1.53). Подставим в (1.52) вместо ∇j из уравнения непрерывности производную $-\partial\rho/\partial t$. Аналогично можно взять дивергенцию от уравнения $\nabla \times E = -\partial B/\partial t$. В результате получатся два уравнения:

$$\frac{\partial(\nabla E - 4\pi\rho)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \nabla B}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, из уравнений Максвелла для роторов и уравнения непрерывности “почти” следуют уравнения для дивергенций:

$$\nabla E = 4\pi\rho + f(x, y, z), \quad \nabla B = g(x, y, z),$$

где f и g – произвольные функции, которые зависят от координат, но не зависят от времени. Они на самом деле равны нулю, однако доказать это строго нельзя. В этом смысле все 4 уравнения Максвелла являются независимыми и все они требуются для последовательного описания электромагнитного взаимодействия. Говоря о 4-х уравнениях, не стоит забывать, что их на самом деле 8 (каждое уравнение для роторов является векторным и эквивалентно трём уравнениям в компонентах).

Глава 2

Магнитное поле

В главе рассматриваются некоторые решения уравнений Максвелла, связанные с магнитным полем. Благодаря электронейтральности окружающего вещества, магнитные свойства движущихся зарядов легко наблюдаются. Если токи постоянны, то возникающие конфигурации магнитного поля являются предметом изучения магнитостатики. При произвольном распределении зарядов и токов, получение выражения для электрического и магнитного полей является непростой задачей. Она существенно упрощается, если поля вычисляются вдали от компактной системы зарядов. Для этого, аналогично электрическому дипольному моменту будет введен магнитный дипольный момент.

При изучении релятивистских свойств электромагнитного поля важную роль играют преобразования Лоренца для напряжённостей поля. Два из четырёх уравнений Максвелла можно тождественно выполнить, введя скалярный и векторный потенциалы. Будут получены уравнения, которым они удовлетворяют и исследованы их свойства при преобразованиях Лоренца.

2.1 Магнитостатика

- Рассмотрим конфигурацию токов, при которой напряжённости поля не зависят от времени. В этом случае уравнения Максвелла для магнитного поля имеют вид:

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}. \quad (2.1)$$

В случаях, обладающих явной симметрией, магнитное поле можно найти при помощи интегральных теорем. Рассмотрим, например, бесконечный проводник, по которому течёт постоянный ток. Он задаёт выделенное направление, поэтому возможны три разновидности силовых линий с цилиндрической симметрией.



Однако уравнениям магнитостатики удовлетворяет только третья картинка. Действительно, запишем интегральную форму уравнений (2.1):

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad \oint_L \mathbf{B} dr = 4\pi I, \quad (2.2)$$

где I – ток, текущий через поверхность, которая имеет своей границей контур L . Выберем для первого интеграла в качестве поверхности цилиндр с осью, проходящей через проводник. Вектор площади $d\mathbf{S}$ перпендикулярен поверхности и конфигурация поля на первой картинке приводит к ненулевому потоку (через боковую поверхность цилиндра). В качестве контура для второго интеграла (2.2) возьмём окружность радиуса R , симметрично окружающую проводник. Вектор dr касателен контуру, поэтому вторая конфигурация приводит к нулевой циркуляции (\mathbf{B} перпендикулярен контуру). Отличную от нуля циркуляцию имеет только третий случай:

$$\oint \mathbf{B} dr = |\mathbf{B}| 2\pi R = 4\pi I \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{B}| = \frac{2I}{R},$$

где R – расстояние от проводника. Обратим внимание, что напряжённость магнитного поля убывает, как $1/R$. Такая же зависимость от расстояния справедлива и для электрического поля бесконечной заряженной нити (стр. 15). Хотя в этом случае вектор напряжённости \mathbf{E} направлен так, как это изображено выше на первом рисунке.

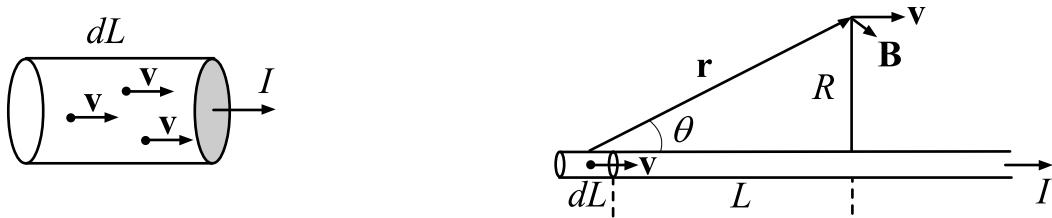
▷ Получим этот же результат, просуммировав магнитные поля от множества точечных зарядов. Будем считать, что скорости зарядов одинаковы и ток I постоянен. По определению, текущий через проводник ток I – это количество заряда dQ , проходящее через сечение провода в единицу времени dt . Если взять маленький участок провода dL , то его сечение за время dt пересечёт заряд, движущийся со скоростью $v = dL/dt$:

$$dQ = Idt = IdL/v.$$

Магнитное поле от такого заряда, в соответствии с (1.36) равно:

$$d\mathbf{B} = \frac{dQ \gamma [\mathbf{v} \times \mathbf{r}]}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2)^{3/2}}. \quad (2.3)$$

Введём угол θ между направлением скорости \mathbf{v} и радиус-вектором \mathbf{r} :



Если R – кратчайшее расстояние от точки наблюдения к проводнику, то

$$\cos \theta = \frac{L}{r} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{r}}{vr}, \quad \sin \theta = \frac{R}{r}, \quad r = \sqrt{L^2 + R^2}.$$

Векторное произведение $\mathbf{v} \times \mathbf{r}$ направлено по окружности к проводнику и по модулю равно $|\mathbf{v} \times \mathbf{r}| = vr \sin \theta$, поэтому:

$$|\mathbf{B}| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I \gamma r \sin \theta dL}{(r^2 + \gamma^2 v^2 r^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I \gamma R dL}{(R^2 + \gamma^2 L^2)^{3/2}} = \frac{I}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}},$$

где сделана замена $x = \gamma L/R$. Дифференцируя, можно проверить, что первообразная интеграла – это $x/\sqrt{1+x^2}$. Поэтому определённый интеграл равен 2 и $|\mathbf{B}| = 2I/R$.

Если заряды всё время приходят из бесконечности и туда же уходят, то такое магнитное поле будет стационарным. В отличии от этого, магнитное поле одиночного заряда зависит от времени и по мере удаления заряда от точки наблюдения уменьшается.

- Уравнение магнитостатики $\nabla \mathbf{B} = 0$ можно тождественно выполнить, если ввести *векторный потенциал*:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.4)$$

Так как векторное произведение вектора самого на себя равно нулю, по правилу “выталкивания” имеем: $\nabla \mathbf{B} = \nabla[\nabla \times \mathbf{A}] = [\nabla \times \nabla] \mathbf{A} = 0$. По этой же причине, прибавление к векторному потенциальному градиенту произвольной скалярной функции не меняет магнитного поля:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}. \quad (2.5)$$

Выбор той или иной функции f позволяет наложить на векторный потенциал *множество определённых условий*. Они называются *калибровочными условиями*. Например, можно потребовать, чтобы выполнялась *кулоновская калибровка*:

$$\nabla \mathbf{A} = 0. \quad (2.6)$$

Действительно, пусть \mathbf{A}' не удовлетворяет этому условию и в правой части (2.6) стоит не ноль, а некоторая функция: $\nabla \mathbf{A}' = g$. Перейдём к другому потенциальному градиенту $\nabla \mathbf{A}' = \nabla(\mathbf{A} + \nabla f) = \nabla \mathbf{A} + \Delta f = g$. Если выбрать функцию f как решение уравнения Лапласа $\Delta f = g$, то векторный потенциал \mathbf{A} будет удовлетворять кулоновской калибровке. В этой калибровке второе уравнение магнитостатики (2.1) приобретает вид уравнения Лапласа. По формуле “бац минус цаб” (стр. V₁:302) имеем:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}] = \nabla(\nabla \mathbf{A}) - (\nabla \nabla) \mathbf{A} = 4\pi \mathbf{j}.$$

Первое слагаемое в кулоновской калибровке равно нулю, поэтому:

$$\Delta \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{j}. \quad (2.7)$$

Это уравнение для каждой компоненты имеет вид уравнения (1.12), поэтому для ограниченных токов можно сразу записать его решение:

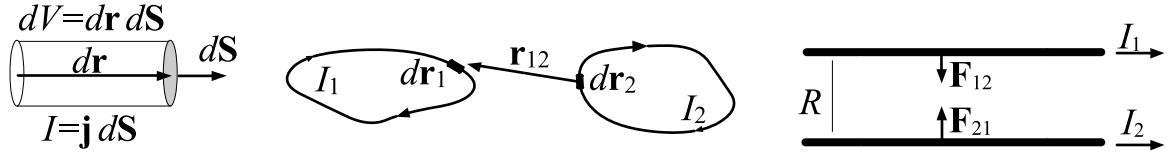
$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|}. \quad (2.8)$$

Взяв ротор, получаем магнитное поле:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{r})}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^3} d^3 \mathbf{r}, \quad (2.9)$$

где учтено, что $\nabla(1/|\mathbf{x}|) = -\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3$ и под интегралом векторы в векторном произведении переставлены местами: $-(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{r})$.

▷ Найдём силу магнитного взаимодействия между двумя проводниками. Для тонкого проводника плотность тока \mathbf{j} сосредоточена вдоль линии. Поэтому объёмный интеграл (2.9) превращается в контурный: $\mathbf{j} d^3\mathbf{r} \mapsto I d\mathbf{r}$, где вектор $d\mathbf{r}$ направлен вдоль направления тока (первый рисунок):



Если \mathbf{r} направлен от $d\mathbf{r}$ в точку наблюдения, то магнитное поле (2.9) получается при интегрировании выражения:

$$d\mathbf{B} = I \frac{d\mathbf{r} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (2.10)$$

Сила, действующая на второй проводник, определяется силой Лоренца, которая в непрерывном случае имеет вид:

$$\mathbf{F} = \int [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] d^3\mathbf{r} = \sum Q_k [\mathbf{u}_k \times \mathbf{B}], \quad (2.11)$$

где сумма записана для системы точечных зарядов, имеющих плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum Q_k \mathbf{u}_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)$. Поэтому сила взаимодействия между двумя элементами тонких проводников равна:

$$d\mathbf{F} = I [d\mathbf{r} \times d\mathbf{B}]. \quad (2.12)$$

Подставляя (2.10), получаем:

$$\frac{d\mathbf{F}_{12}}{I_1 I_2} = \frac{d\mathbf{r}_1 \times [d\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_{12}]}{|\mathbf{r}_{12}|^3} = \frac{(\mathbf{r}_{12} d\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_{12}|^3} d\mathbf{r}_2 - \frac{\mathbf{r}_{12}}{|\mathbf{r}_{12}|^3} (d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2),$$

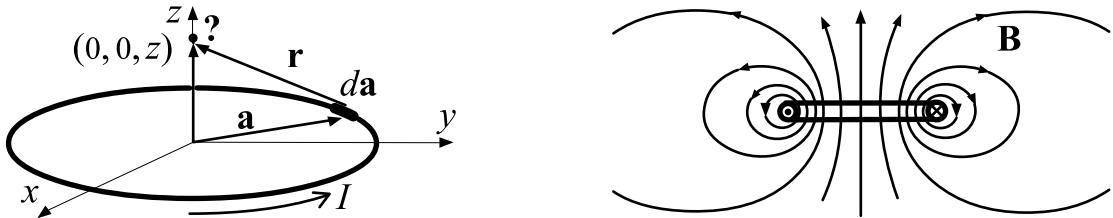
где $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и во втором равенстве раскрыто двойное векторное произведение. Первое слагаемое является полным дифференциалом ($\Leftarrow H_8$) по \mathbf{r}_1 : $-d(1/|\mathbf{r}_{12}|)$. Поэтому при интегрировании по замкнутому контуру или проводнику, приходящему и уходящему в бесконечность, это слагаемое равно нулю. В результате:

$$\mathbf{F}_{12} = -I_1 I_2 \int \int \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2). \quad (2.13)$$

В частности, два линейных параллельных проводника на единицу длины притягиваются с силой $F = 2I_1 I_2 / R$, где R – расстояние между проводниками и токи направлены в одну сторону ($\Leftarrow H_9$). Если же токи противоположны, то проводники отталкиваются.

2.2 Замкнутый контур с током

- Применим формулу (2.10) для нахождения магнитного поля, создаваемого постоянным током I , текущим по круговому контуру радиуса a . Пусть окружность контура лежит в плоскости x, y с центром в начале координат. Найдём поле на оси z . Проведём вектор $\mathbf{a} = \{ac_\phi, as_\phi, 0\}$ от начала координат к некоторой точке окружности, где $c_\phi = \cos \phi$, и т.д.



Радиус-вектор, соединяющий точку на контуре и точку наблюдения, по правилу сложения векторов равен:

$$\mathbf{r} = \{0, 0, z\} - \mathbf{a} = \{-a c_\phi, -a s_\phi, z\}, \quad \mathbf{r}^2 = a^2 + z^2.$$

Смещение вдоль контура равно $d\mathbf{a} = \{-as_\phi d\phi, ac_\phi d\phi, 0\}$ (в (2.10) оно обозначено как $d\mathbf{r}$). Поэтому:

$$d\mathbf{a} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a s_\phi & a c_\phi & 0 \\ -a c_\phi & -a s_\phi & z \end{vmatrix} d\phi = \{a z c_\phi, a z s_\phi, a^2\} d\phi.$$

Магнитное поле, в соответствии с (2.10), равно:

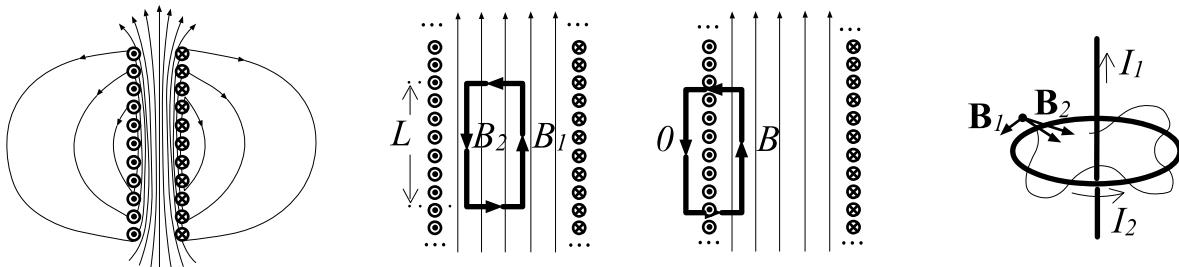
$$\mathbf{B} = I \int_L \frac{d\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{r^3} = I \int_0^{2\pi} \frac{\{a z c_\phi, a z s_\phi, a^2\}}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\phi = \{0, 0, 1\} \frac{2\pi a^2 I}{(a^2 + z^2)^{3/2}},$$

где учтено, что интегралы по периоду косинуса и синуса равны нулю. Таким образом, магнитное поле на оси z направлено вдоль этой оси и убывает с ростом z , как $1/z^3$.

Для вычисления поля в произвольной точке необходимо проделать аналогичные выкладки. В этом случае возникает эллиптический интеграл. Если же контур с током имеет некруговую форму ($a = a(\phi)$), интеграл, скорее всего, не сводится к элементарным функциям, но будет одномерным (по углу ϕ), поэтому его несложно вычислить численно.

Выше на правом рисунке приведены линии магнитного поля, возникающей вокруг кольцевого тока (рисунок выполнен в сечении). Магнитные линии замкнуты (как и в случае движущегося точечного заряда или бесконечного проводника). Исключением является поле на оси z , силовая линия которого приходит из бесконечности и в бесконечность уходит.

▷ Из “поставленных стопкой” круговых колец с током можно составить соленоид. На практике его делают при помощи единого проводника, скрученного в спираль. Если шаг спирали много меньше её радиуса, то такая спираль эквивалентна “стопке” колец (ниже первый рисунок). Внутри соленоида магнитное поле “плотное” и его силовые линии почти параллельны. Вне соленоида напряжённость поля очень небольшая. В пределе бесконечного соленоида (бесконечная стопка) магнитное поле снаружи оказывается равным нулю, а внутри постоянно и однородно.



Это можно доказать при помощи простых рассуждений. Из соображений симметрии магнитные силовые линии должны быть параллельны. Пусть вне соленоида магнитное поле убывает при удалении от его оси. В силу интегральной версии уравнения $\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}$, интеграл $\mathbf{B} d\mathbf{r}$ по замкнутому контуру равен току, проходящему через натянутую на него поверхность. Если тока нет, интеграл равен нулю. Для контура прямоугольной формы, интеграл по его горизонтальным сторонам равен нулю (\mathbf{B} перпендикулярно $d\mathbf{r}$), а по вертикальным: $(B_1 - B_2)L$, где L – длина стороны прямоугольника, а B_1 и B_2 – значения поля на его сторонах. Поэтому для контура внутри соленоида и снаружи $B_1 = B_2$ независимо от его положения. Поэтому $\mathbf{B} = \text{const}$. Аналогично, вне соленоида на бесконечности $\mathbf{B} = 0$ и из $\mathbf{B} = \text{const}$ следует, что поле там везде будет равно нулю. Если контур охватывает ток (выше третий рисунок), то $BL = 4\pi I$, поэтому однородное поле внутри соленоида равно $B = 4\pi I/L$, где I/L – ток на единицу высоты “стопки”.

В качестве упражнения предлагается проверить, что векторный потенциал внутри соленоида равен $\mathbf{A} = (B/2)[\mathbf{k} \times \mathbf{r}]$, где \mathbf{k} – единичный вектор вдоль оси. Вне соленоида потенциал равен $\mathbf{A} = (Ba^2/2)[\mathbf{k} \times \mathbf{r}]/R$, где $R = (\mathbf{r}^2 - (\mathbf{k}\mathbf{r}))^{1/2}$ – расстояние от оси до точки наблюдения.

В заключение заметим, что магнитные силовые линии могут иметь бесконечную длину, но находиться в ограниченном пространстве. Так, если к магнитному полю кольца добавляется магнитное поле бесконечного тока вдоль оси z , то их сумма в общем случае даёт незамкнутую силовую линию, плотно “навивающуюся” на торообразную поверхность, полностью её заполняя (выше последний рисунок) [26].

2.3 Магнитный дипольный момент

- Если замкнутые токи локализованы в пространстве, то можно получить приближенное выражение для магнитного поля на больших расстояниях от такого тока. Будем считать, что $r \ll |\mathbf{x}|$, и, аналогично дипольному разложению (стр. 18), подставим ряд для $1/|\mathbf{x} - \mathbf{r}|$ в (2.8):

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} + \frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \int (\mathbf{x}\mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}.$$

Интеграл по замкнутым стационарным токам внутри объёма равен нулю (первый интеграл). Например, для тонкого проводника $\mathbf{j} d^3\mathbf{r} \mapsto I d\mathbf{r}$ и объёмный интеграл переходит в контурный, равный нулю для замкнутого контура (замкнутого проводника). Подынтегральную функцию второго интеграла можно записать следующим образом:

$$(\mathbf{x}\mathbf{r}) \mathbf{j} = (\mathbf{x}\mathbf{j}) \mathbf{r} - \mathbf{x} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{j}]. \quad (2.14)$$

Уравнение непрерывности для сохранения заряда (1.53), стр. 28 в стационарном случае имеет вид $\nabla \mathbf{j} = 0$. Учитывая это, раскроем производную произведения ($\lessdot H_{10}$):

$$\nabla(r_i r_j \mathbf{j}) = r_j j_i + r_i j_j \quad \Rightarrow \quad \int r_i j_j d^3\mathbf{r} = - \int j_i r_j d^3\mathbf{r}.$$

При получении интегрального соотношения учтено, что $\nabla(r_i r_j \mathbf{j})$ при интегрировании по объёму переходит в поверхностный интеграл, который равен нулю, так как токи локализованы и из объёма не вытекают. Поэтому интеграл от левой части (2.14) равен с обратным знаком интегралу от первого слагаемого в правой части: $((\mathbf{x}\mathbf{r}) \mathbf{j})_i = x_j r_j j_i$, $((\mathbf{x}\mathbf{j}) \mathbf{r})_i = x_j j_j r_i$. В результате для $\nabla \mathbf{j} = 0$ и любого постоянного вектора \mathbf{x} имеем:

$$\int (\mathbf{x}\mathbf{r}) \mathbf{j} d^3\mathbf{r} = -\frac{1}{2} \int \mathbf{x} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] d^3\mathbf{r}. \quad (2.15)$$

Введя *магнитный момент*:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})] d^3\mathbf{r}, \quad (2.16)$$

потенциал магнитного поля можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}. \quad (2.17)$$

Взяв ротор от этого выражения, получаем магнитное поле:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{3(\mathbf{n}\mathbf{m}) \mathbf{n} - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3}, \quad (2.18)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ – единичный вектор в направлении радиус-вектора \mathbf{x} .

▷ Пусть постоянный ток I течёт по плоскому витку тонкого провода. Аналогично выводу выражения для силы взаимодействия двух проводников (стр. 39) перейдём в (2.16) от интеграла по объёму к контурному интегралу ($\mathbf{j} d^3\mathbf{r} \mapsto I d\mathbf{r}$):

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r}. \quad (2.19)$$

Площадь треугольника, построенного на векторах \mathbf{r} и $d\mathbf{r}$, равна половине площади параллелограмма $[\mathbf{r} \times d\mathbf{r}] / 2$ (ниже первый рисунок), поэтому

$$\mathbf{m} = I S \mathbf{k}, \quad (2.20)$$

где S – площадь витка провода, а \mathbf{k} – нормаль к нему. В частности, магнитный момент кольцевого тока радиуса R равен $\mathbf{m} = \pi R^2 I \mathbf{k}$.

На больших расстояниях от тока магнитное поле (2.18) похоже на поле электрического диполя. Однако для диполя линии напряжённости электрического поля начинаются на зарядах. Для кольцевого тока они “нанизаны” вокруг кольца аналогично тому, как они окружали бесконечный прямолинейный ток (второй рисунок):



▷ Найдём магнитный момент (2.16) системы точечных частиц, имеющих постоянное отношение заряда к массе $Q_k/m_k = Q/m = const$ (например, как у электронов):

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \oint \mathbf{r} \times \left[\sum_{k=1}^n Q_k \mathbf{u}_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \right] d^3\mathbf{r} = \frac{Q}{2m} \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times m \mathbf{u}_k.$$

Вводя *нерелятивистский* момент импульса k -й частицы $\mathbf{L}_k = \mathbf{r}_k \times m \mathbf{u}_k$, получаем:

$$\mathbf{m} = \frac{Q}{2m} \mathbf{L}, \quad (2.21)$$

где в правой части стоит суммарный *нерелятивистский* момент импульса \mathbf{L} системы. В ряде стационарных случаев (например, для кольцевого тока) скорость частиц по модулю постоянна. Тогда для скорости можно записать $\mathbf{u}_k = \mathbf{p}_k / \mathbb{E}$, где \mathbf{p}_k , \mathbb{E} – *релятивистские* импульс и энергия. Так как энергия для всех частиц одинакова, её можно вынести за сумму, и в (2.21) будет стоять *релятивистский* момент импульса и $m \mapsto \mathbb{E}$.

• Магнитный момент определяет силу и момент силы, действующие на “маленький” замкнутый ток во внешнем магнитном поле. Запишем разложение в ряд Тейлора по каждой компоненте слабо неоднородного магнитного поля в окрестности начала координат (см. также стр. 19):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 + (\mathbf{r} \nabla) \mathbf{B}_0 + \dots,$$

где $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}(\mathbf{0})$ и производные от магнитного поля вычислены в точке $\mathbf{r} = 0$. Подставляя разложение для магнитного поля в интегральное представление силы Лоренца (2.11), имеем:

$$\mathbf{F} = \int [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] d^3\mathbf{r} = -\mathbf{B}_0 \times \int \mathbf{j} d^3\mathbf{r} + \int [\mathbf{j} \times (\mathbf{r} \nabla) \mathbf{B}_0] d^3\mathbf{r}.$$

Для замкнутого ограниченного тока первый интеграл от \mathbf{j} равен нулю. Для вычисления второго интеграла заметим, что ротор магнитного поля в точке, где нет токов, *которые создают* это поле, равен нулю. Поэтому

$$0 = \mathbf{r} \times [\nabla \times \mathbf{B}_0] = \nabla(\mathbf{r} \mathbf{B}_0) - (\mathbf{r} \nabla) \mathbf{B}_0, \quad (2.22)$$

где здесь и ниже оператор набла действует *только* на магнитное поле. Таким образом, подынтегральная функция равна:

$$\mathbf{j} \times (\mathbf{r} \nabla) \mathbf{B}_0 = \mathbf{j} \times \nabla(\mathbf{r} \mathbf{B}_0) = -\nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r} \mathbf{B}_0).$$

Учитывая тождество (2.15), справедливое для $\nabla \mathbf{j} = 0$ и любого постоянного (относительно переменной интегрирования) вектора, в качестве которого возьмём \mathbf{B}_0 , имеем:

$$\mathbf{F} = -\nabla \times \int (\mathbf{B}_0 \mathbf{r}) \mathbf{j} d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2} \nabla \times \int [\mathbf{B}_0 \times [\mathbf{r} \times \mathbf{j}]] d^3\mathbf{r}.$$

Вводя магнитный момент \mathbf{m} , получаем силу, действующую на токи, ограниченные в пространстве, которые находятся в слабо неоднородном поле:

$$\mathbf{F} = \nabla \times [\mathbf{B}_0 \times \mathbf{m}] = (\mathbf{m} \nabla) \mathbf{B}_0 = \nabla(\mathbf{m} \mathbf{B}_0), \quad (2.23)$$

где учтено $\nabla \mathbf{B}_0 = 0$ и (2.22) с \mathbf{m} вместо \mathbf{r} . Производные ∇ действуют только на магнитное поле и вычисляются в “центре” замкнутого тока, т.е. в точке относительно которой рассчитывается магнитный момент. Градиент потенциальной энергии равен с обратным знаком силе $\mathbf{F} = -\nabla U$. Поэтому потенциальная энергия маленького замкнутого тока равна

$$U = -\mathbf{m} \mathbf{B}_0. \quad (2.24)$$

Как и для электрического диполя (стр. 18), потенциальная энергия достигает минимума, когда вектор магнитного момента ориентирован по магнитному полю.

▷ Учитывая только ведущий член разложения магнитного поля (приближение однородного поля), запишем суммарный момент силы:

$$\mathbf{N} = \int \mathbf{r} \times [\mathbf{j} \times \mathbf{B}_0] d^3\mathbf{r} = \int (\mathbf{B}_0 \mathbf{r}) \mathbf{j} d^3\mathbf{r} - \mathbf{B}_0 \int (\mathbf{j} \mathbf{r}) d^3\mathbf{r}.$$

Второй интеграл равен нулю. Это следует из производной произведения:

$$\nabla(\mathbf{j} \mathbf{r}^2) = (\mathbf{j} \nabla) \mathbf{r}^2 + \mathbf{r}^2 (\nabla \mathbf{j}) = 2 \mathbf{j} \mathbf{r},$$

где во втором равенстве учтено, что $\nabla \mathbf{j} = 0$. При интегрировании по объёму, дивергенция в левой части (по теореме Гаусса) даёт интеграл по поверхности, равный нулю, так как токи из объёма не вытекают. В результате, учитывая (2.15), получаем *момент силы*:

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_0. \quad (2.25)$$

Он определяет изменение момента импульса системы частиц:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k = \sum \mathbf{u}_k \times \mathbf{p}_k + \sum \mathbf{r}_k \times \frac{d\mathbf{p}_k}{dt} = \sum \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k = \mathbf{N}.$$

Поэтому при малых скоростях, учитывая (2.21), можно записать:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\frac{Q}{2m} [\mathbf{B}_0 \times \mathbf{L}]. \quad (2.26)$$

Из этого уравнения следует ($< H_{11}$), что момент импульса \mathbf{L} системы зарядов вращается с угловой скоростью $QB_0/2m$ вокруг магнитного поля \mathbf{B}_0 , не меняя своей длины и угла с полем (*ларморова прецессия*).

▷ Большинство элементарных частиц обладают спином – собственным моментом вращения. Спин \mathbf{S} – это момент импульса в системе покоя частицы. При взаимодействии частиц сохраняется полный момент системы, равный сумме моментов импульса движения и спинов частиц. Для фермионов спин всегда полуцелый (в долях постоянной Планка): $\hbar/2, 3\hbar/2, \dots$ Для бозонов он целый: $\hbar, 2\hbar, \dots$ Изучение взаимодействия частиц с внешним магнитным полем позволяет измерять их магнитные моменты. Между магнитным моментом и спином существует пропорциональность, аналогичная соотношению (2.21). Однако коэффициент пропорциональности для каждой частицы свой:

$$\mathbf{m} = g \frac{Q}{2m} \mathbf{S}, \quad (2.27)$$

где индивидуальный для частиц данного типа параметр g называется *g-фактором*. Так, для электрона он приближённо равен $g = 2$. Вычисление *g*-факторов производится при помощи квантовой электродинамики и даёт результаты, совпадающие с экспериментом с высокой точностью.

2.4 Потенциалы поля

▷ Уравнения Максвелла состоят из двух пар уравнений. Одна пара (закон Гаусса для магнитного поля и закон Фарадея) не зависит от плотности заряда и тока. Поэтому возможно сразу построить решение этих уравнений. Начнём с закона Гаусса. Не только в магнитостатике, но и в общем случае можно написать:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

где \mathbf{A} – векторный потенциал. Заметим, что стрелка следования направлена в обе стороны. Следование справа налево проверяется просто ($\nabla[\nabla \times \mathbf{A}] = [\nabla \times \nabla] \mathbf{A} = 0$). Обратное следование требует, вообще говоря, убывания полей на бесконечности [1].

▷ Возьмём ещё одно уравнение Максвелла, в котором нет зарядов (закон электромагнитной индукции Фарадея). При помощи векторного потенциала его можно переписать в виде:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Аналогично дивергенции, если ротор некоторого векторного поля равен нулю, то это поле выражается через градиент скалярной функции. В одну сторону это утверждение доказывается элементарно. Можно показать, что оно справедливо и в обратную сторону [1]. Таким образом, *решение* двух уравнений Максвелла для дивергенции магнитного поля и ротора электрического поля выражается через четыре функции: скалярный потенциал φ и три компоненты векторного потенциала \mathbf{A} :

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.28)$$

▷ Решения для электрического и магнитного поля, выраженные через скалярный и векторный потенциалы, можно подставить в оставшуюся пару уравнений $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ и $\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j} + \partial \mathbf{E} / \partial t$:

$$\partial^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = 4\pi\rho, \quad \partial^2 \mathbf{A} + \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = 4\pi\mathbf{j}, \quad (2.29)$$

где ∂^2 – дифференциальный оператор Д'Аламбера:

$$\partial^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (2.30)$$

а $\Delta = \nabla^2$ – как обычно, оператор Лапласа. Уравнения (2.29) вместе с определениями (2.28) эквивалентны исходным уравнениям Максвелла.

▷ Введенные выше потенциалы определены неоднозначно. Точнее, если провести замены:

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla f, \quad \varphi \mapsto \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (2.31)$$

где f - произвольная функция координат и времени, то значения электрического и магнитного полей (2.28) не изменятся. Проверим это для напряженности электрического поля:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \mapsto -\nabla\left(\varphi - \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{A} + \frac{\nabla f}{\partial t}\right) = \mathbf{E},$$

где учтено, что частные производные по времени $\partial/\partial t$ и координатам ∇ можно переставлять местами. Подобная неоднозначность позволяет наложить на потенциалы дополнительное условие:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (2.32)$$

которое называется *калибровкой Лоренца*. Разберёмся, почему это можно сделать. Предположим, что данному электрическому и магнитному полю соответствуют потенциалы, которые не удовлетворяют этому условию. Пусть в правой части калибровочного условия оказывается не ноль, а некоторая функция $g = g(\mathbf{r}, t)$. Тогда, проведя замены потенциалов, при помощи функции f , которая удовлетворяет уравнению $\partial^2 f = g$, можно добиться равенства нулю калибровочного условия Лоренца:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi - \frac{\partial f}{\partial t}\right) + \nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla f) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} - \partial^2 f = g - \partial^2 f = 0.$$

Итак, без нарушения общности можно считать, что выполняется (2.32). Тогда уравнения (2.29) для потенциалов принимают простой вид:

$$\partial^2 \varphi = 4\pi\rho, \quad \partial^2 \mathbf{A} = 4\pi\mathbf{j}. \quad (2.33)$$

В отсутствие зарядов ($\rho = 0, \mathbf{j} = 0$) эти уравнения называются *волновыми уравнениями* для скалярной φ и векторной \mathbf{A} функций.

Если ввести 4-векторы потенциала $A^\alpha = \{\varphi, \mathbf{A}\}$ и тока $j^\alpha = \{\rho, \mathbf{j}\}$, то эти два уравнения можно записать, как одно:

$$\partial^2 A^\alpha = 4\pi j^\alpha. \quad (2.34)$$

Естественно, уравнений на самом деле 4, так как их необходимо расписывать отдельно для каждой компоненты $\nu = 0, 1, 2, 3$. То, что A^α и j^α действительно являются 4-векторами, будет показано в конце главы.

2.5 Симметрии уравнений Максвелла

▷ Второй закон Ньютона или уравнения Максвелла являются векторными дифференциальными уравнениями. При решении конкретной задачи мы относим их к определённой системе отсчета (обычно инерциальной), в которой задана фиксированная система координат (например, в виде трех перпендикулярных декартовых осей). Из общих соображений симметрии следует, что уравнения должны быть инвариантными относительно выбора ориентации системы координат (изотропность пространства), положения её начала (однородность пространства) и выбора системы отсчета (принцип относительности). Эти симметрии являются непрерывными.

Существуют также дискретные симметрии. Уравнения не должны зависеть от того, используем ли мы правую или левую систему координат (инверсия всех осей). Кроме этого, многие физические процессы обратимы, а соответствующие уравнения инвариантны относительно смены направления течения времени. Последние две дискретные симметрии называются *P-симметрией* (parity inversion) и *T-симметрией* (time inversion). Наконец, опыт показывает, что во многих реакциях превращений элементарных частиц одинаковыми свойствами обладают частицы и античастицы. Это называется *C-симметрией*, т.е. инвариантностью относительно зарядовой (charge) инверсии.

▷ Рассмотрим уравнение классического одномерного осциллятора, находящегося под воздействием силы трения, пропорциональной скорости:

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 2\lambda \frac{dq(t)}{dt} + \omega^2 q(t) = 0. \quad (2.35)$$

Пусть при данном выборе направления оси t получено некоторое решение $q(t)$. T -инвариантность означает, что функция $q(-t)$ также должна быть решением уравнения (2.35):

$$\frac{d^2q(-t)}{dt^2} + 2\lambda \frac{dq(-t)}{dt} + \omega^2 q(-t) = 0.$$

Заменим t на $-t$:

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} - 2\lambda \frac{dq(t)}{dt} + \omega^2 q(t) = 0.$$

Если трение есть ($\lambda \neq 0$), то это уравнение отличается от (2.35) и, следовательно, (2.35) неинвариантно относительно T -инверсии. Если же $\lambda = 0$, то оно инвариантно. Такие подробные выкладки обычно не проводят, а сразу в уравнении делают замену $t \mapsto -t$. Первые производные по t меняют свой знак, а вторые (в общем случае чётные) – нет.

▷ Рассмотрим инверсию времени (T – преобразование) в электродинамике. Пусть при $t \mapsto -t$ координатные оси остаются неизменными: $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}$. Тогда скорость $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ изменит свой знак: $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$. В тоже время ускорение (вторая производная) останется без изменения. Сила Лоренца:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \mathbf{E} + q [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$$

является определением электрического и магнитного поля (мы разбиваем силу на составляющие, одна из которых зависит от скорости пробного заряда, а вторая – нет). Левая часть уравнения инвариантна относительно инверсии времени (производная от скорости). Поэтому инвариантным будет и электрическое поле. Магнитное поле должно изменить знак (для компенсации его изменения у скорости). По этой же причине меняют знак векторный потенциал (так как $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) и ток $\mathbf{j} = \mathbf{v}\rho$. Таким образом, при инверсии времени происходят следующие изменения:

$$T : \quad t \mapsto -t, \quad \mathbf{j} \mapsto -\mathbf{j}, \quad \mathbf{E} \mapsto \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \mapsto -\mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \mapsto -\mathbf{A}.$$

Обратим внимание, что в преобразованиях происходит также изменение аргументов функций. Например, $\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) \mapsto -\mathbf{j}(-t, \mathbf{r})$ и т.д. Несложно видеть, что уравнения Maxwella:

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad \nabla \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

при таком преобразовании остаются неизменными и, следовательно, электродинамические явления обратимы.

Обратимыми являются многие уравнения классической механики, если в соответствующих им системах не происходит потери энергии. Однако, в нашем мире мы регулярно сталкиваемся с проявлением необратимости (разбитая чашка или эволюционирующая Вселенная). Часть подобных явлений связана с законом больших чисел. Вероятность обнаружить все молекулы воздуха в одном углу комнаты существенно меньше, чем вероятность их относительно равномерного распределения. Поэтому, если открыть перегородку отделяющую часть объема с воздухом от части без воздуха, то молекулы равномерно заполнят весь объем и обратно в одну половину уже не соберутся (процесс необратим).

Тем не менее, в микромире существуют реакции элементарных частиц которые можно интерпретировать как свидетельство нарушения T -инвариантности на самом фундаментальном уровне. Эволюция Вселенной, возможно, является еще одним примером фундаментальной необратимости времени.

▷ Перейдем к пространственной инверсии. В 3-мерном пространстве можно ввести два базиса, которые нельзя свести друг к другу при помощи вращения. Один такой базис называют *правым*, а второй – *левым*. При обращении одной или трёх осей с последующим поворотом, правый базис можно превратить в левый и наоборот. Далее под P -инверсией будем понимать переворот всех трёх осей, при котором координаты (проекции) радиус-вектора меняют свой знак: $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$.

Относительно инверсии координат все векторы разбиваются на две группы – *полярные* и *аксиальные* векторы. Проекции полярных векторов (“направленных отрезков”) на декартовы оси меняют свой знак при инвертировании осей. Например, если полярный вектор \mathbf{a} в правой системе координат имеет проекции $\{1, 3, -5\}$, то в левой системе координат его проекции будут равны $\{-1, -3, 5\}$. Аксиальные векторы при инверсии свои компоненты *не меняют*. Такие векторы возникают в результате векторного произведения полярных векторов. По определению, компоненты векторного произведения равны:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \{c_1, c_2, c_3\} = \{a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1\}.$$

Если \mathbf{a} и \mathbf{b} полярные векторы, то при инверсии координатных осей их компоненты изменят знак: $a_i \mapsto -a_i$, $b_i \mapsto -b_i$, а компоненты вектора $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ не изменятся.

Разница между полярными и аксиальными векторами проявляется, например, при наблюдении за отражением предметов (при этом инвертируется одна ось). Придвиньте эту книгу к зеркалу. Ваше зазеркальное “Я” сделает тоже самое, и книги будут двигаться *навстречу* (векторы скорости направлены в противоположные стороны – это полярные векторы). Теперь начните вращать книгу. Ваше Я будет её крутить в *том же* направлении (угловые скорости вращения книг направлены одинаковым образом – это аксиальные векторы).

Примерами полярных векторов являются радиус-вектор и напряженность электрического поля (которая для точечного заряда пропорциональна радиус-вектору). С другой стороны, угловая скорость, момент импульса и магнитное поле ($\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}$) – это аксиальные векторы.

То, что момент импульса является аксиальным вектором, следует из его определения: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Радиус-вектор \mathbf{r} (направленный отрезок) является полярным вектором. Импульс \mathbf{p} пропорционален скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, являющейся бесконечно малым изменением радиус-вектора (это уже не направленный отрезок, т.к. скорость относится к одной точке). Поэтому \mathbf{v} и \mathbf{p} являются полярными векторами. Векторное произведение двух полярных векторов даёт аксиальный вектор.

▷ Сила Лоренца – полярный вектор, поэтому \mathbf{E} и $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ – это также полярные векторы. А вот напряженность магнитного поля \mathbf{B} – это аксиальный вектор. При инверсии его компоненты не меняются и $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ благодаря скорости \mathbf{v} изменит свой знак. Так как $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ – векторный потенциал \mathbf{A} – это полярный вектор. Таким образом, в электродинамике при пространственной инверсии происходят такие изменения:

$$P : \quad \mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}, \quad \mathbf{j} \mapsto -\mathbf{j}, \quad \mathbf{E} \mapsto -\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \mapsto \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \mapsto -\mathbf{A}.$$

Уравнения Максвелла остаются инвариантными относительно этого преобразования (при $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$ оператор наблы ∇ меняет свой знак). Скалярное произведение двух полярных или двух аксиальных векторов является *скаляром* (не меняет свой знак при инверсии). Скалярное произведение полярного и аксиального вектора – это *псевдоскаляр* (при инверсии его знак меняется). Так, $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ – скаляр, а \mathbf{EB} – псевдоскаляр.

▷ Если уравнения инвариантны и относительно P и относительно T преобразований, то они будут инвариантными и относительно их композиции (PT – симметрии). Однако это утверждение не работает в обратную сторону. Из PT инвариантности, вообще говоря, не следует по отдельности P и T инвариантности. Например, представим мир, в котором закон Фарадея напоминает закон Ампера-Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 4\pi \mathbf{j} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

P и T инверсии изменяют уравнение, а их совместное применение – нет:

$$P : \quad \nabla \times \mathbf{E} = -4\pi \mathbf{j} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad PT : \quad \nabla \times \mathbf{E} = 4\pi \mathbf{j} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Поэтому в *таком* мире зеркальное отражение с одновременной “перемоткой” процессов в обратном направлении не будет отличаться от исходного, хотя и нет равноправия между электродинамическими процессами и их зеркальными отражениями.

▷ *Зарядовое сопряжение* (C – инверсия) изменяет знак зарядов на противоположный. Так как положительные и отрицательные заряды в электродинамике ведут себя равноправным образом, уравнения Максвелла и сила Лоренца должны быть инвариантными относительно смены знака у плотности заряда $\rho \mapsto -\rho$ и тока $\mathbf{j} \mapsto -\mathbf{j}$. Отсюда следуют следующие правила изменения остальных величин при зарядовом сопряжении:

$$C : \quad \rho \mapsto -\rho, \quad \mathbf{j} \mapsto -\mathbf{j}, \quad \mathbf{E} \mapsto -\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \mapsto -\mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \mapsto -\mathbf{A}.$$

Меняет знак также скалярный потенциал $\varphi \mapsto -\varphi$, так как $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$. В тоже время, при P и T инверсиях он остается без изменений.

2.6 Преобразования Лоренца для полей

▷ Важнейшей непрерывной симметрией уравнений Максвелла являются их свойства относительно преобразований Лоренца. Последовательному рассмотрению этих вопросов будет посвящена глава 4. Сейчас же мы получим законы преобразования электрического **E** и магнитного **B** поля из закона преобразования силы в двух инерциальных системах отсчёта. Обозначим через **v** скорость системы S' относительно S . Сила, действующая на единичный заряд ($q = 1$), имеет вид:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B},$$

где **u** – скорость частицы относительно S . Поля не зависят от заряда и скорости пробной частицы и соответствующие преобразования должны выполняться при любых q, \mathbf{u} . Пусть $\mathbf{u} = 0$. Тогда из преобразования скорости (1.29) и силы (1.31) имеем:

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}' = -\mathbf{v}, \quad \mathbf{F} = \gamma \mathbf{F}' - \Gamma \mathbf{v} (\mathbf{v} \mathbf{F}'), \quad (2.36)$$

где учтено, что $\gamma - \Gamma = \Gamma/\gamma$. В системе S сила равна электрическому полю $\mathbf{F} = \mathbf{E}$, а в системе S' : $\mathbf{F}' = \mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}'$, поэтому:

$$\mathbf{E} = \gamma (\mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}') - \Gamma \mathbf{v} (\mathbf{v} \mathbf{E}'). \quad (2.37)$$

Из этого преобразования следует, что проекция электрического поля на скорость одинакова в обоих системах отсчёта:

$$\mathbf{v} \mathbf{E}' = \mathbf{v} \mathbf{E}. \quad (2.38)$$

Обратное преобразование к (2.37) получается заменой $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$:

$$\mathbf{E}' = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \Gamma \mathbf{v} (\mathbf{v} \mathbf{E}), \quad (2.39)$$

что следует из (2.38), если в (1.31) положить $\mathbf{u}' = 0, \mathbf{u} = \mathbf{v}$.

▷ Запишем теперь преобразование для силы (1.31), когда $\mathbf{u}\mathbf{v} = 0$, умножив его слева векторно на **v**:

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{\gamma} - \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \times \mathbf{F} = \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{F}'. \quad (2.40)$$

Это даёт:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{E} + \mathbf{v} \times [\mathbf{u} \times \mathbf{B}] = \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{E}' + \gamma \mathbf{v} \times [\mathbf{u}' \times \mathbf{B}'].$$

Подставим слева **E** из (2.37), а справа $\mathbf{u}' = -\mathbf{v} + \mathbf{u}/\gamma$. В результате, учитывая, что $\mathbf{u}\mathbf{v} = 0$, получаем соотношение:

$$\mathbf{v} \mathbf{B}' = \mathbf{v} \mathbf{B}. \quad (2.41)$$

Таким образом, продольная к скорости компонента магнитного поля, как и электрического, одинакова в обеих системах отсчёта.

▷ Осталось найти преобразование для магнитного поля, аналогичное (2.39). Для этого умножим (2.37) и (2.39) векторно на \mathbf{v} :

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \times \mathbf{E} &= \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{E}' - \gamma \mathbf{v}(\mathbf{vB}') + \gamma v^2 \mathbf{B}', \\ \mathbf{v} \times \mathbf{E}' &= \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{E} + \gamma \mathbf{v}(\mathbf{vB}) - \gamma v^2 \mathbf{B}.\end{aligned}$$

Подставляя $\mathbf{v} \times \mathbf{E}'$ в первое соотношение из второго и полагая $\mathbf{vB}' = \mathbf{vB}$, получаем:

$$\mathbf{B}' = \gamma (\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}) - \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{vB}),$$

где учтено, что $\gamma^2 - 1 = v^2\gamma^2$ и $\Gamma = (\gamma - 1)/v^2$. Аналогично, подстановка $\mathbf{v} \times \mathbf{E}$ во второе соотношение даёт обратное преобразование для \mathbf{B} , отличающееся заменой $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$.

▷ Таким образом, преобразования Лоренца для электрического и магнитного полей имеют следующий вид:

$$\mathbf{E}' = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{vE}), \quad (2.42)$$

$$\mathbf{B}' = \gamma (\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}) - \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{vB}). \quad (2.43)$$

Их можно ($\lessdot H_{12}$) также расписать по компонентам:

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma (E_y - vB_z), \quad E'_z = \gamma (E_z + vB_y),$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma (B_y + vE_z), \quad B'_z = \gamma (B_z - vE_y),$$

где ось x выбрана в направлении относительной скорости: $\mathbf{v} = \{v, 0, 0\}$.

Заметим, что (2.43) формально можно получить из (2.42), сделав замену: $\mathbf{E} \mapsto \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \mapsto -\mathbf{E}$. Кроме этого, полученные преобразования совпадают с преобразованиями компонент антисимметричного тензора второго ранга для момента импульса (стр. V₁:233). Как мы увидим в главе 4, это совпадение не случайно.

▷ Аналогично упражнению ($\lessdot V_1:H_{34}$) можно проверить инвариантность следующих скалярных выражений:

$$\mathbf{EB} = inv, \quad \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = inv, \quad (2.44)$$

имеющих одинаковое значение во всех инерциальных системах. В частности, если поля перпендикулярны в одной системе отсчёта: $\mathbf{EB} = 0$, то и в любой другой они будут либо перпендикулярны, либо одно из полей (электрическое или магнитное) обратится в ноль. Равенство модулей напряжённостей поля $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$ абсолютно и, если это происходит в одной системе отсчёта, то будет выполняться и во всех остальных. В дальнейшем уравнения Максвелла будут записаны в явно ковариантном виде, демонстрирующем их инвариантность для всех инерциальных систем отсчета.

▷ Благодаря тесной связи электрического и магнитного полей в преобразованиях (2.42) и (2.43), говорят о едином *электромагнитном поле*, которое имеет два “лица”: \mathbf{E} и \mathbf{B} . Эти поля меняются при смене системы отсчёта, “порождая” друг друга. Например, пусть в системе S' нет магнитного поля: $\mathbf{B}' = 0$. В системе S появится магнитное поле, перпендикулярное как относительной скорости, так и электрическому полю. Действительно, из (2.41) и (2.43) следует:

$$\mathbf{B}' = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (2.45)$$

Выполняется также обратное следование, а именно:

если $\mathbf{EB} = 0$ и $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$, то есть система отсчёта, где $\mathbf{B} = 0$.

Действительно, для перпендикулярных векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} можно положить $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{n}$, где \mathbf{n} – некоторый постоянный вектор, перпендикулярный \mathbf{E} и \mathbf{B} . Тогда из (2.43) следует $\mathbf{B}' = \gamma(1 - \mathbf{vn})\mathbf{B} + (\gamma\mathbf{n} - \Gamma\mathbf{v})(\mathbf{vB})$. В системе S' , движущейся со скоростью \mathbf{v} , такой, что $\mathbf{n} = \mathbf{v}/v^2$, магнитное поле равно нулю: $\mathbf{B}' = 0$. При этом, так как $\mathbf{n}^2 > 1$ и $\mathbf{nB} = 0$ имеем $\mathbf{E}^2 = \mathbf{n}^2\mathbf{B}^2 > \mathbf{B}^2$. Аналогично доказывается, что:

если $\mathbf{EB} = 0$ и $|\mathbf{B}| > |\mathbf{E}|$, то есть система отсчёта, где $\mathbf{E} = 0$.

При сопадении модулей напряжённостей “обнулить” поля нельзя.

▷ Получим ещё раз выражение для напряжённости электромагнитного поля движущегося со скоростью \mathbf{v} заряда Q (стр. 22). В системе отсчёта, в которой заряд поконится, магнитное поле равно нулю, а электрическое определяется законом Кулона:

$$\mathbf{B}' = 0, \quad \mathbf{E}' = Q \frac{\mathbf{r}'}{r'^3}.$$

Используя преобразования для электрического поля (2.37), имеем:

$$\mathbf{E} = \gamma \mathbf{E}' - \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{vE}') = Q \frac{\gamma \mathbf{r}' - \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}')}{r'^3}.$$

В момент времени $t = 0$, когда начала систем отсчёта совпадают, справедливы преобразования (1.32). Подставляя их, получаем:

$$\mathbf{E} = \frac{Q \gamma \mathbf{r}}{(\mathbf{r}^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2)^{3/2}}.$$

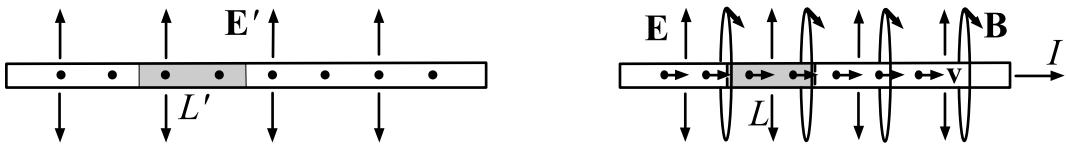
С учётом (2.45) магнитное поле равно $\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}$, что даёт (1.36).

Разделение на магнитное и электрическое поле единого силового влияния на пробную частицу достаточно условно. Магнитное поле содержиться в составляющей силы, которая зависит от скорости частицы. Когда изменяется система отсчёта, меняется и скорость. Соответственно, происходит перераспределение между электрическим и магнитным полями.

▷ Приведём простой пример преобразования полей. Рассмотрим бесконечную тонкую заряженную нить. В системе отсчёта, где заряды неподвижны, существует электрическое поле, перпендикулярное к нити и убывающее с расстоянием от неё следующим образом (стр. 15):

$$|\mathbf{E}'| = \frac{2\mu'}{r'}, \quad \mathbf{B}' = 0,$$

где $\mu = Q/L$ – заряд, приходящийся на единицу длины нити. Магнитного поля в этой системе отсчёта нет (левый рисунок):



Пусть теперь нить перемещается вдоль оси x со скоростью v . Так как заряды движутся, существует ток I и, следовательно, магнитное поле (стр. 36). Нить по-прежнему остаётся заряженной, поэтому есть и электрическое поле:

$$|\mathbf{E}| = \frac{2\mu}{r}, \quad |\mathbf{B}| = \frac{2I}{r}.$$

Найдём, как связаны между собой линейные плотности зарядов μ , μ' и ток I . Поля \mathbf{E} и \mathbf{B} перпендикулярны друг другу и скорости. Поэтому обратные к (2.42) и (2.43) преобразования имеют вид:

$$\mathbf{E} = \gamma \mathbf{E}', \quad \mathbf{B} = \gamma [\mathbf{v} \times \mathbf{E}'].$$

Подставляя выражения для электрического поля, получаем следующую связь для удельных зарядов на единицу длины:

$$\frac{Q}{L} = \mu = \gamma \mu' = \frac{Q'}{L' \sqrt{1 - v^2}}, \quad (2.46)$$

где учтено, что расстояния в перпендикулярном к скорости направлении не изменяются $r' = r$. Полученное соотношение является следствием лоренцевского сокращения длины. Так как заряд инвариантен ($Q' = Q$), а участок нити, на котором он находится, при движении сокращается $L = L' \sqrt{1 - v^2}$, то удельный заряд для неподвижного наблюдателя будет увеличиваться в γ раз. Во столько же раз “сжимаются” силовые линии, увеличивая напряжённость электрического поля.

Аналогично из выражения для магнитного поля получается связь тока и скорости зарядов для неподвижного наблюдателя:

$$I = \gamma \mu' v = \mu v = \frac{dQ}{dL} \frac{dL}{dt} = \frac{dQ}{dt}. \quad (2.47)$$

Так и должно быть в силу определения тока, как скорости “протекания” заряда через сечение проводника.

2.7 Потенциалы и ток как 4-векторы

▷ Выясним, как преобразуются потенциалы поля при смене инерциальной системы отсчёта. Для этого нам потребуется закон преобразования для производных. Рассмотрим функцию $f = f(t, \mathbf{r})$ координат и времени некоторого события, наблюдаемого из системы S . В силу преобразований Лоренца она также зависит от координат и времени этого же события в системе S' . Поэтому $f = f(t(t', \mathbf{r}'), \mathbf{r}(t', \mathbf{r}'))$. Возьмём производные, как производные сложной функции ($\mathbf{r} = \{x, y, z\} = \{x_1, x_2, x_3\}$):

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t'}, \quad \frac{\partial f}{\partial x'_i} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x'_i} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \quad (2.48)$$

(по индексу j подразумевается суммирование от 1 до 3). Записав обратное преобразование Лоренца (стр. 20):

$$t = \gamma(t' + \mathbf{v}\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \gamma\mathbf{v}t' + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'),$$

несложно найти соответствующие производные:

$$\frac{\partial t}{\partial t'} = \gamma, \quad \frac{\partial x_i}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial x'_i} = \gamma v_i, \quad \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \delta_{ij} + \Gamma v_i v_j,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Обозначим производную по времени, как $\partial_0 = \partial/\partial t$, а для производной по координатам в векторном виде будем использовать знак наблы $\nabla_i = \partial/\partial x_i$. Опуская функцию f , запишем преобразование производных (2.48) в операторном виде:

$$\partial'_0 = \gamma(\partial_0 + \mathbf{v}\nabla), \quad \nabla' = \nabla + \gamma\mathbf{v}\partial_0 + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla). \quad (2.49)$$

Обратим внимание, что, в отличие от прямых преобразований Лоренца, эти преобразования выглядят, как обратные, хотя в правой части стоят штрихованные величины, а в левой не – штрихованные. Как мы видели в главе V_{1:7}, такое преобразование характерно для 4-ковекторов. Поэтому оператор производной образует ковариантные компоненты:

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right\},$$

где компоненты 4-вектора события обозначены, как $x^\alpha = \{t, \mathbf{r}\}$. Напомним, что индекс контравариантных компонент 4-вектора находится вверху, а ковариантных – внизу. Для запоминания можно считать, что при взятии производной $\partial/\partial x^\alpha$ индекс α лишь “перебирается” через знак дроби, оставаясь внизу так, что получившийся оператор является 4-ковектором ∂_α с индексом внизу.

▷ Замечательным свойством потенциалов является то, что они преобразуются, как компоненты 4-вектора $A^\nu = \{\varphi, \mathbf{A}\}$:

$$\varphi' = \gamma(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}), \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \gamma \mathbf{v} \varphi + \Gamma \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}). \quad (2.50)$$

Используя преобразования для полей (2.42), (2.43), это несложно проверить. Например, перемножая векторно (2.49) и (2.50), имеем:

$$\mathbf{B}' = \nabla' \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \gamma \mathbf{v} \times (\nabla \phi + \partial_0 \mathbf{A}) + \Gamma \{(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \times \mathbf{A} - \mathbf{v} \times \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})\}.$$

Учитывая тождество: $\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{A}]] = [\mathbf{v} \times \nabla](\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \nabla)[\mathbf{v} \times \mathbf{A}]$, получаемое раскрытием двойного векторного произведения $\mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{A}]$, и связь электрического и магнитного поля с потенциалами, приходим к преобразованию для магнитного поля (2.43):

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{E} - \Gamma [\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]] = \gamma (\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}) - \Gamma \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}).$$

Аналогичные, чуть более громоздкие выкладки с учётом $\gamma^2 - \gamma \Gamma = \Gamma$ приводят к преобразованиям для электрического поля (2.42).

▷ В качестве упражнения стоит проверить, что калибровка Лоренца (2.32) имеет одинаковый вид во всех системах отсчёта. В ковариантных обозначениях уравнение калибровки является свёрткой 4-вектора A^α и 4-ковектора ∂_α :

$$\partial_\alpha A^\alpha = \partial_0 A^0 + \partial_i A^i = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (2.51)$$

где повторяющиеся греческие индексы суммируются от 0 до 3, а латинские от 1 до 3. Аналогично оператор Д'Аламбера имеет одинаковый вид для всех наблюдателей, так как в ковариантных обозначениях он равен:

$$\partial^2 = \partial_\alpha \partial^\alpha = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta = \partial_0^2 - \partial_i \partial_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \quad (2.52)$$

Поэтому уравнения (2.34) выглядят одинаково для всех наблюдателей, если величина $j^\alpha = \{\rho, \mathbf{j}\}$ является 4-вектором. Покажем это, записав 4-ток следующим образом:

$$j^\alpha = \rho \frac{dx^\alpha}{dt} = \underbrace{\rho d^3 \mathbf{x}}_Q \frac{dx^\alpha}{d^4 x}. \quad (2.53)$$

При $\alpha = 0$ получаем $j^0 = \rho$, иначе $j^i = \rho u^i$. Смещение в 4-пространстве dx^α – это 4-вектор. Объём 4-пространства $d^4 x = dt d^3 \mathbf{x}$ является инвариантом, что проверяется нахождением якобиана от преобразований Лоренца ($\propto H_{14}$). Наконец, $\rho d^3 \mathbf{x}$ – это заряд в элементарном объёме, который инвариантен в силу принятых постулатов. В результате, 4-ток оказывается 4-вектором.

Глава 3

Электромагнитные волны

До сих пор в основном рассматривались статические задачи электромагнитной теории. В этой главе мы переходим к изучению одного из самых замечательных предсказаний Максвелла: свет – это периодические колебания электромагнитного поля, распространяющиеся в пустоте с фундаментальной скоростью c . Таким образом, статические заряды, кусок магнитной руды и свет – это проявления одной и той же сущности. Будет получено решение уравнений Максвелла, описывающее плоскую электромагнитную волну и рассмотрено дипольное излучение компактной системы зарядов и токов. Кроме волновых решений уравнений Максвелла, рассматриваются законы сохранения поля и зарядов, играющие важную роль при анализе различных задач. В заключении главы будет получено поле заряда, двигающегося с произвольной переменной скоростью.

3.1 Решение уравнений Максвелла в пустоте

Записав в первой главе дифференциальные уравнения, которым удовлетворяет электрическое поле неподвижного заряда, мы получили несколько более общие законы, чем исходная сила Кулона. Уравнению $\nabla \mathbf{E} = 4\pi Q \delta(\mathbf{r})$ удовлетворяет также напряженность движущегося заряда, не обладающая сферической симметрией.

Аналогична ситуация и с полной системой уравнений Максвелла. По сути их вывода они выполняются для напряженности электромагнитного поля, создаваемого системой равномерно движущихся зарядов. Однако уравнения Максвелла также содержат в себе принципиально новые классы решений. Так, пусть в пространстве нет зарядов и токов, тогда:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{E} &= 0, & \nabla \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Вторая пара уравнений зависит одновременно и от электрического, и от магнитного поля. Если от этих уравнений взять ротор, то получатся *волновые уравнения* второго порядка, зависящие отдельно от \mathbf{E} и \mathbf{B} :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{B} = 0, \tag{3.2}$$

где $\Delta = \nabla^2$ - оператор Лапласа. Действительно, например, ротор от левой части уравнения $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ равен:

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}] = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - (\nabla \nabla) \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E},$$

где учтено равенство нулю дивергенции электрического поля (первое уравнение Максвелла в пустоте). С другой стороны, ротор от правой части имеет вид:

$$-[\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}] = -\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{B}] = -\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}.$$

Очевидным решением уравнений Максвелла в пустоте и следующих из них волновых уравнений (7.4) являются поля, не зависящие от координат и времени $\mathbf{E}_0 = \text{const}$, $\mathbf{B}_0 = \text{const}$. Их частным случаем является пространство, в котором полей нет вообще. Однако это не единственная возможность.

▷ Рассмотрим решение уравнений Максвелла, в которых электрическое и магнитное поля зависят от следующей комбинации координат и времени: $u = t - \mathbf{nr}$, где \mathbf{n} - некоторый постоянный вектор:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(u), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(u), \quad u = t - \mathbf{nr}. \quad (3.3)$$

Вычислим производные по координатам и времени от j -той компоненты электрического поля:

$$\nabla_i E_j = \frac{\partial E_j}{\partial r_i} = \frac{d E_j}{d u} \frac{\partial u}{\partial r_i} = -n_i \frac{d E_j}{d u}, \quad \frac{\partial E_j}{\partial t} = \frac{d E_j}{d u}.$$

Аналогичные соотношения справедливы и для магнитного поля. Подставим эти производные в уравнения Максвелла в пустоте для дивергенций. В этом случае $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla_i E_i$, где по i -сумма от 1 до 3. Поэтому выше необходимо положить $i = j$ и просуммировать. В результате:

$$\frac{d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})}{d u} = 0, \quad \frac{d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})}{d u} = 0.$$

Так как вектор \mathbf{n} является константой его можно внести под знак производной. Аналогично для роторов (вторая пара уравнений Максвелла):

$$\frac{d}{d u} ([\mathbf{n} \times \mathbf{E}] - \mathbf{B}) = 0, \quad \frac{d}{d u} ([\mathbf{n} \times \mathbf{B}] + \mathbf{E}) = 0.$$

Интегрируя по u и опуская константы интегрирования, которые соответствуют постоянным составляющим электрического и магнитного полей, получаем:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\mathbf{n} \times \mathbf{B}. \quad (3.4)$$

Эти соотношения являются связями, накладываемыми на векторы \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{n} , которые необходимы для выполнения уравнений Максвелла. Подставляя третье соотношение в четвёртое:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = -\mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{n}^2 \mathbf{E} = \mathbf{n}^2 \mathbf{E},$$

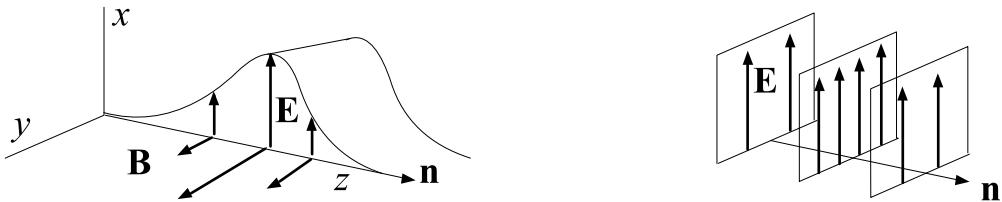
приходим к выводу, что вектор \mathbf{n} должен быть единичным $\mathbf{n}^2 = 1$.

Таким образом, нетривиальное решение уравнений Максвелла в пустоте имеет вид:

$$\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (3.5)$$

При этом функция напряжённости электрического поля \mathbf{E} может произвольным образом зависеть от $u = t - \mathbf{nr}$ и векторы \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{n} взаимно перпендикулярны друг другу.

▷ Разберёмся с физическим смыслом полученного решения. Направим ось z вдоль вектора \mathbf{n} так, что $\mathbf{n}\mathbf{r} = z$, а ось x вдоль электрического поля перпендикулярно \mathbf{n} . Магнитное поле перпендикулярно электрическому и лежит вдоль оси y . Пусть функция $\mathbf{E}(u)$ при $u = 0$ имеет максимум. Ниже на левом рисунке изображено значение электромагнитного поля в точках, находящихся в плоскости (z, y) , в момент времени t :



С течением времени этот максимум $\mathbf{E}(u) = \mathbf{E}(t - z)$ перемещается вдоль оси z (по направлению вектора \mathbf{n}) с единичной скоростью, которая в принятой системе единиц соответствует скорости света. Обратим внимание, что на левом рисунке векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} изображены для точек, лежащих на оси z . Электрическое поле \mathbf{E} не зависит от x и y и, вообще говоря, при обычном соглашении должно рисоваться параллельными линиями в плоскости (x, y) , густота которых соответствует напряженности поля (выше правый рисунок).

Таким образом, данное решение представляет собой однородное (при фиксированном z) поле с одинаковой напряженностью во всей плоскости (x, y) . Поэтому подобный класс решений называется *плоскими волнами*. Скорость перемещения области сгущения напряженности поля называется групповой скоростью.

▷ Важный класс *монохроматических плоских волн* получается, когда поля являются периодическими функциями u . Рассмотрим сначала случай *линейной поляризации*:

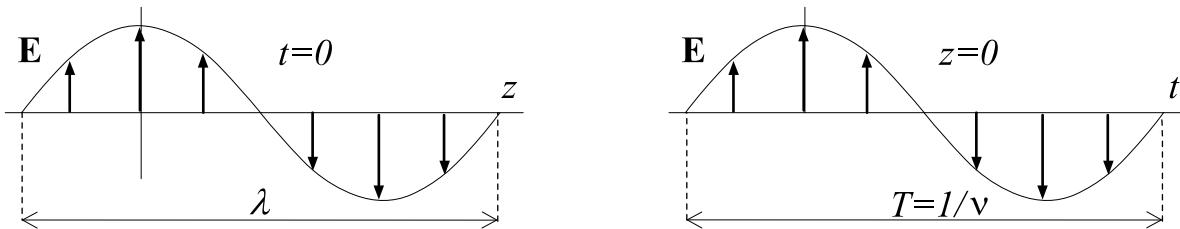
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \phi_0), \quad \mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0] \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \phi_0). \quad (3.6)$$

Постоянный вектор \mathbf{E}_0 определяет амплитуду колебаний и одновременно задаёт направление, вдоль которого происходит колебание. Вторая константа ϕ_0 – сдвиг фазы, возникающий при выборе того или иного начального значения поля при $t = 0$ (не путать с потенциалом φ). Наконец, вектор \mathbf{k} называется *волновым вектором*, а ω – *круговой частотой*. Чтобы получилось решение с $u = \mathbf{n}\mathbf{r} - t$, частота и волновой вектор должны быть связаны между собой следующим образом:

$$\mathbf{k} = \omega \mathbf{n}, \quad (3.7)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор, задающий направление распространения электромагнитной волны. Выражение $\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}$ называется *фазой*.

Нарисуем плоскую волну в данный момент времени (слева, $t = 0$) и в данной точке пространства (справа, $\mathbf{kr} = \text{const}$), с $\phi_0 = 0$:



Модуль волнового вектора связан с длиной волны λ , а круговая частота – с частотой колебаний ν (или периодом $T = 1/\nu$) следующим образом:

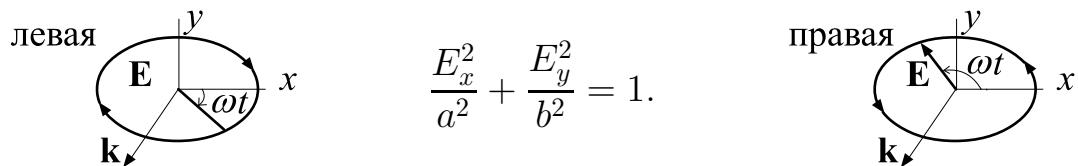
$$|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi\nu, \quad \lambda\nu = 1.$$

Каждый “гребень” плоской монохроматической линейно-поляризованной волны перемещается в пространстве с фазовой скоростью, равной скорости света.

▷ Рассмотрим теперь более общий вариант поляризации. Ось z снова направим вдоль вектора \mathbf{k} . В этом случае электрическое и магнитное поля будут лежать в плоскости (x, y) . Например, $\mathbf{E} = \{E_x, E_y, 0\}$. Пусть по каждой компоненте электрическое поле совершает гармонические колебания с амплитудами a и b следующего вида:

$$E_x = a \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \phi_0), \quad E_y = b \sin(\omega t - \mathbf{kr} + \phi_0). \quad (3.8)$$

В фиксированной точке пространства $\phi_0 - \mathbf{kr} = \text{const}$ вектор \mathbf{E} движется по эллипсу с круговой частотой ω :



Такая поляризация называется *эллиптической*. Если $a = \pm b$, то это – *круговая поляризация*. При эллиптической или круговой поляризации вектор напряжённости описывает в пространстве спираль, направление “вкручивания” которой зависит от знаков амплитуд a и b . Предположим, что мы смотрим *навстречу* распространению волны. Если электрическое поле поворачивается по часовой стрелке, то такая волна называется *левополяризованной*, если против, то *правополяризованной*.

Вообще говоря, оси координат x, y могли быть выбраны не вдоль главных полуосей эллипса. В этом случае колебания вдоль каждой оси имели бы различные фазы, разность которых соответствовала бы углу поворота эллипса в плоскости (x, y) .

3.2 Реально ли электромагнитное поле?

В главе 1 мы начали с закона Кулона и формально ввели электрическое поле как силу, действующую на единичный пробный заряд. Постулировалось, что заряд является собственной характеристикой частицы и имеет одинаковое значение независимо от скорости движения. Затем, при помощи преобразований Лоренца, было получено выражение для силы, действующей на пробный заряд со стороны движущегося со скоростью \mathbf{v} заряда Q . Эта сила естественным образом разбилась на два слагаемых, в которых, опять же формально, были выделены две векторные функции – электрическое поле \mathbf{E} и магнитное поле \mathbf{B} . Мы добавили ещё одно предположение под названием “принцип суперпозиции”: силы, действующие на пробный заряд со стороны системы зарядов (имеющих различные и произвольные постоянные скорости), оказывают независимое действие и векторно складываются.

В результате выяснилось, что функции \mathbf{E} и \mathbf{B} удовлетворяют простым дифференциальным уравнениям Максвелла, которые, аналогично закону Гаусса в электростатике, зависят только от плотности заряда и тока частиц. Решив эти уравнения и подставив их в выражение для силы Лоренца, мы можем найти траекторию движения пробного заряда в электромагнитном поле.

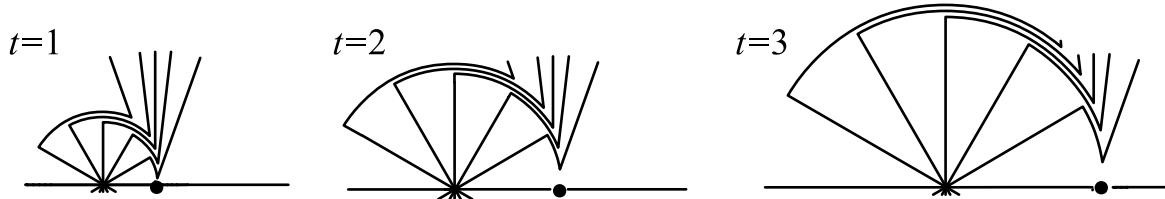
Хотя уравнения Максвелла были выведены для системы равномерно движущихся зарядов, оказалось, что они имеют нетривиальные решения даже в отсутствие зарядов. При этом электромагнитное поле распространяется в пространстве с фундаментальной скоростью c . Специально подобные свойства решений не “закладывались” в уравнения. Они возникли автоматически.

Однако откуда в пустом пространстве всё же берутся электромагнитные волны? Чтобы понять это на качественном уровне, вернёмся к равномерно движущемуся заряду и попробуем разобраться, что происходит с его полем при изменении скорости заряда. Пусть до момента времени $t = 0$ заряд в системе S двигался с постоянной скоростью v . Соответственно, в связанной с ним системе S' существовало только электрическое поле в виде симметричного ёжика силовых линий. В системе S ежик электрического поля выглядит сплюснутым, а кроме этого, существует магнитное поле. Силовые линии этих полей с постоянной скоростью “перемещаются” мимо наблюдателей в S .

В момент времени $t = 0$ заряд, в результате внешнего воздействия, резко останавливается. Что будет происходить с его электрическим и магнитным полями?

Любое движение не может происходить быстрее фундаментальной скорости. Это же относится и к темпу распространения в пространстве изменения поля (силового воздействия), возникшего в результате торможения заряда. Так как при $t > 0$ заряд в системе отсчёта S неподвижен, вокруг него должно исчезнуть магнитное поле, а электрическое поле должно стать сферически симметричным. Однако сразу во всём пространстве это произойти не может. Вокруг заряда с фундаментальной скоростью $c = 1$ расширяется сфера, внутри которой $\mathbf{E} = Q\mathbf{r}/r^3$, $\mathbf{B} = 0$. Снаружи этой сферы всё осталось без изменений. Есть и магнитное, и сплюснутое электрическое поле. Их силовые линии *продолжают двигаться* в пространстве, хотя заряд уже остановился.

Ниже нарисованы последовательные картинки с равным шагом по времени, изображающие этот процесс. Скорость заряда до остановки была равна $v = 0.96$. Точка изображает “фантомное” положение заряда, т.е. это центр удалённых силовых линий, которые продолжают двигаться. Так как скорость “фантома” велика, он лишь немного отстает от сферического фронта “распространения информации” об остановке заряда (показана только верхняя часть силовых линий):



Сильный излом линий возникает из-за “мгновенности” остановки заряда. В реальности, естественно, излома не будет и силовые линии после начала торможения будут изгибаться плавнее. Однако в любом случае, в окрестности сферического фронта происходит сгущение силовых линий. Они почти перпендикулярны направлению расширения поля, поэтому мы имеем дело со сферически распространяющимся сгущением *поперечного* электрического поля. Это сгущение увеличивается в направлении бывшего движения заряда. Снаружи вокруг сферы, перпендикулярно электрическим силовым линиям, в виде окружностей перемещаются в пространстве силовые линии магнитного поля.

В результате заряд при остановке как бы “сбрасывает” с себя часть электромагнитного поля, которое “по инерции” продолжает двигаться вперёд в виде электромагнитной волны, получив право на самостоятельное существование. Даже если заряд исчезает (например, в результате аннигиляции отрицательного электрона и положительного позитрона), то его поле (силовое воздействие на пробные частицы) будет продолжать перемещаться в пространстве.

▷ Обратим внимание, что не всегда электромагнитное поле распространяется с фундаментальной скоростью (скоростью света). Это происходит, например, при расширении сферического фронта после остановки заряда. В то же время удалённые силовые линии от “фантомного” заряда движутся в пространстве со скоростью заряда в прошлом, которая, естественно, меньше фундаментальной.

Со скоростью света распространяется “информация” об *изменении скорости* зарядов. Она “становится известной” в удалённых точках только через время, равное расстоянию от заряда к этой точке, делёному на скорость света. Фактически это требование оказалось “заложенным” в уравнения Максвелла, о чём свидетельствует наличие решений, распространяющихся с фундаментальной скоростью. Однако этого могло и не произойти, если бы закон Кулона имел отличное от $1/r^2$ поведение. В этом случае в уравнениях электромагнетизма появились бы дополнительные слагаемые, которые изменили бы волновое уравнение. В результате скорость электромагнитных волн оказалась бы меньше фундаментальной. Таким образом, скорость электромагнитной волны тесно связана с формой *статического закона взаимодействия* между двумя зарядами.

▷ Есть ещё один важный момент, на который стоит обратить внимание. Уравнения Максвелла фактически были выведены для системы зарядов, движущихся с постоянными скоростями. В силу принципа суперпозиции эти скорости могут иметь различные значения в различных точках пространства. Однако они постоянны. В дальнейшем предполагается, что уравнения Максвелла справедливы и в том случае, когда заряды движутся с переменной скоростью, Например, таким был резко тормозящий заряд, рассмотренный выше. Другими словами, в правых частях уравнений Максвелла присутствуют скорости зарядов, создающих поле (в векторе тока), но *не их ускорения*. Это простейшая форма уравнений, и оправдать её можно только экспериментами.

Часто, следуя историческому пути, уравнения Максвелла записывают, как обобщение множества экспериментальных законов, открытых в 18-19 веках. Затем из уравнений электромагнетизма “получают” теорию относительности. Такой путь вполне приемлем, и любая *правильно* построенная теория конкретного взаимодействия содержит в себе и общие свойства пространства и времени. Однако в этой книге мы используем обратный путь, так как теорию относительности можно вывести из достаточно общих и простых постулатов. После того, как она построена, рассматриваются частные теории, подобные электродинамике.

▷ Перечислим ещё раз исходные постулаты, лежащие в основе электродинамики:

- 1) Справедлив закон Кулона для неподвижного заряда $\mathbf{F} = qQ \mathbf{r}/r^3$.
- 2) Заряд частицы одинаков для всех наблюдателей $Q' = Q$.
- 3) Выполняется принцип суперпозиции: силовые воздействия наенный заряд со стороны различных зарядов векторно суммируются.
- 4) Дифференциальные уравнения первого порядка для электромагнитного поля не зависят от ускорений зарядов, создающих это поле.

Естественно, предполагается справедливой и теория относительности.

▷ “*Реальны ли электромагнитное поле?*”. В принципе, можно отказаться от полевого описания заряженных частиц, оперируя только их координатами. Однако уравнения движения, которым должны удовлетворять эти частицы, становятся очень сложными. В частности, чтобы предсказать поведение частиц, необходимо знать не только их начальные координаты и скорости, а, вообще говоря, всю предыдущую историю их движения. Действительно, с точки зрения полевого подхода ускоренно движущиеся частицы излучают электромагнитные волны, которые воз действуют на другие частицы. Те, в свою очередь, излучают волны, которые действуют на исходные частицы, и т.д. Таким образом, в данный момент времени в пространстве существует достаточно сложная конфигурация поля, зависящая от всей предыстории, которая в соответствии с силой Лоренца действует на частицы. Поэтому, отказавшись от полей, придётся для силы записать очень замысловатое выражение. Вместо этого считается справедливым простое уравнение движения (сила Лоренца). Для его решения необходимо знать только начальную скорость и положение частицы. Платой служит необходимость задания начальной конфигурации электромагнитного поля во всём пространстве и, для описания его динамики, решение уравнений Максвелла.

Таким образом, чтобы описание взаимодействия заряженных частиц упростилось, необходимо ввести новую сущность - электромагнитное поле. Вся физика, в конечном счёте, строится на основе введения различных модельных сущностей, математическое описание которых позволяет делать некоторые предсказания. Если введение данного объекта приводит к математическому упрощению теории, то можно считать, что эти объекты действительно существуют как самостоятельные сущности. В этом смысле электромагнитное поле так же реально, как и атомы, из которых состоит диван, где пишутся эти строки.

3.3 Законы сохранения

• Закон сохранения заряда (стр. 28) – не единственный закон сохранения, который содержат в себе уравнения Максвелла. Введём следующие величины:

$$W = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi}, \quad \mathbf{P} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi}. \quad (3.9)$$

Вычислим производную от W по времени, заменив затем производные полей при помощи уравнений Максвелла $\partial\mathbf{E}/\partial t = [\nabla \times \mathbf{B}] - 4\pi \mathbf{j}$ и $\partial\mathbf{B}/\partial t = -[\nabla \times \mathbf{E}]$:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \frac{\mathbf{E} [\nabla \times \mathbf{B}] - \mathbf{B} [\nabla \times \mathbf{E}]}{4\pi} - \mathbf{Ej}.$$

С другой стороны, вычисляя дивергенцию вектора \mathbf{P} как производную произведения, имеем:

$$4\pi \nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} [\nabla \times \mathbf{E}] - \mathbf{E} [\nabla \times \mathbf{B}].$$

Подставляя это выражение в производную по времени от W , получаем уравнение, которое называют *теоремой Пойнтинга*:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathbf{Ej} + \nabla \cdot \mathbf{P} = 0. \quad (3.10)$$

Для выяснения его физического смысла запишем интегральную форму уравнения, проинтегрировав по произвольному объёму V , окруженному поверхностью S :

$$\frac{d}{dt} \int_V W dV + \int_V \mathbf{Ej} dV = - \oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S}, \quad (3.11)$$

где в правой части учтена теорема Гаусса. Рассмотрим точечные заряды, находящихся в точках $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ внутри объёма:

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k(t) q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)),$$

где \mathbf{u}_k – скорость заряда q_k . В результате интеграл от \mathbf{Ej} :

$$\int_V \mathbf{Ej} dV = \sum_{k=1}^n q_k \mathbf{u}_k(t) \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_k(t))$$

сводится к сумме скоростей зарядов, умноженных на напряжённость электрического поля в точке, где они находятся.

Запишем силу Лоренца, которая действует на каждый заряд:

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E} + q [\mathbf{u} \times \mathbf{B}].$$

Так как магнитная составляющая силы перпендикулярна скорости, произведение \mathbf{u} на силу определяется только электрическим полем, и производная энергии движения $\dot{\mathbb{E}} = m/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$ заряда по времени равна:

$$\frac{d\mathbb{E}}{dt} = \mathbf{u}\mathbf{F} = q \mathbf{u}\mathbf{E}.$$

В результате интегральная версия закона сохранения (3.10) имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int W dV + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_k \right\} = - \oint \mathbf{P} d\mathbf{S}. \quad (3.12)$$

Если заряды сосредоточены в некоторой области пространства и поля на бесконечности равны нулю, то при интегрировании по *всему* пространству правая часть (поверхностный интеграл) будет равна нулю, и

$$\int \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} dV + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_k = \text{const.} \quad (3.13)$$

Это уравнение можно интерпретировать, как закон сохранения энергии, в котором первое слагаемое является энергией электромагнитного поля, а второе – суммарной энергии движения заряженных частиц. Величину W естественно назвать плотностью энергии поля. Если область интегрирования конечна, то поверхностный интеграл от \mathbf{P} в общем случае отличен от нуля. Аналогично закону сохранения заряда (стр. 28), его можно считать потоком энергии электромагнитного поля, уходящей из объема (или, наоборот, туда попадающей). Соответственно, \mathbf{P} – это плотность потока. Она также называется *вектором Умова-Пойнтинга* или *плотностью импульса* электромагнитного поля.

Заметим, что до сих пор мы различали заряды, создающие поле и пробные заряды, которые в этом поле двигались под воздействием силы Лоренца. При интерпретации закона сохранения эти два вида зарядов объединены. Заряды, входящие в виде ρ и \mathbf{j} в уравнения Максвелла, одновременно подвержены силе Лоренца со стороны полей, создаваемых *всеми* зарядами. Иначе говоря, поле, создаваемое данным зарядом, может действовать на этот же заряд. Как мы увидим в главе 6, такое “самодействие” приводит к определенным трудностям.

- Найдём ещё один закон сохранения. Для этого вычислим частную производную импульса поля:

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\mathbf{B} \times [\nabla \times \mathbf{B}] + \mathbf{E} \times [\nabla \times \mathbf{E}]}{4\pi} - \mathbf{j} \times \mathbf{B},$$

где снова подставлены производные полей из уравнений Максвелла. Воспользуемся следующим тождеством, проверяемым раскрытием двойного векторного произведения ($\Leftarrow H_{13}$):

$$\mathbf{E} \times [\nabla \times \mathbf{E}] = \nabla \left(\frac{\mathbf{E}^2}{2} \right) - \nabla_i (E_i \mathbf{E}) + \mathbf{E} (\nabla \mathbf{E}). \quad (3.14)$$

В правой части индексом i помечено, какие векторы участвуют в скалярном произведении (по i сумма от 1 до 3). Такое же выражение справедливо и для магнитного поля. Запишем j -ю проекцию уравнения для $\partial \mathbf{P} / \partial t$ и подставим в него тождество (3.14). Затем, при помощи символа Кронекера, запишем $\nabla_j = \nabla_i \delta_{ij}$. В результате, объединение первых двух слагаемых из каждого тождества приведёт к выражению $\nabla_i \sigma_{ij}$, где:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} W - \frac{E_i E_j + B_i B_j}{4\pi} \quad (3.15)$$

называется *тензором потока импульса*. Используя оставшиеся уравнения Максвелла $\nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho$ и $\nabla \mathbf{B} = 0$, получаем:

$$\frac{\partial P_j}{\partial t} + \nabla_i \sigma_{ij} + \rho E_j + [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]_j = 0. \quad (3.16)$$

При интегрировании по всему объёму слагаемое с $\nabla_i \sigma_{ij}$ превращается в поверхностный интеграл и обращается в ноль (если поля на бесконечности нулевые). Беря для плотности заряда и тока сумму дельта-функций точечных частиц, приходим к уравнению (индекс k нумерует частицы, а не компоненты векторов):

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{P} dV + \sum_{k=1}^n q_k \{ \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_k) + \mathbf{u}_k \times \mathbf{B}(t, \mathbf{r}_k) \} = 0.$$

Под знаком суммы находится сила Лоренца. Если мы снова “разрешаем” полям воздействовать на заряды, которые эти поля создают, то вместо силы Лоренца можно записать производную импульса каждой частицы по времени. В результате получается следующий закон сохранения:

$$\int_V \mathbf{P} dV + \sum_{k=1}^n \mathbf{p}_k = const. \quad (3.17)$$

Он имеет естественную интерпретацию сохранения суммарного импульса поля и зарядов, которые в нём находятся.

• Третий закон связан с сохранением момента импульса. Умножим уравнение (3.16) векторно на радиус-вектор. В слагаемом $\nabla_i \sigma_{ij}$ этот вектор можно внести под оператор набла. Действительно, записывая при помощи символа Леви-Чивиты (стр. V₁:310) в индексном виде векторное произведение, имеем:

$$\varepsilon_{jlpq} x_p \nabla_i \sigma_{iq} = \varepsilon_{jlpq} \nabla_i (x_p \sigma_{iq}) - \varepsilon_{jlpq} \sigma_{iq} \nabla_i x_p.$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как $\nabla_i x_p = \delta_{ip}$, и свёртка с символом Кронекера даёт $\varepsilon_{jliq} \sigma_{iq}$. Тензор σ_{iq} симметричен, а ε_{jliq} – антисимметричен. Их свёртка будет равна нулю (стр. V₁:305). Таким образом, можно записать следующий дифференциальный закон сохранения:

$$\frac{\partial [\mathbf{r} \times \mathbf{P}]_j}{\partial t} + \nabla_i (\varepsilon_{jlpq} x_q \sigma_{ip}) + [\mathbf{r} \times (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B})]_j = 0. \quad (3.18)$$

При интегрировании по всему объёму второе слагаемое выражается через поверхностный интеграл от $\varepsilon_{jlpq} x_q \sigma_{ip} dS_i$. Если поля на бесконечности убывают быстрее, чем $1/r^3$, этот интеграл равен нулю. Переходя к системе точечных заряженных частиц, получаем следующий закон сохранения

$$\int_V [\mathbf{r} \times \mathbf{P}] dV + \sum_{k=1}^n [\mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k] = const. \quad (3.19)$$

Первое слагаемое является моментом импульса поля, а второе – суммарным моментом импульса системы заряженных частиц.

Таким образом, электромагнитное поле может переносить энергию, импульс и момент импульса, меняя соответствующие механические характеристики заряженных частиц. Подобное влияние существует и в обратную сторону.

Во всех трёх законах сохранения присутствуют полевые вклады и вклады от зарядов. По смыслу получения этих законов, заряды не являются “пробными”, так как плотности заряда и тока взяты из правых частей уравнений Максвелла. Это те заряды, которые поля создают. Полевые части дают, например, величину потери энергии, импульса и момента импульса зарядом при излучении им электромагнитной волны. Если же мы хотим получить воздействие внешнего поля на пробный заряд, необходимо добавлять к внешнему полю поле самого заряда, иначе он не “появится” в законе сохранения. Игнорирование этого факта приводит к ошибочному выводу о сохранении энергии зарядов в электростатическом поле или отсутствии давления электромагнитной волны на заряд, движущийся в поле такой волны (глава 7).

3.4 Применение законов сохранения

• Рассмотрим в качестве приложения законов сохранения, статическое распределение зарядов. Ранее, чтобы ввести понятие поля, мы отличали заряд, создающий силу (поле), от пробного заряда, на который эта сила действует. В реальности все заряды равноправны, и подобный метод является идеализацией, справедливой, когда “пробный” заряд много меньше зарядов, “создающих” поле. Если заряды одного порядка, то они равноправно взаимодействуют друг с другом при помощи силы Кулона. Например, чтобы сблизить два положительных заряда, необходимо приложить усилие (затратить энергию). Эта энергия окажется “запасённой” в этой системе. Если заряды “отпустить”, они разлетятся, и энергия перейдёт в энергию их движения.

Зафиксируем все заряды, кроме одного (“ k -того”). Тогда его движение во внешнем поле характеризуется потенциальной энергией $Q_k \varphi(\mathbf{r}_k)$ (стр. 17), где \mathbf{r}_k – положение заряда, а $\varphi(\mathbf{r})$ – потенциал, создаваемый остальными зарядами. Это та энергия, которую необходимо затратить, чтобы переместить заряд из бесконечности в точку \mathbf{r}_k . Пусть в пространстве находится заряд Q_1 . Приблизим к нему Q_2 и “зафиксируем” оба заряда. Затем к ним добавим Q_3 , и т.д. Энергия, затрачиваемая на формирование всей системы зарядов, будет равна:

$$U = Q_2 \frac{Q_1}{r_{12}} + Q_3 \left(\frac{Q_1}{r_{13}} + \frac{Q_2}{r_{23}} \right) + \dots = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}},$$

где $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. В сумме по i, j перебираются по одному разу все возможные пары зарядов: (1,2); (1,3); (2,3), и т.д. Это в компактном виде записано в виде символа $i \neq j$. Он означает, что суммирование ведётся по двум индексам i, j за исключением их совпадающих значений. В такой сумме пары будут дублироваться [т.е. встречается (1,2) и (2,1)], поэтому поставлен множитель $1/2$.

Найдём эту же энергию, интегрируя выражение для плотности (3.3). Так как магнитного поля нет, в статическом случае $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$, поэтому суммарная энергия поля равна:

$$U = \int \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} dV = - \int \frac{\mathbf{E} \nabla \varphi}{8\pi} dV = \int \frac{\varphi \nabla \mathbf{E}}{8\pi} dV = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dV,$$

где выполнено интегрирование по частям $\nabla(\varphi \mathbf{E}) = \mathbf{E} \nabla \varphi + \varphi \nabla \mathbf{E}$ (в предположении, что поля на бесконечности по теореме Гаусса достаточно быстро убывают и интеграл от $\nabla(\varphi \mathbf{E})$ равен нулю) и подставлено уравнение Максвелла $\nabla \mathbf{E} = 4\pi\rho$.

Записывая для точечных зарядов плотность $\rho(\mathbf{r}) = \sum Q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)$, получим:

$$U = \frac{1}{2} \sum_k Q_k \varphi(\mathbf{r}_k) \mapsto \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}}.$$

Заметим, что на самом деле суммирование должно производиться по всем i, j , а не только когда $i \neq j$. Действительно, в выражение для $\varphi(\mathbf{r}_k)$ входит общий потенциал, создаваемый всеми зарядами, в т.ч. и k -тым зарядом. Поэтому выше поставлен не знак равенства, а стрелочка. В результате такого перехода отброшены бесконечные (но постоянные, т.е. не зависящие от положения зарядов) члены самодействия типа $Q_1 Q_1 / |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1|$, т.к. энергия всегда определена с точностью до константы. Тем не менее, не очень хорошо, что эта константа получилась бесконечной. Проблема самодействия и подобных бесконечностей подробно рассматривается в главе 6.

▷ Аналогично электростатической энергии можно вычислить энергию постоянных токов в магнитостатике:

$$U = \int \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} dV = \int \frac{\mathbf{B}[\nabla \times \mathbf{A}]}{8\pi} dV = \int \frac{\mathbf{A}[\nabla \times \mathbf{B}]}{8\pi} dV = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \mathbf{j} dV, \quad (3.20)$$

где использовано тождество $\nabla(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}[\nabla \times \mathbf{A}] - \mathbf{A}[\nabla \times \mathbf{B}]$ (дивергенция $\nabla(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ даёт по теореме Гаусса поверхностный интеграл, равный нулю на бесконечности для убывающих полей). В последнем равенстве подставлено уравнение Максвелла $\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}$ магнитостатики. Учитывая решение для векторного потенциала (2.8), стр. 38, энергию можно переписать в следующем виде:

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1)\mathbf{j}(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2. \quad (3.21)$$

Если постоянные токи текут в наборе из n тонких замкнутых проводников ($\mathbf{j} dV \mapsto I d\mathbf{r}$), то энергию можно также представить в следующем виде:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \int_{L_k} \mathbf{A} d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \int_{S_k} [\nabla \times \mathbf{A}] d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Phi_k,$$

где применена теорема Стокса и Φ_k – поток магнитного поля через поверхность, натянутую на k -й замкнутый проводник с током. В частности, энергия одного замкнутого проводника равна $U = I\Phi/2$.

- Рассмотрим теперь плоскую электромагнитную волну (стр. 60), распространяющуюся вдоль единичного вектора \mathbf{n} :

$$\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{n}\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(t - \mathbf{n}\mathbf{r}).$$

Плотность энергии и импульса такой волны равны:

$$W = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} = \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi}, \quad \mathbf{P} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi} = \mathbf{n} \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi},$$

где подставлено \mathbf{B} и учтено, что $\mathbf{n}\mathbf{E} = 0$. Заметим, что между *плотностями* энергии и импульса волны выполняется стандартная связь для энергии и импульса частицы, движущейся со скоростью света:

$$\mathbf{P} = \mathbf{n} W.$$

Если волна падает на поверхность, то эта поверхность испытывает *световое давление*, возникающее в результате поглощения (или отражения) поверхностью импульса поля. Экспериментально световое давление было впервые измерено П. Н. Лебедевым в 1899 г. Оно очень маленькое. Так, интенсивность солнечного света на поверхности Земли составляет около $J = 1000 \text{ Вт}/\text{м}^2$. Сила F равна отношению изменения импульса за время Δt , поэтому световое давление на зеркало (полное отражение) площадью S составляет (восстановлена скорость света c):

$$P = \frac{F}{S} = \frac{\Delta p}{S\Delta t} = \frac{2p}{S\Delta t} = \frac{2E/c}{S\Delta t} = \frac{2J}{c} \approx \frac{2 \cdot 10^3 \text{ Вт}/\text{м}^2}{3 \cdot 10^8 \text{ м}/\text{с}} \approx 7 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Такое же давление окажет стальная гирька массой 7 миллиграммов, если её удастся “раскатать” в пластину размером метр на метр.

Момент импульса волны (независимо от её поляризации) не направлен вдоль волнового вектора. Действительно, так как вектор \mathbf{P} параллелен \mathbf{n} , векторное произведение $\mathbf{r} \times \mathbf{P}$ будет перпендикулярно \mathbf{n} . Плотность момента импульса циркулирует по окружностям в плоскостях, перпендикулярных \mathbf{n} . Если вычислить полный момент, проинтегрировав плотность по цилинду с осью вдоль \mathbf{n} , то получится ноль. Этот факт называют *проблемой момента импульса плоской волны*. Проблема состоит в том, что для поляризованной по кругу волны обычно ожидают получить отличный от нуля момент импульса. Например, на квантовом уровне такая волна является потоком поляризованных фотонов, каждый из которых несёт спин \hbar . Одно из возможных решений проблемы состоит в переходе от плоской волны к более реалистичным ограниченным пучкам, интенсивность поля которых постепенно снижается при удалении от линии распространения. Пример расчёта момента импульса поля такого пучка будет дан несколько в главе 7.

• В связи с законами сохранения сделаем несколько замечаний. Простейший подход к решению электродинамических задач выглядит следующим образом. Предполагается, что есть некоторые *заданные* заряды и токи, которые создают поле (его находят, решая уравнения Максвелла). Кроме этого, существуют *пробные* заряды, которые в этом поле движутся под воздействием силы Лоренца. Их движение не изменяет внешнего поля, а сами заряды не излучают. Несмотря на искусственность подобного алгоритма, он позволяет точно решить многие задачи и оказывается неплохим первым приближением к реальности.

При получении законов сохранения был рассмотрен несколько более общий подход, в котором заряды одновременно создавали поле и были подвержены его воздействию. В совместных законах сохранения поля и зарядов часть энергии (импульса или момента импульса) поля передаётся зарядам. Само поле при этом должно терять энергию. При решении задачи о поведении пробного заряда, например, в поле электромагнитной волны этого не происходит. Внешнее для него поле остаётся без изменений и не теряет энергию, которая “передаётся” заряду. Поэтому на пробный заряд световая волна не оказывает давления, точнее, закон сохранения импульса поля + заряда в этом случае неприменим.

Законы сохранения можно применять, когда нет разделения на пробные заряды и внешнее поле. Пусть электромагнитная волна поглощается пластинкой из некоторого материала. Как и “положено” для законов сохранения, можно не рассматривать детали взаимодействия волны и пластиинки, подсчитав величины, входящие в (3.12), (3.19), (3.17) до и после взаимодействия. На микроуровне процесс поглощения электромагнитной волны связан с тем, что заряды пластиинки испытывают действие со стороны волны и начинают излучать. Это излучение “гасит” исходную волну, в результате чего происходит её поглощение. В этом случае в законе сохранения “после взаимодействия” должны стоять напряжённости не падающей волны, а суммарного поля, возникающего в результате сложения поля исходной волны и вторичных волн от зарядов пластины.

Заметим также, что в каждом законе сохранения присутствуют поверхностьные члены или дивергенции в дифференциальной форме. Сохраняющую величину мы получаем, когда отбрасываем эти члены при интегрировании по всему пространству. Однако подобное действие не даёт нам ответа на вопрос, как по пространству распределена, например, энергия поля. С этим вопросом тесно связана проблема неоднозначности выбора плотностей сохраняющихся величин, которую мы обсудим позднее.

3.5 Решение волновых уравнений для потенциалов

• Найдём решение уравнений (2.33), стр. 47 когда известны плотности заряда и тока. Скалярный потенциал в калибровке Лоренца удовлетворяет *уравнению Д'Аламбера*:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = 4\pi\rho, \quad (3.22)$$

где $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$ – заданная функция, а $\varphi = \varphi(t, \mathbf{x})$ – неизвестная функция, которую необходимо найти.

С математической точки зрения это линейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка. Линейность означает, что если нам известны два его решения φ_1 и φ_2 , то их линейная комбинация $C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$, где C_i – произвольные константы, также будет решением. Однородным это уравнение станет, когда $\rho = 0$, и тогда его называют *волновым уравнением*.

Для решения уравнения необходимо задать начальные условия. Так как в нём есть производная по времени второго порядка, потребуется две функции координат: собственно $\varphi(0, \mathbf{x})$ и значение её производной по времени $\partial\varphi(0, \mathbf{x})/\partial t$ в начальный момент $t = 0$. Общее решение уравнения Д'Аламбера можно записать следующим образом:

$$\varphi = \varphi_0(t, \mathbf{x}) + \varphi_1(t, \mathbf{x}),$$

где $\varphi_0(t, \mathbf{x})$ – общее решение однородного уравнения ($\rho = 0$), а $\varphi_1(t, \mathbf{x})$ – любое частное решение неоднородного уравнения ($\rho \neq 0$). Общее решение однородного уравнения обеспечивает выполнение произвольных начальных условий, а частное решение – выполнение самого уравнения.

Попробуем угадать частное решение, а затем проверим его подстановкой в уравнение (3.22). Если бы производной по времени не было, вместо уравнения Д'Аламбера получилось бы уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \quad (3.23)$$

Его решение в электростатике записывалось в виде суммы (интеграла) по элементарным зарядам, создающим кулоновский потенциал:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}$$

где $d^3\mathbf{r} = dV$ – элементарный объём, соответствующий переменной интегрирования \mathbf{r} . Интегрирование ведётся по всему пространству.

Если задача нестационарна и заряды движутся, то их плотность в данном элементарном объёме всё время изменяется. Однако информация об этом изменении достигает точки наблюдения поля только через время, равное расстоянию $|\mathbf{x} - \mathbf{r}|$ (единичная скорость распространения). Поэтому предположим, что пуассоновский интеграл остаётся в силе, однако плотность заряда в нём необходимо брать с учётом запаздывания в предшествующий момент времени $t - |\mathbf{x} - \mathbf{r}|$:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \varphi_0(t, \mathbf{x}) + \int \frac{\rho(t - |\mathbf{x} - \mathbf{r}|, \mathbf{r})}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}. \quad (3.24)$$

Это предположение оказывается верным. Убедимся в этом прямymi вычислениями. Обозначим расстояние (=время) запаздывания через $R = |\mathbf{x} - \mathbf{r}|$, а $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{r}$. Возьмём лапласиан от подынтегрального выражения по переменной \mathbf{x} (или эквивалентно по \mathbf{R}) как вторую производную произведения функций:

$$\nabla \nabla \left(\frac{\rho}{R} \right) = \nabla \left(\frac{\nabla \rho}{R} + \rho \nabla \frac{1}{R} \right) = \frac{\Delta \rho}{R} - 2 (\nabla \rho) \frac{\mathbf{R}}{R^3} + \rho \Delta \frac{1}{R}. \quad (3.25)$$

Во втором слагаемом последнего равенства учтено значение градиента $\nabla(1/R) = -\mathbf{R}/R^3$. Градиент и лапласиан от плотности равны:

$$\nabla \rho = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \Delta \rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right)^2 - \frac{\partial \rho}{\partial t} \nabla \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{2}{R}.$$

Подставляя всё это в (3.25), получаем, что все слагаемые, кроме $\rho \Delta(1/R)$, сокращаются. Для лапласиана от $1/R$ справедливо соотношение:

$$\Delta \frac{1}{R} = -4\pi \delta(\mathbf{R}). \quad (3.26)$$

Оно следует из закона Гаусса для точечного заряда $\nabla \mathbf{E} = 4\pi \delta(\mathbf{R})$ и связи $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$. Поэтому окончательно получаем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = 4\pi \int \rho(t - |\mathbf{x} - \mathbf{r}|, \mathbf{r}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 4\pi \rho(t, \mathbf{x}).$$

При интегрировании с дельта-функцией интеграл опускается, а переменная интегрирования становится равной $\mathbf{r} = \mathbf{x}$.

Такое же решение можно записать и для каждой компоненты векторного потенциала:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}_0(t, \mathbf{x}) + \int \frac{\mathbf{j}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{r}|, \mathbf{r})}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}. \quad (3.27)$$

Значения потенциалов с индексом “0” по определению удовлетворяют однородным (волновым) уравнениям. Они описывают общие решения в отсутствие зарядов.

3.6 Дипольное излучение

В разделах §1.3, §2.3 были получены выражения для электрического и магнитного полей на больших расстояниях от зарядов и токов в статическом случае. Проведём аналогичные вычисления в ситуации, когда токи, положение зарядов, а следовательно, и напряжённость электромагнитного поля меняются со временем. Подобное представление решений уравнений Максвелла, в том числе, описывает излучение электромагнитных волн (если заряды двигаются с переменной скоростью).

Пусть расстояние от точки наблюдения полей до компактной системы зарядов равно $|\mathbf{x}|$. Тогда любые изменения, происходящие с этими зарядами, будут наблюдаться в прошлом, отдалённом от текущего момента на время $|\mathbf{x}|/c$, где $c = 1$ – фундаментальная скорость. На самом деле, всё в этом мире мы наблюдаем в прошлом. Любые сигналы распространяются со скоростью, равной или меньшей фундаментальной. Чем дальше от нас объект, тем более отдалённое его прошлое мы видим. То, что происходит с Солнцем, мы узнаём только через 8 минут, а соседнюю галактику Андромеды мы видим такой, какой она была 2.5 миллиона лет назад.

Запишем, полученные выше, решение уравнений Максвелла для скалярного потенциала (3.24):

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{\rho(t - |\mathbf{x} - \mathbf{r}|, \mathbf{r})}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r},$$

опустив часть решения $\varphi_0(t, \mathbf{x})$ свободных уравнений. Разложим в ряд расстояние от элементарного объёма $d^3\mathbf{r}$ до точки наблюдения (стр. 18):

$$|\mathbf{x} - \mathbf{r}| \approx |\mathbf{x}| - \mathbf{n}\mathbf{r},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Разложим также плотность заряда в ряд Тейлора по $\mathbf{n}\mathbf{r}$:

$$\rho(t - |\mathbf{x} - \mathbf{r}|, \mathbf{r}) \approx \rho(T + \mathbf{n}\mathbf{r}, \mathbf{r}) \approx \rho(T, \mathbf{r}) + \dot{\rho}(T, \mathbf{r})(\mathbf{n}\mathbf{r}) + \dots,$$

где $T = t - |\mathbf{x}|$ – время в прошлом от текущего момента t , в котором наблюдатель, расположенный в \mathbf{x} , “видит” систему зарядов. Точка над ρ – частная производная по времени. Аналогично разложим в ряд знаменатель под интегралом:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} \approx \frac{1}{|\mathbf{x}|(1 - \mathbf{n}\mathbf{r}/|\mathbf{x}|)} \approx \frac{1}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}}{|\mathbf{x}|^2},$$

ограничившись порядком малости $\mathbf{n}\mathbf{r}/|\mathbf{x}|$.

Перемножая эти два ряда с точностью до $\mathbf{n}\mathbf{r}$, получаем:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) \approx \frac{Q}{|\mathbf{x}|} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{d}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{\dot{\mathbf{n}\mathbf{d}}}{|\mathbf{x}|}, \quad (3.28)$$

где введены суммарный заряд и дипольный момент системы зарядов:

$$Q = \int \rho(T, \mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad \mathbf{d} = \int \mathbf{r} \rho(T, \mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad T = t - |\mathbf{x}|. \quad (3.29)$$

Первое слагаемое является кулоновским потенциалом. Для замкнутой системы зарядов полный заряд постоянен. Кулоновский член не зависит от времени и эффекта запаздывания T . Дальше для простоты будем рассматривать случай $Q = 0$. Второе и третье слагаемые в разложении потенциала определяются дипольным моментом и скоростью его изменения. При этом второе слагаемое совпадает с выражением, полученным в электростатике §1.3 (за исключением эффекта запаздывания). Дипольный момент даже замкнутой системы зарядов (в отличие от полного заряда) является функцией времени. На расстоянии $|\mathbf{x}|$ он должен браться в момент времени $T = t - |\mathbf{x}|$. Третье слагаемое в (3.28) на больших расстояниях убывает существенно медленнее, чем второе. Поэтому именно оно описывает излучаемую электромагнитную волну. Такое излучение называется *дипольным излучением*.

▷ В силу уравнения непрерывности (1.53), стр. 28, производную по времени от дипольного момента можно переписать следующим образом:

$$\dot{\mathbf{d}} = \frac{d}{dT} \int \mathbf{r} \rho(T, \mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = - \int \mathbf{r} (\nabla \mathbf{j}) d^3\mathbf{r} = \int \mathbf{j} d^3\mathbf{r},$$

где ∇ действует на \mathbf{r} и последнее равенство получается в результате интегрирования по частям. Действительно, запишем i -ю компоненту производной дипольного момента:

$$\dot{d}_i = - \int r_i (\nabla \mathbf{j}) d^3\mathbf{r} = - \int \nabla(r_i \mathbf{j}) d^3\mathbf{r} + \int (\mathbf{j} \nabla) r_i d^3\mathbf{r} = \int j_i d^3\mathbf{r}.$$

(интеграл от полной дивергенции равен нулю в силу теоремы Гаусса, т.к. на поверхности объёма, удалённой от зарядов, токов нет).

В магнитостатике считалось, что пространственный интеграл от плотности тока \mathbf{j} равен нулю (в стационарном случае ограниченный ток должен быть замкнутым). Если токи зависят от времени, это не так. Например, поле может создавать одиночный заряд, движущийся с переменной скоростью. В этом случае $\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(T)) \mathbf{v}(T)$ и интеграл от тока равен $Q \mathbf{v}(T)$.

▷ Аналогично записывается разложение интеграла (3.27) для векторного потенциала. В ведущем приближении:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \approx \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int \mathbf{j}(T, \mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \frac{\dot{\mathbf{d}}(T)}{|\mathbf{x}|}. \quad (3.30)$$

Как и в случае с третьим слагаемым в разложении скалярного потенциала (3.28), это выражение называется дипольным излучением.

Найдём электромагнитное поле на больших расстояниях, взяв для скалярного потенциала третье слагаемое ($Q = 0$, $|\mathbf{x}|^2 \gg |\mathbf{x}|$):

$$\varphi(t, \mathbf{x}) \approx \frac{\mathbf{n} \dot{\mathbf{d}}(T)}{|\mathbf{x}|}, \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \approx \frac{\dot{\mathbf{d}}(T)}{|\mathbf{x}|}, \quad T = t - |\mathbf{x}|. \quad (3.31)$$

Будем пренебрегать членами порядка $1/|\mathbf{x}|^2$ по сравнению с линейно убывающими по $|\mathbf{x}|$. Поэтому при взятии ротора от \mathbf{A} можно $1/|\mathbf{x}|$ вынести за знак наблы, так как её действие на этот множитель даст вклад порядка $1/|\mathbf{x}|^2$. При дифференцировании по координатам дипольного момента необходимо учесть, что $\mathbf{d} = \mathbf{d}(t - |\mathbf{x}|)$, поэтому:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{d}}}{\partial x_i} = -\ddot{\mathbf{d}} \frac{\partial |\mathbf{x}|}{\partial x_i} = -\ddot{\mathbf{d}} \frac{x_i}{|\mathbf{x}|} = -\ddot{\mathbf{d}} n_i,$$

где, как и раньше, $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ – единичный вектор в направлении точки наблюдения. Следовательно, магнитное поле равно:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{|\mathbf{x}|} [\ddot{\mathbf{d}} \times \nabla] |\mathbf{x}| = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{x}|}.$$

Аналогично вычисляется электрическое поле:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{(\mathbf{n} \ddot{\mathbf{d}}) \mathbf{n} - \ddot{\mathbf{d}}}{|\mathbf{x}|} = \frac{\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]}{|\mathbf{x}|}.$$

Таким образом, в приближении электрического дипольного излучения:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{B} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \frac{\ddot{\mathbf{d}}(T) \times \mathbf{n}}{|\mathbf{x}|}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}. \quad (3.32)$$

Заметим, что электрическое и магнитное поля оказались перпендикулярными. Дальнейшие члены разложения скалярного потенциала приводят к поправкам к этим выражениям, называемым квадрупольным (и далее мультипольным) излучением. Следующие члены разложения векторного потенциала дают т.н. *магнитно-дипольное* излучение, зависящее от вторых производных магнитного момента $\ddot{\mathbf{m}}$. Подобный ряд можно строить сколь угодно длинным, получая всё более точное приближение к интегральному представлению запаздывающих потенциалов.

▷ Плотность импульса поля дипольного излучения равна:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi} = \frac{[\mathbf{B} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{B}}{4\pi} = \mathbf{n} \frac{\mathbf{B}^2}{4\pi} = \mathbf{n} \frac{[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2}{4\pi \mathbf{x}^2},$$

где учтено, что $\mathbf{n}\mathbf{B} = 0$. В силу закона сохранения электромагнитной энергии (3.10), убывание энергии в объёме связано с её потоком \mathbf{P} через поверхность. Интеграл от \mathbf{P} по этой поверхности равен “уходу” энергии за единицу времени.

Интенсивность излучения dI в направлении телесного угла $d\Omega$ определяется, как поток энергии, проходящий в единицу времени через элемент поверхности $dS = \mathbf{x}^2 d\Omega$ сферы радиуса $|\mathbf{x}|$:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \mathbf{x}^2 (\mathbf{n}\mathbf{P}) = \frac{[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2}{4\pi}. \quad (3.33)$$

Введя угол θ между $\ddot{\mathbf{d}}$ и единичным вектором \mathbf{n} , интенсивность в телесном угле $d\Omega$ можно записать следующим образом:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi} \sin^2 \theta. \quad (3.34)$$

Интенсивность излучения максимальна в направлении, перпендикулярном второй производной по времени от дипольного момента ($\theta = \pi/2$).

Проинтегрируем интенсивность излучения по всему телесному углу ($d\Omega = d\phi \sin \theta d\theta$):

$$I = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{2} \int_{-1}^1 (1 - z^2) dz.$$

В результате получается полная интенсивность излучения (суммарная энергия, теряемая системой зарядов в единицу времени):

$$I = \frac{2}{3} \ddot{\mathbf{d}}^2. \quad (3.35)$$

Наличие второй производной у дипольного момента означает, что излучение возникает, когда заряды движутся ускоренно. Например, для одиночного заряда $\mathbf{d} = Q \mathbf{r}$ и $\ddot{\mathbf{d}} = Q \mathbf{a}$, где \mathbf{a} – ускорение заряда в момент времени T .

Выше разложение запаздывающих потенциалов производилось в предположении $\mathbf{n}\mathbf{r} \ll |\mathbf{x}|$. Однако при вычислении напряжённостей поля возникают производные по времени. Поэтому подобное разложение также предполагает относительную малость скоростей и ускорений зарядов.

3.7 Примеры дипольного излучения

▷ В качестве примера рассмотрим диполь, который периодически изменяется со временем с частотой ω :

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \sin \omega t. \quad (3.36)$$

Таким диполем может выступать заряженная частица, испытывающая периодические колебания вдоль постоянного вектора \mathbf{d}_0 . Вторую производную дипольного момента необходимо вычислить при $T = t - |\mathbf{x}|$. Поэтому:

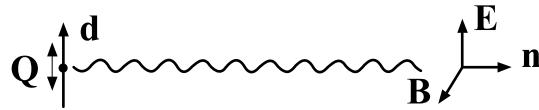
$$\ddot{\mathbf{d}} = -\mathbf{d}_0 \omega^2 \sin(\omega(t - |\mathbf{x}|)).$$

Соответственно, электрическое и магнитное поля (3.32) равны:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{d}_0 - \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{d}_0)}{|\mathbf{x}|} \omega^2 \sin(\omega(t - |\mathbf{x}|)),$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{d}_0}{|\mathbf{x}|} \omega^2 \sin(\omega(t - |\mathbf{x}|)).$$

Если поля наблюдаются на линии, перпендикулярной вектору \mathbf{d}_0 , то $\mathbf{n}\mathbf{d}_0 = 0$ и электрическое поле параллельно \mathbf{d}_0 . Направления полей приведены ниже на рисунке:



В окрестности рассматриваемой линии электромагнитное поле похоже на плоскую волну, амплитуда которой постепенно убывает с удалением от её источника.

Полная энергия излучения через сферу радиуса $|\mathbf{x}|$ равняется:

$$I = \frac{2}{3} d_0^2 \omega^4 \sin^2(\omega(t - |\mathbf{x}|)),$$

где d_0 – длина диполя (амплитуда колебания заряда). Эта энергия периодически изменяется с частотой ω . Её среднее значение по периоду изменения равно:

$$\langle I \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} I dt = \frac{d_0^2 \omega^4}{3}.$$

Энергия излучения быстро растёт с ростом частоты колебаний диполя. Однако необходимо помнить, что дипольное приближение справедливо только при малых скоростях зарядов. Поэтому приведенные выше соотношения справедливы пока $v \sim d_0 \omega \ll 1$.

▷ В качестве второго примера рассмотрим электрон, движущийся вокруг протона по окружности радиуса r (неквантовая модель атома). Заряд электрона отрицательный $-e < 0$, а у протона – положительный $e > 0$. Связем начало системы отсчёта с протоном. Так как его масса в 1836 раз больше, чем у электрона, будем считать его неподвижным. Дипольный момент равен $\mathbf{d} = -er$ и направлен от электрона к протону. Пусть скорость движения невелика, так что можно воспользоваться нерелятивистской динамикой. Запишем уравнения движения и энергию электрона (без учёта энергии покоя m):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{e^2}{r^3} \mathbf{r}, \quad \mathcal{E} = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - \frac{e^2}{r}.$$

Если движение происходит по окружности, то ускорение по модулю равно $a = v^2/r$ и направлено к центру (к протону). Поэтому:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{e^2}{mr}, \quad \mathcal{E} = -\frac{e^2}{2r}.$$

Полное излучение энергии в единицу времени равно:

$$I = \frac{2}{3} (ea)^2 = \frac{2}{3} \frac{e^6}{m^2 r^4}. \quad (3.37)$$

Эта величина равна $I = -\Delta\mathcal{E}/\Delta t$ (потеря энергии электрона за время Δt). Относительное изменение энергии будет равно:

$$\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = -\frac{I}{\mathcal{E}} \Delta t = \frac{4}{3} \frac{e^4}{m^2 r^3} \Delta t \mapsto \frac{4}{3} \frac{e^4}{m^2 r^3 c^4} c \Delta t,$$

где в последнем выражении восстановлена скорость света в результате подстановок $e \mapsto e/c$, $t \mapsto ct$. Введём т.н. *классический радиус электрона* r_e и возьмём типичный радиус атома (боровский радиус)

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} = 2.817940 \cdot 10^{-15} \text{ м}, \quad r = \frac{r_e}{\alpha^2} = 0.529177 \cdot 10^{-10} \text{ м},$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c) \approx 1/137$ – безразмерная постоянная тонкой структуры. Тогда относительное изменение энергии электрона имеет вид:

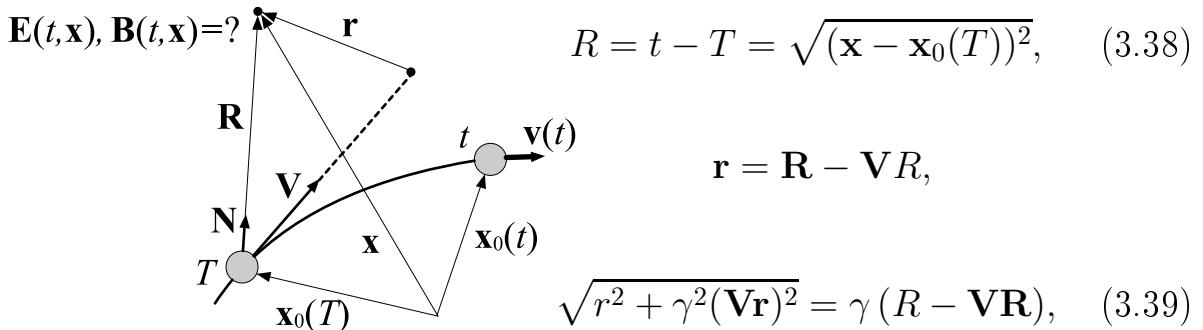
$$\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \frac{4}{3} \frac{r_e^2}{r^3} c \Delta t.$$

Энергия электрона уменьшится в два раза всего за $2 \cdot 10^{-11}$ секунды. Потребовалось создать квантовую теорию, чтобы, в том числе, объяснить устойчивость атомов. Заметим, что относительная скорость электрона равна постоянной тонкой структуры $v/c = \sqrt{r_e/r} = \alpha$. Поэтому за $2 \cdot 10^{-11}$ секунды электрон совершил примерно $n \sim 1/\alpha^3 = 2.5 \cdot 10^6$ оборотов вокруг протона.

3.8 Произвольно движущийся заряд *

Пусть заряд движется с переменной скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$. Найдём электромагнитное поле, создаваемое зарядом в момент времени t в точке пространства $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$. Рассмотрим момент времени $T = t - R$ в прошлом, когда заряд находился на расстоянии R от точки наблюдения и имел скорость $\mathbf{V} = \mathbf{v}(T)$. Выделенность этого момента состоит в том, что информация об изменении скорости заряда, распространяясь с фундаментальной единичной скоростью, к текущему моменту времени как раз проходит расстояние $R = t - T$. Все величины, относящиеся к прошлому, будем обозначать заглавными буквами. Так, $\mathbf{N} = \mathbf{R}/R$ – единичный вектор от заряда в точку наблюдения в момент времени T .

Из решения уравнений для потенциалов (3.24), (3.27) следует, что их значения в момент времени t определяются положением заряда и его скоростью в момент времени T и *не зависят от ускорения* заряда. Поэтому заряд, движущийся с переменной скоростью $\mathbf{v}(t)$, в момент времени t неотличим от совпадающего с ним в прошлом (время T) заряда, движущегося далее равномерно и прямолинейно со скоростью $\mathbf{V} = \mathbf{v}(T)$. Такое движение будем называть “фантомным”. Ниже на рисунке оно представлено в виде пунктирной прямой линии. Сам заряд движется по, вообще говоря, искривлённой траектории с переменной скоростью. Однако, так как от ускорения заряда в момент времени T потенциалы не зависят, удобно считать, что в этот момент от заряда “отрывается” его двойник-фантом, который движется равномерно и прямолинейно, проходя за время $R = t - T$ расстояние \mathbf{VR} . Основные соотношения, следующие из геометрии введенных величин, приведены справа от рисунка:



где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Последняя формула проверяется возведением в квадрат и подстановкой $\mathbf{R} - \mathbf{V}R$ вместо \mathbf{r} .

Время запаздывания $T = T(t, \mathbf{x})$ – функция текущего времени t и точки наблюдения \mathbf{x} . Оно определяется траекторией $\mathbf{x}_0(t)$ заряда и получается из решения уравнения (3.38). При этом $R = R(t, \mathbf{x}) = t - T(t, \mathbf{x})$.

Свяжем с фантомным зарядом в момент времени t инерциальную систему отсчёта S' . Так как в ней он поконится, для потенциалов поля справедливы кулоновские выражения:

$$\varphi' = \frac{Q}{r'}, \quad \mathbf{A}' = 0. \quad (3.40)$$

Подставим их в обратные преобразования Лоренца для потенциалов [в (2.50) переставим местами штрихованные и нештрихованные величины и сделаем замену $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$]:

$$\varphi = \gamma \frac{Q}{r'} = \frac{Q \gamma}{\sqrt{r^2 + \gamma^2 (\mathbf{V}\mathbf{r})^2}}, \quad \mathbf{A} = \gamma \mathbf{V} \varphi' = \mathbf{V} \varphi, \quad (3.41)$$

где для расстояния от фантомного заряда в момент времени $t = 0$ до точки наблюдения использовано преобразование для модуля радиус-вектора (см. стр. 21). При помощи (3.39) потенциалы можно также переписать следующим образом:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \frac{Q}{R - \mathbf{V}\mathbf{R}}, \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{Q \mathbf{V}}{R - \mathbf{V}\mathbf{R}}. \quad (3.42)$$

Эти потенциалы для произвольно движущегося заряда называют *потенциалами Лиенара-Вихерта*. В качестве полезного упражнения по работе с дельта-функцией стоит вывести эти же соотношения непосредственно из общего решения (3.24), (3.27). Например, для плотности заряда необходимо записать выражение $\rho(t, \mathbf{x}) = Q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t))$.

▷ Отметим один момент. Уравнения Максвелла были получены для системы равномерно движущихся зарядов. Затем постулировалось, что они справедливы и для ускоренного движения зарядов. Хотя уравнения Максвелла явно не зависят от ускорений, это не означает, что от ускорений не зависят напряжённости поля. Дело в том, что уравнения Максвелла в исходной записи являются системой дифференциальных уравнений первого порядка. Из этой системы можно исключить, например, магнитное поле, получив для электрического поля уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} = -4\pi \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - 4\pi \nabla \rho. \quad (3.43)$$

Оно имеет форму уравнения Д'Аламбера, однако источники, стоящие в правой части, содержат производную по времени от тока. Именно это и приводит к тому, что напряжённости окажутся зависящими от ускорения заряда (в то время как потенциалы - нет).

- Найдём напряженности электрического и магнитного полей

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Производные потенциалов берутся по координатам фиксированной точки пространства $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ и по текущему моменту времени t , а выражения для потенциалов (3.42) зависят (в правых частях) от величин в момент времени T . Поэтому потребуются определённые математические хитрости. Возьмём дифференциал от условия запаздывания: $t = T + R = T + \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(T))^2}$.

$$dt = dT + \frac{\mathbf{R} d\mathbf{x} - \mathbf{V} \mathbf{R} dT}{R} \quad \Rightarrow \quad dT = \frac{R dt}{R - \mathbf{V} \mathbf{R}} - \frac{\mathbf{R} d\mathbf{x}}{R - \mathbf{V} \mathbf{R}},$$

где $\mathbf{V} = d\mathbf{x}_0(T)/dT$ – скорость в момент времени T , а $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(T)$. По определению дифференциала функции $T = T(t, \mathbf{x})$ имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{R}{R - \mathbf{V} \mathbf{R}}, \quad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\mathbf{R}}{R - \mathbf{V} \mathbf{R}}.$$

Потенциалы зависят от \mathbf{x} явно и неявно через $T = T(t, \mathbf{x})$. Например, скалярный потенциал (3.42) имеет вид:

$$\varphi = \frac{Q}{\sqrt{\{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(T)\}^2} - \mathbf{V} \{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(T)\}}.$$

Поэтому градиент и производная по t равны:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}} + \frac{\partial\varphi}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial\mathbf{x}}, \quad \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Для получения ротора векторного потенциала

$$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{V}\varphi) = \varphi \nabla \times \mathbf{V} - \mathbf{V} \times \nabla\varphi$$

необходимо найти также ротор от скорости

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial T} \times \mathbf{V} = -\frac{\mathbf{R} \times \mathbf{W}}{R - \mathbf{V} \mathbf{R}},$$

где $\mathbf{W} = d\mathbf{V}/dT$ – ускорение частицы в момент времени T . Вычисляя все производные и проводя несложные алгебраические преобразования ($\leq H_{15}$), получим:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{R^2} \frac{(1 - V^2)(\mathbf{N} - \mathbf{V})}{(1 - \mathbf{V}\mathbf{N})^3} + \frac{Q}{R} \frac{\mathbf{N} \times [(\mathbf{N} - \mathbf{V}) \times \mathbf{W}]}{(1 - \mathbf{V}\mathbf{N})^3}, \quad (3.44)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{N} \times \mathbf{E}, \quad (3.45)$$

где $\mathbf{N} = \mathbf{R}/R$. Магнитное поле оказывается перпендикулярным электрическому и радиус-вектору \mathbf{R} от заряда в момент времени $T = T(t, \mathbf{x})$.

При помощи радиус-вектора \mathbf{r} от фантомного заряда к точке наблюдения электрическое поле можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{E} = Q \frac{\gamma \mathbf{r}}{(r^2 + \gamma^2 (\mathbf{V}\mathbf{r})^2)^{3/2}} + Q \frac{\gamma^3 [\mathbf{R} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{W}]]}{(r^2 + \gamma^2 (\mathbf{V}\mathbf{r})^2)^{3/2}}. \quad (3.46)$$

Первое слагаемое является напряжённостью электрического поля равномерно движущегося со скоростью \mathbf{V} фантомного заряда. Если бы заряд не менял свою скорость, он совпадал бы с этим фантомом.

Напряжённость электрического поля можно также переписать в следующем изящном виде, найденном Ричардом Фейнманом ($\ll H_{18}$):

$$\mathbf{E} = Q \frac{\mathbf{N}}{R^2} + QR \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{N}}{R^2} \right) + Q \frac{d^2 \mathbf{N}}{dt^2}. \quad (3.47)$$

Обратим внимание, что все производные вычисляются по текущему времени $t = T + R(T)$, а не по T , к которому относятся величины R и \mathbf{N} .

Если скорость заряда мала, то напряжённость электрического поля можно приближённо записать следующим образом:

$$\mathbf{E} \approx \frac{Q}{R^2} \mathbf{N} + \frac{Q}{R} [\mathbf{N} \times [\mathbf{N} \times \mathbf{W}]].$$

Второе слагаемое убывает, как $1/R$. Первый же (“кулоновский”) член убывает, как $1/R^2$, т.е. существенно быстрее. Пренебрегая на больших расстояниях первым слагаемым, найдём импульс электромагнитной волны. Так как второе слагаемое перпендикулярно \mathbf{R} , т.е. $\mathbf{ER} = 0$, имеем:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi} = \frac{\mathbf{E} \times [\mathbf{R} \times \mathbf{E}]}{4\pi R} = \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi} \mathbf{N} \approx \frac{Q}{4\pi} \frac{\mathbf{W}^2 - (\mathbf{WN})^2}{R^2} \mathbf{N}.$$

Интенсивность излучения dI в направлении телесного угла $d\Omega$ определяется, как поток энергии, проходящий в единицу времени через элемент поверхности $dS = R^2 d\Omega$ сферы радиуса R (стр. 81).

$$\frac{dI}{d\Omega} = R^2 (\mathbf{NP}) \approx \frac{Q^2}{4\pi} W^2 \sin^2 \theta,$$

где θ – угол между ускорением и направлением в точку наблюдения из запаздывающего положения заряда \mathbf{N} . Интеграл по всему телесному углу $d\Omega = d\phi \sin \theta d\theta$ даёт полное излучение заряда (*формула Лармора*):

$$I \approx \frac{2}{3} Q^2 \mathbf{W}^2. \quad (3.48)$$

Его можно сравнить с излучением в дипольном приближении (стр. 81). Для одиночного заряда $\mathbf{d}(T) = Q\mathbf{x}_0(T)$ и, соответственно, $\ddot{\mathbf{d}} = Q\mathbf{W}$.

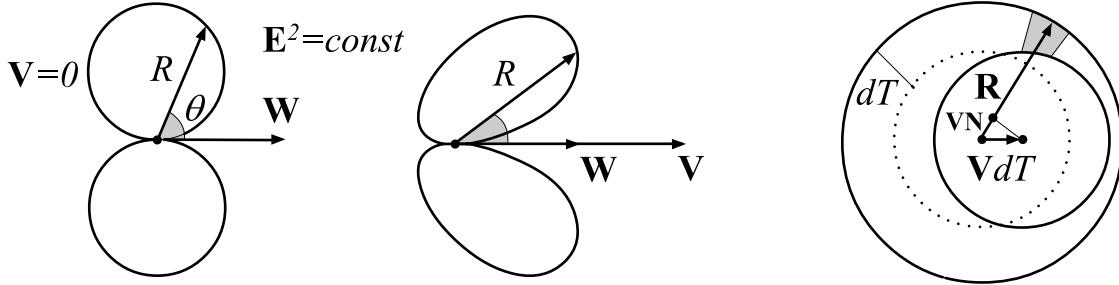
• Изучим теперь излучение заряда, не считая его скорость маленькой. На больших расстояниях от заряда напряжённости поля равны:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{R} \frac{\mathbf{N} \times [(\mathbf{N} - \mathbf{V}) \times \mathbf{W}]}{(1 - \mathbf{V}\mathbf{N})^3}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{N} \times \mathbf{E}. \quad (3.49)$$

Пусть скорость \mathbf{V} и ускорение \mathbf{W} параллельны, так что $\mathbf{V} \times \mathbf{W} = 0$. В этом случае интенсивность излучения равна:

$$\frac{dI}{d\Omega} = R^2 \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi} = \frac{Q^2 W^2}{4\pi} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - V \cos \theta)^6}. \quad (3.50)$$

Для медленного заряда излучение максимально в направлении, перпендикулярном ускорению. Чем ближе скорость заряда к скорости света, тем сильнее максимум излучения смещается в направлении движения (ниже первые два рисунка). Похожим свойством обладает движущийся изотропный (в собственной системе отсчёта) источник света в результате aberrации (стр. V₁:102).



Найдём суммарную интенсивность излучения. Интеграл по ϕ даст 2π , а для интегрирования по θ сделаем замену $z = \cos \theta$:

$$I = \frac{Q^2 W^2}{2} \int_{-1}^1 \frac{1 - z^2}{(1 - Vz)^6} dz = \frac{2Q^2 W^2}{15} \frac{5 + V^2}{(1 - V^2)^4}. \quad (3.51)$$

Интеграл по z находится при помощи дифференцирования определённого интеграла по параметру. Эти вычисления несложны, но сравнительно громоздки (< H₁₇).

Найдём энергию, теряемую зарядом при излучении за единицу времени. Её величина для движущегося заряда отличается от I . Действительно, проследим за излучённой в прошлом энергией между моментами времени T и $T+dT$. Если бы заряд был неподвижен, к текущему моменту эта энергия была бы сконцентрирована между двумя сферами с радиусами R и $R - dT$ и совпадающими центрами. При движении заряда за время dT центр внутренней сферы смещается на $\mathbf{V}dT$, а её поверхность прижимается к внешней сфере в направлении движения (3-й рисунок).

В результате толщина зазора между сферами в направлении \mathbf{N} уменьшается на $\mathbf{NV}dT$. Если $\mathbf{V} = 0$, то толщина зазора равна dT . При $\mathbf{V} \neq 0$ она равна $dT(1 - \mathbf{VN})$. Соответственно, в $(1 - \mathbf{VN})$ раз изменяется элемент объёма сферического слоя в направлении \mathbf{N} (хотя суммарный объём между сферами, конечно, не меняется). Энергия, расположенная между слоями в телесном углу $d\Omega$, равна:

$$d\mathcal{E} = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} R^2 d\Omega dT (1 - \mathbf{VN}) \Rightarrow \frac{d\tilde{I}}{d\Omega} = \frac{d\mathcal{E}}{dT d\Omega} = R^2 \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi} (1 - \mathbf{VN}).$$

Стоит сравнить множитель $(1 - \mathbf{VN})$ с соотношением $V_1:(3.5)$, стр. V₁:80 в эффекте Доплера (у векторов \mathbf{n} и \mathbf{N} противоположные направления). В результате, интенсивность теряемой энергии \tilde{I} отличается от I множителем $1 - \mathbf{VN}$. Интегрирование по всем телесным углам даёт ($\lessdot H_{17}$):

$$\tilde{I} = \frac{Q^2 W^2}{2} \int_{-1}^1 \frac{1 - z^2}{(1 - Vz)^5} dz = \frac{2}{3} \frac{Q^2 W^2}{(1 - V^2)^3}. \quad (3.52)$$

▷ Кроме линейного торможения (например, рентгеновское излучение при ударе электрона об электрод) существует ещё одна важная разновидность излучения. В магнитном поле заряд движется по окружности (или спирали). В этом случае скорость и ускорение перпендикулярны. При малой скорости заряда излучение направлено перпендикулярно плоскости орбиты и называется *циклотронным*. Если же скорость заряда ультраэлектрическая, то максимум излучения сконцентрирован в направлении текущего (с учётом запаздывания) мгновенного вектора скорости. Подобное излучение (касательное к окружности или спирали) называют *синхротронным*. Оно возникает в круговых ускорителях частиц (отсюда и происходит название). Его же регулярно наблюдают астрономы в окрестности самых разнообразных космических объектов.

Для произвольной ориентации скорости и ускорения теряемая в единицу времени энергия даётся ($\lessdot H_{16}$) *формулой Лъенара* (1898 г.):

$$\tilde{I} = \frac{2}{3} Q^2 \frac{\mathbf{W}^2 - [\mathbf{V} \times \mathbf{W}]^2}{(1 - V^2)^3}. \quad (3.53)$$

Эту формулу можно записать в следующем инвариантном виде:

$$\tilde{I} = \frac{2}{3} \frac{Q^2}{m^2} \left(\frac{dp}{d\tau} \right)^2, \quad (3.54)$$

где $\mathbf{p} \equiv p^\nu = \{\mathbb{E}, \mathbf{p}\}$ – 4-импульс частицы массой m , а $d\tau = dT\sqrt{1 - \mathbf{V}^2}$ – её собственное время с учётом эффекта запаздывания.

Глава 4

Теория поля

В этой главе продолжается изучение электродинамики и других теорий, основу которых составляет понятие “поле”. В фокусе нашего внимания будет ковариантный формализм. Сначала, с его помощью мы снова получим уравнения Максвелла, подобно тому, как это было сделано в главе 1. Для этого закон Кулона будет записан в терминах 4-векторов.

Затем рассматривается достаточно общий метод Жозефа Луи Лагранжа. Он позволяет получать уравнения движения и законы сохранения, которые более подробно изучаются в следующих двух главах. В основе этого метода лежит понятие действия – функционала, зависящего от координат частиц и полевых функций. Если они удовлетворяют уравнениям движения, то действие принимает экстремальное значение. Можно двигаться в обратном направлении: задав действие и требуя его экстремальности, получать уравнения движения.

4.1 Ковариантный формализм

▷ Физические события происходят в 4-мерном псевдоевклидовом пространстве (стр. V₁:195). Каждое событие характеризуется моментом времени t и положением \mathbf{x} , которые объединяются в четверку $x^\mu = \{t, \mathbf{x}\}$ (координаты точки в 4-пространстве). Свойства пространства определяются интервалом между событиями (расстояние между точками):

$$ds^2 = dt^2 - d\mathbf{x}^2. \quad (4.1)$$

Он является инвариантным преобразованием Лоренца между двумя инерциальными системами отсчёта:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (4.2)$$

По повторяющим индексам подразумевается суммирование от 0 до 3, знак которого не ставится. Если система S' движется относительно S со скоростью \mathbf{v} , преобразования Лоренца можно записать в виде (стр. V₁:31):

$$t' = \gamma(t - \mathbf{v}\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \gamma\mathbf{v}t + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}), \quad (4.3)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ – фактор Лоренца, $\Gamma = (\gamma - 1)/v^2 = \gamma^2/(\gamma + 1)$ и v – это $|\mathbf{v}|$. Везде далее используется система единиц в которой фундаментальная скорость (скорость света) равна единице: $c = 1$.

▷ Компонентами 4-вектора является четвёрка величин $A^\mu = \{A^0, \mathbf{A}\}$, которые преобразуются при переходе в другую систему отсчёта аналогично координатам события $x^\mu = \{t, \mathbf{x}\} = \{x^0, \mathbf{x}\}$. Сам по себе 4-вектор является геометрическим (физическим) объектом и не зависит от выбора системы отсчёта (базиса в 4-пространстве). Однако его компоненты разные в различных системах. Поэтому векторы будут обозначаться прямым шрифтом \mathbf{A} , а их компоненты наклонным. Кроме *контравариантных* компонент с верхними индексами A^μ , вводятся *ковариантные* компоненты с нижними индексами A_μ :

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = \{A^0, -\mathbf{A}\}, \quad (4.4)$$

где $g_{\mu\nu}$ – *метрический тензор*. В лоренцевых координатах (физическое время t и декартовы оси \mathbf{x}) он диагонален, причем $g_{00} = 1$, а $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, что обозначается как $g_{\mu\nu} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$. Вводится также метрический тензор с верхними индексами:

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, \quad g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu. \quad (4.5)$$

Он обратен $g_{\mu\nu}$ (второе соотношение с символом Кронекера) и в лоренцевых координатах имеет такие же компоненты: $g^{\mu\nu} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$.

▷ Кроме интервала (4.1), инвариантом преобразований Лоренца является скалярное произведение двух 4-векторов:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - \mathbf{AB} \quad (4.6)$$

(точка между векторами часто опускается). Свёртка с метрическим тензором поднимает и опускает индексы в любых выражениях. Например, для лоренцевской матрицы:

$$\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\nu, \quad \Lambda_\mu{}^\nu = g^{\nu\alpha} \Lambda_{\mu\alpha}.$$

При этом буква Λ не меняется и мы будем следить за порядком индексов как по вертикали, так и по горизонтали. В частности, преобразования контравариантных и ковариантных компонент вектора записываются следующим образом:

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu, \quad A'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu. \quad (4.7)$$

▷ Данная система отсчёта (система координат в 4-пространстве) задаётся при помощи *базиса*. Им выступают четыре независимых 4-вектора e_0, e_1, e_2, e_3 , где индекс – номер вектора, а не его компонента (используется прямой шрифт). В общем случае эти векторы не ортогональны, поэтому дополнительно к ним вводится *взаимный базис*: e^0, e^1, e^2, e^3 . Любой 4-вектор можно разложить по базису. Коэффициентами разложения по векторам e_μ являются контравариантные компоненты 4-вектора, а по базису e^μ – ковариантные (стр. V₁:203):

$$\mathbf{A} = A^\mu e_\mu = A_\mu e^\mu. \quad (4.8)$$

Скалярные произведения базисных векторов удовлетворяют соотношениям:

$$e^\mu e_\nu = \delta^\mu_\nu, \quad e_\mu e_\nu = g_{\mu\nu}, \quad e^\mu e^\nu = g^{\mu\nu}. \quad (4.9)$$

▷ Тензором типа (n, m) называется величина, имеющая $n + m$ индексов, n из которых находятся вверху, а m – внизу. По определению она преобразуется, как произведение n контравариантных и m ковариантных компонент. Число $n + m$ называется *rangom* тензора. Например, для тензора $T_{\alpha\beta}^\gamma$ типа $(1, 2)$:

$$T'^\gamma{}_{\alpha\beta} = \Lambda^\gamma{}_\sigma \Lambda_\alpha{}^\mu \Lambda_\beta{}^\nu T^\sigma{}_{\mu\nu}.$$

Важную роль играют симметричные: $S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$ и антисимметричные: $A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}$ тензоры. Свёртка симметричного и антисимметричного тензора равна нулю: $S_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} = 0$ (стр. V₁:305). Уравнения физики, записанные в тензорном виде имеют одинаковый вид во всех системах отсчёта. При этом говорят, что они *ковариантны*.

▷ Пусть каждой точке пространства и времени присвоено некоторое число f . Это число *по определению* не зависит от выбора системы отсчёта, т.е. является одинаковым для всех наблюдателей. В этом случае говорят, что задано *скалярное поле* $f(t, \mathbf{r})$. Хотя значения $f(t, \mathbf{r})$ инвариантны, вид функции меняется в зависимости от системы отсчёта (стр. V₁:213):

$$f'(t', \mathbf{r}') = f(t, \mathbf{r}).$$

Четыре значения *векторного поля* $A^\alpha(t, \mathbf{r})$ также “привязываются” к конкретной точке пространства-времени. Однако при переходе к другой системе отсчёта эти значения меняются:

$$A'^\mu(t', \mathbf{r}') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(t, \mathbf{r}).$$

Аналогично определяются тензорные и другие поля.

▷ Важную роль играют производные по x^μ , являющиеся ковариантными компонентами 4-вектора наблы:

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right\}. \quad (4.10)$$

При взятии таких производных возникает символ Кронекера:

$$\partial_\alpha x^\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad \partial_\alpha x^2 = \partial_\alpha (g_{\beta\gamma} x^\beta x^\gamma) = g_{\beta\gamma} \delta_\alpha^\beta x^\gamma + g_{\beta\gamma} x^\beta \delta_\alpha^\gamma = 2 x_\alpha.$$

▷ При ковариантном описании электродинамики часто встречается абсолютный антисимметричный тензор Леви-Чевиты $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$. Он равен единице для $\varepsilon_{0123} = 1$. Все остальные значения получаются перестановкой индексов. Если два индекса совпадают, то тензор Леви-Чевиты равен нулю:

$$\varepsilon_{1023} = -1, \quad \varepsilon_{3120} = -1, \quad \varepsilon_{3210} = 1, \quad \varepsilon_{0012} = 0.$$

При помощи метрического тензора можно поднять индексы, получив $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$. Для него знак “базовой” компоненты обратный: $\varepsilon^{0123} = -1$. Справедливо тождество свёртки двух тензоров по одному индексу (стр. V₁:311):

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} = \delta_\alpha^\mu \varepsilon_{\beta\gamma}^{\nu\sigma} + \delta_\gamma^\mu \varepsilon_{\alpha\beta}^{\nu\sigma} + \delta_\beta^\mu \varepsilon_{\gamma\alpha}^{\nu\sigma}, \quad (4.11)$$

где $\varepsilon_{\beta\gamma}^{\nu\sigma} = \delta_\beta^\nu \delta_\gamma^\sigma - \delta_\gamma^\nu \delta_\beta^\sigma$ – антисимметричный по парам индексов тензор. Дальнейшие свёртки дают:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\lambda} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} = 2 \varepsilon_{\alpha\beta}^{\nu\sigma}, \quad \varepsilon_{\alpha\nu\mu\lambda} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} = -6 \delta_\alpha^\sigma, \quad \varepsilon_{\sigma\nu\mu\lambda} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} = -24,$$

что предлагается проверить в качестве упражнения.

▷ Физическими примерами 4-векторов является 4-скорость частицы \mathbf{U} (стр. V₁:204) с компонентами:

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \{U^0, \mathbf{U}\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}}, \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} \right\} \quad (4.12)$$

и 4-импульс \mathbf{p} (стр. V₁:216):

$$p^\mu = m U^\mu = \{E, \mathbf{p}\}, \quad (4.13)$$

где $\mathbf{u} = d\mathbf{x}/dt$ – 3-скорость, $E = m/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$ – энергия и $\mathbf{p} = m\mathbf{u}/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$ – импульс частицы массы m . Интервал вдоль траектории движения частицы $ds = dt \sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$ равен собственному времени часов, связанных с частицей. Масса – инвариант и выражается через квадрат 4-импульса:

$$m^2 = p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2. \quad (4.14)$$

Это соотношение, в частности, следует из равенства единице квадрата 4-скорости:

$$\mathbf{U}^2 = 1. \quad (4.15)$$

Его, в свою очередь, можно проверить при помощи компонент (4.12) или записывая $ds^2/ds^2 = dx^\mu dx_\mu/ds^2 = 1$. Обратим внимание, что в обозначениях $U^\mu = \{U^0, \mathbf{U}\}$ компонент 4-вектора скорости, не стоит путать 3-вектор скорости \mathbf{u} с 3-вектором $\mathbf{U} = \mathbf{u}/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$.

▷ Сила определяется как производная 3-импульса по времени: $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$. Она образует компоненты 4-вектора силы (стр. V₁:141):

$$f^\mu = m \frac{dp^\mu}{ds} = \left\{ \frac{\mathbf{u}\mathbf{F}}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}}, \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} \right\} = \{\mathbf{U}\mathbf{F}, U^0 \mathbf{F}\}, \quad (4.16)$$

где $\{U^0, \mathbf{U}\}$ – 4-скорость частицы, которой 4-сила ортогональна: $\mathbf{f} \cdot \mathbf{U} = 0$.

▷ Примером антисимметричного тензора с двумя индексами является момент импульса (стр. V₁:232):

$$L^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu. \quad (4.17)$$

Его пространственные компоненты определяются 3-вектором момента $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} = \{L^{23}, L^{31}, L^{12}\}$. При помощи $L^{\mu\nu}$ для системы частиц можно ввести 4-вектор спина (стр. V₁:236):

$$S_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} L^{\alpha\beta} U^\gamma. \quad (4.18)$$

Он равен моменту вращения в системе, где пространственные компоненты суммарного 4-импульса частиц $P^\mu = M U^\mu$ нулевые.

4.2 Закон Кулона

▷ Неподвижный заряд Q действует на небольшой (“пробный”) заряд q , находящийся от него на расстоянии $|\mathbf{x}|$, силой Кулона (стр. 12):

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = Qq \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}. \quad (4.19)$$

Если записать это выражение в произвольной системе отсчёта, то получится сила, создаваемая и движущимся зарядом Q . Для этого необходим 4-вектор, пространственными компонентами которого будет 3-вектор \mathbf{x} . Но $x^\mu = \{t, \mathbf{x}\}$ для этого не подходит, так как сила (4.19) в системе покоя заряда Q не зависит от t . Поэтому введём 4-вектор η , имеющий в системе покоя компоненты $\{0, \mathbf{x}\}$. В произвольной системе он равен:

$$\eta = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V}, \quad (4.20)$$

где \mathbf{V} – 4-скорость заряда Q . Это можно проверить помощи преобразований Лоренца (4.3), но проще следующие рассуждения. В системе покоя $\mathbf{V} = \{1, \mathbf{0}\}$ и, следовательно, $\eta = \{0, \mathbf{x}\}$. В силу *ковариантности*, выражение (4.20) можно расписать и в любой другой системе отсчёта.

Так как $\mathbf{V}^2 = 1$, вектор η ортогонален 4-скорости, а его квадрат равен:

$$\eta \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \eta^2 = \mathbf{x}^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{V})^2. \quad (4.21)$$

В системе, где $\mathbf{V} = \{1, \mathbf{0}\}$ (заряд Q неподвижен) квадрат $\eta^2 = -\mathbf{x}^2 < 0$, т.е. это пространственноподобный вектор (во всех системах $\eta^2 < 0$).

Компоненты 4-силы (4.16) для (4.19) равны:

$$f^\mu = \frac{Q q}{(-\eta^2)^{3/2}} \left\{ \mathbf{U} \mathbf{x}, U^0 \mathbf{x} \right\},$$

где $\mathbf{U} = \{U^0, \mathbf{U}\}$ – компоненты 4-скорости пробного заряда и расстояние до источника силы $|\mathbf{x}|$ сразу записано при помохи инварианта $\mathbf{x}^2 = -\eta^2$. Для придания компонентам 4-вектора f^μ ковариантного вида, заметим, что в системе покоя $\mathbf{V} = \{1, \mathbf{0}\}$, $\eta = \{0, \mathbf{x}\}$:

$$\eta(\mathbf{V} \mathbf{U}) - \mathbf{V}(\eta \mathbf{U}) = \left\{ \mathbf{U} \mathbf{x}, U^0 \mathbf{x} \right\}.$$

Поэтому в любой другой системе отсчёта:

$$\mathbf{f} = Q q \frac{\eta(\mathbf{V} \mathbf{U}) - \mathbf{V}(\eta \mathbf{U})}{(-\eta^2)^{3/2}}. \quad (4.22)$$

Этот 4-вектор силы является ковариантной записью закона Кулона (4.19).

▷ Понятие поля на начальном этапе возникает, когда пробный заряд q и его скорость \mathbf{U} отделяются от *источника* силы Q . Чтобы это сделать, введём *тензор напряжённости* поля точечного заряда Q , имеющего 4-скорость \mathbf{V}

$$F^{\alpha\beta} = Q \frac{\eta^\alpha V^\beta - \eta^\beta V^\alpha}{(a^2 - \eta^2)^{3/2}}. \quad (4.23)$$

Константа a размерности длины введена в знаменателе, чтобы устранить сингулярность при $\eta^2 = 0$. Такая регуляризация требуется при взятии производных и в конечных выражениях будет снята ($a \rightarrow 0$). При помощи $F^{\alpha\beta}$ ковариантный закон Кулона (4.22) можно переписать следующим образом:

$$\frac{dp^\alpha}{ds} = f^\alpha = q F^{\alpha\beta} U_\beta, \quad (4.24)$$

где по повторяющемуся индексу β проводится суммирование от 0 до 3.

▷ Найдём уравнение, которому удовлетворяет $F^{\alpha\beta}$. Учитывая ($\lessdot H_{19}$):

$$\partial_\alpha \eta^\beta = \delta_\alpha^\beta - V_\alpha V^\beta, \quad \delta_\alpha^\alpha = 4, \quad \partial_\alpha \eta^\alpha = 3, \quad \partial_\alpha \eta^2 = 2 \eta_\alpha \quad (4.25)$$

и вычисляя производную ($\lessdot H_{20}$), получаем два ковариантных уравнения:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 4\pi j^\beta, \quad (4.26)$$

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0, \quad (4.27)$$

где введен 4-ток заряда Q :

$$j^\beta = \frac{3}{4\pi} Q V^\beta \frac{a^2}{(a^2 - \eta^2)^{5/2}}. \quad (4.28)$$

При стремлении параметра a к нулю, плотность тока становится пропорциональной сингулярной δ -функции Дирака (стр. 13, 314):

$$j^\beta = Q V^\beta \delta(-\eta^2).$$

Как мы увидим в следующем разделе, (4.26), (4.27) эквивалентны уравнениям Максвелла, а (4.24) – силе Лоренца. Если считать справедливым *принцип суперпозиции* напряжённостей поля (стр. 14), эти уравнения описывают и совокупность различных зарядов, двигающихся с произвольными постоянными скоростями. Таким образом, закон Кулона, инвариантность зарядов во всех системах и принцип суперпозиции приводят к уравнениям Максвелла. В дальнейшем также постулируется, что (4.26), (4.27) справедливы и для поля создаваемого ускоренными зарядами, т.е. уравнения Максвелла зависят только от скоростей, но не зависят от ускорений зарядов.

4.3 Электродинамика

Напомним (стр. 57), что 4-вектор потенциала A^α определён так, что его нулевая компонента является *скалярным потенциалом* $\varphi(t, \mathbf{x})$, а пространственные – компонентами *векторного потенциала* $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$. Кроме этого компонентами 4-вектора тока j^α являются плотность заряда ρ и плотность тока $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ зарядов, движущихся со скоростью \mathbf{v} :

$$A^\alpha = \{\varphi, \mathbf{A}\}, \quad j^\alpha = \{\rho, \mathbf{j}\}. \quad (4.29)$$

Ковариантные компоненты, как обычно, получаются при помощи метрического тензора: $A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta = \{\varphi, -\mathbf{A}\}$. Определим *антисимметричный* тензор второго ранга, который будем называть *тензором напряжённостей* электромагнитного поля:

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha. \quad (4.30)$$

Его компоненты выражаются через напряжённости электрического поля $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A}/\partial t - \nabla \varphi$ и магнитного $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Так:

$$F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} = -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = E_x,$$

где минус появился, так как $A_1 = -A^1 = -A_x$. Заметим, что когда пишется проекция 3-вектора не с индексом: A_1 , а с именем оси: A_x , подразумевается, что это контравариантная компонента 4-вектора: A^1 .

Аналогично находятся $F_{02} = E_y$, $F_{03} = E_z$ или $\mathbf{E} = \{F_{01}, F_{02}, F_{03}\}$. Остальные компоненты связаны с магнитным полем:

$$F_{32} = \partial_3 A_2 - \partial_2 A_3 = -\frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial y} = [\nabla \times \mathbf{A}]_x = B_x.$$

В результате $\mathbf{B} = \{F_{32}, F_{13}, F_{21}\}$. Связь магнитного поля и пространственных компонент тензора напряжённостей можно записать при помощи 3-символа Леви-Чевиты ($\varepsilon_{123} = \varepsilon^{123} = 1$):

$$B^i = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk}, \quad F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B^k.$$

Подъём индексов осуществляется при помощи метрического тензора: $F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\mu\nu}$. Для компонент с нулевым индексом происходит смена знака (по повторяющимся индексам сумма от 0 до 3):

$$F^{01} = g^{0\mu} g^{1\nu} F_{\mu\nu} = g^{00} g^{11} F_{01} = -F_{01}.$$

Компоненты без нулевого индекса знак не меняют:

$$F^{12} = g^{1\mu} g^{2\nu} F_{\mu\nu} = g^{11} g^{22} F_{12} = F_{12}$$

и т.д. для остальных пространственных компонент.

Таким образом, с учётом антисимметричности $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$, получаем:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

В 4-пространстве любой антисимметричный тензор имеет 6 независимых компонент, которые можно выразить через проекции двух 3-векторов. Условно это записывается так (стр. V₁:232):

$$F_{\alpha\beta} = (-\mathbf{E}, -\mathbf{B}), \quad F^{\alpha\beta} = (\mathbf{E}, -\mathbf{B}). \quad (4.31)$$

▷ Антисимметричный тензор Леви-Чивиты $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ (стр. 94) позволяет определить ещё один антисимметричный тензор второго ранга, который будем помечать звёздочкой (это не комплексное сопряжение!):

$${}^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (4.32)$$

Расписывая сумму по α и β можно ($\prec H_{21}$) найти его компоненты:

$${}^*F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -E_z & E_y \\ B_y & E_z & 0 & -E_x \\ B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^*F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично тензорам $F_{\alpha\beta}$ и $F^{\alpha\beta}$ запишем:

$${}^*F_{\alpha\beta} = (\mathbf{B}, -\mathbf{E}), \quad {}^*F^{\alpha\beta} = (-\mathbf{B}, -\mathbf{E}).$$

Поля поменялись местами, поэтому ${}^*F_{\mu\nu}$ называют *дualным* к $F^{\mu\nu}$.

▷* Введём единичный ($V^2 = 1$) 4-вектор. Существует система отсчёта в которой его компоненты равны $V^\mu = \{1, \mathbf{0}\}$. Определим 4-векторы напряженности электрического и магнитного поля:

$$E^\mu = F^{\mu\nu} V_\nu, \quad B^\mu = V_\nu {}^*F^{\nu\mu}. \quad (4.33)$$

Они ортогональны V , т.е. $V \cdot E = U \cdot B = 0$, а в системе где $V^\mu = \{1, \mathbf{0}\}$ их компоненты равны $E^\mu = \{0, \mathbf{E}\}$ и $B^\mu = \{0, \mathbf{B}\}$. При помощи этих 4-векторов можно, в свою очередь, выразить тензор напряженности:

$$F_{\mu\nu} = E_\mu V_\nu - E_\nu V_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} B^\alpha V^\beta, \quad (4.34)$$

что проверяется расписыванием его компонент или используя (4.11).

- При помощи введенных обозначений, 4 уравнения Максвелла можно записать в виде двух явно *ковариантных уравнений* (имеющих одинаковый вид во всех инерциальных системах):

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 4\pi j^\beta, \quad \partial_\alpha^* F^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.35)$$

Распишем в первом уравнении сумму по индексу α , положив $\beta = 0$:

$$\partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \nabla \mathbf{E} = 4\pi j^0 = 4\pi\rho.$$

Также ($\lessdot H_{22}$) записываем для $\beta = 1$ и т.д. В результате получается пара уравнений Максвелла с источниками:

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4.36)$$

Аналогично ($\lessdot H_{23}$) второе ковариантное уравнение (4.35), приводит к уравнениям Максвелла без источников:

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4.37)$$

Естественно, уравнения Максвелла в векторной форме также являются ковариантными. Тем не менее, уравнения Максвелла (4.35) нагляднее демонстрируют такую ковариантность, так как в силу своего тензорного характера, по определению, имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчёта.

▷ Из первого уравнения (4.35) следует *уравнение непрерывности* для зарядов. Действительно, возьмём от него производную по x^β :

$$\partial_\beta \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 4\pi \partial_\beta j^\beta = 0.$$

Это соотношение равно нулю, так как вторая производная симметрична (перестановочна) $\partial_\alpha \partial_\beta = \partial_\beta \partial_\alpha$, а тензор антисимметричен $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$, поэтому их свёртка равна нулю (стр. 93):

$$\partial_\beta j^\beta = \partial_0 j^0 + \partial_i j^i = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} = 0. \quad (4.38)$$

▷ Отметим также, *калибровочную инвариантность* тензора напряжённостей $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$. Если к 4-потенциалу добавить 4-градиент скалярной функции (“изменить калибровку” A_α), то $F_{\alpha\beta}$ не поменятся:

$$A_\alpha \mapsto A_\alpha + \partial_\alpha f(t, \mathbf{x}), \quad F_{\alpha\beta} \mapsto F_{\alpha\beta}. \quad (4.39)$$

Это связано с перестановочностью частных производных, что предполагается проверить в качестве несложного упражнения. Калибровочный произвол позволяет накладывать на 4-потенциалы дополнительные условия (калибровочные условия).

▷ Второе ковариантное уравнение Максвелла (4.35) без источников может быть переписано в эквивалентном виде для тензора электромагнитного поля без звёздочки:

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.40)$$

Заметим, что индексы слагаемых в этом уравнении циклически представляются: $\alpha\beta\gamma \mapsto \beta\gamma\alpha \mapsto \gamma\alpha\beta$. Уравнение (4.40) несложно получить ($\ll H_{24}$) непосредственно из определения тензора $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$. Чтобы получить (4.40) из $\partial_\mu^* F^{\mu\lambda} = 0$ необходимо ($\ll H_{25}$) его свернуть с $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ и воспользоваться тождеством (4.11).

▷ Уравнению движения пробного заряда q во внешнем электромагнитном поле $F^{\alpha\beta}$ также можно придать явно ковариантный вид:

$$m \frac{dU^\alpha}{ds} = q F^{\alpha\beta} U_\beta, \quad (4.41)$$

где $U^\alpha = dx^\alpha/ds$ – 4-вектор скорости заряда q . Действительно, вдоль траектории частицы интервал равен $ds = dt\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$. Поэтому для $\alpha = 0$ уравнение (4.41) имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} \frac{d}{dt} \frac{m}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} = q F^{0i} U_i = \frac{q \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}}.$$

Полученное уравнение является производной кинетической энергии по времени. Эта производная равна скалярному произведению силы Лоренца на скорость частицы: $d\mathbb{E}/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$ (стр. V₁:139).

Аналогично, если $\alpha = 1$, то $q F^{1\beta} U_\beta = q F^{10} U_0 + q F^{1i} U_i$, поэтому:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} \frac{d}{dt} \frac{m u_x}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} = q \frac{E_x + B_z u_y - B_y u_z}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} = \frac{q (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})_x}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}},$$

и т.д., что приводит к силе Лоренца (стр. V₁:??):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = q \mathbf{E} + q [\mathbf{u} \times \mathbf{B}]. \quad (4.42)$$

▷ В качестве упражнения ($\ll H_{26}$), предлагается проверить, что для точечного заряда, движущегося с 4-скоростью \mathbf{V} , регуляризованный 4-потенциал равен:

$$A^\alpha = \frac{Q V^\alpha}{\sqrt{a^2 - \eta^2}}. \quad (4.43)$$

Для этого необходимо вычислить тензор напряженности поля, пользуясь определением $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ и сравнить его с (4.23). Стоит также проверить, что 4-потенциал (4.43) удовлетворяет *калибровке Лоренца*: $\partial A = 0$.

- После того, как физические величины определены как 4-векторы или тензоры, несложно записать их преобразования при смене системы отсчёта. Так, 4-потенциал $A^\alpha = \{\varphi, \mathbf{A}\}$ и 4-ток $j^\alpha = \{\rho, \mathbf{j}\}$ являются 4-векторами, поэтому они преобразуются так же, как и компоненты 4-вектора $x^\alpha = \{t, \mathbf{r}\}$. Например, для потенциалов имеем:

$$\varphi' = \gamma(\varphi - \mathbf{v}\mathbf{A}), \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \gamma\mathbf{v}\varphi + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{A}), \quad (4.44)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$ и $\Gamma = (\gamma - 1)/v^2$. В правой и левой части преобразований стоят *функции* координат и времени, которые соответствуют “своей” системе отсчёта: $\varphi' = \varphi'(t', \mathbf{r}')$, $\varphi = \varphi(t, \mathbf{r})$, и аналогично для \mathbf{A}' и \mathbf{A} . Тем не менее $\{t', \mathbf{r}'\}$ и $\{t, \mathbf{r}\}$ – это одна и та же точка 4-пространства.

▷ Ковариантное выражение без индексов является инвариантом. Так, вычислим свертку тензоров электромагнитного поля:

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = F_{01}F^{01} + F_{02}F^{02} + F_{03}F^{03} + F_{12}F^{12} + F_{13}F^{13} + F_{23}F^{23} + \dots,$$

где опущены такие же слагаемые с переставленными индексами. Так как $F_{\alpha\beta}$ и $F^{\alpha\beta}$ – антисимметричны, одновременная перестановка индексов ничего не изменит. Подставляя значения компонент, имеем:

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2). \quad (4.45)$$

Аналогично получается ещё один инвариант при свёртке тензора $F^{\alpha\beta}$ с дуальным к нему тензором ${}^*F_{\alpha\beta}$:

$${}^*F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 4\mathbf{EB}. \quad (4.46)$$

Так как в любой системе отсчёта компоненты тензора $F_{\alpha\beta}$ одинаковым образом выражаются через векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} , то эти два инварианта будут иметь такой же вид в любой системе отсчёта.

▷ Разновидности электромагнитных полей можно характеризовать знаком инвариантов (4.45), (4.46). В частности, если поля перпендикулярны в одной системе отсчёта $\mathbf{EB} = 0$, то они будут перпендикулярны и в любой другой. В этом случае тензор $F_{\alpha\beta}$ можно представить как антисимметризованное произведение двух 4-векторов:

$$F^{\alpha\beta} = M^\alpha N^\beta - M^\beta N^\alpha. \quad (4.47)$$

Действительно, расписывая компоненты этого выражения имеем:

$$\mathbf{E} = N^0 \mathbf{M} - M^0 \mathbf{N}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{N} \times \mathbf{M}.$$

Подставляя \mathbf{M} из первого соотношения во второе, имеем $\mathbf{B} = [\mathbf{N} \times \mathbf{E}] / N^0$, откуда следует ортогональность \mathbf{E} и \mathbf{B} .

▷ Получим ещё раз преобразования для напряжённостей электромагнитного поля. Величина $F^{\alpha\beta}$ преобразуется как тензор:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha F^{\alpha\beta} \Lambda^\nu_\beta, \quad (4.48)$$

где во второй матрице преобразования переставлены индексы по горизонтали и поставлен знак транспонирования. В результате порядок индексов становится соответствующим правилу перемножения матриц. Поэтому, опуская индексы, запишем преобразование тензора напряженности электромагнитного поля в матричном виде: $\mathbf{F}' = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Lambda}^T$. Когда оси x и x' выбраны в направлении относительной скорости, матрица преобразований Лоренца Λ^μ_α выглядит достаточно просто (стр. V1:207) и является симметричной. Поэтому в явном матричном виде преобразование для тензора $F^{\mu\nu}$ можно записать следующим образом:

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы, получаем:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - vB_z), & E'_z &= \gamma(E_z + vB_y), \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma(B_y + vE_z), & B'_z &= \gamma(B_z - vE_y). \end{aligned}$$

При произвольном направлении скорости (стр. 53):

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{E}), \quad (4.49)$$

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}) - \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{B}), \quad (4.50)$$

где γ и Γ определены также, как и в преобразованиях Лоренца. Эти соотношения получаются при помощи тензора $F_{\alpha\beta}$, если записать общий вид матрицы преобразования Λ^μ_α при произвольном направлении скорости (4.3). Можно также воспользоваться преобразованием для двух 4-векторов ∂_α , A_α и определением $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$. Обратные преобразования, как обычно, получаются перестановкой штрихованных и нештрихованных величин и заменой $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$.

Несложно видеть, что продольные к скорости компоненты напряжённостей не меняются:

$$\mathbf{v}\mathbf{E} = \mathbf{v}\mathbf{E}', \quad \mathbf{v}\mathbf{B} = \mathbf{v}\mathbf{B}'$$

Если в одной системе отсчёта нет магнитного поля $\mathbf{B}' = 0$, то в другой, оно всегда будет перпендикулярно электрическому: $\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}$.

4.4 Движение заряда в постоянных полях *

Ранее (стр. V₁:144) изучалось движение заряженной частицы по отдельности в постоянном электрическом и магнитном полях. Решим теперь более сложную задачу, когда есть одновременно и **E** и **B**, но они ортогональны: **EB** = 0.

Введём в лабораторной системе отсчёта два 4-вектора **N** и **M**:

$$N^\mu = \{0, \mathbf{e}\}, \quad M^\mu = \{|E|, \mathbf{e} \times \mathbf{B}\}, \quad (4.51)$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{E}/|E|$ – единичный вектор вдоль электрического поля. В отличии от $F^{\mu\nu}$, компоненты 4-векторов N^μ и M^μ заданы в конкретной системе отсчёта. Их компоненты в другой системе должны получаться при помощи преобразований Лоренца и они будут отличаться от (4.51). Введенные векторы ортогональны, **N** – единичный пространственноподобный вектор, а квадрат **M** выражается через инвариантную разницу квадратов электрического и магнитного полей:

$$NM = 0, \quad N^2 = -1, \quad M^2 = E^2 - B^2.$$

Благодаря ортогональности **E** и **B**, тензор напряжённостей можно ($\ll H_{27}$) представить в виде [см. также (4.47)]:

$$F^{\mu\nu} = N^\mu M^\nu - N^\nu M^\mu. \quad (4.52)$$

Такое представление позволяет записать уравнения движения заряда $m dU^\mu/ds = q F^{\mu\nu} U_\nu$ в векторном, а не тензорном виде:

$$\frac{m}{q} \frac{d\mathbf{U}}{ds} = \mathbf{N}(\mathbf{M}\mathbf{U}) - \mathbf{M}(\mathbf{N}\mathbf{U}). \quad (4.53)$$

Умножая его на **N** и **M**, получаем два связанных скалярных уравнения:

$$\frac{d(\mathbf{N}\mathbf{U})}{ds} = -\frac{q}{m} (\mathbf{M}\mathbf{U}), \quad \frac{d(\mathbf{M}\mathbf{U})}{ds} = -\frac{q}{m} \mathbf{M}^2 (\mathbf{N}\mathbf{U}). \quad (4.54)$$

Дифференцируя их по s , приходим к независимым, одинаковым уравнениям для каждого скалярного произведения:

$$\frac{d^2(\mathbf{N}\mathbf{U})}{ds^2} - \frac{q^2}{m^2} \mathbf{M}^2 (\mathbf{N}\mathbf{U}) = 0, \quad \frac{d^2(\mathbf{M}\mathbf{U})}{ds^2} - \frac{q^2}{m^2} \mathbf{M}^2 (\mathbf{M}\mathbf{U}) = 0. \quad (4.55)$$

Их решения зависят от знака \mathbf{M}^2 , т.е. от того, напряжённость какого поля **E** или **B** преобладает.

▷ Если $\mathbf{E}^2 < \mathbf{B}^2$, то $M^2 < 0$ и уравнения (4.55) являются осцилляторными. Их общее решение выражается через синус и косинус:

$$NU = (NU_0) \cos(\omega s) - \frac{q}{m\omega} (MU_0) \sin(\omega s), \quad (4.56)$$

$$MU = (MU_0) \cos(\omega s) - \frac{q}{m\omega} M^2 (NU_0) \sin(\omega s). \quad (4.57)$$

Индекс ноль означает начальные условия $U_0 = U(0)$, а частота равна:

$$\omega = \frac{q}{m} \sqrt{-M^2} = \frac{q}{m} \sqrt{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}. \quad (4.58)$$

Первые производные при $s = 0$ найдены из уравнений (4.54). Например, из первого уравнения (4.54) следует, что производная $d(NU)/ds$ при $s = 0$ равна $-(q/m)(MU_0)$, что даёт коэффициент при синусе в (4.56).

Решения для скалярных произведений, позволяют теперь проинтегрировать исходное уравнение (4.53):

$$U(s) = U_0 + \frac{qC_1}{m\omega} \sin(\omega s) + \frac{C_2}{M^2} [\cos(\omega s) - 1], \quad (4.59)$$

где введены постоянные 4-векторы:

$$C_1 = N(MU_0) - M(NU_0), \quad C_2 = M(MU_0) - N(NU_0) M^2. \quad (4.60)$$

Интегрируя ещё раз $U = dx/ds$, получаем траекторию заряда:

$$x(s) = x(0) + U_0 s + \frac{mC_1}{qM^2} [\cos(\omega s) - 1] + \frac{C_2}{M^2} \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega s) - s \right]. \quad (4.61)$$

Временная компонента 4-вектора $x = \{t, \mathbf{x}\}$ даёт связь между лабораторным временем t и собственным временем частицы s ($t_0 = 0$):

$$t = U_0^0 s + \frac{m}{qM^2} (\mathbf{E}U_0) [\cos(\omega s) - 1] + \frac{U_0^0 \mathbf{E}^2 - \mathbf{U}[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{M^2} \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega s) - s \right],$$

где $U_0^0 = \sqrt{1 + \mathbf{U}_0^2}$ – нулевая компонента 4-скорости при $s = 0$. Напомним, что 3-скорость \mathbf{u} связана с \mathbf{U} следующим образом: $\mathbf{U} = \mathbf{u}/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$. Несмотря на наличие периодических функций, время t монотонно растёт с изменением s . Например, если $\mathbf{U}_0 = \mathbf{0}$:

$$t = \frac{\mathbf{B}^2}{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2} s - \frac{\mathbf{E}^2}{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2} \frac{\sin(\omega s)}{\omega}$$

и $dt/ds > 0$ при любом s . Если $\mathbf{E} = 0$ то $t = s$ (неподвижная частица в магнитном поле не меняет модуля скорости).

▷ Если $\mathbf{E}^2 > \mathbf{B}^2$ или $M^2 > 0$, решение качественно меняется. В полученных выше формулах, тригонометрические функции необходимо заменить на гиперболические:

$$\cos(\omega s) \mapsto \operatorname{ch}(\omega s), \quad \frac{\sin(\omega s)}{\omega} \mapsto \frac{\operatorname{sh}(\omega s)}{\omega},$$

где новая частота равна

$$\omega = \frac{q}{m} \sqrt{M^2} = \frac{q}{m} \sqrt{\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2}. \quad (4.62)$$

В результате этих замен 4-скорость заряда принимает вид:

$$U(s) = U_0 + \frac{q C_1}{m \omega} \operatorname{sh}(\omega s) + \frac{C_2}{M^2} [\operatorname{ch}(\omega s) - 1]. \quad (4.63)$$

Аналогично получается траектория:

$$x(s) = x(0) + U_0 s + \frac{m C_1}{q M^2} [\operatorname{ch}(\omega s) - 1] + \frac{C_2}{M^2} \left[\frac{1}{\omega} \operatorname{sh}(\omega s) - s \right]. \quad (4.64)$$

и связь лабораторного и собственного времения заряда:

$$t = U_0^0 s + \frac{m}{q M^2} (\mathbf{E} \mathbf{U}_0) [\operatorname{ch}(\omega s) - 1] + \frac{U_0^0 \mathbf{E}^2 - \mathbf{U} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{M^2} \left[\frac{1}{\omega} \operatorname{sh}(\omega s) - s \right].$$

▷ Отдельно необходимо рассмотреть случай $\mathbf{E}^2 = \mathbf{B}^2$, для которого уравнения (4.54) имеют вид:

$$\frac{d(NU)}{ds} = -\frac{q}{m} (MU), \quad \frac{d(MU)}{ds} = 0, \quad (4.65)$$

где учтено, что при равенстве длин векторов электрического и магнитного поля, 4-вектор M является светоподобным: $M^2 = 0$. Интегрируя эти уравнения, получаем:

$$MU = MU_0, \quad NU = NU_0 - \frac{q}{m} (MU_0) s.$$

Соответственно, интегрирование уравнения (4.53) даёт 4-скорость:

$$U = U_0 + \frac{q}{m} C_1 s + \frac{q^2}{m^2} M (MU_0) \frac{s^2}{2}$$

из которой следует траектория заряда:

$$x = x_0 + U_0 s + \frac{q}{m} C_1 \frac{s^2}{2} + \frac{q^2}{m^2} M (MU_0) \frac{s^3}{6}.$$

Нулевая компонента снова даёт связь лабораторного времени $t = x^0$ и собственного времени заряда s .

▷ Запишем в явном виде введенные выше постоянные 4-векторы C_i . Вектор C_1 можно сразу записать как компоненты силы Лоренца из уравнения (4.53):

$$C_1 = \{ \mathbf{E}\mathbf{U}_0, U_0^0 \mathbf{E} + \mathbf{U}_0 \times \mathbf{B} \}. \quad (4.66)$$

Для нахождения компонент C_2 , вычислим сначала:

$$\mathbf{M}(\mathbf{MU}) = [\mathbf{e} \times \mathbf{B}] (\mathbf{U} [\mathbf{e} \times \mathbf{B}]) = [\mathbf{e} \times \mathbf{B}] ([\mathbf{U} \times \mathbf{e}] \mathbf{B}),$$

что можно записать как двойное векторное произведение:

$$= [\mathbf{U} \times \mathbf{e}] \times [[\mathbf{e} \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B}] - \mathbf{B} (\mathbf{U} \mathbf{B}) = \mathbf{U} \mathbf{B}^2 - \mathbf{e} \mathbf{B}^2 (\mathbf{e} \mathbf{U}) - \mathbf{B} (\mathbf{U} \mathbf{B}),$$

где всё время учитываем $\mathbf{e}^2 = 1$ и $\mathbf{e} \mathbf{B} = 0$. В результате:

$$C_2 = \{ U_0^0 \mathbf{E}^2 - \mathbf{U} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}], \mathbf{E} (\mathbf{E} \mathbf{U}_0) + \mathbf{B} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{U}_0] + U_0^0 [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \}. \quad (4.67)$$

▷ Пусть есть только электрическое поле ($\mathbf{B} = \mathbf{0}$). Тогда: $\omega = q |\mathbf{E}| / m$ и пространственные компоненты 4-скорости (4.63) равны:

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{U}_0 + \frac{q}{m} \mathbf{E} t,$$

что также сразу следует из уравнения $m d\mathbf{U}/dt = q \mathbf{E}$ (стр. V₁:144). Траектория заряда описывается параметрической функцией:

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + U_0^0 \frac{\mathbf{e}}{\omega} [\operatorname{ch}(\omega s) - 1] + \frac{\mathbf{e} (\mathbf{e} \mathbf{U}_0)}{\omega} \operatorname{sh}(\omega s) + \mathbf{e} \times [\mathbf{U}_0 \times \mathbf{e}] s,$$

где связь t и s имеет вид:

$$\omega t = \mathbf{e} \mathbf{U}_0 [\operatorname{ch}(\omega s) - 1] + U_0^0 \operatorname{sh}(\omega s). \quad (4.68)$$

▷ Аналогично, при наличии только магнитного поля ($\mathbf{E} = \mathbf{0}$), траектория равна ($\mathbf{b} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$, $\omega = q |\mathbf{B}| / m$):

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{U}_0 s + \frac{[\mathbf{b} \times \mathbf{U}_0]}{\omega} [\cos(\omega s) - 1] - [\mathbf{b} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{U}_0]] \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega s) - s \right]$$

и собственное время заряда связано с лабораторным простым соотношением:

$$t = U_0^0 s = \sqrt{1 + \mathbf{U}_0^2} s$$

(модуль скорости в магнитном поле не меняется). Стоит сравнить эти результаты с расчётами, сделанными в предыдущем томе (стр. V₁:144).

В дальнейшем, при рассмотрении кватернионов, мы снова вернёмся к этой задаче и рассмотрим более общий случай $\mathbf{EB} \neq 0$.

4.5 Действие и лагранжиан

- Напомним, что *функционалом* называется математический объект, который каждой функции ставит в соответствие некоторое число. Простейшим примером функционала будет определённый интеграл, например:

$$I[q(t)] = \int_0^\pi \left\{ \left(\frac{dq(t)}{dt} \right)^2 - q^2(t) \right\} dt.$$

Подстановка интегрируемой функции $q(t)$ даст определённое число. Так, если $q(t) = \sin(t)$, то $I = 0$, а для $q(t) = t \sin(t)$ функционал равен $I = \pi/2$. Как и с обычными функциями, можно ставить вопрос, при каких $q(t)$ функционал достигает минимального или максимального значения.

▷ При построении ковариантных уравнений движения, как для частиц, так и для полей, удобен лагранжев метод. В этом методе сначала задают динамические переменные, описывающие систему. В случае частиц ими являются координаты и скорости, а для полей – полевые функции и их производные. Так как большинство возникающих в физике уравнений – это уравнения второго порядка, обычно, динамические переменные ограничиваются первыми производными.

Затем записывается функционал от этих динамических величин, таким образом, что он достигает минимального (в общем случае экстремального) значения на функциях, удовлетворяющих уравнениям движения. Такой функционал называется *действием*. На практике ситуация обратная. Из достаточно общих соображений записывается действие и ищется его экстремум. Это приводит к уравнениям движения, которые называются *уравнениями Лагранжа*. Разные функционалы “порождают” различные уравнения. Динамическая система считается определённой, если задано соответствующее действие.

Смысл подобной деятельности состоит в том, что ковариантные уравнения в общем случае являются тензорными. Это не одно уравнение, а целая система уравнений. В тоже время, функционал является скалярным объектом (не имеет свободных индексов). Лагранжев метод из *одной* такой скалярной величины позволяют получить *набор* динамических уравнений. Если действие инвариантно, то и уравнения движения автоматически будут получаться ковариантными. Кроме этого, симметрия действия относительно различных преобразований непосредственно связана с законами сохранения, что составляет содержание теоремы Нёттер, доказываемой в главе 4.

▷ Пусть задана функция Лагранжа $L(q_k, \dot{q}_k)$, зависящая от n функций $q_k = q_k(t)$ и их производных $\dot{q}_k = dq_k/dt$, где $k = 1, \dots, n$. Будем рассматривать все функции имеющие при $t = t_1$ значения $q_k^{(1)} = q_k(t_1)$, а при $t = t_2$ — значения $q_k^{(2)} = q_k(t_2)$. Функционал действия:

$$I[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) dt. \quad (4.69)$$

оказывается минимальным (точнее экстремальным), если функции $q_k(t)$ удовлетворяют уравнениям Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}. \quad (4.70)$$

Для доказательства, к экстремальной траектории $q_k(t)$ добавим произвольные функции $\phi_k(t)$, умноженные на некоторое число ε . Таким способом, мы перебираем все возможные функции соединяющие начальную и конечную точки, считая, что $\phi_k(t_1) = \phi_k(t_2) = 0$ (см. рисунок). Интеграл, как функция ε , имеет экстремум при $\varepsilon = 0$, следовательно:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} L(q_k + \varepsilon \phi_k, \dot{q}_k + \varepsilon \dot{\phi}_k) dt \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \phi_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{\phi}_k \right] dt = 0.$$

В квадратных скобках, во втором слагаемом выделим производную произведения по времени (по повторяющимся индексам k сумма от 1 до n):

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \phi_k dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \phi_k \right) dt = 0.$$

В силу $\phi_k(t_1) = \phi_k(t_2) = 0$, второй интеграл равен нулю ($\lessdot H_{28}$). Функции $\phi_k(t)$ произвольны и первый интеграл будет равен нулю только, если равно нулю выражение в квадратных скобках, что и приводит к (4.70).

Если к функции Лагранжа добавить полную производную по времени $L \mapsto L + df(q_k(t), t)/dt$, то уравнения Лагранжа не поменяются. Действительно, при такой замене к действию добавится константа:

$$I \mapsto \int L(q_k, \dot{q}_k) dt + f(q_k(t_2), t_2) - f(q_k(t_1), t_1),$$

которая не скажется на вычислении экстремального значения $I[q]$, так как величины $q_k(t_1)$ и $q_k(t_2)$ считаются заданными.

▷ Можно рассматривать функционалы от функций, которые зависят не только от времени, но и от координат. При этом динамической переменной становится *поле*, которое, в общем случае, имеет несколько компонент: $\Psi_k(t, \mathbf{x})$. Индекс k может отсутствовать или пробегать, например, четыре значения от 0 до 3. В первом случае говорят о *скалярном поле*, а во втором о поле, являющимся 4-вектором (*векторное поле*). Можно рассматривать тензорные поля с двумя индексами: $F_{\mu\nu}$. Тогда под k подразумевается пара индексов: $k = \{\mu, \nu\}$. Возможны и более сложные случаи, например, спинорные поля (следующий том).

Не конкретизируя число компонент поля, запишем функционал, зависящий от полевых функций и их производных:

$$I[\Psi] = \int \mathcal{L}(\Psi_k, \partial_\alpha \Psi_k) d^4x. \quad (4.71)$$

Это 4-кратный интеграл в котором интегрирование ведётся по 4-мерному объёму $d^4x = dt d^3x$. Обычно рассматривается неограниченное 3-пространство в котором поля на бесконечности убывают: $\Psi_k(t, \infty) = 0$. Если это требование не выполняется, действие (4.71), вообще говоря, не определено (интеграл расходится).

Интегрирование по времени ведётся между t_1 и t_2 , в которых поле фиксировано:

$$\Psi_k(t_1, \mathbf{x}) = \Psi_k^{(1)}(\mathbf{x}), \quad \Psi_k(t_2, \mathbf{x}) = \Psi_k^{(2)}(\mathbf{x}), \quad (4.72)$$

где $\Psi_k^{(i)}(\mathbf{x})$ – некоторые заданные функции координат. Предполагается, что эволюция полей в момент времени $t = t_1$ начинается с функций $\Psi_k^{(1)}(\mathbf{x})$ и при $t = t_2$ переходит в функции $\Psi_k^{(2)}(\mathbf{x})$. Аналогично, при описании динамики частиц, предполагалось, что траектория динамических переменных проходит через точки $q_k^{(1)} = q_k(t_1)$ и $q_k^{(2)} = q_k(t_2)$.

Возможно более привычным является задание начальных условий для динамических переменных и их производных по времени. В случае полей начальные условия опять же определяются двумя функциями:

$$\Psi_k^{(1)}(\mathbf{x}) = \Psi_k(t_1, \mathbf{x}), \quad \dot{\Psi}_k^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Psi_k(t, \mathbf{x})}{\partial t} \Big|_{t=t_1}. \quad (4.73)$$

При выводе уравнений Лагранжа, удобнее использовать условия (4.72). Впрочем, так как в результате получаются дифференциальные уравнения второго порядка, задание начального условия в виде (4.73), в конечном счёте приведёт к конкретной функции $\Psi_k^{(2)}(\mathbf{x})$ в момент времени $t = t_2$, поэтому особой разницы между (4.72) и (4.73) нет.

▷ Найдём уравнения, решения которых соответствуют экстремуму действия (4.71). Для этого, как и в случае с частицами, введём произвольные функции $\phi_k = \phi_k(t, \mathbf{x})$ отклонения от поля, минимизирующую (4.71) и обращающиеся в ноль при t_1, t_2 . Умножим их на ε и запишем условие экстремума функционала по параметру ε при $\varepsilon = 0$:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int \mathcal{L}(\Psi_k + \varepsilon\phi_k, \partial_\alpha\Psi_k + \varepsilon\partial_\alpha\phi_k) d^4x = \int \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_k} \phi_k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\Psi_k)} \partial_\alpha\phi_k \right] d^4x = 0.$$

Справа по индексам k и α проводится суммирование. В последнем слагаемом можно выделить полную производную по ∂_α :

$$\int \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_k} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\Psi_k)} \right) \right] \phi_k d^4x + \int \partial_\alpha \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\Psi_k)} \phi_k \right) d^4x = 0.$$

Второй интеграл равен нулю, так как он имеет вид:

$$\int \partial_\alpha f^\alpha d^4x = \int \frac{\partial f^0}{\partial t} dt d^3\mathbf{x} + \int \nabla f dt d^3\mathbf{x} = 0. \quad (4.74)$$

Справа первый интеграл обращается в ноль при интегрировании по dt так как в моменты времени t_1 и t_2 поле ϕ_k равно нулю ($f \sim \phi_k$). Второй интеграл при интегрировании по $d^3\mathbf{x}$, в силу интегральной теоремы Гаусса, заменяется на интеграл по поверхности “охватывающей всё пространство”. На этой поверхности (на бесконечности) поля Ψ_k равны нулю. В результате получаются *уравнения Лагранжа для поля*

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\Psi_k)} \right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi_k}, \quad (4.75)$$

решения которых соответствуют экстремуму функционала (4.71).

Лагранжиан поля, как и лагранжиан частиц, определён неоднозначно. Если к нему прибавить 4-дивергенцию произвольной векторной функции полей:

$$\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} + \partial_\alpha F^\alpha(\Psi_k), \quad (4.76)$$

то уравнения Лагранжа не поменяются. Такая добавка к действию вычисляется как и (4.74). Первый интеграл в правой части приводит разности двух чисел – интегралов по объёму от граничных функций (4.72).

В заключение, отметим одну терминологическую особенность. Если действие получается в результате интегрирования некоторой функции по времени dt , то она называется функцией Лагранжа или лагранжианом L . Если дополнительно к интегрированию по времени, необходимо интегрировать по объёму, то \mathcal{L} уместно называть *плотностью лагранжиана*. Впрочем, для краткости, часто слово “плотность” будет опускаться.

4.6 Лагранжиан заряда во внешнем поле

▷ Записав релятивистски инвариантное выражение для функционала действия I (4.69), при помощи уравнений Лагранжа (4.70), мы автоматически получим ковариантные уравнения движения в тензорной форме. Перечислить возможные инварианты, обычно, проще, чем тензорные выражения. Поэтому при построении теории поля удобнее стартовать именно с действия, а не с уравнений движения. Рассмотрим сначала движение пробной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Если полей нет, состояние частицы полностью определяется её скоростью $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$. Существует естественный инвариант ds , равный интервалу между двумя бесконечно близкими событиями. Вдоль траектории частицы $ds = \sqrt{dt^2 - d\mathbf{r}^2} = \sqrt{1 - \mathbf{u}^2} dt$ он является собственным временем частицы. Поэтому действие свободной частицы можно записать следующим образом:

$$I = -m \int ds = -m \int \sqrt{1 - \mathbf{u}^2(t)} dt, \quad (4.77)$$

где m – константа, которая, как будет видно из дальнейшего, имеет смысл массы частицы. Знак минус выбран в силу традиции, чтобы в первом приближении получить выражение $m \mathbf{u}^2/2$, справедливое в классической механике.

При задании внешнего векторного поля, действующего на частицу, можно использовать как 4-потенциал $A^\mu(t, \mathbf{r}) = \{\varphi, \mathbf{A}\}$, так и тензор напряжённости $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$. В ковариантных обозначениях динамику частицы будем характеризовать 4-скоростью $\mathbf{U} = dx/ds$ или эквивалентно смещением $dx^\alpha = \{dt, d\mathbf{r}\}$ вдоль траектории. Чтобы получить инвариант, 4-скорость необходимо свернуть с функциями, характеризующими поле. Так как тензор $F_{\alpha\beta}$ – антисимметричен, свёртка $F_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta$ будет равна нулю. При использовании 4-потенциала, инвариант получается из скалярного произведения $\mathbf{A} \mathbf{U} ds = \mathbf{A} dx$, которое отлично от нуля. Поэтому, умножив него на некоторую константу q (она окажется зарядом частицы) и сложив с лагранжианом свободной частицы, получаем следующее действие:

$$I = -m \int ds - q \int A_\alpha dx^\alpha. \quad (4.78)$$

Мы рассмотрим три способа получения уравнений движения пробной частицы во внешнем поле. Сначала проведём вычисления в трёхмерных обозначениях. Затем этот же результат будет воспроизведен в более ковариантном виде двумя различными способами.

▷ Преобразуем действие (4.78), как интеграл по времени:

$$I = \int L(\mathbf{r}(t), \mathbf{u}(t)) dt.$$

Это приводит ($\Leftarrow H_{29}$) к следующей функции Лагранжа:

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = -m \sqrt{1 - \mathbf{u}^2} - q\varphi + q\mathbf{A}\mathbf{u}. \quad (4.79)$$

Покажем, что m – это масса частицы, в q – её заряд. Для лагранжиана (4.79) обобщёнными координатами q_k служат компоненты радиус-вектора, описывающего положение частицы $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$. Производная по времени обобщённых координат \dot{q}_k – это скорость частицы \mathbf{u} . Уравнения Лагранжа (4.70) в векторной форме имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}. \quad (4.80)$$

Вычислим производную лагранжиана (4.79) по скорости:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}, \quad (4.81)$$

где \mathbf{p} – это релятивистский импульс: $\mathbf{p} = m\mathbf{u}/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$. Для взятия полной производной по времени необходимо учесть, что потенциалы зависят от координат, соответствующих положению пробной частицы. Другими словами функцию $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ необходимо рассматривать как $\mathbf{A}(t, \mathbf{r}(t))$, где $\mathbf{r}(t)$ – траектория частицы. Поэтому полная производная равна:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} + q \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + q(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{A}, \quad (4.82)$$

где второе слагаемое – это взятие производной по времени от первого аргумента функции $\mathbf{A}(t, \mathbf{r}(t))$, а третье – от второго аргумента ($\Leftarrow H_{30}$). Найдём теперь правую часть уравнений Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \nabla L = -q\nabla\varphi + q\nabla(\mathbf{A}\mathbf{u}).$$

Подставляя эти производные в уравнения (4.80), имеем:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left(-\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + q \left(\nabla(\mathbf{A}\mathbf{u}) - (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{A} \right).$$

В результате получается сила Лоренца (стр. 22):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{u} \times \mathbf{B}], \quad (4.83)$$

где учтено тождество для двойного векторного произведения: $\mathbf{u} \times [\nabla \times \mathbf{A}]$ и определения напряженности электрического \mathbf{E} и \mathbf{B} магнитного полей.

▷ Чтобы получить сразу ковариантные уравнения (4.41), в лагранжевом подходе необходимо использовать не время t , а некоторый инвариант τ , который задаёт траекторию частицы в параметрическом виде: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$. Напрашивается в качестве такого инварианта выбрать собственное время частицы: $ds = dt \sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$. Однако в этом случае компоненты 4-скорости $\mathbf{U} = d\mathbf{x}/ds$ не будут независимыми, так как $\mathbf{U}^2 = 1$. Системы в которых на динамические переменные накладываются ограничения, называются системами со связями. Для них, при получении уравнений движения, необходимо использовать метод множителей Лагранжа. Это будет сделано ниже, а сейчас мы будем считать, что τ не совпадает с s . Обозначим точкой производную по этому параметру: $\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/d\tau$. Так как $ds^2 = d\mathbf{x} d\mathbf{x}$, действие частицы во внешнем поле можно записать в следующем виде:

$$I = -m \int \sqrt{d\mathbf{x}^2} - q A d\mathbf{x} = -m \int \sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2} d\tau - q A \dot{\mathbf{x}} d\tau.$$

Соответственно, функция Лагранжа равна:

$$L = -m \sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2} - q A \dot{\mathbf{x}}. \quad (4.84)$$

Возьмём от неё производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} &= -m \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}} - q A_\mu, & \frac{\partial L}{\partial x^\mu} &= -q \partial_\mu A^\nu \dot{x}_\nu, \\ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) &= -m \frac{\ddot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}} + m \frac{\dot{x}_\mu}{(\dot{\mathbf{x}}^2)^{3/2}} (\dot{\mathbf{x}} \ddot{\mathbf{x}}) - q \partial_\nu A_\mu \dot{x}^\nu. \end{aligned}$$

Вводя тензор напряженностей поля $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, запишем уравнения Лагранжа:

$$m \frac{\ddot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2}} - m \frac{\dot{x}_\mu}{(\dot{\mathbf{x}}^2)^{3/2}} (\dot{\mathbf{x}} \ddot{\mathbf{x}}) = q F_{\mu\nu} \dot{x}^\nu. \quad (4.85)$$

После получения уравнений, можно уже конкретизовать параметр τ . Понятно, что выделенным выбором будет $\tau = s$ при котором $\dot{\mathbf{x}}^2 = 1$ или дифференцируя по ds : $\dot{\mathbf{x}} \ddot{\mathbf{x}} = 0$. В результате такого выбора уравнения Лагранжа принимают знакомый вид:

$$m \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} = q F_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds}. \quad (4.86)$$

Заметим, что если бы мы не проделали трюк с произвольным параметром, а сразу выбрали $\tau = s$, правильные уравнения не получились. Первое слагаемое в действии (интеграл от ds) был бы равен константе и лагранжианом оказалось бы только второе слагаемое $-q A \dot{\mathbf{x}}$.

▷* Получим теперь этот же результат при помощи метода множителей Лагранжа (стр. 316). Будем считать динамическими переменными $x(s)$ и $U(s)$, где $U = dx/ds$. При этом на 4-скорость частицы наложена связь $U^2 = U_\alpha U^\alpha = 1$. Поэтому запишем лагранжиан в виде:

$$L = -q A \cdot U - \frac{1}{2} \lambda (U^2 - 1). \quad (4.87)$$

Функция $\lambda = \lambda(s)$ (множитель Лагранжа) является дополнительной динамической переменной, обеспечивающей в *каждый* момент времени выполнения связи $U^2 = 1$. Так как производной по s от $\lambda(s)$ в лагранжиане нет, уравнение Лагранжа по этой переменной приводит к необходимому соотношению для 4-скорости:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} (U^2 - 1) = 0.$$

Остальные производные лагранжиана по x^α и U^α равны:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = -q \partial_\alpha A_\beta U^\beta, \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial U^\alpha} \right) = -q \frac{dA_\alpha}{ds} - \frac{d(\lambda U_\alpha)}{ds}.$$

Учитывая, что

$$\frac{dA_\alpha}{ds} = \partial_\beta A_\alpha \frac{dx^\beta}{ds} = \partial_\beta A_\alpha U^\beta,$$

получаем уравнение:

$$\frac{d(\lambda U_\alpha)}{ds} = q (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) U^\beta = q F_{\alpha\beta} U^\beta.$$

Так как $F_{\alpha\beta}$ – антисимметричен, свёртка уравнения с U^α в правой части даст ноль. В левой части имеем:

$$\frac{d(\lambda U_\alpha)}{ds} U^\alpha = \frac{d\lambda}{ds} U^2 + \lambda \frac{dU_\alpha}{ds} U^\alpha = \frac{d\lambda}{ds} + \frac{\lambda}{2} \frac{d(U^2)}{ds} = \frac{d\lambda}{ds} = 0,$$

где учтена связь $U^2 = 1$. Таким образом, λ является константой, равной массе частицы m . В результате получается уравнение:

$$m \frac{dU^\alpha}{ds} = q F^{\alpha\beta} U_\beta, \quad (4.88)$$

являющееся ковариантной записью силы Лоренца (4.83).

4.7 Лагранжиан электромагнитного поля

• Перейдём к динамическим уравнениям для электромагнитного поля. В основу лагранжевого подхода положим 4-потенциал A^α . Уравнения которым он удовлетворяет должны быть:

- 1) линейными уравнениями (принцип суперпозиции);
- 2) дифференциальными уравнениями второго порядка.

Эти требования, благодаря уравнениям Лагранжа, выполняются, если лагранжиан будет не более чем квадратичен по полям. Из 4-тока j^α , 4-потенциала A^α и их производных можно построить инварианты:

$$A^\alpha j_\alpha, \quad (\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\alpha A^\beta), \quad (\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\beta A^\alpha),$$

$$\partial_\alpha j_\beta A^\alpha A^\beta, \quad \partial_\alpha j_\beta \partial^\alpha A^\beta, \quad \partial_\alpha j_\beta \partial^\beta A^\alpha, \quad A^\alpha j^\beta \partial_\alpha A_\beta, \quad j^\alpha A^\beta \partial_\alpha A_\beta, \quad A^\alpha A_\alpha.$$

Умножив их на константы и сложив, получим наиболее общий лагранжиан векторного поля, соответствующий линейным динамическим уравнениям. Последняя комбинация, квадратичная по потенциальному $A^\alpha A_\alpha$, приводит к теории в которой скорость электромагнитных волн оказывается меньшей скорости света, а закон Кулона нарушается. Остальные инварианты во второй строчке дадут уравнения, зависящие не только от скоростей, но и от ускорения частиц. Если коэффициенты при этих членах в лагранжиане малы, то и возникающие эффекты будут малы. Тем не менее мы откажемся и от них, ограничившись только первыми тремя инвариантами:

$$\mathcal{L} = -A^\alpha j_\alpha - \frac{a}{2} (\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\alpha A^\beta) + \frac{b}{2} (\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\beta A^\alpha). \quad (4.89)$$

Множитель при первом члене лагранжиана выбран равным -1 . Понятно, что если лагранжиан умножить на произвольную константу, уравнения от этого не поменяются. Следовательно одну из констант в сумме инвариантных комбинаций можно выбрать произвольной.

Возьмём соответствующие производные от лагранжиана ($\ll H_{31}$):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} = -j^\beta, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} = -a \partial^\alpha A^\beta + b \partial^\beta A^\alpha.$$

Их подстановка в уравнения Лагранжа (4.75) (сейчас $k = \beta$) приводит к следующим уравнениям поля:

$$a \partial^2 A^\beta - b \partial^\beta \partial_\alpha A^\alpha = j^\beta, \quad (4.90)$$

где $\partial^2 = \partial^\alpha \partial_\alpha = \partial^2 / \partial t^2 - \Delta$ – оператор Д'Аламбера.

Эти уравнения совпадут с уравнениями Максвелла, если $a = b = 1/4\pi$. Действительно, напомним, что уравнения для потенциалов, следующие из уравнений Максвелла имеют вид (стр. 46):

$$\partial^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \mathbf{A} \right) = 4\pi \rho, \quad \partial^2 \mathbf{A} + \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \mathbf{A} \right) = 4\pi \mathbf{j}.$$

Выражения в круглых скобках являются ни чем иным, как свёрткой $\partial_\alpha A^\alpha$. По определению, компоненты 4-ковектора ∂_β равны $\{\partial_0, \nabla\}$, поэтому для 4-вектора производной с индексом вверху имеем $\partial^\beta = \{\partial_0, -\nabla\}$.

Выбор константы a сказывается лишь на единицах измерения поля. С константой b ситуация хитрее. Свойства полей проявляются при их действии на пробную частицу. Поэтому в классической электродинамике измеримыми считаются напряжённости поля, а не потенциалы. Последние определены неоднозначно, что позволяет наложить на них калибровочное условие, например в форме $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ (стр. 47). В этом случае, константа b является произвольной. Её можно положить как равной нулю, так и равной $b = 1/4\pi$. При $a = b = 1/4\pi$ лагранжиан может быть записан ($\lessdot H_{33}$) при помощи тензора $F^{\alpha\beta}$:

$$\mathcal{L} = -A_\alpha j^\alpha - \frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (4.91)$$

Член $A_\alpha j^\alpha$ совпадает с введенным ранее лагранжианом для точечной частицы с плотностью заряда $\rho(t, \mathbf{x}) = q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t))$. Действительно, запишем часть действия (см. (2.53) стр. 57):

$$\int A_\alpha j^\alpha d^4x = \int A_\alpha q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)) \frac{dx_0^\alpha(t)}{dt} dt d^3\mathbf{x} = q \int A_\alpha dx^\alpha.$$

В последнем равенстве взят интеграл по объёму $d^3\mathbf{x}$ с дельта-функцией. Потенциал $A^\alpha = A^\alpha(t, \mathbf{x}_0(t))$ стал зависеть от траектории частицы $\mathbf{x}_0(t)$ (поэтому мы его и дифференцировали при выводе (4.83)).

В результате можно записать единое действие для зарядов и полей:

$$I = - \sum \int m ds - \sum q A_\alpha dx^\alpha - \frac{1}{16\pi} \int F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} d^4x. \quad (4.92)$$

Суммирование ведётся по всем точечным зарядам. Это действие можно минимизировать одновременно и для частиц и полей. В этом случае нет разделения на пробные частицы и частицы создающие поле.

В качестве упражнения, предлагается добавить к лагранжиану электромагнитного поля член $\mu^2 A_\alpha A^\alpha / 8\pi$, найти уравнения движения в лоренцевской калибровке ($b = 0$) ($\lessdot H_{34}$) и решить их для случая электростатики ($\lessdot H_{36}$). Затем получить решения этих уравнений в свободном пространстве (волновые уравнения с $\mu \neq 0$) ($\lessdot H_{37}$).

4.8 Взаимодействие зарядов без поля *

• В классической механике информация о том, что заряд изменяет своё положение может попасть к другим объектам мгновенно. Поэтому нет необходимости в концепции поля и уравнения движения зарядов зависят только от их положений и, возможно, скоростей. В теории относительности это не так. Тем не менее, если скорости зарядов и расстояния между ними невелики, поле можно исключить и получить поправки к уравнениям классической механики.

Запишем потенциалы, создаваемые системой зарядов (стр. 77):

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{\rho(t - R, \mathbf{r})}{R} d^3\mathbf{r}, \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{\mathbf{j}(t - R, \mathbf{r})}{R} d^3\mathbf{r}, \quad (4.93)$$

где \mathbf{x} – координаты точки измерения поля и $R = |\mathbf{x} - \mathbf{r}|$ – расстояние от неё до заряда в объеме $d^3\mathbf{r}$, находящегося в \mathbf{r} . Сдвиг в прошлое на величину R равен времени запаздывания информации обо всех изменениях. Если система зарядов достаточно компактна и их скорости невелики, запаздыванием можно пренебречь. Поэтому будем считать R малым и разложим по нему в ряд Тейлора плотности, входящие в интегралы (4.93). Так, для плотности заряда имеем:

$$\rho(t - R, \mathbf{r}) = \rho(t, \mathbf{r}) - \frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} R + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} R^2 - \dots$$

Подстановка в выражение для скалярного потенциала даёт:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{\rho(t, \mathbf{r})}{R} d^3\mathbf{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho(t, \mathbf{r}) R d^3\mathbf{r} - \dots,$$

где второе слагаемое в разложении $\varphi(t - R, \mathbf{r})$ равно нулю, так как оно является производной по времени полного заряда системы, который сохраняется. Аналогичное разложение справедливо и для векторного потенциала. Однако, так как он содержит скорость зарядов (в плотности тока), которые малы, в первом приближении можно ограничиться ведущим приближением (не учитывая запаздывания):

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{\mathbf{v}(t) \rho(t, \mathbf{r})}{R} d^3\mathbf{r} + \dots$$

Найдем интегралы для точечного заряда $\rho(t, \mathbf{r}) = Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}_0(t))$:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) \approx \frac{Q}{R} + \frac{Q}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \approx \frac{Q \mathbf{v}(t)}{R}, \quad (4.94)$$

где $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)|$ – расстояние от точки \mathbf{x} в которой вычисляются потенциалы к изменяющемуся положению заряда $\mathbf{x}_0(t)$.

▷ Проведем калибровочное преобразование, чтобы убрать вторую производную (ускорение) в скалярном потенциале. Напряженности поля не изменятся, если перейти к новым потенциалам:

$$A^\mu \mapsto A^\mu - \partial^\mu f : \quad \varphi \mapsto \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla f,$$

где $f = f(t, \mathbf{x})$ – произвольная функция. Выберем:

$$f = \frac{Q}{2} \frac{\partial R}{\partial t}. \quad (4.95)$$

Тогда скалярный потенциал станет кулоновским $\varphi = Q/R$. Вычислим ($\ll H_{38}$) градиент f , который добавляется к векторному потенциалу:

$$\nabla f = \frac{Q}{2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla R = \frac{Q}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) = \frac{Q}{2} \left\{ -\frac{\mathbf{v}}{R} + \frac{(\mathbf{vR})\mathbf{R}}{R^3} \right\},$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)$ и скорость заряда равна $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_0(t)/dt$ (градиент берется по \mathbf{x} или эквивалентно по \mathbf{R} , а $\mathbf{x}_0(t)$ – функция времени, которая от координат не зависит). Отметим, что $\partial\mathbf{R}/\partial t = -\mathbf{v}$ и $\partial R/\partial t = -\mathbf{vR}/R$.

Таким образом, приближенные выражения для скалярного и векторного потенциалов принимают вид:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) \approx \frac{Q}{R}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \approx \frac{Q}{2} \left\{ \frac{\mathbf{v}}{R} + \frac{(\mathbf{vR})\mathbf{R}}{R^3} \right\}. \quad (4.96)$$

▷ Зная потенциалы, можно найти напряженности поля. Магнитное поле $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ выглядит ($\ll H_{39}$) очень просто:

$$\mathbf{B} \approx Q \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{R}}{R^3} \quad (4.97)$$

и совпадает с ведущим по скорости выражением для равномерно движущегося заряда (стр. 22). Выражение для напряженности электрического поля $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ более сложное ($\ll H_{40}$):

$$\mathbf{E} \approx Q \frac{\mathbf{R}}{R^3} \left(1 + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) - \frac{3Q}{2} \frac{(\mathbf{vR})^2 \mathbf{R}}{R^5} - \frac{Q}{2} \left\{ \frac{\mathbf{a}}{R} + \frac{(\mathbf{aR})\mathbf{R}}{R^3} \right\} \quad (4.98)$$

и зависит уже от ускорения заряда $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$. При этом первые два члена совпадают с разложением по \mathbf{v} выражения (1.36), стр. 22, а третий является специфическим для ускоренно движущегося заряда. Естественно, такие же выражения для напряженностей получаются при использовании потенциалов (4.94). Однако, для построения функции Лагранжа, зависящей от скоростей частиц (но не от их ускорений), более подходящими являются потенциалы (4.96).

- Лагранжиан заряда Q_a , находящегося во *внешнем* поле другого заряда Q_b , был записан на странице 113:

$$L = -m\sqrt{1 - \mathbf{v}_a^2} - Q_a \varphi_b + Q_a \mathbf{v}_a \mathbf{A}_b,$$

где индекс “ b ” у потенциалов означает, что они создаются зарядом Q_b . Первое слагаемое – это лагранжиан свободной частицы, а вторые два связаны со взаимодействием заряда Q_a с внешним полем. Для потенциалов (4.96), вычисленных в точке \mathbf{x}_a , где находится заряд Q_a , имеем:

$$-Q_a \varphi_b(\mathbf{x}_a, t) + Q_a \mathbf{v}_a \mathbf{A}_b(\mathbf{x}_a, t) = -\frac{Q_a Q_b}{R} \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b + (\mathbf{N} \mathbf{v}_a)(\mathbf{N} \mathbf{v}_b)] \right\},$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$ – радиус вектор в направлении от b -того заряда к a -тому, а $\mathbf{N} = \mathbf{R}/R$ – единичный вектор в направлении \mathbf{R} . Это выражение симметрично относительно обоих зарядов. Считая, что в системе все заряды *равноправны*, можно записать общую функцию Лагранжа в следующем виде:

$$L = - \sum_a m_a \sqrt{1 - \mathbf{v}_a^2} - \sum_{a,b}^{a < b} \frac{Q_a Q_b}{R} \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b + (\mathbf{N} \mathbf{v}_a)(\mathbf{N} \mathbf{v}_b)] \right\}. \quad (4.99)$$

Сумма с пометкой $a < b$ предполагает двойное суммирование по a и b при котором первый индекс все время остается меньше второго. Эта сумма равна половине двойной суммы по всем *неравным* значениям a и b . Например, если выражение под суммой обозначить как V_{ab} , то для трех зарядов, при $V_{ab} = V_{ba}$, имеем:

$$\sum_{a,b}^{a < b} V_{ab} = V_{12} + V_{13} + V_{23} = \frac{1}{2} \sum_{a,b}^{a \neq b} V_{ab} = \frac{1}{2} (V_{12} + V_{13} + V_{21} + V_{23} + V_{31} + V_{32}),$$

Таким образом, сумма в (4.99) содержит все *парные взаимодействия*.

Кинетический член в лагранжиане необходимо, вообще говоря, разложить в ряд по скорости $\sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \approx 1 - \mathbf{v}^2/2 - (\mathbf{v}^2)^2/8$, чтобы оставаться в том-же приближении, в котором были получены потенциалы (для восстановления фундаментальной скорости делаем замены $Q \mapsto Q/c$, $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}/c$ и получаем, что член взаимодействия пропорционален $1/c^4$). Тем не менее, для компактности мы оставим его в свернутом виде, помня о необходимости такого разложения.

Обратим внимание, что полученный лагранжиан зависит от положения зарядов и их скоростей, но не зависит от ускорений (уравнения движения являются дифференциальными уравнениями второго порядка). Калибровочное преобразование, проделанное выше, и было необходимо, чтобы добиться исключения из потенциалов ускорения частиц.

▷ Запишем явный вид уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_a}. \quad (4.100)$$

Производная по скорости a -той частицы лагранжиана (4.99) равна:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{m_a \mathbf{v}_a}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_a^2}} + \frac{1}{2} \sum_b^{b \neq a} \frac{Q_a Q_b}{R} \{ \mathbf{v}_b + \mathbf{N}(\mathbf{N} \mathbf{v}_b) \}. \quad (4.101)$$

Подставляя это выражение в уравнения Лагранжа (4.100), после некоторых вычислений ($\ll H_{41}$), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} &= \sum_b^{b \neq a} \frac{Q_a Q_b}{R^2} \left\{ \mathbf{N} \left(1 + \frac{\mathbf{v}_b^2}{2} \right) - \frac{3}{2} \mathbf{N} (\mathbf{N} \mathbf{v}_b)^2 + \mathbf{v}_a \times [\mathbf{v}_b \times \mathbf{N}] \right\} \\ &- \frac{1}{2} \sum_b^{b \neq a} \frac{Q_a Q_b}{R} \{ \mathbf{a}_b + \mathbf{N}(\mathbf{N} \mathbf{a}_b) \}, \end{aligned} \quad (4.102)$$

где \mathbf{p}_a – импульс a -той частицы, который надо записать в четвертом порядке малости по скорости. На самом деле, для нахождения этих уравнений можно было сразу воспользоваться выражениями для электрического (4.98) и магнитного поля (4.97), записав силу Лоренца:

$$\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = \sum_b^{b \neq a} \{ Q_a \mathbf{E}_b + Q_a [\mathbf{v}_a \times \mathbf{B}_b] \}. \quad (4.103)$$

▷ Несмотря на сложный вид уравнений (4.102), они допускают ряд простых точных решений. Рассмотрим, например, две частицы массой m с зарядами $Q_a = -Q_b = Q$. Пусть они двигаются по окружности радиуса $r = R/2$ с одинаковыми по модулю скоростями $\mathbf{v}_a = -\mathbf{v}_b$, находясь на диаметрально противоположных точках окружности. Проверим, что такая система удовлетворяет уравнениям движения. В этом случае ускорение равно $|\mathbf{a}_a| = v^2/r$, где $v = |\mathbf{v}_a| = const$, поэтому, используя приближенное выражение $\mathbf{p} = m\mathbf{v}(1 + \mathbf{v}^2/2)$, получаем ($\ll H_{42}$):

$$\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = m\mathbf{a}(1 + \mathbf{v}^2/2) = -\frac{Q^2}{R^2} \mathbf{N}(1 - \mathbf{v}^2/2).$$

или, деля обе части на $1 - \mathbf{v}^2/2$ в квадратичном по скорости приближении, имеем следующую связь скорости и диаметра $R = 2r$ окружности:

$$v^2(1 + v^2) = \frac{Q^2/R}{2m}. \quad (4.104)$$

Это выражение отличается выражением в круглых скобках от аналогичного значения, следующего из классической механики.

Глава 5

Законы сохранения

Эта глава посвящена законам сохранения частиц и поля. Сначала рассматривается энергия “пробной” частицы во внешнем поле и вводится тензор энергии-импульса вещества непрерывной среды. Затем выводится выражение для сохраняющегося тензора энергии-импульса электромагнитного поля. После этого мы обсудим ковариантные свойства интегралов от сохраняющихся величин. Ещё одним интегралом является полный момент импульса поля и частиц. С его помощью можно определить классический спин, как момент импульса в системе отсчёта, где полный импульс равен нулю. Рассмотрена прецессия спина в электромагнитном поле.

5.1 Энергия частицы во внешнем поле

▷ На заряд q , двигающийся со скоростью \mathbf{u} во внешнем электромагнитном поле, действует сила Лоренца

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \mathbf{E} + q [\mathbf{u} \times \mathbf{B}]. \quad (5.1)$$

Найдём изменение со временем энергии движения заряда $\mathbb{E} = m/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$. Дифференцируя связь энергии и импульса $\mathbb{E}^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ и учитывая, что $\mathbf{p} = \mathbb{E} \mathbf{u}$, имеем:

$$\frac{d\mathbb{E}}{dt} = \mathbf{u} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \mathbf{u} \mathbf{E}. \quad (5.2)$$

Таким образом, изменение энергии движения определяется только напряжённостью электрического поля. Пусть поля (и векторный потенциал) не зависят от времени. Тогда $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Вычислим производную по времени от $\varphi(\mathbf{x})$ вдоль траектории заряда $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$:

$$\frac{d\varphi(\mathbf{x})}{dt} = \nabla\varphi \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\mathbf{u}\mathbf{E}.$$

Объединяя последние два соотношения, получаем:

$$\mathcal{E} = \mathbb{E} + q \varphi(\mathbf{x}), \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0, \quad (5.3)$$

т.е. сохраняется полная энергия, равная сумме энергии движения \mathbb{E} и *потенциальной энергии* $q \varphi(\mathbf{x})$.

▷ Если поля зависят от времени, то иногда также можно посторить сохраняющуюся величину, связанную с энергией движения \mathbb{E} . Например, пусть электрическое и магнитное поля перпендикулярны:

$$\mathbf{B} = \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{k}\mathbf{E} = 0, \quad (5.4)$$

где \mathbf{k} – постоянный вектор и $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{x})$. Тогда:

$$\mathbf{k} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \mathbf{k} [\mathbf{u} \times \mathbf{B}] = q \mathbf{k} (\mathbf{k} (\mathbf{u}\mathbf{E}) - (\mathbf{u}\mathbf{k}) \mathbf{E}) = q \mathbf{k}^2 (\mathbf{u}\mathbf{E}).$$

Подставляя $\mathbf{u}\mathbf{E}$ в (5.2), получаем

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathbb{E} - \frac{\mathbf{k}\mathbf{p}}{\mathbf{k}^2}, \quad \frac{d\tilde{\mathcal{E}}}{dt} = 0. \quad (5.5)$$

Эта сохраняющаяся величина не зависит от явного вида функции $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$. В частности, такой закон сохранения выполняется в поле электромагнитной волны, где $\mathbf{k}^2 = 1$ или в поле движущегося с постоянной скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{k}$ заряда Q .

▷ Чаще закон сохранения энергии связывают со стационарными системами, где выполняется (5.3). Рассмотрим вывод этого соотношения в рамках лагранжевого формализма. В следующей главе мы покажем, что сохранение энергии связано с произволом в выборе начала отсчёта времени, т.е. благодаря инвариантности лагранжиана относительно сдвига временной шкалы: $t \mapsto t + t_0$. Сейчас же получим этот результат несколько более простым способом.

Пусть потенциалы поля в лагранжиане явным образом не зависят от времени ($\partial L / \partial t = 0$). В этом случае время в них входит только через траекторию частицы $A^\alpha(\mathbf{x}) = A^\alpha(\mathbf{x}(t))$. Используя уравнения Лагранжа (4.80), стр. 113, запишем полную производную по времени:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathbf{u} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

Производная лагранжиана по \mathbf{x} вычисляется от аргумента векторного потенциала вдоль траектории заряда, а во втором равенстве подставлены уравнения Лагранажа. Учитывая формулу производной произведения, имеем:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u} \right).$$

Перенося dL/dt в правую часть, приходим к выводу, что сохраняется следующая величина, называемая *полной энергией*

$$\mathcal{E} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u} - L, \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0. \quad (5.6)$$

Производная лагранжиана по скоростям называется *обобщённым импульсом*. Для функции Лагранжа свободной частицы $L = -m \sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$ обобщённый импульс совпадает с релятивистским импульсом \mathbf{p} . При движении частицы в электромагнитном поле с лагранжианом (4.79)

$$L = -m \sqrt{1 - \mathbf{u}^2} - q\varphi + q\mathbf{A}\mathbf{u}$$

обобщённый импульс “удлиняется” (стр. 113):

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} + q\mathbf{A} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}. \quad (5.7)$$

Подставляя его в выражение (5.6), получаем:

$$\mathcal{E} = \frac{m}{\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}} + q\varphi = \mathbb{E} + q\varphi, \quad (5.8)$$

где снова полная (сохраняющаяся) энергия равна сумме энергии движения и потенциальной энергии.

- Введём *плотность массы* точечной частицы движущейся по траектории $\mathbf{r}_a(t)$:

$$\mu(t, \mathbf{x}) = m_a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_a(t)), \quad (5.9)$$

Если есть несколько зарядов, необходимо просуммировать это выражение по индексу a . Когда зарядов в единице объёма много, это выражение усредняется по небольшому объёму, что в ряде случаев, даёт гладкую функцию $\mu(t, \mathbf{x})$ распределения массы непрерывной среды. Ситуация аналогична введению плотности заряда в предыдущем томе (стр. V₁:??). Напомним, что массы частиц m_a и их заряды q_a являются инвариантами преобразований Лоренца.

Как и для плотности 4-тока заряда (2.53), стр. 57, определим плотность 4-тока массы:

$$J^\alpha = \{\mu, \mu \mathbf{u}\} = \mu \frac{dx^\alpha}{dt} = \mu U^\alpha \frac{ds}{dt}. \quad (5.10)$$

Он удовлетворяет уравнению непрерывности в дифференциальной или интегральной форме:

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0, \quad \frac{d}{dt} \int_V J^0 d^3\mathbf{x} = - \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S}. \quad (5.11)$$

Этот закон сохранения отражает тот факт, что суммарная масса частиц внутри объёма V меняется только в результате пересечения частицами поверхности S , окружающей объём. Подчеркнём, что речь идёт именно о суммарной массе (энергии покоя) частиц не зависимо от их скорости (предполагается что неупругих столкновений нет и массы частиц изменяться не могут). Соответственно, $\mu(t, \mathbf{x})$ – это плотность такой массы.

▷* Плотность массы можно записать при помощи 4-мерной функции Дирака: $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(s_a)) = \delta(t - t_a(s_a)) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(s_a))$, где траектория частицы параметризируется при помощи инвариантного собственного времени s_a (у каждой частицы оно своё). Тогда

$$\mu(t, \mathbf{x}) = \sum_a m_a \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(s_a)) dt_a = \sum_a m_a \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(s_a)) \frac{dt_a}{ds_a} ds_a.$$

Соответственно, плотность тока принимает явно ковариантный вид:

$$J^\alpha(t, \mathbf{x}) = \sum_a m_a \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(s_a)) U_a^\alpha(s_a) ds_a. \quad (5.12)$$

Напомним, что 4-функция Дирака $\delta(\mathbf{x})$ инвариантна, так как инвариантен 4-объём $d^4\mathbf{x}$ (якобиан преобразований Лоренца равен единице).

▷ Найдём теперь ковариантное представление для *плотности энергии-импульса* движущихся частиц. Умножим уравнение движения *точечного заряда* (стр. 101):

$$m \frac{dU^\alpha}{ds} = q F^{\alpha\beta} U_\beta$$

слева и справа на дельта-функцию $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_0(t))$. Слева получится плотность массы μ , а справа – плотность заряда ρ , поэтому:

$$\mu \frac{dU^\alpha}{dt} = F^{\alpha\beta} j_\beta. \quad (5.13)$$

Это уравнение является ковариантной записью уравнения движения в случае непрерывного распределения массы и заряда.

Говоря о непрерывной среде в которой распределён заряд и масса, подразумевают, что в каждой точке пространства меняется не только их плотность но и скорость (скорость становится функцией координат). Полная производная по времени от 4-скорости $U^\alpha = dx^\alpha/ds = \{\gamma, \gamma \mathbf{u}\}$ равна $dU^\alpha/dt = (\partial_\beta U^\alpha) dx^\beta/dt$. В результате уравнение движения заряженной среды (5.13) можно переписать следующим образом:

$$\mu \frac{dU^\alpha}{dt} = J^\beta \partial_\beta U^\alpha = \partial_\beta (J^\beta U^\alpha) = F^{\alpha\beta} j_\beta,$$

где учтено (5.11). Введём симметричный тензор *плотности энергии-импульса вещества*:

$$\mathbb{T}^{\alpha\beta} = J^\alpha U^\beta = \mu \sqrt{1 - \mathbf{u}^2} U^\alpha U^\beta. \quad (5.14)$$

С его помощью уравнение движения непрерывной заряженной среды (5.13) можно записать следующим образом:

$$\partial_\beta \mathbb{T}^{\beta\alpha} = F^{\alpha\beta} j_\beta. \quad (5.15)$$

Выпишем в явном виде компоненты тензора:

$$\mathbb{T}^{00} = \mu \gamma, \quad \mathbb{T}^{0i} = \mathbb{T}^{i0} = \mu \gamma u^i, \quad \mathbb{T}^{ij} = \mu \gamma u^i u^j,$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$ и $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$ – 3-скорость. Таким образом, \mathbb{T}^{00} – это плотность энергии движения частиц, а \mathbb{T}^{0i} – плотность их импульса. Если внешних полей нет, то тензор плотности энергии-импульса вещества сохраняется, удовлетворяя уравнению нерерывности: $\partial_\beta \mathbb{T}^{\beta\alpha} = 0$.

Заметим, что в случае непрерывного распределения вещества предполагается, что в малом объёме все частицы движутся с одинаковыми скоростями. В ряде систем, таких как идеальный газ, это не так и тензор $\mathbb{T}^{\alpha\beta}$ необходимо модифицировать. Для этого вводится инвариантная функция давления, “учитывающая” беспорядочное движение частиц. Мы вернёмся к этому вопросу позднее.

5.2 Тензор энергии-импульса поля

▷ Перейдём теперь к сохранению энергии-импульса электромагнитного поля. Вычислим производную от лагранжиана $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A_\gamma, \partial_\alpha A_\beta)$:

$$\partial_\beta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\gamma} \partial_\beta A_\gamma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\gamma)} \partial_\beta (\partial_\alpha A_\gamma).$$

В первом слагаемом подставим уравнения Лагранжа (4.75), стр. 111, во втором переставим частные производные $\partial_\beta \partial_\alpha = \partial_\alpha \partial_\beta$ и воспользуемся формулой производной произведения:

$$\partial_\beta \mathcal{L} = \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\gamma)} \right) \partial_\beta A_\gamma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\gamma)} \partial_\alpha (\partial_\beta A_\gamma) = \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\gamma)} \partial_\beta A_\gamma \right).$$

Выражение $\partial_\beta \mathcal{L}$, при помощи символа Кронекера, можно переписать в следующем виде: $\partial_\alpha (\delta_\beta^\alpha \mathcal{L})$. В результате получается уравнение:

$$\partial_\alpha T^\alpha_\beta = 0, \quad (5.16)$$

где введен *канонический тензор энергии-импульса* электромагнитного поля:

$$T^\alpha_\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\gamma)} \partial_\beta A_\gamma - \delta_\beta^\alpha \mathcal{L}. \quad (5.17)$$

При помощи метрического тензора $g^{\alpha\beta}$ можно поднять индекс β вверх, переписав канонический тензор энергии-импульса в эквивалентном виде:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\gamma)} \partial^\beta A_\gamma - g^{\alpha\beta} \mathcal{L}. \quad (5.18)$$

▷ Разберёмся с уравнением (5.16), которому удовлетворяет $T^{\alpha\beta}$. По своей форме это уравнение непрерывности (стр. 28):

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = \frac{\partial T^{0\beta}}{\partial t} + \nabla_i T^{i\beta} = 0.$$

Для каждого из четырех значений индекса β выполняется свой закон сохранения, аналогичный закону сохранение заряда. При этом интеграл от $T^{0\beta}$ – имеет смысл чего-то сохраняющегося в объёме, если поток величин $T^{i\beta}$ через поверхность, окружающую объём равен нулю.

Введём плотность энергии $W = T^{00}$ и плотность импульса $\mathbf{P}^i = T^{i0}$ и запишем уравнение непрерывности для $\beta = 0$ в векторном виде:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{P} = 0. \quad (5.19)$$

Это соотношение было получено при рассмотрении энергии электромагнитного поля (теорема Пойнтинга, стр. 68).

▷ Запишем тензор энергии-импульса для лагранжиана электромагнитного поля (стр. 117) в пустом пространстве ($j^\alpha = 0$)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi} \left\{ (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) \right\}.$$

Производная лагранжиана по $\partial_\alpha A_\gamma$ равна $-F^{\alpha\gamma}/4\pi$ ($\ll H_{43}$), поэтому:

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} F^{\alpha\gamma} \partial^\beta A_\gamma + \frac{1}{16\pi} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (5.20)$$

К тензору энергии-импульса можно прибавить производную $\partial_\gamma (F^{\gamma\alpha} A^\beta)$, так как она тождественно удовлетворяет уравнению непрерывности (5.16). Действительно, не зависимо от уравнений движения

$$\partial_\alpha \partial_\gamma (F^{\gamma\alpha} A^\beta) = 0,$$

так как тензор $\partial_\alpha \partial_\gamma$ – симметричен, а $F^{\gamma\alpha}$ – антисимметричен и их свёртка равна нулю. Таким образом, если $T^{\alpha\beta}$ удовлетворяет уравнению непрерывности, то ему будет удовлетворять также тензор

$$T^{\alpha\beta} \mapsto T^{\alpha\beta} - \frac{1}{4\pi} \partial_\gamma (F^{\gamma\alpha} A^\beta).$$

Учитывая уравнения движения (4.35), стр. 100 с $j^\alpha = 0$, напишем:

$$\partial_\gamma (F^{\gamma\alpha} A^\beta) = F^{\gamma\alpha} \partial_\gamma A^\beta = -F^{\alpha\gamma} \partial_\gamma A^\beta$$

и разделив на 4π , вычтем из (5.20). В результате:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\alpha\gamma} F_\gamma^\beta + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \quad (5.21)$$

Этот тензор симметричен по α, β и имеет нулевой след: $T^\alpha_\alpha = 0$ ($\ll H_{44}$).

Тензор энергии-импульса (5.20), полученный по формуле (5.18) называется каноническим. Он зависит как от напряженностей поля, так и от потенциалов. В отличие от него, симметричный тензор (5.21) от потенциалов не зависит. Он является калибровочно инвариантным. Действительно, если сделать преобразование $A_\alpha \mapsto A_\alpha + \partial_\alpha \Lambda$, где $\Lambda = \Lambda(t, \mathbf{x})$ – произвольная функция координат и времени, то тензор напряженностей $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ не изменится. Не поменяются также уравнения движения и симметричный тензор энергии-импульса. Так как физические результаты не должны зависеть от произвольной функции Λ , более предпочтительными являются калибровочно инвариантные выражения. Тем не менее произвол в выборе тензора энергии-импульса (добавление к нему выражения автоматически удовлетворяющего уравнению непрерывности) не оказывается на физических выводах (стр. 150).

▷ Выше тензор энергии-импульса был симметризован в предположении, что зарядов, создающих поле в пространстве нет (свободное электромагнитное поле). В общем случае, когда токи не равны нулю, в силу уравнения (5.15), будет сохраняться сумма *симметричного* тензора энергии-импульса поля (5.21) и частиц (5.14):

$$\partial_\alpha (T^{\alpha\beta} + \mathbb{T}^{\alpha\beta}) = 0. \quad (5.22)$$

Докажем это, вычислив 4-дивергенцию от (5.21):

$$4\pi \partial_\alpha T^\alpha_\beta = \underbrace{(\partial_\alpha F^{\alpha\gamma})}_{4\pi j^\gamma} F_{\gamma\beta} + \underbrace{F^{\alpha\gamma} \partial_\alpha F_{\gamma\beta} + \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \partial_\beta F_{\mu\nu}}_0.$$

Первое слагаемое в правой части, благодаря ковариантному уравнению Максвелла, пропорционально 4-току. Сумма последних двух слагаемых равна нулю. Действительно, во втором слагаемом переобозначим немые (суммационные) индексы $\alpha \mapsto \mu$, $\gamma \mapsto \nu$, а в третьем слагаемом подставим второе ковариантное уравнение Максвелла (4.40) стр. 101:

$$\partial_\beta F_{\mu\nu} = -\partial_\mu F_{\nu\beta} - \partial_\nu F_{\beta\mu}.$$

В результате сумма последних двух слагаемых, помеченных фигурной скобкой равна:

$$F^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu\beta} - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu\beta} - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \partial_\nu F_{\beta\mu} = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu\beta} - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \partial_\nu F_{\beta\mu}.$$

В последнем слагаемом переобозначим индексы $\mu \mapsto \nu$, $\nu \mapsto \mu$ и получим, в силу антисимметрии $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, ноль. Таким образом:

$$\partial_\alpha T^\alpha_\beta = -F_{\beta\gamma} j^\gamma. \quad (5.23)$$

С другой стороны, в соответствии с уравнением (5.15) для тензора энергии-импульса вещества имеем $\partial_\alpha \mathbb{T}^\alpha_\beta = F_{\beta\gamma} j^\gamma$. Поэтому 4-дивергенция суммы $T^{\alpha\beta} + \mathbb{T}^{\alpha\beta}$ равна нулю.

Обратим внимание, что в законе сохранения (5.22) поля и заряды входят равноправным образом. Этот закон выполняется, если одновременно используются уравнения Максвелла для полей, создаваемых зарядами и уравнения движения (сила Лоренца) для этих-же зарядов в создаваемых ими полях. Другими словами, не производится разделения на источники поля и пробные заряды (см. также стр. 69). Заряды “создают” поле и с ним же взаимодействуют. Такая интерпретация уравнений приводит к некоторым проблемам, которые рассматриваются в главе 6.

▷ В заключение выразим компоненты тензора энергии-импульса:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(g_{\mu\nu} F^{\alpha\mu} F^{\nu\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right)$$

через напряжённости поля. Для первого слагаемого имеем:

$$g_{\mu\nu} F^{0\mu} F^{\nu 0} = -F^{0i} F^{i0} = \mathbf{E}^2, \quad g_{\mu\nu} F^{0\mu} F^{\nu 1} = -F^{0i} F^{i1} = [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_x,$$

и т.д. Во втором слагаемом стоит инвариант $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)$, стр. 102. Поэтому компоненты тензора с нулевым индексом равны плотностям энергии и импульса (стр. 69):

$$T^{00} = W = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi}, \quad T^{0i} = T^{i0} = \mathbf{P}^i = \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]^i}{4\pi}. \quad (5.24)$$

Аналогично расписываются пространственные компоненты тензора. Это даёт тензор потока импульса (стр. 70):

$$T^{ij} = T_{ij} = \sigma_{ij} W - \frac{E_i E_j + B_i B_j}{4\pi} \quad (5.25)$$

(нижние индексы в E_i и B_i – это обычные декартовы компоненты 3-векторов $\mathbf{E} = \{E_1, E_2, E_3\} \equiv \{E_x, E_y, E_z\}$, а не ковариантные индексы). Отметим также, что квадрат $T^{\alpha\beta}$ изотропен и выражается через инварианты напряжённостей электромагнитного поля ($\lessdot H_{45}$):

$$T^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} = \frac{\delta_\nu^\mu}{(8\pi)^2} [(E^2 - B^2)^2 + 4(EB)^2]. \quad (5.26)$$

Полученные в главе 1 законы сохранения энергии и импульса, следуют из уравнения непрерывности $\partial_\mu (T^{\mu\nu} + \mathbb{T}^{\mu\nu}) = 0$. Действительно, пусть заряды, находящиеся в объёме V , окруженному поверхностью S , эту поверхность не пересекают, оставаясь, внутри объёма. Запишем для этого случая интегральную форму уравнения непрерывности:

$$\frac{d}{dt} \int_V (T^{0\nu} + \mathbb{T}^{0\nu}) d^3\mathbf{x} + \int_S T^{i\nu} dS^i = 0.$$

При $\nu = 0$ интеграл от плотности энергии среды системы точечных зарядов равен суммарной энергии их движения. Выражение же для энергии-импульса поля дают закон сохранения энергии (3.12), стр. 69. Аналогично для закона сохранения импульса.

Почему нельзя ограничиться плотностями энергии и импульса и приходится рассматривать тензор? Дело в том, что в отличии, например, от плотности тока, четвёрка величин $\{W, \mathbf{P}\}$ не образует 4-вектора. В этом можно убедиться, подставив в них преобразования Лоренца для напряжённостей поля. Простыми трансформационными свойствами обладает именно тензор $T^{\alpha\beta}$, часть компонент которого определяют W и \mathbf{P} .

5.3 Ковариантность интегральных величин

▷ Рассматривая законы сохранения в теории поля, мы строим тензорные поля, удовлетворяющие уравнению непрерывности. Во времени сохраняется интеграл по 3-мерному пространству от нулевой компоненты таких тензоров. Например, интеграл от нулевой компоненты 4-тона J^μ является сохраняющимся зарядом Q . Он инвариантен относительно преобразований Лоренца и имеет одинаковое значение для всех инерциальных наблюдателей. Аналогично, для тензора энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ вычисляется интеграл по $d^3\mathbf{x}$ от $T^{0\nu}$. Его значение является суммарной энергией-импульсом поля P^ν , которая преобразуется как 4-вектор.

Подчеркнём, что 4-вектор J^μ и 4-тензор $T^{\mu\nu}$, по определению и по сути своего построения, являются локально ковариантными величинами. Например, 4-ток преобразуется как 4-вектор: $J'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu J^\nu(x)$. При этом аргументы векторного поля $J^\mu(x)$, измеряемого в двух системах отсчёта, относятся к одной и той же точке пространства-времени. В этой точке “находятся” два наблюдателя из 2-х систем отсчёта, каждый из которых измеряет своё время. Поэтому в левой части преобразований аргументы 4-вектора имеют штрихи, а в правой стоят без штриха.

Когда мы переходим к интегральным величинам, суммируя тензорное поле по всему пространству, вступает в игру *относительность одновременности*. Забудем пока, что 4-ток удовлетворяет уравнению непрерывности и вычислим для произвольного поля J^μ интеграл:

$$Q(t) = \int J^0(t, \mathbf{x}) d^3\mathbf{x}. \quad (5.27)$$

При интегрировании суммируются значения функции $J^0(t, \mathbf{x})$, измеренные наблюдателями во всём пространстве в *данный* момент времени t в *данной* “нештрихованной” системе отсчёта. Аналогичное выражение со штрихами соответствует интегральной величине, измеренной наблюдателями в другой инерциальной системе в момент времени t' . В теории относительности нельзя ввести синхронизированное во всём пространстве время, одновременно в *двух* различных инерциальных системах отсчёта (стр. V1:70). Когда в преобразовании $J'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu J^\nu(x)$ стоят времена t и t' это не вызывает затруднения, т.к. понятно к каким наблюдателям они относятся. Время же в интегральном соотношении типа (5.27) связано с совокупностью всех наблюдателей данной системы. Его нельзя непосредственно сравить с аналогичным “интегральным” временем t' в другой системе. Сравнить между собой заряды $Q(t)$ и $Q'(t')$ можно только, если они сохраняются и от времён не зависят.

▷ Приведём простой пример. Пусть пространство Минковского 2-мерно (t, x) . Рассмотрим ток $J^\nu(t, x) = x^\nu e^{x \cdot x}$, не удовлетворяющий уравнению непрерывности. Его “заряд” равен:

$$Q(t) = t \int_{-\infty}^{\infty} e^{t^2 - x^2} dx = \sqrt{\pi} t e^{t^2}.$$

Очевидно, что эта функция времени не является инвариантом. На самом деле применить к ней преобразования Лоренца и нельзя, так как величина Q не относится к одной точке в пространстве, поэтому не ясно какие x' и x использовать в таких преобразованиях.

▷ Сохраняющийся же заряд от времени не зависит и инвариантен. Приведём пример для этого случая. Пусть V^α – постоянный единичный вектор ($V^2 = 1$). Введём 4-вектор η , ортогональный к V (стр. 96):

$$\eta = x - (x \cdot V) V, \quad \eta \cdot V = 0, \quad \eta^2 = x^2 - (x \cdot V)^2, \quad \partial_\alpha \eta^2 = 2 \eta_\alpha.$$

Компоненты единичного 4-вектора можно представить аналогично компонентами 4-скорости: $V^\alpha = \{\gamma, \gamma v\}$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$. Рассмотрим сохраняющийся ток:

$$J^\nu = V^\nu e^{\eta^2}, \quad \partial_\mu J^\mu = 2 (V \cdot \eta) e^{\eta^2} = 0.$$

Соответствующий ему заряд равен:

$$Q = \gamma e^{-\gamma^2 v^2 t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2 x^2 + 2\gamma^2 v t x} dx = \sqrt{\pi}.$$

Это же значение получат наблюдатели и в “штрихованной” системе.

▷ Аналогичные рассуждения справедливы и для тензорных уравнений $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ или $\partial_\mu J^{\mu,\alpha\beta} = 0$. Соответствующие интегралы

$$P^\nu = \int T^{0\nu} d^3 x, \quad J^{\alpha\beta} = \int J^{0,\alpha\beta} d^3 x$$

будут тензорными выражениями так как P^ν и $J^{\alpha\beta}$ не зависят от времени. Если же уравнения непрерывности не выполняются, то тензорные выражения после интегрирования, в общем случае, не возникнут. В частности, в электродинамике сохраняется суммарный тензор частиц и полей: $\partial_\gamma (T^{\gamma\alpha} + T^{\alpha\gamma}) = 0$. По-отдельности эти тензоры, вообще говоря, не сохраняются. Поэтому, суммарный 4-импульс только частиц будет зависеть от времени и не является 4-вектором (стр. V1:292).

▷* Докажем более строго, что интеграл по всему пространству от нулевой компоненты сохраняющегося 4-тока J^μ , является скаляром относительно преобразований Лоренца [13]. Рассмотрим, например, некоторый ток $J^\mu(\mathbf{x})$, удовлетворяющий уравнению непрерывности:

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial J^0}{\partial t} + \nabla \mathbf{J} = 0.$$

Пусть поле достаточно быстро убывает на бесконечности в 3-мерном пространстве \mathbf{x} . Точнее, убывание должно быть быстрее чем $1/\mathbf{x}^2$, чтобы поверхностный интеграл от пространственной компоненты 4-тока \mathbf{J} на бесконечности равнялся нулю.

Запишем в значение заряда в данный момент времени \bar{t} . Для этого сначала, при помощи δ -функции Дирака, перейдём от интегрирования по 3-мерному пространству $d^3\mathbf{x}$, к интегрированию по всему пространству-времени $d^4\mathbf{x} = dt d^3\mathbf{x}$:

$$Q = \int J^0(\bar{t}, \mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \int J^0(t \mathbf{x}) \delta(t - \bar{t}) d^4\mathbf{x}.$$

Введём функцию ступеньки Хевисайда:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (5.28)$$

Производная от неё равна δ -функции: $\theta'(t) = \delta(t)$, что проверяется проведением интегрирования по частям с произвольной функцией (стр. V₁:??). При помощи функции Хевисайда выражение для заряда можно переписать в следующем виде:

$$Q = \int J^0(t, \mathbf{x}) \partial_0 \theta(t - \bar{t}) d^4\mathbf{x} = \int J^\mu(\mathbf{x}, t) \partial_\mu \theta(t - \bar{t}) d^4\mathbf{x}.$$

По повторяющемуся индексу μ , как обычно, проводится суммирование от 0 до 3. Переход от производной по t к ковариантной производной ∂_μ во втором равенстве возможен, так как функция Хевисайда зависит только от времени (производные по координатам будут равны нулю). Учитывая уравнение непрерывности $\partial_\mu J^\mu = 0$, ток можно внести под производную:

$$Q = \int \partial_\mu [J^\mu(\mathbf{x}) \theta(t - \bar{t})] d^4\mathbf{x} = \int J^\mu(\mathbf{x}) \theta(t - \bar{t}) dS_\mu, \quad (5.29)$$

где второе равенство записано при помощи интегральной теоремы Гаусса в 4-мерном пространстве (переход от объёмного интеграла $d^4\mathbf{x}$, к интегралу по поверхности dS_μ , окружающей этот объём).

Запишем теперь значение заряда в другой инерциальной системе отсчёта, движущейся относительно первой вдоль оси x со скоростью v . В этой системе всем величинам добавляются штрихи:

$$Q' = \int \partial'_\mu [J'^\mu(x') \theta(t' - \bar{t}')] d^4x'.$$

Сделаем замену переменных интегрирования, совпадающих с преобразованиями Лоренца: $x' = \gamma(x - vt)$, $t' = \gamma(t - vx)$. Якобиан такого преобразования равен единице ($\ll V_1: H_{??}$), поэтому $d^4x' = d^4x$. Производная ∂'_μ преобразуется аналогично ковектору при преобразованиях Лоренца. Так как при этом $\partial'_\mu J'^\mu = \partial_\mu J^\mu$ штрих у J^μ можно убрать. Поэтому:

$$Q' = \int \partial_\mu [J^\mu(x) \theta(\gamma(t - vx) - \bar{t}')] d^4x. \quad (5.30)$$

Воспользуемся теоремой Гаусса и вычтем (5.30) и (5.29):

$$Q' - Q = \int dS_\mu J^\mu(x) [\theta(\gamma(t - vx) - \bar{t}') - \theta(t - \bar{t})].$$

Представим гиперповерхность dS_μ , охватывающую всё 4-пространство, как цилиндр, осью которого является ось времени t . Поверхностный интеграл на боковых сторонах этого цилиндра равен нулю, так как $J^\alpha = 0$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. На основаниях цилиндра при любых *конечных* x , \bar{t} , \bar{t}' при $t \rightarrow \pm\infty$ разница функций Хевисайда равна нулю. Действительно, если x, \bar{t}' и \bar{t} константы, то в силу определения (5.28), имеем:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(\gamma(t - vx) - \bar{t}') \approx \theta(\gamma t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t - \bar{t}) \approx \theta(t) = 1.$$

Обе функции Хевисайда также стремятся к нулю при $t \rightarrow -\infty$. Если же вместе с t к бесконечности стремится x , то ноль возникает, так как стремится к нулю значение 4-тока. Таким образом $Q = Q'$. Аналогично доказывается, что, если $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, то интеграл от $T^{0\nu}$ будет 4-вектором.

Заметим, что иногда поля в течении всего времени локализованы в компактной области пространства (перемещающейся вдоль некоторой траектории). В этом случае могут существовать квазисохраняющиеся точки. Это означает, что уравнение непрерывности не выполняется, но заряд является инвариантом, если пренебречь размерами области. Например, пусть в пределе при котором соответствующая область стремиться к нулю, возникает функция Дирака $J^0(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t))$. Если при этом $f(t, \mathbf{x}_0(t))$ не зависит от времени, то и интеграл от $J^0(t, \mathbf{x})$ будет постоянным. Другими словами, отклонения от тензорного характера интегральных величин иногда могут быть и небольшими.

5.4 Момент импульса поля

▷ Кроме энергии и импульса сохраняется полный момент импульса частиц и поля. Если существует симметричный сохраняющийся тензор второго ранга $\mathcal{T}^{\mu\nu} = \mathcal{T}^{\nu\mu}$, то автоматически сохраняется следующий тензор, антисимметричный по последним двум индексам:

$$J^{\mu, \alpha\beta} = x^\alpha \mathcal{T}^{\mu\beta} - x^\beta \mathcal{T}^{\mu\alpha}. \quad (5.31)$$

Действительно, вычислим его 4-дивергенцию по индексу μ :

$$\partial_\mu J^{\mu, \alpha\beta} = \delta_\mu^\alpha \mathcal{T}^{\mu\beta} - \delta_\mu^\beta \mathcal{T}^{\mu\alpha} + x^\alpha \partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\beta} - x^\beta \partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\alpha}.$$

Если $\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\alpha} = 0$ и тензор $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ симметричен, получается ноль:

$$\partial_\mu J^{\mu, \alpha\beta} = \mathcal{T}^{\alpha\beta} - \mathcal{T}^{\beta\alpha} = 0. \quad (5.32)$$

Соответственно сохраняется

$$\frac{dJ^{\alpha\beta}}{dt} = 0$$

антисимметричный тензор:

$$J^{\alpha\beta} = \int (x^\alpha \mathcal{T}^{0\beta} - x^\beta \mathcal{T}^{0\alpha}) d^3\mathbf{x}. \quad (5.33)$$

▷ В случае электродинамики, в качестве $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ естественно взять сумму тензоров энергии-импульса частиц и поля:

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} = \mathbb{T}^{\alpha\beta} + T^{\alpha\beta}, \quad (5.34)$$

где тензор частиц с плотностью $\mu(t, \mathbf{x}) = \sum m_a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_a(t))$ равен (5.14):

$$\mathbb{T}^{\alpha\beta} = \mu \frac{ds}{dt} U^\alpha U^\beta,$$

а для электромагнитного поля необходимо взять *симметризованное* выражение (5.21):

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\alpha\gamma} F_\gamma^\beta + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right).$$

При помощи уравнений (5.15), (5.23):

$$\partial_\beta \mathbb{T}^{\beta\alpha} = F^{\alpha\beta} j_\beta, \quad \partial_\beta T^{\beta\alpha} = -F^{\alpha\beta} j_\beta$$

можно независимо проверить, что $\partial_\mu J^{\mu, \alpha\beta} = 0$. Подчеркнём, что $\mathbb{T}^{\alpha\beta}$ и $T^{\alpha\beta}$ сами по себе не сохраняются, поэтому в (5.31) должны входить в виде суммы.

▷ Запишем сохраняющиеся величины $J^{\alpha\beta}$ в трёхмерном виде. Как обычно, антисимметричный тензор можно представить при помощи двух 3-векторов \mathbf{J} и \mathbf{G} :

$$J^i = \{J^{23}, J^{31}, J^{12}\} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} J^{jk}, \quad G^i = \{J^{10}, J^{20}, J^{30}\} = J^{i0}.$$

Они разбиваются на две части, например, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_f$ (частицы плюс поле). Найдём сначала составляющую от частиц:

$$J_p^i = \varepsilon^{ijk} \int x^j \mathbb{T}^{0k} d^3\mathbf{x} = \sum_a \varepsilon^{ijk} \int x^j m_a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_a(t)) U^k d^3\mathbf{x},$$

или, интегрируя с функцией Дирака, получаем момент импульса:

$$\mathbf{J}_p = \sum_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a],$$

где $\mathbf{p}_a = m_a \mathbf{u}_a / \sqrt{1 - \mathbf{u}_a^2}$ – импульс a -й частицы, а \mathbf{r}_a – её положение. Аналогично, при помощи выражений (5.24), записывается составляющая момента импульса поля. В результате, сохраняется суммарный 3-момент импульса:

$$\mathbf{J} = \sum_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a] + \int \frac{\mathbf{x} \times [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{4\pi} d^3\mathbf{x}. \quad (5.35)$$

В этом соотношении частицы и поля выступают равноправным образом (электромагнитное поле создаётся зарядами и на них же оно действует).

Второй 3-вектор, определяющий тензор $J^{\alpha\beta}$, равен:

$$\mathbf{G} = \mathbf{R} - t \mathbf{P}, \quad (5.36)$$

где \mathbf{R} – центр энергии частиц и поля:

$$\mathbf{R} = \sum_a \mathbf{x}_a \frac{m_a}{\sqrt{1 - \mathbf{u}_a^2}} + \int \mathbf{x} \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} d^3\mathbf{x},$$

а \mathbf{P} их суммарный импульс:

$$\mathbf{P} = \sum_a \mathbf{p}_a + \int \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{4\pi} d^3\mathbf{x}.$$

Постоянство \mathbf{G} означает, что центр энергии движется равномерно и прямолинейно. При этом система частиц и полей может вращаться, сохраняя свой момент импульса \mathbf{J} .

5.5 Классический спин

▷ При движении любой системы всегда можно выделить момент импульса её движения как целого и собственный момент вращения. Рассмотрим систему заряженных частиц и поля. Постоянные, интегральные 4-момент и 4-импульс системы равны:

$$J^{\alpha\beta} = \int J^{0,\alpha\beta} d^3\mathbf{x}, \quad P^\mu = \int (T^{0\mu} + \mathbb{T}^{0\mu}) d^3\mathbf{x}. \quad (5.37)$$

Определим 4-вектор классического спина:

$$S_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} J^{\alpha\beta} U^\gamma, \quad (5.38)$$

где $U^\mu = P^\mu/M$ – интегральная 4-скорость и $M^2 = P^2$. В силу антисимметричности $\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$, 4-спин ортогонален 4-скорости системы:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (5.39)$$

В системе отсчёта где $U^\mu = \{1, \mathbf{0}\}$, компоненты $S^\mu = \{S^0, \mathbf{S}\}$ равны $\{0, J^{23}, J^{31}, J^{12}\}$ и 3-вектор спина \mathbf{S} совпадает с полным моментом. В произвольной же системе \mathbf{S} пропорционален разности полного момента (5.35) и момента импульса центра энергии (стр. V₁:236):

$$\mathbf{S} = U_0 (\mathbf{J} - \mathbf{R} \times \mathbf{P}), \quad (5.40)$$

где \mathbf{R} и \mathbf{P} определены в (5.36). Временна́я компонента суммарной 4-скорости $U^\mu = \{U_0, \mathbf{U}\}$ делает это выражение пространственными компонентами 4-вектора. Система покоя соответствует равенству нулю полного импульса $\mathbf{P} = 0$ и, следовательно $U_0 = 1$.

Тензор $J^{\alpha\beta}$ неинвариантен относительно трансляционных преобразований $x^\mu \mapsto x^\mu + a^\mu$. Если перейти в “сдвинутую” систему отсчета, то поля не поменяются (лагранжиан явно от координат не зависит), но наличие x^μ в (5.31) под интегралом приведет к тому, что полный момент изменится:

$$J^{\mu\nu} \mapsto J^{\mu\nu} + a^\mu P^\nu - a^\nu P^\mu. \quad (5.41)$$

Спин (5.38) при таком преобразовании не меняется.

В следующей главе мы введём спиновую составляющую $S^{\mu,\alpha\beta}$ поля в тензоре $J^{\mu,\alpha\beta}$. Она в общем случае, сама по себе не сохраняется. В отличии от этого, S^μ всегда сохраняется, если сохраняются (5.37).

На основании всего этого, величину S^μ можно считать собственным моментом вращения системы (без учета перемещения её как целого) и называть *классическим спином*.

▷ Можно также определить антисимметричный 4-тензор спина:

$$S^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} U_\mu S_\nu. \quad (5.42)$$

В силу антисимметрии $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$, тензор спина ортогонален 4-спину и 4-скорости: $S^{\alpha\beta} S_\beta = S^{\alpha\beta} U_\beta = 0$. Дуальный к $S^{\alpha\beta}$ тензор равен:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} S^{\mu\nu} = S_\alpha U_\beta - S_\beta U_\alpha. \quad (5.43)$$

Свернём это соотношение с U^β и учтём, что $\mathbf{U}^2 = 1$, $\mathbf{S} \cdot \mathbf{U} = 0$:

$$S_\nu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} S^{\alpha\beta} U^\gamma. \quad (5.44)$$

Таким образом, 4-вектор спина связан с 4-тензором спина так же как с полным моментом импульса (5.38). Подставляя (5.38) в (5.42), получаем:

$$S^{\alpha\beta} = J^{\alpha\beta} - (J^{\alpha\gamma} U^\beta - J^{\beta\gamma} U^\alpha) U_\gamma. \quad (5.45)$$

Отметим ещё одно соотношение между введенными величинами, получаемое свёрткой (5.38) или (5.44) с символом Леви-Чивиты:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} S^\nu = J_{\alpha\beta} U_\gamma + J_{\gamma\alpha} U_\beta + J_{\beta\gamma} U_\alpha = S_{\alpha\beta} U_\gamma + S_{\gamma\alpha} U_\beta + S_{\beta\gamma} U_\alpha \quad (5.46)$$

(по индексам α , β , γ проводится циклическая перестановка).

▷ Антисимметричный тензор спина определяется двумя 3-векторами:

$$\mathbf{g} = \mathbf{U} \times \mathbf{S}, \quad \mathbf{s} = U^0 \mathbf{S} - S^0 \mathbf{U}, \quad (5.47)$$

где, как обычно, $\mathbf{g} = \{S^{10}, S^{20}, S^{30}\}$ и $\mathbf{s} = \{S^{23}, S^{31}, S^{12}\}$. В системе где $U^\alpha = \{1, \mathbf{0}\}$, нулевые компоненты тензора спина равны нулю, а пространственные: $S^{ij} = J^{ij}$. Напомним, что в векторных обозначениях компоненты 4-вектора спина равны (стр. V1:237):

$$S^0 = \mathbf{J} \mathbf{U}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{J} U^0 - \mathbf{G} \times \mathbf{U}, \quad (5.48)$$

где $\mathbf{J} = \{J^{23}, J^{31}, J^{12}\}$ и $\mathbf{G} = \{J^{10}, J^{20}, J^{30}\}$. В системе покоя отличны от нуля только \mathbf{S} и \mathbf{s} .

Делая преобразование Лоренца от $S'^\mu = \{0, \mathbf{S}_0\}$, к $S^\mu = \{S^0, \mathbf{S}\}$, несложно найти связь “покоящегося” \mathbf{S}_0 и “движущегося” со скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{U}/U^0$ спина $\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 + \Gamma \mathbf{u} (\mathbf{u} \mathbf{S}_0)$. Перпендикулярный скорости спин не меняется: $\mathbf{S} = \mathbf{S}_0$, а параллельный – увеличивается: $\mathbf{S} = \gamma \mathbf{S}_0$.

Пространственные компоненты “тензорного спина” \mathbf{s} преобразуются как $\mathbf{s} = \gamma \mathbf{s}_0 - \Gamma \mathbf{v} (\mathbf{v} \mathbf{s}_0)$. Его попречная и продольная компоненты ведут себя противоположным образом по сравнению с вектором \mathbf{S} .

- Представим тензор спина в ещё одном виде. Соотношение (5.45) можно переписать следующим образом:

$$S^{\alpha\beta} = J^{\alpha\beta} - (X^\alpha P^\beta - X^\beta P^\alpha), \quad (5.49)$$

где введен 4-вектор, зависящий от некоторого скаляра λ :

$$X^\alpha = \lambda U^\alpha + \frac{1}{M} J^{\alpha\gamma} U_\gamma, \quad (5.50)$$

Второе слагаемое в X^α непосредственно входит в (5.45), а первое слагаемое сокращается при *любом* λ . Это же представление можно записать в интегральном виде:

$$S^{\alpha\beta} = \int [(x^\alpha - X^\alpha) \mathcal{T}^{0\beta} - (x^\beta - X^\beta) \mathcal{T}^{0\alpha}] d^3\mathbf{x}, \quad (5.51)$$

где $\mathcal{T}^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + \mathbb{T}^{\alpha\beta}$ – сохраняющийся тензор энергии-импульса частиц и поля. Величины X^α не зависят от координат \mathbf{x} и выносятся за интеграл, получаем (5.49). Вектор X^α можно интерпретировать как некоторую точку в 4-пространстве, относительно которой определяется собственный момент вращения (тензор спина). Компоненты вектора X^α равны:

$$X^0 = \lambda U^0 + \frac{\mathbf{U}\mathbf{G}}{M}, \quad \mathbf{X} = \lambda \mathbf{U} + \frac{U^0}{M} \mathbf{G} - \frac{\mathbf{U} \times \mathbf{J}}{M}.$$

Пространственные компоненты можно также переписать в виде:

$$\mathbf{X} = \lambda \mathbf{U} + \frac{\mathbf{G} + \mathbf{U}(\mathbf{U}\mathbf{G})}{P^0} - \frac{\mathbf{U} \times \mathbf{S}}{P^0}. \quad (5.52)$$

В тоже время, положение системы характеризуется при помощи центра её энергии:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{P^0} \int \mathbf{x} \mathcal{T}^{00} d^3\mathbf{x}, \quad P^0 = \int \mathcal{T}^{00} d^3\mathbf{x}. \quad (5.53)$$

Для *замкнутой* системы $J^{\alpha\beta}$ и P^α сохраняются

$$J^{i0} = \int (x^i T^{00} - t T^{0i}) d^3\mathbf{x} = P^0 R^i - t P^i = const,$$

поэтому центр энергии движется равномерно и прямолинейно:

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{G}}{P^0} + t \frac{\mathbf{P}}{P^0} = \frac{\mathbf{G}}{P^0} + s \mathbf{U}, \quad (5.54)$$

где $s = t/U^0 = t\sqrt{1-\mathbf{u}^2}$ – “интегральное собственное время” системы, определяемое через её *интегральную* скорость $\mathbf{u} = \mathbf{U}/U^0$.

Таким образом, эффективная точка на траектории \mathbf{X} , относительно которой вычисляется тензор спина системы (5.51), не совпадает с положением центра энергии \mathbf{R} :

$$\mathbf{X} = \mathbf{R} + \left[\lambda - s + \frac{\mathbf{U}\mathbf{G}}{P^0} \right] \mathbf{U} - \frac{\mathbf{U} \times \mathbf{S}}{P^0}.$$

Связь этих двух 3-векторов зависит от выбора инварианта λ . Например, если потребовать, чтобы выражение в квадратных скобках было равно нулю, тогда $X^0 = t$ совпадает с временем лабораторной системы отсчёта и связь векторов преобразует вид:

$$\mathbf{X} = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{S}}{M} = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{s}}{P^0}, \quad (5.55)$$

где проекции вектора \mathbf{s} являются пространственными компонентами тензора спина (5.47), а \mathbf{S} – 4-вектора спина (5.38). Скорость $\mathbf{u} = \mathbf{U}/U^0$ – это интегральная 3-скорость системы. Таким образом, \mathbf{X} сдвинут относительно \mathbf{R} тем сильнее, чем быстрее движется и вращается система. Кинематически этот эффект связан со сгущением плотности энергии в нижней части системы относительно плоскости в которой лежат векторы спина и скорости (стр. V₁:296).

Впрочем, подобное рассмотрение имеет смысл только для достаточно компактной в пространстве системы зарядов и полей. Для сильно нелокальной системы, $s = t/U^0 = t\sqrt{1-\mathbf{u}^2}$ не является инвариантом, так как *интегральная* скорость \mathbf{u} не связана с конкретной точкой (она вычисляется через суммарный 4-импульс системы).

В микромире существует много примеров компактных систем, обладающих спином. Начиная от “точечного” электрона, заканчивая ядрами и атомами, имеющими небольшой, но конечный размер. В случае фундаментальных частиц (лептоны, кварки) их собственный спин не имеет классической аналогии. Он всегда равен фиксированному значению (волях постоянной Планка). Такие частицы нельзя раскрутить сильнее или остановить их “вращение”. В тоже время полный момент в системе покоя связанных состояний нескольких фундаментальных частиц, вполне имеет классическую аналогию спина, рассмотренного выше.

Если изучается система, движущаяся во внешнем поле, то суммарный момент импульса и спин должны быть разбиты на две части (частицы и поля). В этом случае спин подсистемы не сохраняется, а движение центра энергии не будет прямолинейным и равномерным. Тем не менее, считая эффекты нековариантности малыми, можно описать динамику спина “гироскопа” (совокупности вращающихся частиц) во внешнем поле исходя из достаточно общих соображений, что мы сейчас и проделаем.

- Рассмотрим частицу (или компактную систему зарядов), обладающую спином и магнитным моментом. Найдем релятивистское уравнение которое описывает движение такой частицы во внешнем электромагнитном поле. В системе покоя частицы, находящейся в магнитном поле, спин испытывает лармировскую прецессию (стр. 45):

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{gQ}{2m} [\mathbf{S} \times \mathbf{B}], \quad (5.56)$$

где Q , m – заряд и масса частицы, а g – гиромагнитный фактор (для электрона $Q = -e$, $g \approx 2$).

В ковариантном уравнении 3-вектора спина должен замениться на 4-спин, а производная по времени, на производную по инвариантному собственному времени частицы $d\tau = dt\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$. Вместо магнитного поля должен появиться 4-тензор $F_{\mu\nu}$. Так как в (5.56) производная линейна по спину и магнитному полю, будем считать, что и в ковариантном уравнении она будет линейна по тензору электромагнитного поля $\mathbf{F} \equiv F^{\alpha\beta}$ и спину $\mathbf{S} \equiv S^\alpha$. Кроме этих двух величин есть ещё 4-скорость $\mathbf{U} = \{\gamma, \mathbf{u}\gamma\}$ (в (5.56) её нет, так это система покоя частицы). В таких предположениях, наиболее общее ковариантное уравнение имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\tau} = \alpha_1 \mathbf{S} + \alpha_2 \mathbf{U} + \alpha_3 \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} + \alpha_4 \mathbf{F} \cdot \mathbf{U} + \alpha_5 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{U}, \quad (5.57)$$

где α_i – некоторые константы. Будем считать, что магнитное поле *однородно* (стр. V1:??) и на частицу действует только сила Лоренца:

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = \frac{Q}{m} \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}. \quad (5.58)$$

Производная условия ортогональности 4-спина и 4-скорости:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{d\tau} = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}.$$

с учётом уравнений (5.57), (5.58), даёт $\alpha_2 = 0$, $\alpha_5 = \alpha_3 - Q/m$. Уравнение Лармора (5.56) при $\mathbf{U} = \{1, \mathbf{0}\}$ позволяет найти оставшиеся коэффициенты: $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_3 = gQ/2m$. В результате получается *уравнение Баргмана-Мишеля-Телегди* (БМТ) [27]:

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\tau} = \frac{gQ}{2m} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} - \left(1 - \frac{g}{2}\right) (\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}) \mathbf{U}, \quad (5.59)$$

где 4-ускорение \mathbf{A} определяется силой Лоренца (5.58).

▷ Компоненты 4-вектора, получающегося при свертке $F^{\mu\nu}$ и S_ν равны $\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} = \{\mathbf{E}\mathbf{S}, S^0\mathbf{E} + \mathbf{S} \times \mathbf{B}\}$, где \mathbf{E} и \mathbf{B} – электрическое и магнитное поле. Поэтому в 3-мерных обозначениях ВМТ уравнение имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{gQ}{2m\gamma} ((\mathbf{u}\mathbf{S})\mathbf{E} + \mathbf{S} \times \mathbf{B}) + \left(1 - \frac{g}{2}\right) \gamma^2 (\mathbf{a}\mathbf{S}) \mathbf{u}. \quad (5.60)$$

Если магнитный момент у частицы со спином отсутствует ($g = 0$), то прецессия спина имеет кинематическую природу, и из (5.60) следует уравнение (V₁:10.22), стр. V₁:285. Частицы, с зарядом и спином, но без магнитного момента, неизвестны. Однако, например, для ядра урана $^{235}_{92}U$ g-фактор равен $g = -0.26$, что в 11 раз меньше, чем у протона и в 8, чем у электрона, при том, что спин в 7 раз больше ($7\hbar/2$). Для такого объекта кинематический эффект преобладает над динамическим.

При движении в однородном магнитном поле ($\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} = const$) модуль скорости частицы постоянен и 3-вектор ускорения равен (стр. V₁:144):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \omega [\mathbf{n} \times \mathbf{u}], \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \omega [\mathbf{n} \times \mathbf{a}] = -\omega^2 \mathbf{u}, \quad (5.61)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$ – единичный вектор вдоль магнитного поля, а *циклотронная частота* $\omega = -Q|\mathbf{B}|/m\gamma$, может быть и отрицательной (если $Q > 0$). Уравнение для спина (5.60) принимает вид:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{g}{2} \omega [\mathbf{n} \times \mathbf{S}] + \left(1 - \frac{g}{2}\right) \gamma^2 (\mathbf{a}\mathbf{S}) \mathbf{u}, \quad (5.62)$$

откуда, используя (5.61), несложно получить:

$$\frac{d(\mathbf{u}\mathbf{S})}{dt} = \gamma^2 \left(1 - \frac{g}{2}\right) (\mathbf{a}\mathbf{S}), \quad \frac{d(\mathbf{a}\mathbf{S})}{dt} = -\omega^2 \left(1 - \frac{g}{2}\right) (\mathbf{u}\mathbf{S}). \quad (5.63)$$

Эти уравнения приводят к уравнениям осцилляторного типа:

$$\frac{d^2(\mathbf{u}\mathbf{S})}{dt^2} + \bar{\omega}^2 (\mathbf{u}\mathbf{S}) = 0, \quad \frac{d^2(\mathbf{a}\mathbf{S})}{dt^2} + \bar{\omega}^2 (\mathbf{a}\mathbf{S}) = 0, \quad (5.64)$$

где $\bar{\omega} = \gamma\omega (1 - g/2)$. Потому проекции спина на скорость и ускорение совершают гармонические колебания с частотой:

$$\omega_a = \frac{2-g}{2} \gamma \omega = \frac{2-g}{2} \frac{QB}{m}. \quad (5.65)$$

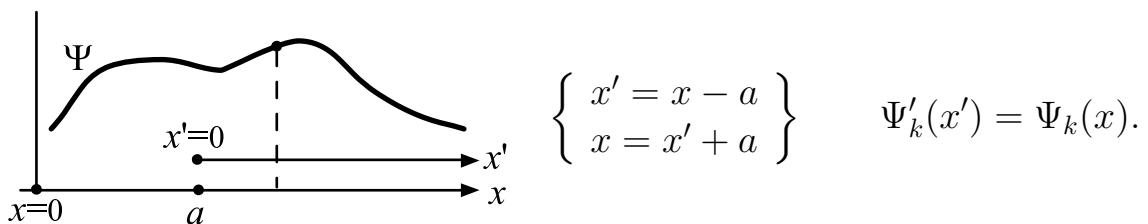
Для электрона $g \approx 2$ и динамическая ларморовская прецессия практически полностью компенсирует кинематическую прецессию. Небольшое изменение поляризации электрона $\mathbf{u}\mathbf{S}$ связано с отклонением g-фактора от двойки, что позволяет измерять аномальные магнитные моменты [28].

5.6 Симметрии и законы сохранения

Инвариантность лагранжиана относительно преобразований координат и полей приводит к законам сохранения. Этот замечательный факт был установлен Эмми Нёттер в 1918 г.

Различают *непрерывные* и *дискретные* симметрии. Первые зависят от вещественных параметров, равенство нулю которых даёт тождественное (единичное) преобразование. При изменении этих параметров можно “непрерывным образом” получить любой элемент группы симметрии, соответствующей данному преобразованию. При непрерывных преобразованиях координат и полей всегда можно рассмотреть бесконечно малое преобразование в окрестности единичного преобразования. К дискретным преобразованиям относятся, например, инверсии времени и координат: $x \mapsto x' = -x$. В этом случае бесконечно малых преобразований нет. Теорема Нёттер формулируется для непрерывных преобразований.

▷ Наше пространство-время однородно (нет выделенной точки) и изотропно (нет выделенных направлений). Первая симметрия приводит к сохранению тензора энергии-импульса, а вторая – к сохранению момента импульса поля. Рассмотрим сначала однородность пространства. Соответствующие преобразования координат являются трансляциями (сдвигами) при которых физика должна оставаться неизменной:



Для краткости далее мы часто будем опускать индекс у 4-координат: $x \equiv x^\mu = \{t, \mathbf{x}\}$ и на самом деле выше записаны 4-трансляции: $x'^\mu = x^\mu - a^\mu$.

По определению, поле $\Psi_k(x)$ задано в каждой точке 4-пространства. Точки пространства – это геометрические сущности, не зависящие от способа их нумерации, для которой используются различные системы координат в 4-пространстве. В общем случае они называются системами отсчёта (впрочем, при трансляциях система отсчёта не меняется).

Если мы сдвигаем начало отсчёта координат $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ и начало отсчёта времени $t' = t - a^0$, значение поля (числа Ψ_k) в данной точке 4-пространства не изменяется. Это записывается в виде $\Psi'_k(x') = \Psi_k(x)$. Хотя значение поля не меняется, функциональная зависимость от x'^μ становится другой, что помечается штрихом у функции Ψ'_k . Подчеркнём, что x'^μ и x^μ это координаты одной и той же точки пространства.

▷ Если сдвиг $a^\mu = \{a^0, \mathbf{a}\}$ бесконечно мал, функциональное изменение поля также мало. Разложим преобразование поля в ряд Тейлора:

$$\Psi'_k(x') = \Psi_k(x) = \Psi_k(x' + a) \approx \Psi_k(x') + \partial'_\mu \Psi_k(x') a^\mu = \Psi_k(x') + \delta\Psi_k(x'),$$

где $\delta\Psi_k(x') = a^\mu \partial'_\mu \Psi_k(x')$. Таким образом, поправка к “исходной” функции Ψ_k определяется её производной, свёрнутой с бесконечно малым смещением. Например, скалярная функция $\varphi(x) = x^2 = x^\mu x_\mu$, заданная таким образом в системе координат x^μ , в системе координат x'^μ будет иметь функциональную зависимость $\varphi'(x') = (x' + a)^2 \approx x'^2 + 2x'a$.

Лагранжиан – это инвариант, не зависящий явно от координат (только через полевые функции и их производные). Поэтому:

$$\mathcal{L}(\Psi'_k(x'), \partial'_\mu \Psi'_k(x')) = \mathcal{L}(\Psi_k(x), \partial_\mu \Psi_k(x)), \quad (5.66)$$

где в правой и левой части стоит *одна и та же* функция \mathcal{L} . Эта инвариантность и приводит к закону сохранения энергии-импульса.

▷ Действительно, подставим в (5.66) слева изменение функциональной зависимости, а справа перейдём от x к x' , чтобы в равенстве стояли одинаковые функции и переменные от которых они зависят:

$$\mathcal{L}(\Psi_k(x') + \delta\Psi_k(x'), \partial'_\mu \Psi_k(x') + \partial'_\mu \delta\Psi_k(x')) = \mathcal{L}(\Psi_k(x' + a), \partial_\mu \Psi_k(x' + a)).$$

Так как x' – это просто обозначение переменной, штрих можно опустить, переобозначив x' как x . Величины a и $\delta\Psi_k \sim a$ бесконечно малые, поэтому разложим по ним в ряд Тейлора левую часть равенства и перенеся вправо нулевое по $\delta\Psi_k$ приближение, получим:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_k} \delta\Psi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi_k)} \partial_\mu \delta\Psi_k = \mathcal{L}(\Psi_k(x+a), \partial_\mu \Psi_k(x+a)) - \mathcal{L}(\Psi_k(x), \partial_\mu \Psi_k(x)).$$

В первом слагаемом слева подставим уравнение Лагранжа (4.75), стр. 111 и выделим полную производную. Правую часть разложим в ряд по a^μ :

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi_k)} \partial_\nu \Psi_k a^\nu \right) = a^\nu \partial_\nu \mathcal{L}.$$

Беря производную по a^ν , получаем (5.16) а, следовательно, и закон сохранения тензора энергии-импульса. Таким образом, сохранение энергии и импульса связаны с однородностью времени и 3-пространства.

- Рассмотрим теперь инвариантность лагранжиана относительно поворотов в 4-пространстве (преобразования Лоренца и 3-мерные вращения):

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad \Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu + \dots$$

Первое слагаемое δ^μ_ν в разложении лоренцевой матрицы соответствует единичному преобразованию. Второе слагаемое будем считать бесконечно малым. Таким образом (опуская индексы вниз), рассматриваем следующие преобразования:

$$x'_\mu \approx x_\mu + \omega_{\mu\nu} x^\nu, \quad x_\mu \approx x'_\mu - \omega_{\mu\nu} x'^\nu. \quad (5.67)$$

Обратное преобразование (второе соотношение) проверяется подстановкой в прямые преобразования (первое соотношение) с точностью до первого порядка малости по $\omega_{\mu\nu}$ ($\lessdot H_{46}$) Параметры $\omega_{\mu\nu}$ антисимметричны:

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \quad (5.68)$$

Это непосредственно следует из инвариантности x^2 в первом порядке малости по $\omega_{\mu\nu}$:

$$x^2 = g^{\mu\nu} (x_\mu + \omega_{\mu\alpha} x^\alpha) (x_\nu + \omega_{\nu\beta} x^\beta) = x^2 + 2\omega_{\nu\beta} x^\nu x^\beta + \dots$$

Свёртка $\omega_{\nu\beta} x^\nu x^\beta$ с симметричным тензором $x^\nu x^\beta$ будет равна нулю, если $\omega_{\nu\beta}$ антисимметричный тензор.

Для лоренцевского буста (движения со скоростью v вдоль оси x) и поворотов в плоскости (x, y) на угол ϕ для 1+2 пространства $x^\mu = \{t, x, y\}$ параметры преобразования равны ($\lessdot H_{47}$)

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -v & 0 \\ v & 0 & \phi \\ 0 & \phi & 0 \end{pmatrix}.$$

В общем случае 6 независимых компонентов антисимметричного тензора $\omega_{\mu\nu}$ определяются тремя компонентами скорости и тремя углами поворота пространственных осей.

Скалярное поле $\varphi(x)$ является множеством чисел, заданных в точках 4-пространства. Эта функция не меняет своих значений при преобразованиях Лоренца. Однако, уже векторное поле $A^\mu(x)$ меняется, преобразуясь так-же как и 4-координаты:

$$\varphi'(x') = \varphi(x), \quad A'_\mu(x') \approx A_\mu(x) + \omega_{\mu\nu} A^\nu(x). \quad (5.69)$$

Возможны и более сложные случаи (например, спинорное поле, стр. 231).

▷ Запишем преобразование для произвольного поля $\Psi_k(x)$ в общем виде при помощи некоторой матрицы U_{ij} , зависящей от параметров преобразований Лоренца Λ :

$$\Psi'_i(x') = U_{ij}(\Lambda) \Psi^j(x) \approx \Psi_i(x) - \frac{i}{2} \Sigma_{ij}^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \Psi^j(x), \quad (5.70)$$

где во втором равенстве эта матрица разложена в ряд по ω и $-i\Sigma_{ij}^{\mu\nu}$ – коэффициенты такого разложения. Смысл индексов i, j зависит от трансформационных свойств поля. Для векторных полей – это лоренцевы индексы, меняющиеся от 0 до 3. Так как $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$, по верхним индексам коэффициенты $\Sigma_{ij}^{\mu\nu}$ антисимметричны (симметричный тензор при свёртке с антисимметричным равен нулю).

Для скалярного поля коэффициенты $\Sigma_{ij}^{\mu\nu}$ равны нулю. Для векторного поля ($\ll H_{48}$):

$$-i\Sigma_{ij}^{\mu\nu} = \delta_i^\mu \delta_j^\nu - \delta_j^\mu \delta_i^\nu. \quad (5.71)$$

Можно проверить, что в этом случае справедлив следующий коммутатор для матриц $(\Sigma^{\alpha\beta})_{ij} = \Sigma_{ij}^{\alpha\beta}$:

$$[\Sigma^{\alpha\beta}, \Sigma^{\mu\nu}] = i(g^{\alpha\mu} \Sigma^{\nu\beta} - g^{\alpha\nu} \Sigma^{\mu\beta} + g^{\beta\nu} \Sigma^{\mu\alpha} - g^{\beta\mu} \Sigma^{\nu\alpha}), \quad (5.72)$$

где произведение $(\Sigma^{\alpha\beta} \Sigma^{\mu\nu})_{ij}$ равно $\Sigma_{ik}^{\alpha\beta} \Sigma_{kj}^{\mu\nu}$ и мы не следим за высотой латинских индексов (хотя для векторного поля подразумеваем ковариантное суммирование).

▷* Коммутатор (5.72) справедлив для коэффициентов разложения любой матрицы $U_{ij}(\Lambda)$, связанной с преобразованиями Лоренца групповым образом так, что $\mathbf{U}(\Lambda_1)\mathbf{U}(\Lambda_2) = \mathbf{U}(\Lambda_1\Lambda_2)$ и $\mathbf{U}^{-1}(\Lambda) = \mathbf{U}(\Lambda^{-1})$. Наметим идею соответствующего доказательства (его можно пока опустить). Рассмотрим два независимых преобразования Лоренца Λ , $\bar{\Lambda}$ и следующую композицию преобразований полей в матричном виде:

$$\mathbf{U}^{-1}(\Lambda) \mathbf{U}(\bar{\Lambda}) \mathbf{U}(\Lambda) = \mathbf{U}(\Lambda^{-1}\bar{\Lambda}\Lambda). \quad (5.73)$$

Подставим бесконечно малое преобразование $\bar{\Lambda} = 1 + \bar{\omega}$, которому соответствует $\mathbf{U}(1 + \bar{\omega}) = 1 - (i/2) \Sigma^{\mu\nu} \bar{\omega}_{\mu\nu}$. В первом порядке малости:

$$\mathbf{U}^{-1}(\Lambda) \Sigma^{\mu\nu} \mathbf{U}(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Sigma^{\alpha\beta}. \quad (5.74)$$

Ещё раз подставим бесконечно малое преобразование $\Lambda = 1 + \omega$:

$$\frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} [\Sigma^{\alpha\beta}, \Sigma^{\mu\nu}] = \omega_{\alpha\beta} (g^{\mu\alpha} \Sigma^{\beta\nu} + g^{\nu\alpha} \Sigma^{\mu\beta}).$$

Антисимметризая по α, β выражение в круглых скобках или беря производную по ω , получаем (5.72) [см. также (5.79)].

- Перейдём теперь собственно к теореме Нёттер. Как и в случае с трансляцией, найдём изменение функциональной формы поля в штрихованной системе отсчёта:

$$\Psi'_i(x') \approx \Psi_i(x'_\mu - \omega_{\mu\nu} x'^\nu) - \frac{\imath}{2} \Sigma_{ij}^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \Psi^j(x'),$$

где в первом слагаемом вместо x в (5.70) подставлены обратные бесконечно малые преобразования Лоренца (5.67). Во втором слагаемом в аргументе функции поставлен штрих, что возможно, так как мы удерживаем первый порядок малости по ω , которые уже стоит множителем в этом слагаемом. Раскладывая в ряд Тейлора по ω , имеем:

$$\Psi'_i(x') \approx \Psi_i(x') + \delta\Psi_i(x'), \quad (5.75)$$

где функциональное изменение поля равно

$$\delta\Psi_i(x') = -\omega_{\mu\nu} x'^\nu \partial'^\mu \Psi_i(x') - \frac{\imath}{2} \Sigma_{ij}^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \Psi^j(x'). \quad (5.76)$$

Лагранжиан является скаляром относительно преобразований Лоренца:

$$\mathcal{L}(\Psi'_k(x'), \partial'_\mu \Psi'_k(x')) = \mathcal{L}(\Psi_k(x), \partial_\mu \Psi_k(x)). \quad (5.77)$$

Переходя слева к функциям $\Psi(x')$ (5.75), а справа к координатам $x_\mu = x'_\mu - \omega_{\mu\nu} x'^\nu$ и опуская штрихи у координат, имеем:

$$\mathcal{L}(\Psi_k(x) + \delta\Psi_k(x), \partial_\mu \Psi_k(x) + \partial_\mu \delta\Psi_k(x)) = \mathcal{L}(\Psi_k(x + \delta x), \partial_\mu \Psi_k(x + \delta x)),$$

где $\delta x_\mu = -\omega_{\mu\nu} x^\nu$. Величины δx и $\delta\Psi_k$ бесконечно малые, поэтому разложим по ним в ряд Тейлора левую часть равенства и перенеся вправо нулевое по $\delta\Psi_k$ приближение $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Psi_k(x), \partial_\mu \Psi_k(x))$, получим:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_k} \delta\Psi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi_k)} \partial_\mu \delta\Psi_k = \mathcal{L}(\Psi_k(x + \delta x), \partial_\mu \Psi_k(x + \delta x)) - \mathcal{L}.$$

Подставим слева в первом слагаемом уравнения Лагранжа, выделив полную производную и разложим правую часть в ряд по δx :

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi_k)} \delta\Psi_k \right) = \delta x_\mu \partial^\mu \mathcal{L}. \quad (5.78)$$

Учитывая определение $\delta\Psi_k$ и δx_μ перепишем это уравнение в явном виде:

$$\omega_{\mu\nu} \partial_\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda \Psi_k)} x^\nu \partial^\mu \Psi_k \right) + \frac{\imath}{2} \Sigma_{ij}^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \partial_\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda \Psi_i)} \Psi_j \right) = \omega_{\mu\nu} x^\nu \partial^\mu \mathcal{L}.$$

Возьмём теперь производную этого соотношения по $\omega_{\alpha\beta}$.

В силу антисимметричности тензора, производная равна

$$\frac{\partial \omega_{\mu\nu}}{\partial \omega_{\alpha\beta}} = \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta. \quad (5.79)$$

Действительно, $\partial \omega_{01} / \partial \omega_{01} = 1$. Но для $\partial \omega_{10} / \partial \omega_{01} = -\partial \omega_{01} / \partial \omega_{01} = -1$, что и учитывается в соотношении (5.79). В результате получаем:

$$\partial_\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda \Psi_k)} (x^\alpha \partial^\beta - x^\beta \partial^\alpha) \Psi_k \right) - \partial_\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda \Psi_i)} i \Sigma_{ij}^{\alpha\beta} \Psi^j \right) = (x^\alpha \partial^\beta - x^\beta \partial^\alpha) \mathcal{L}.$$

Правую часть равенства можно переписать в виде $\partial^\lambda \left((x^\alpha \delta_\lambda^\beta - x^\beta \delta_\lambda^\alpha) \mathcal{L} \right)$. Введём канонический тензор энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_k)} \partial^\nu \Psi_k - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (5.80)$$

С его помощью определим *тензор полного момента* поля:

$$J^{\mu, \alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha} - i \Sigma_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_i)} \Psi^j, \quad (5.81)$$

который удовлетворяет уравнению непрерывности по первому индексу:

$$\partial_\mu J^{\mu, \alpha\beta} = 0. \quad (5.82)$$

Следовательно, $J^{0, \alpha\beta}$ являются плотностями сохраняющихся величин. Тензор $J^{\mu, \alpha\beta}$ антисимметричен по последним двум индексам, поэтому существует 6 сохраняющихся зарядов (по числу параметров преобразований $\omega_{\alpha\beta}$). Первые два слагаемых образуют *тензор углового момента*, а последнее слагаемое называют *спином* поля. Угловой момент явным образом зависит от 4-координат и возникает в результате преобразования аргументов полевых функций. Спиновая компонента от координат явным образом не зависит и связана с изменением полевых функций.

Для скалярного поля $\Sigma_{ij}^{\alpha\beta} = 0$ и спиновая компонента момента равна нулю. Если поле Ψ_k векторное, то $-i \Sigma_{ij}^{\alpha\beta} = \delta_i^\alpha \delta_j^\beta - \delta_j^\alpha \delta_i^\beta$ и:

$$J^{\mu, \alpha\beta} = L^{\mu, \alpha\beta} + S^{\mu, \alpha\beta}, \quad (5.83)$$

$$L^{\mu, \alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha}, \quad S^{\mu, \alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_\alpha)} \Psi^\beta - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_\beta)} \Psi^\alpha.$$

Если $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$, то угловой $L^{\mu, \alpha\beta}$ и спиновый $S^{\mu, \alpha\beta}$ моменты сохраняются независимо (стр. 151). Для несимметричного тензора энергии-импульса сохраняющейся величиной является только полный момент (стр. 136).

5.7 Неоднозначность локальных токов

▷ Запишем ещё раз выражения для канонического тензора энергии-импульса (симметрия относительно трансляций в 4-пространстве):

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_k)} \partial^\nu \Psi_k - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

и тензора полного момента импульса поля (стр. 149):

$$J^{\mu,\alpha\beta} = L^{\mu,\alpha\beta} + S^{\mu,\alpha\beta},$$

где угловая и спиновая компоненты полного момента импульса равны:

$$L^{\mu,\alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha}, \quad S^{\mu,\alpha\beta} = -\iota \Sigma_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi_i)} \Psi_j.$$

По первому индексу энергия-импульс и момент удовлетворяют уравнениям непрерывности

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu J^{\mu,\alpha\beta} = 0.$$

Тензор момента по последним двум индексам антисимметричен (т.к. антисимметричны параметры поворота $\omega^{\alpha\beta}$). Канонический тензор энергии-импульса, в общем случае, несимметричен по индексам. Если же он оказывается симметричным $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, то угловой и спиновый моменты сохраняются (удовлетворяют уравнениям непрерывности) независимо (стр. 136). Если сохраняется угловой момент $L^{\mu,\alpha\beta}$, то, в силу сохранения полного момента $J^{\mu,\alpha\beta}$, будет сохраняться и спиновая компонента момента $S^{\mu,\alpha\beta}$. В качестве упражнения ($\prec H_{51}$) стоит проверить, что для лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi} (\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\alpha A^\beta)$$

канонический тензор энергии-импульса симметричен, а тензор спина не равен нулю и сохраняется сам по себе.

К любому сохраняющемуся току J^μ можно прибавить некоторую комбинацию полей, которая, в свою очередь, удовлетворяет уравнению непрерывности. Подобный модифицированный ток также будет сохраняться. Например, пусть $\Phi^{\mu\nu}$ – антисимметричный тензор: $\Phi^{\mu\nu} = -\Phi^{\nu\mu}$. Тогда

$$\partial_\mu (J^\mu + \partial_\nu \Phi^{\mu\nu}) = 0,$$

так как в силу перестановочности производных $\partial_\nu \partial_\mu = \partial_\mu \partial_\nu$ и антисимметричности $\Phi^{\mu\nu}$, имеем $\partial_\mu \partial_\nu \Phi^{\mu\nu} = 0$. Поэтому добавление к току величины $\partial_\nu \Phi^{\mu\nu}$ не нарушит закона сохранения. Возможны и более замысловатые изменения канонических величин.

▷* Перейдем от канонических тензоров энергии-импульса и спина к новым тензорам при помощи тензора $\Phi^{\mu,\alpha\beta}$, который антисимметричен по последним двум индексам: ($\Phi^{\mu,\alpha\beta} = -\Phi^{\mu,\beta\alpha}$):

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\gamma (\Phi^{\gamma,\mu\nu} - \Phi^{\mu,\gamma\nu} - \Phi^{\nu,\gamma\mu}), \quad \tilde{S}^{\mu,\alpha\beta} = S^{\mu,\alpha\beta} - \Phi^{\mu,\alpha\beta}. \quad (5.84)$$

Тензор $\tilde{T}^{\mu\nu}$ по-прежнему удовлетворяет уравнению непрерывности:

$$\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\gamma (\Phi^{\gamma,\mu\nu} - \Phi^{\mu,\gamma\nu}) - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\gamma \Phi^{\nu,\gamma\mu} = 0.$$

Первое слагаемое (член в круглых скобках) равно нулю, в силу явной антисимметрии по индексам μ и γ . Последний член равен нулю, так как тензор $\Phi^{\nu,\gamma\mu}$ антисимметричен по последним двум индексам.

Используя тензоры $\tilde{T}^{\mu\nu}$ и $\tilde{S}^{\mu,\alpha\beta}$ можно записать новый полный момент:

$$\tilde{J}^{\mu,\alpha\beta} = x^\alpha \tilde{T}^{\mu\beta} - x^\beta \tilde{T}^{\mu\alpha} + \tilde{S}^{\mu,\alpha\beta}.$$

Он как и канонический момент сохраняется. Действительно $\tilde{J}^{\mu,\alpha\beta}$ равен:

$$J^{\mu,\alpha\beta} + \frac{x^\alpha}{2} \partial_\gamma (\Phi^{\gamma,\mu\beta} - \Phi^{\mu,\gamma\beta} - \Phi^{\beta,\gamma\mu}) - \frac{x^\beta}{2} \partial_\gamma (\Phi^{\gamma,\mu\alpha} - \Phi^{\mu,\gamma\alpha} - \Phi^{\alpha,\gamma\mu}) - \Phi^{\mu,\alpha\beta}.$$

Беря производные по ∂_μ и учитывая, что $\partial_\mu J^{\mu,\alpha\beta} = 0$, получаем:

$$\partial_\mu \tilde{J}^{\mu,\alpha\beta} = \frac{1}{2} \partial_\gamma (\Phi^{\gamma,\alpha\beta} - \Phi^{\alpha,\gamma\beta} - \Phi^{\beta,\gamma\alpha}) - \frac{1}{2} \partial_\gamma (\Phi^{\gamma,\beta\alpha} - \Phi^{\beta,\gamma\alpha} - \Phi^{\alpha,\gamma\beta}) - \partial_\mu \Phi^{\mu,\alpha\beta},$$

где опущены производные от круглых скобок, равные, как мы видели при вычислении $\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu}$, нулю. Кроме этого проведены свёртки с $\partial_\mu x^\alpha = \delta_\mu^\alpha$ и $\partial_\mu x^\beta = \delta_\mu^\beta$. Приводя подобные слагаемые, получаем

$$\partial_\mu \tilde{J}^{\mu,\alpha\beta} = 0. \quad (5.85)$$

Неоднозначность в определении сохраняющихся величин можно использовать для придания им тех или иных свойств. Например, если выше выбрать $\Phi^{\mu,\alpha\beta} = S^{\mu,\alpha\beta}$, где $S^{\mu,\alpha\beta}$ – канонический спин (получаемый из теоремы Нёттер), то новый тензор спина $\tilde{S}^{\mu,\alpha\beta}$ становится равным нулю ($\tilde{S}^{\mu,\alpha\beta} = 0$), а тензор энергии-импульса симметричным:

$$\tilde{J}^{\mu,\alpha\beta} = x^\alpha \tilde{T}^{\mu\beta} - x^\beta \tilde{T}^{\mu\alpha}, \quad \tilde{T}^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\nu\mu}. \quad (5.86)$$

Симметричность $\tilde{T}^{\mu\nu}$ следует из того, что $\tilde{J}^{\mu,\alpha\beta}$ удовлетворяет уравнению непрерывности, поэтому справедливы вычисления подобные (5.32).

“Упрятывание” спиновой компоненты полного момента импульса поля в угловой момент с одновременной симметризацией тензора энергии-импульса называется *процедурой Белифанте*. Стоит проверить ($< H_{52}$), что “угаданная” дивергенция для симметризации тензора энергии и импульса на стр. 129 может быть получена при помощи этой процедуры.

• Неоднозначность в выборе тензоров энергии-импульса и спина, естественно, не приводит к физической неоднозначности. Рассмотрим, например, сохранение энергии в объёме V , окруженном поверхностью S (стр. 69):

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_V W dV + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_k \right\} + \oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} = 0. \quad (5.87)$$

Это интегральное уравнение непосредственно следует из теоремы Пойнтинга $\partial W/\partial t + \mathbf{E}\mathbf{j} + \nabla\mathbf{P} = 0$ и силы Лоренца. В ковариантном виде теорема Пойнтинга имеет вид $\partial_\mu(T^{\mu\nu} + \mathbb{T}^{\mu\nu}) = 0$, где тензоры поля $T^{\mu\nu}$ и вещества $\mathbb{T}^{\mu\nu}$ являются симметричными. Пусть к сумме этих тензоров прибавляют некоторый тензор $G^{\mu\nu}$, автоматически удовлетворяющий уравнению $\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0$. Его добавление скажется следующим образом на интегральной версии закона сохранения:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_V (W + G^{00}) dV + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_k \right\} + \oint_S (P^i + G^{0i}) dS^i = 0. \quad (5.88)$$

В силу уравнения непрерывности $\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0$, независимо от (5.87) выполняется соотношение:

$$\frac{d}{dt} \int_V G^{00} dV + \oint_S G^{0i} dS^i = 0. \quad (5.89)$$

Пусть мы интересуемся, что происходит с суммарной энергией зарядов \mathbb{E}_k при изменении напряженностей полей. Понятно, что совместное использование законов сохранения (5.88) и (5.89) приведёт к тем же физическим следствиям, что и использование (5.87). Поэтому неоднозначность в выборе плотности энергии и импульса поля (произвол в тензоре $G^{\mu\nu}$) не влияет на однозначность в описании поведения зарядов.

Определённые сложности с однозначностью иногда возникают при рассмотрении потока энергии через некоторую площадку (незамкнутую поверхность). С таким потоком мы имеем дело когда измеряем энергию излучения, проходящую в единицу времени через единицу поверхности. Этот поток приводит к давлению, нагреву и другим “неполевым” последствиям, которые можно независимо измерить. В тоже время, вектор плотности импульса поля $\mathbf{P} = [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] / 4\pi$, характеризующий эти эффекты, с точки зрения теоремы Пойнтинга, определён неоднозначно. Например, в силу уравнения Максвелла $\nabla\mathbf{B} = 0$, его можно заменить на $\mathbf{P} \mapsto \mathbf{P} + \mathbf{B}$ (в ковариантной формулировке это соответствует выбору тензора $G^{\mu\nu} = {}^*F^{\mu\nu}$). Куда в этом случае направлено давление света?

▷ На самом деле, даже при рассмотрении потока через площадку, следует применять интегральный закон сохранения для *замкнутого* объёма. Тогда проблем с неоднозначностью не будет. Например, пусть требуется вычислить какой импульс передан пластинке, которая поглотила падающий на неё свет. В конечном счёте, этот импульс передан зарядам, находящимся в пластинке. Поэтому необходимо рассматривать пластинку в виде, например, параллелепипеда, имеющего малую, но конечную толщину. Для вычисления поглощённого импульса поля возьмём *суммарный* закон сохранения импульса поля и зарядов (стр. 70):

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \mathbf{P} dV + \sum_{k=1}^n \mathbf{p}_k \right)_i + \int_S \sigma_{ij} dS^j = 0 \quad (5.90)$$

Какой бы тензор $G^{\mu\nu}$ мы не добавили к $T^{\mu\nu} + \mathbb{T}^{\mu\nu}$, он не меняет этого уравнения, сокращаясь в силу собственного закона сохранения типа (5.89). Вычислим поверхностный интеграл от тензора напряжений σ_{ij} (стр. 131). Рассмотрим плоскую, линейно поляризованную электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль оси z с амплитудой $f = f(z - t)$:

$$\mathbf{E} = \{f, 0, 0\}, \quad \mathbf{B} = \{0, f, 0\}, \quad \mathbf{P} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi} = \{0, 0, f^2/4\pi\},$$

Пусть плоскость параллелепипеда (пластинка) перпендикулярна оси z . Тогда $\sigma_{ij} dS^j$ является вектором с компонентами:

$$\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} d\mathbf{S} - \frac{\mathbf{E}(\mathbf{E} d\mathbf{S}) + \mathbf{B}(\mathbf{B} d\mathbf{S})}{4\pi} = \frac{f^2}{4\pi} \{0, 0, dS_z\}.$$

Вектор $d\mathbf{S}$ перпендикулярен поверхности, выходя наружу из объёма. Поэтому на верхней стороне пластины dS_z направлен вдоль оси z , а на нижней – против. В результате, поверхностный интеграл от σ_{ij} равен нулю. Закон сохранения импульса (5.90) при поглощении электромагнитного поля пластинкой можно теперь записать следующим образом:

$$\left(\int_V \mathbf{P} dV + \sum_{k=1}^n \mathbf{p}_k \right)_{t_1} = \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{p}_k \right)_{t_2}, \quad (5.91)$$

где левая часть относится к ситуации до поглощения, а правая – после. Изменение импульса пластинки равно полученному ею импульсу поля.

Заметим, что в некотором смысле симметричный тензор энергии импульса является выделенным, т.к. не требует дополнительных вычислений по выявлению тривиально сокращающихся слагаемых в законах сохранения. Так, если $\mathbf{P} \mapsto \mathbf{P} + \mathbf{B}$, то при интегрировании по dV в (5.91) магнитное поле \mathbf{B} вклада не даст в силу закона Гаусса $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

5.8 Интегралы лагранжиана без поля

- Так как лагранжиан (4.99) не зависит от времени, то должна сохраняться *полная энергия* системы (5.6), стр. 125:

$$\mathcal{E} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \mathbf{v}_a - L. \quad (5.92)$$

Учитывая (4.101), можно записать явный вид энергии:

$$\mathcal{E} = \sum_a \frac{m_a}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} + \frac{1}{2} \sum_{a,b}^{a \neq b} \frac{Q_a Q_b}{R_{ab}} + \frac{1}{4} \sum_{a,b}^{a \neq b} \frac{Q_a Q_b}{R_{ab}} [\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a \mathbf{N})(\mathbf{v}_b \mathbf{N})]. \quad (5.93)$$

Первые два члена в этом выражении – это энергия движения частиц и кулоновская электростатическая энергия их взаимодействия (см.стр. V₁:??). Последний член – специфическая энергия взаимодействия, зависящая от скоростей частиц. Её происхождение связано с релятивистскими поправками, учитывающими конечность скорости распространения взаимодействия. Стоит найти энергию системы, состоящей из двух одинаковых частиц, движущихся по окружности и сравнить её с классическим значением и релятивистским, без учета запаздывания.

▷ Еще один интеграл движения – это *полный импульс* системы. Он связан с трансляционной инвариантностью лагранжиана. Действительно, сдвигом в лагранжиане все координаты частиц на постоянный вектор \mathbf{c} : $\mathbf{x}_a \mapsto \mathbf{x}_a + \mathbf{c}$. Так как координаты входят в виде комбинаций $\mathbf{R}_{ab} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$, лагранжиан не изменится и производная ($\ll H_{53}$) от него по \mathbf{c} при $\mathbf{c} = 0$ должна быть равна нулю:

$$0 = \frac{\partial L(\mathbf{v}_a, \mathbf{x}_a + \mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}} \Big|_{\mathbf{c}=0} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_a} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right\},$$

где в последнем равенстве использованы уравнения Лагранжа (4.100). Таким образом, должен сохраняться полный импульс:

$$\mathbf{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}. \quad (5.94)$$

Учитывая (4.101), получаем:

$$\mathbf{P} = \sum_a \frac{m_a \mathbf{v}_a}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_a^2}} + \sum_{a,b}^{b \neq a} \frac{Q_a Q_b}{2 R_{ab}} [\mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_b \mathbf{N}) \mathbf{N}]. \quad (5.95)$$

Как и энергия системы, полный импульс состоит из двух частей: суммарного импульса движения частиц и “остатка” от импульса поля, проявляющегося как мгновенное взаимодействие, зависящее от скоростей.

▷ В лагранжиан (4.99) все векторы входят в виде скалярных произведений. Поэтому он не зависит от ориентации системы координат. Эта симметрия приводит к закону сохранения момента импульса. Компоненты любого вектора \mathbf{r} при бесконечно малом повороте вокруг оси \mathbf{n} изменяются следующим образом: $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\phi}$, где $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{n}\phi$. Так меняются как координаты частиц, так и компоненты их скорости. При этом лагранжиан не изменяется, поэтому ($< H_{54}$):

$$0 = \frac{\partial L(\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_a \times \boldsymbol{\phi}, \mathbf{x}_a + \mathbf{x}_a \times \boldsymbol{\phi})}{\partial \boldsymbol{\phi}} \Big|_{\boldsymbol{\phi}=0} = \sum_a \left\{ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \times \mathbf{v}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_a} \times \mathbf{x}_a \right\}.$$

Меняя местами сомножители в векторных произведениях и подставляя во втором члене уравнения Лагранжа, а в первом определение скорости, получаем закон сохранения в виде:

$$0 = \sum_a \left\{ \frac{d\mathbf{x}_a}{dt} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} + \mathbf{x}_a \times \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right) \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_a \mathbf{x}_a \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right\}.$$

Таким образом сохраняется полный момент импульса системы:

$$\mathbf{L} = \sum_a \mathbf{x}_a \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}. \quad (5.96)$$

Подставляя (4.101), получаем для него явное выражение:

$$\mathbf{L} = \sum_a \frac{m_a [\mathbf{x}_a \times \mathbf{v}_a]}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_a^2}} + \sum_{a,b}^{b \neq a} \frac{Q_a Q_b}{2R_{ab}} \left\{ [\mathbf{x}_a \times \mathbf{v}_b] - (\mathbf{v}_b \mathbf{N}) \frac{[\mathbf{x}_a \times \mathbf{x}_b]}{R_{ab}} \right\},$$

где учтено, что $\mathbf{N} = (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b)/R_{ab}$, поэтому $\mathbf{x}_a \times \mathbf{N} = -[\mathbf{x}_a \times \mathbf{x}_b]/R_{ab}$.

▷ Для двух частиц равной массы и противоположными зарядами, при движении по окружности радиуса $r = R/2$ со скоростями v , момент импульса будет перпендикулярен плоскости движения и по модулю равен:

$$|\mathbf{L}| = \frac{2mr v}{\sqrt{1 - v^2}} + \frac{Q^2 v}{2}.$$

Полный момент импульса отклоняется от обычного механического момента тем сильнее, чем больше заряд частиц и их скорость. Относительное отклонение в ведущем приближении по скорости равно:

$$\frac{|\Delta \mathbf{L}|}{|\mathbf{L}|} \sim \frac{Q^2/R}{2mc^2} \sim \frac{v^2}{c^2}, \quad (5.97)$$

где восстановлена фундаментальная скорость c . Отношение кулоновской потенциальной энергии к энергии покоя масс частиц (дефект массы) для большинства систем невелико.

Глава 6

Самодействие

В этой главе рассматривается ряд трудностей присущих различным полевым теориям. Эти трудности связаны с точечностью источников поля и их самодействием. Сначала формулируется проблема электромагнитной массы. Её решение непосредственно связано с нековариантностью интегральных величин для несохраняющихся токов. Затем рассматривается лагранжиан системы заряженных частиц в котором “исключено” электромагнитное поле. Концептуально важным вопросом является самодействие электрона, когда он при ускоренном движении взаимодействует с собственным полем.

6.1 Электромагнитная масса

Вычислим полную энергию и импульс поля, создаваемого равномерно движущимся точечным зарядом. Так как мы столкнёмся с расходностью интегралов, сделаем регуляризацию возникающей сингулярности. Будем считать, что на малых расстояниях закон Кулона модифицируется так, как это было записано в начале главе 1. Кроме этого предположим, что параметр регуляризации a является “фундаментальной константой” которая не меняется при преобразованиях Лоренца. Когда, движущийся со скоростью \mathbf{v} заряд, при $t = 0$ находится в начале системы координат, его электрическое и магнитное поля будут выглядеть следующим образом (стр. 22):

$$\mathbf{E} = \frac{Q \gamma \mathbf{x}}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{x})^2 + a^2)^{3/2}}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (6.1)$$

Нас интересуют полные энергия и импульс электромагнитного поля:

$$w = \int W d^3\mathbf{x} = \int \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} d^3\mathbf{x}, \quad \mathbf{p} = \int \mathbf{P} d^3\mathbf{x} = \int \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi} d^3\mathbf{x}.$$

Подставляя напряжённости, найдём плотности ($r = |\mathbf{x}|$):

$$W = \frac{Q^2 \gamma^2}{8\pi} \frac{r^2 + v^2 r^2 - (\mathbf{v}\mathbf{x})^2}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{x})^2 + a^2)^3}, \quad \mathbf{P} = \frac{Q^2 \gamma^2}{4\pi} \frac{\mathbf{v} r^2 - \mathbf{x}(\mathbf{v}\mathbf{x})}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{x})^2 + a^2)^3}.$$

Направим ось z вдоль скорости заряда: $\mathbf{v} = \{0, 0, v\}$. Учитывая, что $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и $\mathbf{v}\mathbf{x} = vz$, перепишем знаменатель в следующем виде:

$$r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{x})^2 = x^2 + y^2 + \gamma^2 z^2.$$

Сделаем замену переменной интегрирования $z \mapsto z/\gamma$ и для объёма $d^3\mathbf{x} = dx dy dz \mapsto d^3\mathbf{x}/\gamma$. В результате скорость остаётся только в числителе подынтегральной функции. Для полной энергии имеем:

$$w = \frac{Q^2 \gamma}{8\pi} \int \frac{(1 + v^2) r^2 - 2 v^2 z^2}{(r^2 + a^2)^3} d^3\mathbf{x}.$$

Введём следующее обозначение:

$$\mu = \frac{2}{3} Q^2 \int_0^\infty \frac{r^4 dr}{(r^2 + a^2)^3} = \frac{\pi}{8} \frac{Q^2}{a}. \quad (6.2)$$

Этот интеграл может быть вычислен двойным дифференцированием по параметру α определённого интеграла с функцией $1/(\alpha r^2 + 1)$.

Окончательное вычисление полной энергии проведём в сферических координатах $d^3\mathbf{x} = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$, в которых $z = r \cos \theta$. Интегрирование по полярному углу ϕ (от которого подынтегральная функция не зависит) даст множитель 2π . Интегрирование по $r^2 dr$ приводит к μ . Осталось вычислить элементарный интеграл по θ , при помощи “внесения” синуса под дифференциал: $\sin \theta d\theta = -d(\cos \theta)$:

$$w = \frac{3\mu\gamma}{8} \int_0^\pi (1 + v^2 - 2v^2 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \mu\gamma \frac{3 + v^2}{4}.$$

Аналогично вычисляется интеграл для импульса поля. После интегрирования по всему пространству, единственный вектор от которого может зависеть вектор импульса поля – это скорость \mathbf{v} . Поэтому он пропорционален \mathbf{v} и при выбранном направлении скорости достаточно вычислить z -компоненту импульса:

$$\mathbf{p}_z = v \frac{Q^2\gamma}{4\pi} \int \frac{r^2 - z^2}{(r^2 + a^2)^3} d^3\mathbf{x} = \frac{3}{4} \mu v \gamma \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \mu\gamma v.$$

Таким образом, энергия и импульс электромагнитного поля заряда, движущегося с постоянной скоростью \mathbf{v} , равны:

$$w = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} - \frac{\mu}{4} \sqrt{1 - \mathbf{v}^2}, \quad \mathbf{p} = \frac{\mu \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}. \quad (6.3)$$

Импульс поля имеет такую же зависимость от скорости как и у любой релятивистской частицы с массой μ . А вот у энергии появилась неприятная добавка и зависимость от скорости отличается от релятивистской. При $v \mapsto 0$, имеем $w = 3\mu/4$, $\mathbf{p} = \mu\mathbf{v}$. Считая, что “масса” поля определяется по энергии покоя, мы получим неправильный множитель у массы при импульсе: $w = m$, $\mathbf{p} = 4m\mathbf{v}/3$. Или наоборот, определяя массу как коэффициент пропорциональности нерелятивистского импульса и скорости, получим энергию покоя, которой не достаёт $1/4$ массы, так как она равна $3/4$. Поэтому этот эффект называют “проблемой $3/4$ ” или “проблемой $4/3$ ”, в зависимости от того, как определяют массу.

На заре возникновения теории относительности строились модели, в которых заряд электрона был равномерно “размазан” по поверхности сферы. В зависимости от поведения этой сферы при движении электрона, получалась та или иная зависимость от скорости энергии и импульса поля. Макс Абрахам высказал замечательную мысль, что механическую массу электрона можно определить, вычисляя энергию-импульс создаваемого электроном поля.

6.2 Решение проблемы 3/4

Абрахам (1902 г.) предполагал, что "сфера электрона" при движении не деформируется. Была также построена модель Альфреда Бачерера (1904 г.), в которой сфера сжималась в направлении движения, сохраняя свой объём. В рамках электронной теории Хендрика Лоренца, предполагалось, что сфера сжимается в соответствии с релятивистским фактором $\sqrt{1 - v^2}$, в результате чего получалась верная зависимость импульса поля от скорости [53]. Однако во всех этих теориях возникали неприятности с энергией поля.

Анри Пуанкаре предложил следующее объяснение проблемы. Заряды, расположенные на поверхности сферы, отталкиваются друг от друга. Так как электрон стабилен – некие силы обязаны удерживать заряды. Именно эти силы, названные *натяжениями Пуанкаре*, и должны обеспечить недостающую $1/4$ массы.

С высоты 100-летнего развития квантовой теории элементарных частиц, классические модели электрона выглядят достаточно наивными. Однако это не означает отсутствия проблемы. Бесконечности возникают и в квантовой теории поля. Поэтому, в любом случае, с силой Кулона необходимо что-то делать, так как она сингулярна при $r = 0$. Или электрон не должен быть точечным, или должна быть изменена сила. Сферические модели электрона шли по первому пути и пытались, не меняя закона Кулона, сделать электрон неточечным. Можно пойти вторым путём и считать, что на малых расстояниях должен модифицироваться закон Кулона. Примером служит введеная выше фундаментальная константа a , устраняющая "нефизичную" бесконечность. После этого можно построить теорию электромагнетизма и в результате всё равно получится неверная зависимость энергии поля от скорости, даже в пределе $a \rightarrow 0$, хотя ни каких "натяжений Пуанкаре" уже нет. Это особенно обидно, так как в основе наших построений лежит теория относительности.

По-видимому наиболее ясное обсуждение проблемы электромагнитной массы принадлежит Джюлиану Швингеру (1982) [54]. Основная идея состоит в том, что при вычислении энергии и импульса электромагнитного поля необходимо учитывать не только выражения для W и \mathbf{P} но и член \mathbf{Ej} , возникший при выводе закона сохранения (теорема Пойнтинга, стр. 68):

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathbf{Ej} + \nabla \mathbf{P} = 0. \quad (6.4)$$

Сохраняется суммарная энергия поля и частицы, а не только поля. Использование только части полной энергии и приводит к проблеме 3/4.

▷ Продемонстрируем это, проделав соответствующие вычисления в ковариантном виде. Ранее (стр. 97) был записан тензор напряженностей поля $F_{\alpha\beta}$ точечного заряда:

$$F_{\alpha\beta} = Q \frac{\eta_\alpha V_\beta - \eta_\beta V_\alpha}{(a^2 - \eta^2)^{3/2}}, \quad (6.5)$$

где a – параметр регуляризации и при помощи 4-скорости заряда $V^\alpha = \{\gamma, \gamma \mathbf{v}\}$ определен 4-вектор (стр. 97):

$$\eta = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V}, \quad \mathbf{V}^2 = 1, \quad \eta \mathbf{V} = 0.$$

Его квадрат равен $\eta^2 = \mathbf{x}^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{V})^2$ или $-\eta^2 = \mathbf{x}^2 + \gamma^2 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})^2$ в момент времени $t = 0$, где γ – стандартный лоренцевский фактор и

$$\partial_\alpha \eta^\beta = \delta_\alpha^\beta - V_\alpha V^\beta, \quad \partial_\alpha \eta^2 = 2 \eta_\alpha, \quad \partial_\alpha \eta^\alpha = 3. \quad (6.6)$$

Запишем симметричный тензор энергии-импульса (5.21), стр. 129 для напряжённости (6.5):

$$T^{\mu\nu} = \frac{Q^2/4\pi}{(a^2 - \eta^2)^3} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \eta^2 - \eta^\mu \eta^\nu - V^\mu V^\nu \eta^2 \right). \quad (6.7)$$

Как известно, сохраняется суммарный тензор поля и частиц. Сам по себе $T^{\mu\nu}$ не сохраняется:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -\frac{3Q^2}{4\pi} \frac{\eta^\nu a^2}{(a^2 - \eta^2)^4}. \quad (6.8)$$

Интеграл от $T^{0\nu}$ не обладает ковариантными свойствами (стр. 132) и энергия w с импульсом \mathbf{p} не являются компонентами 4-вектора $p^\mu = \{w, \mathbf{p}\}$. В результате для энергии получается “не правильная” зависимость от скорости. В этом и состоит корень проблемы 3/4.

Чтобы придать дальнейшим вычислениям общности, запишем тензор энергии-импульса в следующем виде:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \eta^2 - \eta^\mu \eta^\nu - V^\mu V^\nu \eta^2 \right) f_0. \quad (6.9)$$

Для различных способов регуляризации закона Кулона будут получаться различные функции f_0 , поэтому не будем её конкретизировать (выше $f_0 = Q^2/(a^2 - \eta^2)^3$). Дивергенция этого выражения равна:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \frac{\eta^\nu}{4\pi} (\eta^2 f'_0 - 3f_0), \quad (6.10)$$

где штрих – производная функции $f_0 = f_0(a^2 - \eta^2)$ по её аргументу.

▷ Чтобы скомпенсировать ненулевую дивергенцию, необходимо добавить тензор $\mathcal{T}^{\mu\nu}$, так чтобы выполнялось уравнение непрерывности:

$$\partial_\mu(T^{\mu\nu} + \mathcal{T}^{\mu\nu}) = 0. \quad (6.11)$$

При помощи η^μ , V^μ , $g^{\mu\nu}$ можно записать симметричный тензор:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \eta^2 f_1 + \eta^\mu \eta^\nu f_2 + V^\mu V^\nu \eta^2 f_3 \right), \quad (6.12)$$

где $f_i = f_i(a^2 - \eta^2)$ – некоторые скалярные функции. Дивергенция этого выражения равна:

$$\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{\eta^\nu}{4\pi} (\eta^2 f'_1 - f_1 + 2\eta^2 f'_2 - 4f_2).$$

Заметим, что f_3 в это выражение не попало и тензор $V^\mu V^\nu f_3$ тождественно удовлетворяет уравнению непрерывности. В определение $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ можно было бы добавить симметричную комбинацию $(\eta^\mu V^\nu + \eta^\nu V^\mu) f_4$. Однако, её дивергенция пропорциональна V^ν , а не η^ν . Чтобы (6.11) было справедливым, должно выполняться следующее соотношение:

$$\eta^2 f'_0 - 3f_0 = f_1 - \eta^2 f'_1 + 4f_2 - 2\eta^2 f'_2. \quad (6.13)$$

При вычислении интеграла от η^2 , будем использовать тождество ($\ll H_{55}$)

$$\int F(\eta^2) d^3\mathbf{x} = \frac{4\pi}{\gamma} \int_0^\infty F(-r^2) r^2 dr. \quad (6.14)$$

Оно, как и в начале раздела, получается переходом к цилиндрическим координатам, заменой $z \mapsto z/\gamma$ и интегрированием в сферических координатах. Кроме этого, определим четыре ($i = 0, \dots, 3$) константы:

$$m_i = \int_0^\infty f_i(a^2 + r^2) r^4 dr. \quad (6.15)$$

Когда $f_0 = Q^2/(a^2 + r^2)^3$, имеем $m_0 = 3\pi Q^2/16a = 3\mu/2$. Благодаря (6.13), константы m_i между собой связаны следующим образом:

$$m_0 = 3m_1 + 2m_2. \quad (6.16)$$

Для доказательства, необходимо умножить (6.13) на η^2 и проинтегрируем по всему пространству ($\ll H_{56}$). При этом слагаемые, зависящие от производных f'_i интегрируются по r по частям ($\ll H_{57}$) считая, что $f_i(r^2) r^5 \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

▷ Вычислим теперь энергию и импульс поля при помощи тензора $T^{\mu\nu}$. Для этого, кроме (6.14) понадобится интеграл ($\lessdot H_{58}$)

$$\int \eta^0 \{ \eta^0, \mathbf{\eta} \} F(\eta^2) d^3\mathbf{x} = \frac{4\pi}{3} \gamma \{ v^2, \mathbf{v} \} \int_0^\infty F(-r^2) r^4 dr, \quad (6.17)$$

где в фигурных скобках стоят компоненты 4-вектора η^μ , т.е. это выражение содержит два интеграла. Их значения отличаются общим постоянным множителем, зависящим от скорости заряда. Несложные интегрирования приводят к:

$$\int T^{00} d^3\mathbf{x} = \left(\frac{1}{2} + \frac{v^2}{6} \right) m_0 \gamma, \quad \int T^{0i} d^3\mathbf{x} = \frac{2}{3} m_0 \gamma \mathbf{v}^i.$$

При $m_0 = 3\mu/2$ снова получаются (6.3). Аналогично вычисляются энергия и импульс для тензора $\mathcal{T}^{\mu\nu}$:

$$\int \mathcal{T}^{00} d^3\mathbf{x} = \frac{m_1}{2\gamma} - \frac{\gamma v^2}{3} m_2 + m_3 \gamma, \quad \int \mathcal{T}^{0i} d^3\mathbf{x} = m_3 \gamma \mathbf{v}^i - \frac{m_2}{3} \gamma \mathbf{v}^i.$$

Окончательно, учитывая (6.16), для суммарной энергии и импульса получаем:

$$\int (T^{00} + \mathcal{T}^{00}) d^3\mathbf{x} = m \gamma, \quad \int (T^{0i} + \mathcal{T}^{0i}) d^3\mathbf{x} = m \gamma \mathbf{v}^i,$$

где масса системы, равна:

$$m = 2m_1 + m_2 + m_3. \quad (6.18)$$

Таким образом, энергия и импульс, полученные по тензору $T^{\mu\nu} + \mathcal{T}^{\mu\nu}$ имеют правильную зависимость от скорости и являются компонентами 4-вектора. Так и должно быть для интеграла от тензора, который удовлетворяет уравнению непрерывности. Обратим внимание, что в энергию и импульс от $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ член пропорциональный m_3 сразу входит с верной зависимостью от скорости. Связано это с тем, что часть тензора $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ которая дала m_3 удовлетворяет уравнению непрерывности сама по себе при любой функции f_3 :

$$\partial_\mu (V^\mu V^\nu \eta^2 f_3) = 2(\eta V) V^\nu f_3 - 2(\eta V) V^\nu \eta^2 f'_3 = 0,$$

в силу ортогональности вектора η и 4-скорости V .

Результат проделанных вычислений не зависит от выбора функций f_i . Единственным ограничением на них является уравнение (6.13), следующее из сохранения суммарного тензора энергии-импульса $T^{\mu\nu} + \mathcal{T}^{\mu\nu}$. В оригинальной работе Швингера [54] был рассмотрен частный случай с $f_2 = 0$ и два варианта с $f_3 = 0$ и $f_3 = -f_1/2$.

6.3 Классический радиус электрона

▷ Обсудим физический смысл введенных выше масс. Масса m_0 связана с полем заряда и имеет чисто электромагнитное происхождение. Масса m_3 может быть проинтерпретирована как механическая масса заряда. Напомним (стр. 127), что тензор энергии-импульса, связанный с распределенной в пространстве материей имеет вид: $\mathcal{T}^{\alpha\beta} = \mu(t, \mathbf{x}) (ds/dt) V^\alpha V^\beta$. Поэтому $\mu(t, \mathbf{x}) = -\eta^2 \gamma f_3/4\pi$ (напомним, что η – пространственно-подобный вектор: $\eta^2 < 0$). В теории классического электрона, масса которого полностью обусловлена полевыми эффектами предполагается, что $m_3 = 0$.

Запишем компоненты тензора электромагнитного поля $T^{\mu\nu}$ в системе покоя электрона в которой $V^\nu = \{1, 0\}$ и $\eta^\nu = \{0, \mathbf{x}\}$:

$$T_{00} = \frac{r^2}{8\pi} f_0, \quad T_{ij} = \frac{f_0}{8\pi} (\delta_{ij} r^2 - 2 x_i x_j), \quad f_0 = \frac{Q}{(r^2 + a^2)^3}.$$

Компоненты “компенсирующего” тензора $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ равны:

$$\mathcal{T}_{00} = \frac{r^2}{8\pi} (f_1 + 2f_3), \quad \mathcal{T}_{ij} = -\frac{1}{8\pi} (\delta_{ij} r^2 f_1 + 2 x_i x_j f_2)$$

и $T_{0i} = \mathcal{T}_{0i} = 0$. Пространственные компоненты тензоров T_{ij} и \mathcal{T}_{ij} при сложении дадут ноль, если $f_1 = f_0$ и $f_2 = -f_0$. В этом случае $m_1 = m_0$, $m_2 = -m_0$ и, следовательно, для полной массы электрона имеем:

$$m = m_0 + m_3 = \frac{3\pi}{16} \frac{Q^2}{a} + m_3,$$

где подставлено значение интеграла для m_0 .

Множитель при Q^2/a зависит от способа регуляризации (поведения закона Кулона на малых расстояниях или распределения заряда “в электроне”). Поэтому для $Q = e$, $\mu = m_e$, $m_3 = 0$ в качестве характерного размера a принято использовать отношение:

$$a = \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 2.817\,940\,32\dots \cdot 10^{-15} \text{ м}, \quad (6.19)$$

где восстановлена скорость света ($Q \mapsto Q/c$). Эта константа называется *классическим радиусом электрона*. Для сравнения, типичный размер протона равен $0.9 \cdot 10^{-15}$ м, комптоновская длина волны электрона $\lambda_e = a/\alpha = 4 \cdot 10^{-13}$ м, а боровский радиус атома водорода $r_B = a/\alpha^2$ порядка $5 \cdot 10^{-11}$ м, где $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ – безразмерная постоянная тонкой структуры.

▷ Важе не вводилась модель распределения заряда электрона и параметр a считался некоторым способом регуляризации бесконечностей (модификация закона Кулона). Было показано, что интегральные выражения для энергии и импульса будут релятивистски ковариантными, если они следуют из тензора, удовлетворяющего уравнению непрерывности. В конце можно устремить a к нулю. Выражения останутся ковариантными, хотя масса окажется бесконечной.

Можно стоять на классическую точку зрения, считая, что заряд электрона “размазан” в пространстве и найти плотность заряда, соответствующую регуляризованным выражениям для напряженности поля. Так, из уравнений Максвелла для тензора $F_{\mu\nu}$ (6.5) следует регуляризованное выражение для тока (4.28), стр. 97. В системе покоя электрона ему соответствует распределение заряда:

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi} \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^{5/2}}. \quad (6.20)$$

Чтобы удержать заряды для такого распределения необходимы дополнительные силы неэлектромагнитного происхождения. Именно эти силы (натяжения Пуанкаре) приводят к дополнительному тензору $\mathcal{T}^{\mu\nu}$.

Условие $T^{ij} + \mathcal{T}^{ij} = 0$ в этом случае означает отсутствие сил, действующих на каждый элемент распределённого в пространстве заряда. Действительно, для энергии-импульса электромагнитного поля справедливо уравнение $\partial_\mu T^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}j_\nu$. В системе покоя $j^\nu = \{\rho, \mathbf{0}\}$ и в отсутствии зависимости от времени, интегрируя это уравнение по бесконечно малому объёму, окружающему элемент заряда $q = \rho dV$, получаем:

$$\int \partial_i T^{ij} dV = \int dS_i T^{ij} = - \int F^{0j} \rho dV = -q E^j,$$

где во втором равенстве по теореме Гаусса, записан интеграл по поверхности dS_i , окружающей заряд, а в последнем, для бесконечно малого объёма, ρdV заменено на q . На заряд q со стороны остальных зарядов “размазанного в пространстве электрона” действует сила qE^j . Если $T^{ij} + \mathcal{T}^{ij} = 0$ – суммарная сила со стороны поля и удерживающих от разлетания сил равна нулю и конфигурация (6.20) стабильна.

В теории относительности эти силы необходимо реализовывать при помощи введения нового поля. Такой способ объяснения природы массы становится уже не столь привлекательным как исходная идея Абрахама. Хотя наличие электромагнитной составляющей в массе заряженной частицы сомнения не вызывает. По всей видимости, для объяснения природы массы необходимы другие идеи. К тому же обсуждение “структурь” электрона, скорее всего, не имеет смысла без учёта квантовых эффектов.

6.4 Самодействие электрона

Ускоренно движущийся заряд излучает электромагнитные волны, а, следовательно, теряет энергию. В результате, чтобы ускорить заряженную частицу необходимо приложить большую силу, чем для ускорения незаряженной частицы с такой же массой. Этот эффект называют *торможение излучением*. Соответствующая сила, которую надо дополнительно преодолевать называется *силой трения Лоренца*.

Запишем потенциалы, создаваемые системой зарядов (стр. 77):

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{\rho(t - R, \mathbf{r})}{R} d^3\mathbf{r}, \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{\mathbf{j}(t - R, \mathbf{r})}{R} d^3\mathbf{r},$$

Аналогично построению лагранжиана с исключенным электромагнитным полем (стр. 118), разложим скалярный и векторный потенциалы в бесконечный ряд по времени запаздывания $R = |\mathbf{x} - \mathbf{r}|$ и найдем электрическое поле $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t$:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left\{ -\nabla \left[\int \rho R^{n-1} d^3\mathbf{r} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left[\int \mathbf{j} R^{n-1} d^3\mathbf{r} \right] \right\}.$$

В первом интеграле возьмем градиент $\nabla R^{n-1} = (n-1)R^{n-3}\mathbf{R}$ и подставим плотность заряда $\rho(t, \mathbf{r}) = Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}_0(t))$ и тока $\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{v}(t)\rho(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ точечного заряда Q :

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left\{ (n-1) R^{n-3} \mathbf{R} + \frac{\partial(\mathbf{v} R^{n-1})}{\partial t} \right\},$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)$ – радиус-вектор от заряда, движущегося со скоростью $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_0/dt$ по траектории $\mathbf{x}_0(t)$ в точку \mathbf{x} измерения поля. Перегруппируем слагаемые в сумме так, чтобы каждому n соответствовало выражение одного порядка по степеням фундаментальной скорости c . Второй член в фигурных скобках пропорционален $1/c^2$ ($\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}/c$, $t \mapsto ct$). Первый член имеет нулевой порядок по c . Оба они умножаются на $1/c^n$, благодаря n -й производной по времени. Поэтому, в сумме для первого члена в фигурных скобках выделим первые два слагаемых (второе равно нулю), а для остального ряда (начинающегося с $n = 2$) сдвинем индекс суммирования $n \mapsto n + 2$:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{Q}{R^3} \mathbf{R} + Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \left\{ \frac{1}{n+2} \frac{\partial(R^{n-1}\mathbf{R})}{\partial t} + \mathbf{v} R^{n-1} \right\},$$

где выполнено элементарное разложение $(n+2)! = (n+2)(n+1)n!$.

Осталось вычислить производную:

$$\frac{\partial(R^{n-1}\mathbf{R})}{\partial t} = -R^{n-1}\mathbf{v} - (n-1)R^{n-3}(\mathbf{R}\mathbf{v})\mathbf{R},$$

где знаки минус появляются, так как $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)$ и $\partial\mathbf{R}/\partial t = -\mathbf{v}$. Таким образом:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{R^3}\mathbf{R} + Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)n!} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \{(n+1)\mathbf{v} - (n-1)(\mathbf{v}\mathbf{N})\mathbf{N}\} R^{n-1},$$

где $\mathbf{N} = \mathbf{R}/R$ и производная действует на всё, что стоит справа от неё. От времени зависит как скорость заряда, так и радиус-вектор \mathbf{R} . Поэтому $(n+1)$ -я производная под знаком суммы выглядит достаточно громоздкой. Выражение для электрического поля упрощается в сопутствующей к заряду системе отсчета в которой $\mathbf{v} = 0$. В такой системе ненулевыми оказываются только ведущие производные по скорости (которые не умножаются на \mathbf{v}). В результате, при $\mathbf{v} = 0$ имеем:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{R^3}\mathbf{R} + Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)n!} \left\{ (n+1)\mathbf{a}^{(n)} - (n-1)(\mathbf{a}^{(n)}\mathbf{N})\mathbf{N} \right\} R^{n-1},$$

где $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ – ускорение заряда и $\mathbf{a}^{(n)} = d^n\mathbf{a}/dt^n$. Выпишем первые три слагаемых, получившегося выражения:

$$\mathbf{E} \approx Q \frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{Q}{2} \left\{ \frac{\mathbf{a}}{R} + \frac{(\mathbf{a}\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^3} \right\} + \frac{2}{3}Q \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \dots \quad (6.21)$$

Первые два слагаемых (при малой но ненулевой скорости \mathbf{v}) были найдены ранее: см. (4.98). Третье слагаемое не зависит от расстояния, а следующие пропорциональны R^n , поэтому полученный ряд имеет смысл только на небольших от заряда расстояниях.

В предыдущем томе большинство задач электродинамики сводилось к двум классам: 1) нахождение напряженностей поля при *заданном* распределении зарядов и токов; 2) определение траектории движения *пробных* зарядов во внешних (заданных) полях. Тем не менее, в лагранжевом формализме поля и частицы описываются единым образом. Поэтому, варьируя траектории частиц и поля независимым образом, мы получим равноправные уравнения частиц и поля, которые необходимо решать совместно. Напомним, что при выводе закона сохранения (теоремы Пойнтинга), стр. 68 поля и частицы также считались равноправными, в том смысле, что суммарное поле, создаваемое всеми зарядами, в свою очередь, воздействует на эти заряды. Поэтому будем считать, что (6.21) действует на сам источник поля.

Непосредственно применить это выражение напряженности к точечному заряду нельзя. Для этого необходимо положить $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ или $R = 0$. В результате, первые члены разложения окажутся бесконечными. Для первого “кулоновского” выражения это не так страшно. Хотя модуль силы в центре источника оказывается бесконечным, в силу сферической симметрии, это не приводит к силовому вектору, который мог бы перемещать *точечный* заряд. Однако члены в фигурных скобках, зависящие от ускорения, не являются сферически симметричными.

Для устранения бесконечностей можно рассмотреть некоторое компактное, но несингулярное распределение заряда “в электроне”. В этом случае отдельные “части” электрона, взаимодействуя с другими, приводят к суммарной силе, действующей на электрон в целом. Такую модель рассмотрели в своё время Абрахам (1903 г.) и Лоренц (1904 г.). В их модели электрон считается *жестким*. Это означает, что сферически симметричное распределение заряда $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$ движется *как целое* по траектории $\mathbf{x}_0(t)$. В сопутствующей заряду системе отсчета $\mathbf{v} = 0$, поэтому магнитной составляющей силы нет и суммарная сила, действующая на заряд определяется электрическим полем:

$$\mathbf{f} = \int \rho(r) \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad (6.22)$$

где для $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ в свою очередь надо записать интеграл по всем зарядам, заменяя Q на $dQ = \rho(r') d^3\mathbf{r}'$. Член в фигурных скобках в (6.21) приводит к силе, зависящей от ускорения:

$$\mathbf{f}_1 = -\frac{1}{2} \int \rho(r) \rho(r') \left\{ \frac{\mathbf{a}}{R} + \frac{(\mathbf{a}\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^3} \right\} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}',$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Этот интеграл является вектором, а так как единственный вектор, который в него входит – это ускорение \mathbf{a} , то интеграл пропорционален \mathbf{a} . Чтобы найти коэффициент пропорциональности, нужно умножить \mathbf{f}_1 на \mathbf{a} . Вводя единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{a}/a$, получим:

$$\mathbf{f}_1 = -\frac{\mathbf{a}}{2} \int \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{R} \left\{ 1 + \frac{(\mathbf{n}\mathbf{R})^2}{R^2} \right\} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' = -\frac{2}{3} \mathbf{a} \int \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{R} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}'.$$

Второе равенство следует из того, что все направления вектора \mathbf{R} являются равноправными и выражение $(\mathbf{n}\mathbf{R})^2/R^2$ можно ($\triangle H_{60}$) заменить на $1/3$. Замечая, что получившийся интеграл с коэффициентом $1/2$ равен электростатической энергии U распределения зарядов $\rho(r)$ (или энергии поля, см. стр. 72), окончательно получаем: $\mathbf{f}_1 = -(4/3) U \mathbf{a}$.

Аналогично вычисляются интегралы для остальных членов ряда:

$$\mathbf{f} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} G_n \frac{d^n \mathbf{a}}{dt^n}, \quad (6.23)$$

где *форм-факторы* G_n зависят от модели распределения заряда:

$$G_n = \int \rho(r) \rho(r') |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{n-1} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}'. \quad (6.24)$$

Несложно видеть, что бесконечный ряд (6.23) можно свернуть, записав силу в следующем изящном виде:

$$\mathbf{f} = -\frac{2}{3} \int \frac{\rho(r) \rho(r')}{R} \mathbf{a}(t - R) d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}'. \quad (6.25)$$

При $n = 1$ форм-фактор равен квадрату суммарного заряда: $G_1 = Q^2$. При $n > 1$, для компактного распределения заряда размером r_0 имеем $G_n \sim Q^2 r_0^{n-1}$. Если $r_0 \rightarrow 0$, то эти величины являются малыми и ими можно пренебречь. В результате, получается следующее выражение для силы, действующей на электрон в сопутствующей системе отсчета:

$$m_0 \mathbf{a} = \mathbf{f}_{ext} - \frac{4}{3} U \mathbf{a} + \frac{2}{3} Q^2 \frac{d\mathbf{a}}{dt}, \quad (6.26)$$

где \mathbf{f}_{ext} – внешняя сила, сообщающая заряду ускорение. Член пропорциональный ускорению можно перенести в левую часть уравнения, переопределив массу $m = m_0 + 4U/3$. Поэтому, окончательно, *уравнение движения*, справедливое при малых скоростях, заряда имеет вид:

$$m \mathbf{a} = \mathbf{f}_{ext} + \frac{2}{3} Q^2 \frac{d\mathbf{a}}{dt}. \quad (6.27)$$

Масса m содержит в себе механическую массу m_0 и массу электромагнитного поля. То что она равна не U , а $(4/3)U$ можно объяснить наличием натяжений Пуанкаре (стр. 160). Чтобы жесткий электрон с распределением заряда $\rho(r)$ был стабилен, требуются дополнительные силы, удерживающие его от “разлетания”. Энергию этих сил также необходимо учитывать в динамическом уравнении. При этом, скорее всего, *ускоренно движущийся* электрон не может быть жестким, и должен испытывать некие деформации, а удерживающие силы, в свою очередь, должны терять энергию на излучение. Структура электрона нам неизвестна, поэтому что либо конкретное сказать обо всех этих эффектах мы не можем и обычно предполагается, что они пренебрежимо малы. По всей видимости, стоит считать, что уравнение (6.27) является некоторым приближением, справедливым, до тех пор, пока сила трения Лоренца мала.

6.5 Примеры самодействия

▷ Заряд, движущийся с ускорением \mathbf{a} , излучает электромагнитные волны, теряя энергию в соответствии с формулой Лармора (стр. 87):

$$I = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3} Q^2 \mathbf{a}^2. \quad (6.28)$$

С другой стороны, производная энергии по времени равна произведению силы на скорость (стр. ??). Найдем работу, совершающую против сил трения Лоренца за время $t_2 - t_1$, воспользовавшись уравнением (6.27) и соотношением $\mathbf{v}d\mathbf{a}/dt = d(\mathbf{v}\mathbf{a})/dt - \mathbf{a}^2$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}\mathbf{v} dt = \frac{2}{3} Q^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{a}}{dt} \mathbf{v} dt = \frac{2}{3} Q^2 (\mathbf{v}\mathbf{a}) \Big|_{t_1}^{t_2} - \frac{2}{3} Q^2 \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a}^2 dt.$$

Величина $(\mathbf{v}\mathbf{a}) \Big|_{t_1}^{t_2}$ будет равна нулю в среднем при периодическом движении или в пределе малой скорости (для которого получена сила трения) и большого ускорения. Пренебрегая этим членом, получаем выражение для формулы Лармора (6.28). Таким образом, сила трения Лоренца, действительно, связана с излучением электромагнитных волн.

Проведенное вычисление не применимо при равноускоренном движении $\mathbf{a} = const$. В этом случае сила трения равна нулю, а эффект излучения проявляется только в появлении электромагнитной массы в левой части уравнения (6.27). Более тяжелый заряд труднее ускорить.

▷ Выясним когда эффект трения существенен. Пусть заряд из состояния покоя с ускорением a за время T приобретает скорость aT . Его энергия (в нерелятивистском пределе) изменяется на $\Delta\mathcal{E} = m(aT)^2/2$. Эффект трения излучения будет существенен, если эта энергия сравнима с потерей энергии на излучения (6.28) за это же время:

$$m \frac{(aT)^2}{2} \sim \frac{2}{3} Q^2 a^2 T.$$

Откуда, опуская числовые множители и восстанавливая фундаментальную скорость, получаем характерное время:

$$T_0 \sim \frac{Q^2}{mc^3} = \frac{r_0}{c} = 9.3 \cdot 10^{-24} \text{ sec}, \quad (6.29)$$

где $r_0 = 2.8 \cdot 10^{-15}$ м – классический радиус электрона. Таким образом, если сила в течении времени $T < T_0$ существенно меняет скорость частицы, то на её динамику влияют эффекты излучения. При более плавном (медленном) ускорении $T \gg T_0$, эффект трения мал и может рассматриваться как поправка к динамическому уравнению $m\mathbf{a} = \mathbf{f}_{ext}$.

▷ Исходя из проделанных оценок и замечаний, сделанных в конце страницы 169, следует, что решение уравнение (6.27) необходимо получать при помощи теории возмущений. Для этого траектория частицы, её скорость и ускорение раскладываются в ряд:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots$$

которые подставляются в (6.27): В качестве нулевого приближения берется уравнение без силы трения:

$$m \mathbf{a}_0 = \mathbf{f}_{ext}. \quad (6.30)$$

При помощи его решения находятся следующие поправки:

$$m \mathbf{a}_1 = \frac{2}{3} Q^2 \frac{d\mathbf{a}_0}{dt}, \quad m \mathbf{a}_2 = \frac{2}{3} Q^2 \frac{d\mathbf{a}_1}{dt}, \quad (6.31)$$

и т.д. Такой метод в частности исключает появление самоускоряющегося решения при отсутствии внешней силы. Действительно, если $\mathbf{f}_{ext} = 0$, формально уравнение

$$\mathbf{a} = \frac{2 Q^2}{3 m} \frac{d\mathbf{a}}{dt},$$

кроме физически осмыслиенного (в отсутствии внешних воздействий) решения $\mathbf{a} = 0$, имеет ускоряющееся решение

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 e^{(2Q^2/3m)t}.$$

В соответствии с таким решением, электрон, например, пролетев ускоряющее поле в конденсаторе, после выхода из него (имея $\mathbf{a}(0) = \mathbf{a}_0 \neq 0$), должен был бы продолжать неограниченно ускоряться. При решении уравнения по теории возмущения такого нефизичного решения не возникает. Например, самодействия не возникает при движении под воздействием *постоянной* силы. Если $\mathbf{f}_{ext} = const$, то $a_0 = const$ и первое уравнение 6.31 приведёт к $\mathbf{a}_1 = 0$ и т.д. Поэтому ускорение остаётся постоянным.

▷ Уравнение (6.27) позволяет разобраться с ответом на вопрос “*оказывает ли внешняя электромагнитная волна давление на заряд?*”. С одной стороны – “конечно – да!” (опыты Лебедева по световому давлению тому явное подтверждение). С другой стороны, решение уравнений движения пробной частицы в поле плоской волны приводит к парадоксальному заключению об отсутствии ускоренного движения вдоль волнового вектора (по которому направлено) давление. Чтобы получить наблюдаемый на эксперименте эффект светового давления необходимо решить уравнение движения с учетом самодействия. Подробнее мы рассмотрим этот вопрос в следующей главе.

6.6 Ковариантная запись силы самодействия

▷ При помощи преобразований Лоренца для силы и ускорения уравнение (6.27) можно записать в произвольной системе отсчета. Впрочем, ковариантное выражение для силы можно получить сразу из общих соображений. Напомним, что 4-ускорение (стр. V₁:205):

$$A^\nu = \frac{dV^\nu}{ds} = \left\{ \frac{\mathbf{v}\mathbf{a}}{(1-\mathbf{v}^2)^2}, \frac{\mathbf{a} + [\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{a}]]}{(1-\mathbf{v}^2)^2} \right\}, \quad (6.32)$$

определяется при помощи 4-скорости $V^\nu = \{\gamma, \gamma\mathbf{v}\}$ и собственного времени $ds = \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} dt$, вычисленного вдоль траектории частицы.

В системе где частица покоятся, векторная часть силы трения, в соответствии с (6.27) должна равняться $(2/3)Q^2 d\mathbf{a}/dt$. Если $\mathbf{v} = 0$ из (6.32) имеем $d\mathbf{A}/ds = \{0, d\mathbf{a}/dt\}$. Поэтому:

$$\mathbf{f}|_{\mathbf{v}=0} = \frac{2}{3} Q^2 \frac{d\mathbf{a}}{ds}.$$

Силу трения Лоренца можно разложить по двум 4-векторам:

$$\mathbf{f} = \alpha \mathbf{V} + \beta \frac{d\mathbf{A}}{ds}, \quad (6.33)$$

где α и β – некоторые скаляры. Воспользуемся тем, что 4-скорость и сила ортогональны друг другу: из $\mathbf{V}^2 = 1$ следует, что $\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = 0$ или $\mathbf{f} \cdot \mathbf{V} = 0$. Это условие приводит к соотношению $\alpha = \beta A^2$, где учтено тождество, связывающее скалярное произведение производной 4-ускорения и 4-скорости:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{A}}{ds} \cdot \mathbf{V} = -A^2. \quad (6.34)$$

Оно получается ещё одним дифференцированием по s условия ортогональности. При $\mathbf{v} = 0$ имеем $\beta = (2/3)Q^2$. В результате, в произвольной системе отсчета ковариантное уравнение движения имеет вид:

$$m \frac{d\mathbf{V}}{ds} = \mathbf{f}_{ext} + \frac{2}{3} Q^2 \left\{ \frac{d^2\mathbf{V}}{ds^2} + \left(\frac{d\mathbf{V}}{ds} \right)^2 \mathbf{V} \right\}. \quad (6.35)$$

С учётом (6.34), это уравнение эквивалентно:

$$m \frac{d\mathbf{V}}{ds} = \mathbf{f}_{ext} + \frac{2}{3} Q^2 \left\{ \frac{d^2\mathbf{V}}{ds^2} - \left(\frac{d^2\mathbf{V}}{ds^2} \mathbf{V} \right) \mathbf{V} \right\}. \quad (6.36)$$

В нём, в тензорных обозначениях 4-вектор ускорения сворачивается с тензором $g_{\alpha\beta} - V_\alpha V_\beta$ ортогональным к 4-скорости.

▷ Пусть заряд ускоряет *внешнее* электромагнитное поле $F_{\mu\nu} = (\mathbf{E}, -\mathbf{B})$. Исключим в уравнении (6.36) первую и вторую производные по s , считая что в нулевом приближении они удовлетворяют обычной силе Лоренца:

$$\frac{dV}{ds} = \frac{Q}{m} \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}, \quad (6.37)$$

где в безиндексных обозначениях (прямой шрифт) $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{V})^\mu = F^{\mu\nu} V_\nu$ является 4-вектором. Продифференцируем это уравнение по s :

$$\frac{d^2V}{ds^2} = \frac{Q}{m} (\mathbf{V}\partial) \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \frac{Q}{m} \mathbf{F} \cdot \frac{dV}{ds} = \frac{Q}{m} (\mathbf{V}\partial) \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \frac{Q^2}{m^2} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{V})$$

где учтено, что вдоль траектории частицы $dF_{\alpha\beta}/ds = \partial_\gamma F_{\alpha\beta} dx^\gamma/ds = V^\gamma \partial_\gamma F_{\alpha\beta}$ и во втором слагаемом снова подставлена сила Лоренца. Таким образом:

$$\frac{dV}{ds} = \frac{Q}{m} \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \frac{2Q^3}{3m} (\mathbf{V}\partial) \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \frac{2Q^4}{3m^2} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{V}) + \frac{2Q^4}{3m^2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{V})^2 \mathbf{V}. \quad (6.38)$$

Строго говоря в последних трёх слагаемых для 4-скорости \mathbf{V} также необходимо подставить решение (6.37). Впрочем, в первом приближении это уравнение можно считать дифференциальным уравнением относительно $\mathbf{V} = \mathbf{V}(s)$, где во всех слагаемых стоит одна и также 4-скорость.

▷ В постоянном электрическом поле \mathbf{E} возникает равноускоренное движение. Если в начальный момент времени частица покончилась, то $\mathbf{V} = \{\text{ch}(\omega s), \mathbf{e} \text{ sh}(\omega s)\}$, где $\mathbf{e} = \mathbf{E}/|\mathbf{E}|$, см. стр. 107. Несложно видеть, что релятивистская сила трения (6.36) (как и нерелятивистская) в этом случае равна нулю. Это же справедливо при равноускоренном движении *вдоль прямой* с ненулевой начальной скоростью ($\Leftarrow H_{61}$).

В общем случае релятивистски равноускоренное движение можно определить как движение, при котором квадрат 4-ускорения (или 4-силы) остаётся постоянным $A^2 = f^2/m^2 = \text{const} < 0$. Действительно, компоненты 4-силы f^μ можно записать следующим образом (см. стр. 95):

$$f^\mu = \{\gamma \mathbf{F} \mathbf{v}, \gamma \mathbf{F}\} = \frac{1}{m} \{\mathbf{F} \mathbf{p}, \mathcal{E} \mathbf{F}\},$$

где \mathbf{F} – *постоянная* (при равноускоренном движении) 3-сила, \mathcal{E} – энергия и \mathbf{p} – импульс заряда. Поэтому $m^2 f^2 = (\mathbf{F} \mathbf{p})^2 - \mathcal{E}^2 \mathbf{F}^2$. Дифференцируя по лабораторному времени (или собственному времени заряда), имеем:

$$\frac{d(m^2 f^2)}{dt} = 2(\mathbf{F} \mathbf{p}) \mathbf{F}^2 - 2\mathcal{E}(\mathbf{v} \mathbf{F}) \mathbf{F}^2 = 2(\mathbf{F} \mathbf{p}) \mathbf{F}^2 - 2(\mathbf{F} \mathbf{p}) \mathbf{F}^2 = 0,$$

где учтено, что $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$, $d\mathcal{E}/dt = \mathbf{v} \mathbf{F}$ и $\mathbf{p} = \mathbf{v} \mathcal{E}$. Чтобы убедиться в том, что квадрат 4-ускорения отрицателен, достаточно вычислить его в системе отсчета, где частица покончится.

6.7 Нелинейная электродинамика *

Одним из принципов, который использовался при построении электродинамики, был принцип суперпозиции. Если он выполняется, то уравнения электромагнитного поля должны быть линейными, а лагранжиан квадратичен по полям. Линейность уравнений, в свою очередь, приводит к сингулярной кулоновской силе для точечного заряда. Если отказаться от линейности, то можно построить теорию электромагнетизма в которой на малых расстояниях от заряда сингулярности не будет. Было предложено достаточно много подобных теорий. Основным стимулом к их развитию было желание построить теорию *конечной* электромагнитной массы электрона.

Как только мы допускаем нелинейность уравнений поля, возникает существенный произвол в выборе лагранжиана. Единственными ограничивающими принципами остаются релятивистская и калибровочная инвариантность теории. Для калибровочно инвариантных напряженностей $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, существует два скаляра от которых может зависеть лагранжиан: $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)$ и $*F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 4\mathbf{EB}$, где $*F$ – дуальный тензор к F , см. (4.32), стр. 99. Так как теория Максвелла имеет многочисленные экспериментальные подтверждения, нелинейная теория должна зависеть от некоторой фундаментальной константы, малые значения которой соответствуют линейным уравнениям обычной электродинамики.

▷ Первая нелинейная теория была построена Густавом Ми в 1912 г. Её лагранжиан зависел от потенциалов (был калибровочно неинвариантен). Калибровочно инвариантную теорию предложил Макс Борн (1934 г.):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi\lambda^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}} \right) \approx -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (6.39)$$

где λ фундаментальная постоянная, и приближенное равенство, совпадающее с лагранжианом (4.91), стр. 117, записано в пределе $\lambda \rightarrow 0$.

Наличие в лагранжиане корня от полей вида $\sqrt{1 - \lambda^2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)}$ приводит к тому, что, например, в случае электростатики ($\mathbf{B} = 0$) электрическое поле $|\mathbf{E}| < \lambda$, что, как мы увидим, снимает сингулярность поля точечного заряда. Возможной мотивацией в выборе такой нелинейности может быть аналогия с лагранжианом свободной частицы $m\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$, где в качестве скорости выступает $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$. Аналогичное ограничение на магнитное поле возникает в нелинейной теории Шредингера с лагранжианом $\mathcal{L} = \ln(1 - \lambda^2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2))/8\pi\lambda^2$.

▷ Еще один вариант, использующий оба инварианта, был рассмотрен Борном и Инфельдом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi\lambda^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda^4}{16} (*F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2} \right). \quad (6.40)$$

Выбор такой комбинации инвариантов связан со значением ($\prec H_{??}$) определителя матрицы $g_{\mu\nu} + \lambda F_{\mu\nu}$, который называют “объемом” тензора $F_{\mu\nu}$:

$$\det(g_{\mu\nu} + \lambda F_{\mu\nu}) = -1 - \lambda^2 (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) + \lambda^4 (\mathbf{EB})^2.$$

Поэтому лагранжиан (6.40) можно записать в следующем изящном виде:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi\lambda^2} \left(1 - \sqrt{-\det(g + \lambda F)} \right). \quad (6.41)$$

▷ Рассмотрим случай электростатики с $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ при наличии точечного заряда. Если считать, что взаимодействие токов с потенциалами остается линейным, то к лагранжиану необходимо добавить член $-A_\mu j^\mu$ (см. стр. 117). В итоге, для теорий (6.39) и (6.40) имеем:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi\lambda^2} \left(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 (\nabla\varphi)^2} \right) - \varphi Q \delta(\mathbf{r}),$$

где предполагается, что плотность точечного заряда Q описывается дельтафункцией Дирака. Так как производная по времени равна нулю (статика), уравнения Лагранжа имеют вид:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) = \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}.$$

Беря производные лагранжиана, получаем уравнение:

$$\nabla \left[\frac{\nabla\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 (\nabla\varphi)^2}} \right] = -4\pi Q \delta(\mathbf{r}). \quad (6.42)$$

Если обозначить выражение в квадратных скобках через $-\mathbf{D}$, то получается уравнение Гаусса $\nabla \mathbf{D} = 4\pi \delta(\mathbf{r})$ с решением $\mathbf{D} = Q \mathbf{r}/r^3$, поэтому:

$$\frac{\mathbf{E}}{\sqrt{1 - \lambda^2 \mathbf{E}^2}} = \frac{Q \mathbf{r}}{r^3}.$$

Возводя в квадрат и находя \mathbf{E}^2 , окончательно получаем:

$$\mathbf{E} = \frac{Q \mathbf{n}}{\sqrt{r^4 + a^4}}, \quad (6.43)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ – единичный вектор и $a = \sqrt{\lambda Q}$. Модуль напряженности электрического поля \mathbf{E} остается конечным при $r = 0$, а при $\lambda = 0$ получается кулоновское выражение.

- Так как лагранжиан свободного поля (6.40) отличается от лагранжиана теории Максвелла, то, естественно, изменяются и выражения для плотности энергии и импульса электромагнитного поля. Найдем тензор энергии-импульса в нелинейной электродинамике. Для этого удобно [19], дополнительно к $F_{\mu\nu}$, ввести еще один антисимметричный тензор:

$$G^{\mu\nu} = -4\pi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}.$$

Его антисимметричность следует из того, что лагранжиан \mathcal{L} зависит от инвариантов, производные от которых по $\partial_\mu A_\nu$ антисимметричны:

$$\frac{1}{4} \frac{\partial(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = F^{\mu\nu}, \quad \frac{1}{4} \frac{\partial({}^*F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = {}^*F^{\mu\nu}.$$

При помощи тензора $G^{\mu\nu}$ уравнения Лагранжа для $\mathcal{L} \sim -A_\mu j^\mu$ записываются также как и в линейной электродинамике:

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu,$$

а канонический тензор энергии импульса (5.18), стр. 128 имеет вид:

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} G^{\alpha\gamma} \partial^\beta A_\gamma - g^{\alpha\beta} \mathcal{L}.$$

Для электродинамики Максвелла $G_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$. В нелинейной теории связь между тензорами более сложная. Для симметризации тензора энергии-импульса свободного поля, из него необходимо вычесть производную $\partial_\gamma(G^{\gamma\alpha} A^\beta)/4\pi$, которая тождественно удовлетворяет уравнению непрерывности. Учитывая уравнения движения с $j^\nu = 0$, имеем (см.стр. 129) $\partial_\gamma(G^{\gamma\alpha} A^\beta) = -G^{\alpha\gamma} \partial_\gamma A^\beta$ и, следовательно, симметричный, калибровочно-инвариантный тензор энергии-импульса равен:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} G^{\alpha\gamma} F_\gamma{}^\beta - g^{\alpha\beta} \mathcal{L}. \quad (6.44)$$

В частности, плотности энергии и импульса равны:

$$T^{00} = \frac{\mathbf{D}\mathbf{E}}{4\pi} - \mathcal{L}, \quad T^{0i} = \frac{\mathbf{D} \times \mathbf{B}}{4\pi},$$

где компоненты тензора $G^{\mu\nu}$ определяются двумя 3-векторами:

$$\mathbf{D} = \{G^{10}, G^{20}, G^{30}\}, \quad \mathbf{H} = \{G^{32}, G^{13}, G^{21}\},$$

которые являются аналогами электрического и магнитного поля.

▷ В случае электростатики ($\mathbf{B} = \mathbf{H} = 0$) имеем:

$$T^{00} = \frac{\mathbf{D}\mathbf{E}}{4\pi} - \frac{1}{4\pi\lambda^2} \left(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \mathbf{E}^2}\right).$$

Выше мы нашли, что для точечного заряда электрическое поле \mathbf{E} и вектор \mathbf{D} [см. (6.43)] равны:

$$\mathbf{D} = \frac{Q\mathbf{n}}{r^2}, \quad \mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{n}}{\sqrt{r^4 + a^4}}. \quad (6.45)$$

Подставляя эти выражения в плотность энергии, получаем:

$$T^{00} = \frac{1}{4\pi\lambda^2} \left[\sqrt{1 + \frac{a^4}{r^4}} - 1 \right].$$

Интеграл этого выражения по всему объему в сферических координатах $dV = 4\pi r^2 dr$, дает полную энергию поля (массу):

$$w = m = \int T^{00} dV = \frac{Q^2}{a} \int_0^\infty \left[\sqrt{1 + x^4} - x^2 \right] dx = \frac{Q^2}{a} I_0,$$

где сделана замена $x = r/a$. Получившийся интеграл удобно записать в виде разницы $I_0 = I_1 - I_2$ двух интегралов:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}, \quad I_2 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^4}}\right) x^2 dx. \quad (6.46)$$

Второй интеграл равен $I_2 = I_1/3$. Чтобы это доказать, необходимо I_2 дважды проинтегрировать по частям. Первый раз вносим x^2 под дифференциал: $x^2 dx = d(x^3)/3$, а второй раз вносим $1/\sqrt{1 + x^4}$:

$$I_2 = \frac{2}{3} \int_0^\infty \frac{x^4 dx}{(1 + x^4)^{3/2}} = -\frac{1}{3} \int_0^\infty x d \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^4}} \right) = \frac{1}{3} I_1.$$

Интеграл I_1 выражается через гамма-функцию и имеет приближенное значение $I_1 \approx 1.8540746773$. Соответственно $I_0 = 2I_1/3 \approx 1.23605$. Параметр $a = \sqrt{\lambda Q}$ – это характерное расстояние, определяющее масштаб на котором начинают сказываться эффекты теории. На расстояниях $r \gg a$ от заряда справедлив закон Кулона и линейная теория Максвелла. При $r < a$ закон Кулона модифицируется и существенными становятся нелинейные эффекты. Этот же параметр определяет величину энергии поля точечного заряда. Если вся масса электрона имеет электромагнитное происхождение, то a соответствует классическому радиусу электрона (с точностью до множителя 1.23605...).

- Снятие сингулярности электрического поля приводит к тому, что тензор энергии-импульса поля движущегося заряда сохраняется сам по себе и, следовательно, в нелинейной теории не возникает “проблемы 3/4”. Проведем соответствующие вычисления.

Ковариантное обобщение полученных выше тензоров напряженностей электромагнитного поля для точечного заряда имеет следующий вид:

$$G_{\alpha\beta} = Q \frac{\eta_\alpha v_\beta - \eta_\beta v_\alpha}{(-\eta^2)^{3/2}}, \quad F_{\alpha\beta} = Q \frac{\eta_\alpha v_\beta - \eta_\beta v_\alpha}{\sqrt{-\eta^2} (\eta^4 + a^4)}, \quad (6.47)$$

где обозначения соответствуют странице 161 и для краткости пишем $\eta^4 = (\eta \cdot \eta)^2$ (обратим внимание на то, что так как $\eta^2 < 0$, то $\sqrt{\eta^4} = -\eta^2$). Действительно, тензор $G_{\alpha\beta}$ удовлетворяет обычному линейному уравнению Максвелла $\partial_\alpha G^{\alpha\beta} = 4\pi j^\beta$ и совпадает с выражением (6.5), в котором регуляризацию делать уже не нужно. Сравнивая **D** и **E** из (6.45), несложно по аналогии записать и выражение для $F_{\alpha\beta}$ (можно проделать его вывод строго, переходя при помощи преобразований Лоренца (стр. 103) от $\mathbf{E}' = Q\mathbf{r}'/r'\sqrt{r'^4 + a^4}$ и $\mathbf{B}' = 0$ в “штрихованной” системе отсчета, связанной с зарядом, к системе в которой заряд движется со скоростью \mathbf{v}).

Инварианты, от которых зависит лагранжиан равны:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{2Q^2}{\eta^4 + a^2}, \quad {}^*F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0.$$

Второе соотношение возникает в силу свертки антисимметричного тензора $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ в определении *F с симметричными комбинациями типа $\eta_\alpha \eta_\mu$. Поэтому для одиночного заряда, движущегося с постоянной скоростью лагранжианы (6.39) и (6.40) совпадают. Теперь несложно записать тензор энергии-импульса (6.44):

$$4\pi\lambda^2 T^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \frac{\eta^2}{\sqrt{\eta^4 + a^4}} - a^4 \frac{\eta^\mu \eta^\nu + \eta^2 v^\mu v^\nu}{\eta^4 \sqrt{\eta^4 + a^4}}.$$

Прямым вычислением, используя соотношения (6.6), стр. 161, можно проверить, что $T^{\mu\nu}$ сохраняется:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

и, следовательно, полученные с его помощью энергия и импульс поля (интегральные величины) будут правильно зависеть от скорости и связаны обычным релятивистским соотношением.

▷ Запишем плотность энергии:

$$W = T^{00} = -\frac{1}{4\pi\lambda^2} \left(1 + \frac{\eta^2}{\sqrt{\eta^4 + a^4}} \right) - \frac{a^4}{4\pi\lambda^2} \frac{(\eta^0)^2 + \gamma^2\eta^2}{\eta^4\sqrt{\eta^4 + a^4}}.$$

Обратим внимание на выражение в круглых скобках. При интегрировании каждое слагаемое в скобках по отдельности расходится и только их сумма дает конечный интеграл. Поэтому, замены, производимые при вычислении интеграла (6.14), должны выполняться для всего выражения в скобках (это даст общий множитель $1/\gamma$). В результате интегрирования, получаем полную энергию поля:

$$w = \frac{a^4\gamma}{\lambda^2} \int_0^\infty \frac{dr}{\sqrt{r^4 + a^4}} \left(1 - \frac{v^2}{3} \right) - \frac{\gamma}{\lambda^2} \int_0^\infty dr \left(r^2 - \frac{r^4}{\sqrt{r^4 + a^4}} \right) (1 - v^2).$$

Делая замену $x = r/a$ и вводя интегралы (6.46), находим электромагнитную массу поля:

$$m = \frac{w}{\gamma} = \frac{Q^2}{a} (I_1 - I_2) - \frac{Q^2}{a} v^2 \left(\frac{1}{3} I_1 - I_2 \right).$$

Так как $I_2 = I_1/3$, масса постоянна и равна $m = 1.23605 Q^2/a$. Аналогично, компоненты T^{0i} дают вектор плотности импульса:

$$\mathbf{P} = -\frac{a^4}{4\pi\lambda^2} \frac{\eta^0 \boldsymbol{\eta} + \eta^2 \gamma^2 \mathbf{v}}{\eta^4 \sqrt{\eta^4 + a^4}},$$

интеграл от которой приводит к релятивистскому выражению $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$.

Таким образом, нелинейная электродинамика с лагранжианом Борна-Инфельда имеет ряд привлекательных особенностей. В ней автоматически отсутствует сингулярность в законе Кулона, что приводит к конечной массе электромагнитного поля точечного заряда и верным выражениям для энергии и импульса поля (нет необходимости в компенсирующем тензоре энергии-импульса, который реализует натяжения Пуанкаре).

Тем не мене, не все так здорово. Во-первых лагранжиан выбран достаточно произвольно. Во-вторых рассмотренная выше теория, по всей видимости, противоречит опыту. Столкновения электронов с высокой энергией подтверждает справедливость закона Кулона на расстояниях существенно меньших классического радиуса a . Это можно было бы объяснить наличием *отрицательной* неэлектромагнитной составляющей в массе электрона (для уменьшения параметра a). Однако это уже слишком большая плата за сохранение теории. Кроме этого точечность заряда электрона, сохраненная в теории, не выглядит вполне физичной.

6.8 Солитоны *

▷ Рассматривая электродинамику, мы различали поля и частицы. Частицы мыслились как некоторые компактные (возможно точечные) образования, которые взаимодействовали при помощи электромагнитного поля. Таким образом, основное различие между полем и частицами состоит в том, что энергия последних локализована в малой области пространства, тогда как энергия поля существенно более нелокальная.

Оказывается, что в рамках *нелинейных* полевых теорий можно получать решения, которые обладают локализованной энергией, движущейся в пространстве. Такие сгустки энергии могут взаимодействовать друг с другом, сохраняя после взаимодействия свою форму, образовывать связанные состояния и т.д. Подобные решения, называемые *солитонами*, могут служить *полевой моделью частиц*.

▷ Рассмотрим простейший пример теории действительного скалярного поля с лагранжианом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - V(\phi).$$

Уравнения Лагранжа (4.75), стр.111 приводят к следующим уравнениям движения:

$$\partial^2\phi + V'(\phi) = 0. \quad (6.48)$$

Тензор энергии-импульса находится по общей формуле (??), стр. ??, которая в случае скалярного поля имеет вид:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu\phi} \partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L} = \partial^\mu\phi \partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}.$$

Соответствующие плотность энергии поля $W = T^{00}$ и импульса $P^i = T^{0i}$ равны:

$$W = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + V(\phi), \quad \mathbf{P} = -\dot{\phi} \nabla\phi, \quad (6.49)$$

где точка над функцией поля – это производная по времени.

Решения уравнения (6.48) будут иметь конечную энергию, если их значения на бесконечности совпадают с нулями “потенциала” поля, а производные равны нулю

$$V(\phi(t, \pm\infty)) = 0, \quad \dot{\phi}(t, \pm\infty) = \nabla\phi(t, \pm\infty) = 0. \quad (6.50)$$

В противном случае интеграл от W на бесконечности будет расходиться. Условия (6.50) достаточно жёсткие и выполнимы не для всех типов лагранжианов.

▷ Солитонное решение для скалярного поля существует, например, в одномерном случае $x^\nu = \{t, x\}$ для:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 = -\frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 + \frac{m^4}{4\lambda},$$

где m и λ – некоторые константы. Такой лагранжиан называют *моделью Хиггса*. Для него уравнения движения (6.48) имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = m^2 \phi - \lambda \phi^3. \quad (6.51)$$

Обратим внимание, что знак перед квадратичным членом отличается от массивного линейного поля, которое рассматривалось на стр. ???. Без потери общности можно положить $m = \lambda = 1$. Действительно, заменами $x^\nu \mapsto x^\nu/m$ и $\phi \mapsto \phi m/\sqrt{\lambda}$ уравнение (6.51) можно привести к форме с $m = \lambda = 1$. Обратные замены – восстанавливают эти константы.

Получим решение уравнения (6.51) в виде сгустка энергии скалярного поля, который движется с постоянной скоростью u по траектории $x = x_0 + ut$. Если вместе с ним с той же скоростью будет двигаться наблюдатель, он увидит статическую конфигурацию поля, не зависящую от времени. Подставляя $\phi(t, x) = f(x - ut)$ в (6.51), получаем:

$$-\frac{1}{\gamma^2} f'' = f - f^3,$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2}$. Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Умножая обе части на f' и интегрируя, имеем:

$$-\frac{(f')^2}{2\gamma^2} = \frac{f^2}{2} - \frac{f^4}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} (1 - f^2)^2,$$

где константа интегрирования выбрана равной $1/4$, чтобы выполнить требования (6.50). Извлекая корень, разделяя переменные и интегрируя это уравнение еще раз

$$\frac{\gamma}{\sqrt{2}} (x - vt - x_0) = \pm \int \frac{df}{1 - f^2} = \pm \operatorname{ath} f,$$

получаем решение:

$$\phi(t, x) = \pm \operatorname{th} \left\{ \frac{\gamma}{\sqrt{2}} (x - ut - x_0) \right\}, \quad (6.52)$$

где x_0 – еще одна константа интегрирования (начальное положение фазы солитона при $t = 0$). Для восстановления размерных констант аргумент гиперболического тангенса нужно умножить на m , а сам тангенс на $m/\sqrt{\lambda}$.

▷ Плотность энергии поля (6.49) для решения (6.52) равна:

$$W = \frac{\gamma^2}{2} \operatorname{ch}^{-4} \left\{ \frac{\gamma}{\sqrt{2}} (x - ut - x_0) \right\}.$$

Плотность импульса связана с плотностью энергии обычным образом: $P = uW$. Интегрирование по всему пространству дает полную энергию:

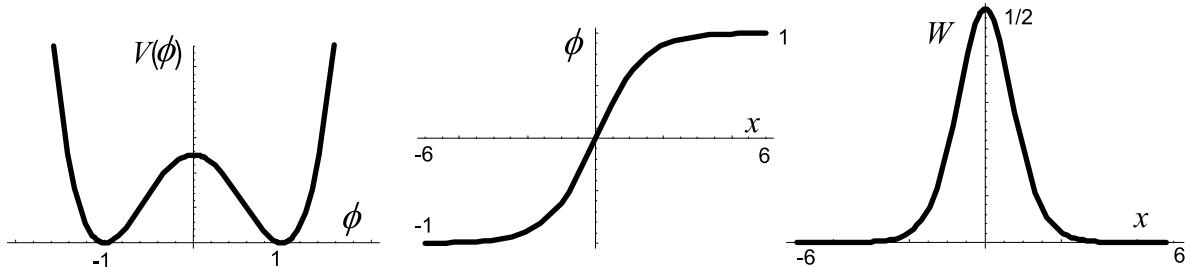
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, t) dx = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2}},$$

где константу (в которой восстановлены параметры m и λ)

$$m_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m^3}{\lambda}$$

можно интерпретировать как массу солитона.

Типичный размер области с отличной от нуля энергией поля пропорционален m^{-1} . Чем больше параметр m , тем компактнее получается солитон и тем больше будет его масса. Параметр λ влияет на высоту солитона и чем он меньше, тем выше будет плотность энергии.



В 3-мерном пространстве получается аналогичное решение, но его энергия локализована только в направлении движения. В перпендикулярных направлениях убывания плотности энергии нет. Существенным в этой модели является также наличие нелинейности. Линейное уравнение Клейна-Гордона с $V(\phi) = m^2\phi^2/2$ решений вида $\phi = f(x - ut)$ с локализованной в пространстве плотностью энергии не имеет.

В общем случае, энергия солитона (интеграл от (6.49)) будет конечной, если на бесконечности поле стремится к значению ϕ_0 для которого $V(\phi_0) = 0$. Такое значение поля называют *классическим вакуумом*. Лагранжиан, рассмотренный выше, имеет два таких вакуума: $\phi_0 = \pm 1$. Они соответствуют двум минимумам $V(\phi)$ (см. выше первый рисунок). Справа от солитона поле стремится к одному из этих вакуумов, а слева – ко второму. В результате, хотя само поле не убывает на бесконечности, плотность энергии оказывается локализованной в пространстве, а суммарная энергия – конечной.

- Еще одна модель, допускающая солитонное решение с нелинейностью

$$V(\phi) = 1 - \cos \phi$$

приводит к *уравнению синус-Гордона*:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sin \phi = 0. \quad (6.53)$$

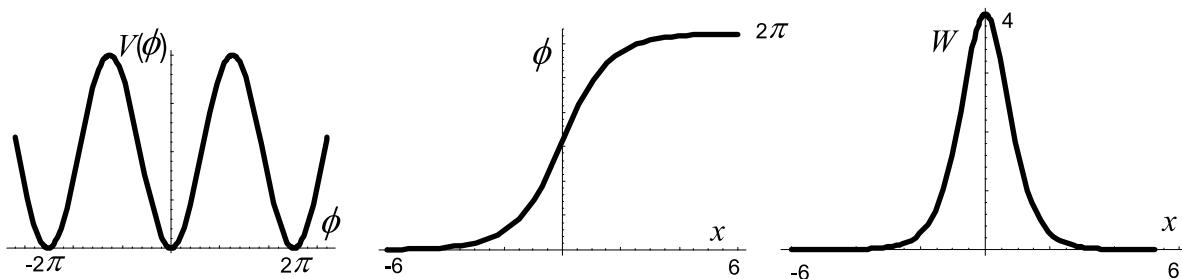
Повторяя вычисления (< Н??), аналогичные предыдущей модели, получаем решение в виде движущегося солитона:

$$\phi(t, x) = 4 \operatorname{arctg} e^{\pm \gamma(x - ut - x_0)} \quad (6.54)$$

с локализованной плотностью энергии:

$$W = 4\gamma^2 \operatorname{ch}^{-2}\{\gamma(x - ut - x_0)\}$$

и импульсом $P = uW$. Масса такого солитона равна $m_0 = 8$. Форма нелинейной функции $V(\phi)$, решение и плотность энергии в системе покоя солитона ($u = 0$) приведены на рисунках ниже:



В обоих моделях локализованной оказалась плотность энергии, но не поле. В модели Хиггса поле изменяется от -1 до 1 . В синус-Гордоне от 0 до 2π . Оба значения являются классическими вакуумами модели. Такие солитоны называются *кинками* (kink – изгиб). В модели Хиггса классических вакуумов только 2 в модели синус-Гордона их бесконечно много, причем существует обычный вакуум нулевого поля $\phi = 0$.

Решения подобные кинкам часто называют *топологическими*. Это название связано с перечислением способов отождествления двух предельных точек $x = \pm\infty$ и классических вакуумов системы. Такие отождествления можно представить в виде линий, соединяющих предельные точки и вакуумы. Переплетение таких линий обладает определенной топологией (имеет ряд свойств, не зависящих от расстояний и других геометрических свойств). Для одномерного скалярного поля топология достаточно тривиальна, однако в более сложных моделях она может оказаться уже не такой простой.

- Солитоны достаточно устойчивые образования и небольшие внешние возмущения их не разрушают. Рассмотрим соответствующее условие устойчивости [20]. Пусть поле равно $\phi(t, x) = \phi_0(t, x) + \psi(t, x)$, где $\phi_0(t, x)$ – солитонное решение, а $\psi(t, x)$ – небольшое возмущение. Подставим эту сумму в уравнение движения и разложим в ряд по ψ :

$$\partial^2(\phi_0 + \psi) + V'(\phi_0 + \psi) = \partial^2(\phi_0 + \psi) + V'(\phi_0) + V''(\phi_0)\psi + \dots = 0.$$

Так как солитон ϕ_0 удовлетворяет уравнению $\partial^2\phi_0 + V'(\phi_0) = 0$, возмущение в системе отсчета, где солитон неподвижен ($u = 0$) должно удовлетворять линейному уравнению:

$$\partial^2\psi + V''(\phi_0(x))\psi = 0.$$

Будем искать его решение в виде $\psi(t, x) = e^{-\omega t}\psi(x)$. Тогда $\psi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка:

$$-\psi''(x) + U(x)\psi(x) = \omega^2\psi(x), \quad (6.55)$$

где $U(x) = V''(\phi_0(x))$. Потребуем, чтобы функция $\psi(x)$ на бесконечности убывала (возмущение только в окрестности максимума плотности энергии солитона). Подобная задача с *граничными условиями* $\psi(\pm\infty) = 0$ называется *задачей Штурма – Лиувилля*. В квантовой механике ей соответствует стационарное уравнение Шредингера с потенциалом $U(x)$ и энергией $E = \omega^2$. Граничные условия приводят к тому, что значения частот ω ограничены снизу и могут принимать дискретные значения. Если $\omega^2 \geqslant 0$ (ω – действительно), то возмущения не растут со временем. Если же существует хотя бы одно отрицательное $\omega^2 = -E < 0$, то $\psi(t, x) = e^{\pm Et}\psi(x)$ и с течением времени солитонное решение ϕ_0 будет разрушаться экспоненциально растущим во времени возмущением.

Для модели Хиггса (H) и синус-Гордона (SG), получаются следующие “потенциалы”:

$$U_H(x) = 3 \operatorname{th}^2 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) - 1, \quad U_{SG}(x) = 1 - 2 \operatorname{ch}^{-2}(x).$$

Их собственные значения неотрицательны, поэтому соответствующие солитоны устойчивы. Заметим, что минимальная частота в обоих случаях равна нулю. Действительно, в системе покоя ϕ_0 удовлетворяет уравнению $\phi_0'' = V'(\phi_0)$. Дифференцируя его по x , получаем (6.55) с $\omega = 0$ и $\psi = \phi_0'$.

Аналогичным образом анализируется устойчивость в более сложных моделях. Подобная устойчивость решения в математике называется *устойчивостью по Ляпунову*.

▷ Полученный критерий устойчивости ($\omega^2 \geqslant 0$) работает только при малых возмущениях. Однако оказывается, что в ряде случаев солитоны сохраняют свою форму и после достаточно сильных потрясений. Эволюцию произвольного решения нелинейного уравнения можно анализировать численно при помощи компьютера. Для этого необходимо задать начальные условия $\phi(0, x)$ и $\partial\phi(0, x)/\partial t$ и затем, аппроксимируя производные при помощи конечных разностей, находить решение в произвольный момент времени. Для этого непрерывное 2-мерное пространство (t, x) заменяют дискретной сеткой с малым шагом Δt по оси времени и Δx – по оси координат. Соответственно поле ϕ является массивом $\phi_{i,j} = \phi(t_i, x_j)$. Частные производные заменяются разностями:

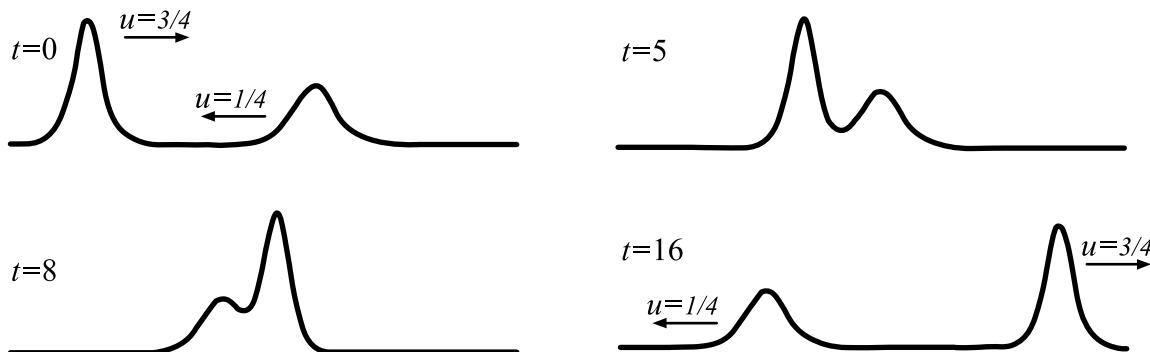
$$\frac{\partial^2 \phi_{0,0}}{\partial t^2} = \frac{\phi_{1,0} - 2\phi_{0,0} + \phi_{-1,0}}{\Delta t^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi_{0,0}}{\partial x^2} = \frac{\phi_{0,1} - 2\phi_{0,0} + \phi_{0,-1}}{\Delta x^2}.$$

Подставляя их в уравнение движения (6.48), получаем:

$$\phi_{1,0} = 2\phi_{0,0} - \phi_{-1,0} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (\phi_{0,1} - 2\phi_{0,0} + \phi_{0,-1}) - V'(\phi_{0,0}) \Delta t^2.$$

Задав начальные условия $\phi_{-1,j} = \phi(0, x_j)$ и $\phi_{0,j} = \phi_{-1,j} + \Delta t \partial\phi(0, x_j)/\partial t$ при помощи этого соотношения для каждой координаты x_j получаются $\phi_{1,j}$. Аналогично, двигаясь по оси t находим поле в произвольный момент времени. Естественно, это простейший метод и он может быть улучшен при помощи самых различных приемов [23].

Рассмотрим в качестве примера столкновение кинка и антикинка в модели синус-Гордона. Кинк соответствует знаку плюс в решении (6.54), а антикинк – минусу. Несмотря на нелинейность уравнения сложим эти два решения и воспользуемся полученной функцией в качестве начальных условий $\phi(0, x)$ и $\partial\phi(0, x)/\partial t$. Численное моделирование приводит к следующим четырем кадрам столкновения двух солитонов, движущихся навстречу со скоростями $3/4$ и $1/4$ (изображена плотность энергии системы W):



Видно, что после столкновения солитоны восстанавливают свою форму и продолжают двигаться с теми же скоростями, что и до столкновения.

▷ Выше мы искали решения нелинейных полевых уравнений в виде $\phi = f(x - ut)$. Оказывается, что существуют динамические солитонные решения, которые в системе покоя испытывают периодические колебания. Такие решения называют *бризерами* (от англ. breathe - дышать). Будем искать решение уравнения синус-Гордона (6.53) в виде

$$\phi(t, x) = 4 \arctg \left\{ \frac{f(t)}{g(x)} \right\}. \quad (6.56)$$

Подставляя в $\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin(\phi) = 0$, где индексы – соответствующие производные по t и x , получаем:

$$\frac{g^2 f_{tt}}{f} + \frac{f^2 g_{xx}}{g} = (2 f_t^2 - f f_{tt} + f^2) + (2 g_x^2 - g g_{xx} - g^2). \quad (6.57)$$

В правой части первый член в круглых скобках зависит только от t , а второй – только от x . Поэтому беря производную по t , а затем по x мы от них избавляемся. В результате получается уравнение:

$$\frac{f_{ttt}}{f^2 f_t} - \frac{f_{tt}}{f^3} = - \left(\frac{g_{xxx}}{g^2 g_x} - \frac{g_{xx}}{g^3} \right). \quad (6.58)$$

Его левая часть зависит только от времени, а правая только от координаты. Это возможно, если обе части уравнения равны некоторой константе. Обозначим её через 4λ . В результате получаем два обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, для $f = f(t)$:

$$\frac{f_{ttt}}{f^2 f_t} - \frac{f_{tt}}{f^3} = \frac{(f_{tt}/f)_t}{f f_t} = 4\lambda.$$

Умножая обе части на $f f_t$ и интегрируя, имеем:

$$f_{tt} = 2\lambda f^3 + \tau_1 f,$$

где τ_1 – константа интегрирования. Умножая обе части на f_t и интегрируя еще раз, имеем (уравнение для g выглядит также, но с заменой знака у λ и другими константами интегрирования σ_1 и σ_2):

$$f_t^2 = \lambda f^4 + \tau_1 f^2 + \tau_2, \quad g_x^2 = -\lambda g^4 + \sigma_1 g^2 + \sigma_2.$$

Разделение переменных (константа λ) проведено для уравнения третьего порядка, тогда как исходное уравнение имеет второй порядок. Поэтому константы интегрирования не являются независимыми. Подставим найденные производные f_{tt} , g_{xx} , f_t , g_t в исходное уравнение (6.57). Оно будет выполняться, если $\sigma_1 = 1 + \tau_1$ и $\sigma_2 = -\tau_2$. Поэтому:

$$f_t^2 = \lambda f^4 + \tau_1 f^2 + \tau_2, \quad g_x^2 = -\lambda g^4 + (1 + \tau_1) g^2 - \tau_2. \quad (6.59)$$

Дальнейшее интегрирование приводит к эллиптическим интегралам.

▷ Рассмотрим частные случаи. Если $\lambda = 0$, $\tau_2 = 0$, $\tau_1 = u^2/(1 - u^2)$ имеем $f = e^{\pm\gamma ut}$ и $g = e^{\pm\gamma x}$, что приводит к решению в виде движущегося со скоростью u кинка или антикинка (6.54).

Если $\lambda = 0$, $\tau_2 = 1$, $\tau_1 = -\omega^2$, после интегрирования, получаем:

$$\phi(t, x) = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\sqrt{1 - \omega^2}}{\omega} \frac{\sin(\omega t)}{\operatorname{ch}(\sqrt{1 - \omega^2} x)} \right\}. \quad (6.60)$$

Это типичный бризер. Его амплитуда периодически изменяется со временем с частотой $\omega < 1$. В отличие от кинка, поле бризера убывает на бесконечности в обе стороны от максимума. При этом максимум неподвижен, т.е. это решение в системе покоя бризера. Так как уравнения ковариантны, всегда можно заставить бризер двигаться, подставив в решение преобразования Лоренца $t \mapsto t_0 + \gamma(t - ux)$ и $x \mapsto x_0 + \gamma(x - ut)$.

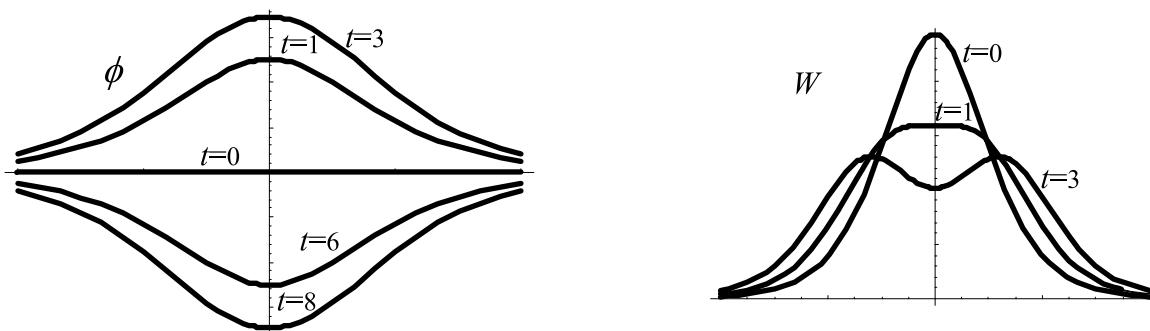
Плотность энергии бризера равна:

$$W = \frac{8 f^2 g^2}{(f^2 + g^2)^2} \left[\frac{f_t^2}{f^2} + \frac{g_x^2}{g^2} + 1 \right]$$

и в случае решения (6.60) принимает вид:

$$W = \frac{8 \omega^2 (1 - \omega^2)}{(\omega^2 c^2 + (1 - \omega^2) s^2)^2} (\omega^2 c^2 - (1 - \omega^2) s^2 + 2(1 - \omega^2) c^2 s^2),$$

где $c = \operatorname{ch}(\sqrt{1 - \omega^2} x)$ и $s = \sin(\omega t)$. Ниже на рисунке приведены графики поля (слева) и плотности энергии (справа) бризера в различные моменты времени при $\omega = 0.628$:



Плотность энергии меняется со временем, однако полная энергия сохраняется, и масса бризера равна:

$$m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} W(t, x) dx = 16 \sqrt{1 - \omega^2}.$$

Таким образом, чем меньше частота колебаний бризера, тем больше будет его масса и тем уже и выше он будет.

Глава 7

Электромагнитные волны - 2

В этой главе изучаются различные аспекты, связанные с электромагнитными волнами. По-мимо получения решений уравнений Максвелла в пустом пространстве, обсуждаются принципиальные вопросы взаимодействия зарядов и поля. Показано, что световое давление на заряд возникает только при учёте силы самодействия, а для получения момента импульса поляризованной по кругу электромагнитной волны, необходимо принимать во внимание краевые значения её напряжённости. Обсуждаются особенности применения совместных законов сохранения частиц и поля.

7.1 Плоская электромагнитная волна

• Запишем уравнения Максвелла в пространстве, где нет зарядов (“свободное” электромагнитное поле):

$$\nabla \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (7.1)$$

Частным решением этих уравнений является плоская электромагнитная волна (стр. 190):

$$\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{n} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1, \quad (7.2)$$

где \mathbf{n} – постоянный единичный вектор, а напряжённость электрического поля $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(t - \mathbf{n}\mathbf{r})$ произвольным образом зависит от $t - \mathbf{n}\mathbf{r}$. Векторы \mathbf{E} , \mathbf{B} взаимно перпендикулярны друг другу и имеют одинаковую длину. Так как \mathbf{EB} и $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ являются инвариантами, это свойство плоской волны выполняется в любой системе отсчёта. Такая волна перемещается в пространстве с единичной скоростью, равной в выбранной системе единиц скорости света (стр. 62).

▷ Если напряжённости поля оказываются периодическими функциями $t - \mathbf{n}\mathbf{r}$, то говорят о *монохроматической* плоской волне. Например, пусть единичный вектор $\mathbf{n} = \{0, 0, 1\}$ направлен вдоль оси z . Тогда общее выражение напряжённости электрического поля для плоской монохроматической волны имеет вид (стр. 63):

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \phi_0), \quad E_y = E_{y0} \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \phi_0), \quad (7.3)$$

где $\mathbf{k} = \omega \mathbf{n}$ называется волновым вектором, а ω – круговой частотой колебаний. Длина волнового вектора $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ связана с длиной волны λ , а круговая частота $\omega = 2\pi\nu$ с “обычной” частотой ν . При этом $\lambda\nu = c$, где $c = 1$ – скорость света. Фаза электромагнитной волны (константа ϕ_0) может быть положена нулю, при соответствующем выборе начала отсчёта времени.

Векторы $\mathbf{E} = \{E_x, E_y, 0\}$ и $\mathbf{B} = \{-E_y, E_x, 0\}$ лежат в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k} = \{0, 0, 0\}$ и в данной точке пространства $\mathbf{r} = const$ описывают эллипс с полуосами E_{x0} , E_{y0} (*эллиптическая* поляризация). Если $E_{x0} = \pm E_{y0}$, то говорят о *круговой* поляризации, а при $E_{x0} = 0$ или $E_{y0} = 0$ – *линейной* поляризации. Если мы смотрим *навстречу* распространения волны и электрическое поле поворачивается по часовой стрелке, то такая волна называется *левополяризованной*, если против, то *правополяризованной* (векторы \mathbf{E} , \mathbf{B} “вкручиваются” в направлении \mathbf{k} по левому или правому винту). Направление поляризации зависит от соотношения знаков амплитуд E_{x0} и E_{y0} .

▷ Если взять ротор последних двух уравнений Максвелла (7.1), то получатся *волновые уравнения* второго порядка (стр. 191):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{B} = 0. \quad (7.4)$$

Функции $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t - \mathbf{n}\mathbf{r})$ и $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t - \mathbf{n}\mathbf{r})$ также являются их решениями, однако перпендикулярность напряжённостей $\mathbf{EB} = 0$ и равенство их длин $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$ устанавливается из исходных уравнений (7.1).

▷ Получим решение в виде плоской электромагнитной волны в ковариантной формулировке. Подставим в уравнения Максвелла в пустоте

$$\partial^\alpha F_{\alpha\beta} = 0, \quad \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0 \quad (7.5)$$

тензор напряженностей, зависящий от kx , где k – постоянный 4-вектор, а $x = \{t, \mathbf{x}\}$ – точка в 4-пространстве:

$$k^\alpha F'_{\alpha\beta} = 0, \quad k_\alpha F'_{\beta\gamma} + k_\gamma F'_{\alpha\beta} + k_\beta F'_{\gamma\alpha} = 0,$$

где штрих – производная $F_{\alpha\beta}(kx)$ по аргументу kx . Сворачивая второе уравнение с k^α и учитывая первое уравнение, приходим к выводу, что 4-вектор k является светоподобным: $k^2 = 0$. Уравнение

$$k^\alpha F_{\alpha\beta}(kx) = 0, \quad (7.6)$$

будет выполняться и без штриха, если нет постоянных составляющих полей, т.е. когда $F_{\alpha\beta}(0) = 0$. Оно эквивалентно (7.2) с $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k^0$.

▷ Подставляя $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ в первое ковариантное уравнение Максвелла (7.5), получаем уравнение для 4-потенциала A^α :

$$\partial^2 A_\beta - \partial_\beta (\partial A) = 0. \quad (7.7)$$

В калибровке Лоренца $\partial A = 0$ каждая компонента 4-потенциала также удовлетворяет волновому уравнению: $\partial^2 A^\beta = 0$.

Если аргумент плоской волны записать в виде $A^\alpha = A^\alpha(kx)$, где $k^2 = 0$, то калибровка Лоренца приводит к ортогональности (которую, как и (7.6) можно записать без штриха):

$$k^\alpha A_\alpha(kx) = 0. \quad (7.8)$$

Соответственно, тензор напряжённости электромагнитного поля

$$F_{\alpha\beta} = k_\alpha A'_\beta(kx) - k_\beta A'_\alpha(kx) \quad (7.9)$$

удовлетворяет уравнениям Максвелла (7.5).

7.2 Комплексные обозначения

▷ При работе с электромагнитными волнами удобно использовать комплексные обозначения ($\imath^2 = -1$). Так как напряжённости действительны, в конечном выражении берётся действительная часть функций. Промежуточные же вычисления проводятся с комплексными величинами, что часто упрощает выкладки.

Рассмотрим монохроматическую, эллиптически поляризованную волну, распространяющуюся вдоль оси z . Напряжённость электрического поля можно записать следующим образом:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_x E_{x0} + \imath \mathbf{e}_y E_{y0}) e^{-\imath(\omega t - kz)}, \quad (7.10)$$

где \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y – единичные ортогональные векторы вдоль декартовых осей и E_{x0} , E_{y0} – константы, определяющие амплитуду волны. В силу формулы Эйлера $e^{\imath\phi} = \cos\phi + \imath \sin\phi$, действительная часть этого выражения равна

$$\Re(\mathbf{E}) = \mathbf{e}_x E_{x0} \cos(\omega t - kz) + \mathbf{e}_y E_{y0} \sin(\omega t - kz).$$

Мнимая единица в эйлеровском представлении равна $\imath = e^{\imath\pi/2}$. Поэтому умножение напряжённости поля в комплексной записи (7.10) на \imath приводит к сдвигу фазы волны на $\pi/2$. В частности, эллиптически поляризованную волну можно рассматривать, как суперпозицию (сумму) двух линейно поляризованных волн в перпендикулярных направлениях. При этом одна из этих волн должна быть сдвинута по фазе на $\pi/2$.

▷ Рассмотрим в комплексных обозначениях *эффект модуляции*, когда происходит сложение двух волн с одинаковыми амплитудами и близкими частотами ω_1 и ω_2 . Определим *среднюю частоту* $\omega_a = (\omega_1 + \omega_2)/2$ и т.н. *частоту модуляции* $\omega_m = (\omega_2 - \omega_1)/2$. Опуская для компактности зависимость от z и амплитуды, запишем *суперпозицию* (сложение) волн:

$$e^{-\imath\omega_1 t} + e^{-\imath\omega_2 t} = e^{-\imath(\omega_a - \omega_m)t} + e^{-\imath(\omega_a + \omega_m)t} = (e^{\imath\omega_m t} + e^{-\imath\omega_m t}) e^{-\imath\omega_a t}.$$

Выражение в круглых скобках по формуле Эйлера, равно удвоенному косинусу. Поэтому результат суперпозиции имеет вид:

$$2 \cos(\omega_m t) e^{-\imath\omega_a t}.$$

Для $\omega_1 \approx \omega_2$ средняя частота ω_a существенно больше частоты модулирования ω_m . Результирующее колебание выглядит, как волна с частотой ω_a и медленно изменяющейся амплитудой, пропорциональной $2 \cos(\omega_m t)$. Такие колебания называются *модуляцией*.

▷ Иногда интерес представляет усреднение во времени физических величин за период $T = 2\pi/\omega$ колебания волны. Среднее значение от произвольной функции $f(t)$ вычисляется по следующей формуле:

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (7.11)$$

Среднее значение от напряжённости плоской волны с любой поляризацией равно нулю. Действительно, т.к. $e^{\pm 2\pi i} = 1$, имеем:

$$\overline{e^{-i\omega t}} = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{i\omega T} e^{-i\omega t} \Big|_0^{2\pi/\omega} = 0.$$

Однако среднее значение от произведения (скалярного или векторного) напряжённостей может быть отлично от нуля. Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}$, где \mathbf{A}_0 и \mathbf{B}_0 – комплексные величины, не зависящие от времени. Тогда для средних справедливо соотношение:

$$\overline{\Re(\mathbf{A}) \Re(\mathbf{B})} = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{AB}^*), \quad (7.12)$$

независящее от времени. Действительно:

$$\Re(\mathbf{A}) \Re(\mathbf{B}) = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^*}{2} \frac{\mathbf{B} + \mathbf{B}^*}{2} = \frac{1}{4} (\mathbf{A}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{A}_0^* e^{i\omega t}) (\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{B}_0^* e^{i\omega t}).$$

Перемножая скобки и проводя усреднение (отбросив равные нулю средние от $e^{\pm 2i\omega t}$), получаем:

$$\overline{\Re(\mathbf{A}) \Re(\mathbf{B})} = \frac{1}{4} (\mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0^* + \mathbf{A}_0^* \mathbf{B}_0) = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0^*) = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{AB}^*),$$

где учтено, что при разложении комплексного числа на действительную и мнимую части (ниже индексы 1 и 2) имеем:

$$\Re(\mathbf{AB}^*) = \Re((\mathbf{A}_1 + i\mathbf{A}_2)(\mathbf{B}_1 - i\mathbf{B}_2)) = \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 = \Re(\mathbf{A}^* \mathbf{B}).$$

Найдём, например, среднее от квадрата напряжённости электрического поля эллиптически поляризованной волны (7.10):

$$\overline{\mathbf{E}^2} = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{EE}^*) = \frac{E_{x0}^2 + E_{y0}^2}{2}.$$

Естественно, это же значение можно получить и прямым усреднением выражения $E_x^2 + E_y^2 = E_{x0}^2 \cos^2(\omega t - kz) + E_{y0}^2 \sin^2(\omega t - kz)$, записанного в действительных обозначениях, но это несколько сложнее.

7.3 Общее решение волновых уравнений

▷ Любую функцию координат можно представить в виде интеграла:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \int \mathbf{E}(t, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{kx}} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}, \quad \mathbf{E}(t, \mathbf{k}) = \int \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{kx}} \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}},$$

где записаны прямое и обратное фурье-преобразования. Хотя $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{E}(t, \mathbf{k})$ обозначены одинаковыми буквами, это *различные* функции, которые будем отличать переменной в аргументе. Напряжённость электрического поля $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ действительна. Это приводит к тому, что при комплексном сопряжении $\mathbf{E}(t, \mathbf{k})$ меняется знак при векторе \mathbf{k} (берём комплексное сопряжение и делаем замену переменных $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{k}$, $\lessdot H_{63}$):

$$\mathbf{E}^*(t, \mathbf{k}) = \mathbf{E}(t, -\mathbf{k}). \quad (7.13)$$

Подставим фурье-разложение в волновое уравнение (7.4). Под интегралом лапласиан действует только на $e^{i\mathbf{kx}}$ и даёт множитель $(i\mathbf{k})^2 = -\mathbf{k}^2$. В результате волновое уравнение выполняется тождественно, если справедливо ($\lessdot H_{64}$) следующее уравнение для фурье-образа напряжённости поля:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(t, \mathbf{k})}{\partial t^2} + \omega^2 \mathbf{E}(t, \mathbf{k}) = 0,$$

где $\omega^2 = \mathbf{k}^2$. Это уравнение для гармонического осциллятора со следующим решением: $\mathbf{E}(t, \mathbf{k}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{k}) e^{-\omega t} + \mathbf{E}_2(\mathbf{k}) e^{\omega t}$. Поэтому:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \int \left[\mathbf{E}_1(\mathbf{k}) e^{-i(\omega t - \mathbf{kx})} + \mathbf{E}_2(\mathbf{k}) e^{i(\omega t + \mathbf{kx})} \right] \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}.$$

Разобьём интеграл на два и во втором сделаем замену $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{k}$ ($\lessdot H_{63}$). В результате получим общее решение волнового уравнения, в показателе экспонент которого стоит ковариантное выражение $\mathbf{kx} = \omega t - \mathbf{kx}$, где $\mathbf{k} = \{\omega, \mathbf{k}\}$ и $\mathbf{k}^2 = 0$:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \int [\mathbf{E}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{kx}} + \mathbf{E}^*(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{kx}}] \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (7.14)$$

Оно явным образом действительно, хотя и зависит от комплексной функции $\mathbf{E}(\mathbf{k})$. Последняя связана с “константами” решения уравнения осциллятора следующим образом: $\mathbf{E}(\mathbf{k}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{k})$, $\mathbf{E}^*(\mathbf{k}) = \mathbf{E}_2(-\mathbf{k})$. Различный выбор векторной функции $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ будет приводить к различным решениям волнового уравнения.

▷ Чтобы полностью определить решение, необходимо задать начальное значение поля и значение его производной по времени, например, в момент времени $t = 0$:

$$\mathbf{E}(0, \mathbf{x}) = \int [\mathbf{E}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \mathbf{E}^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}] \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}(0, \mathbf{x})}{\partial t} = \int \frac{\omega}{i} [\mathbf{E}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} - \mathbf{E}^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}] \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}.$$

Если поле и его производная при $t = 0$ заданы, то при помощи обратного фурье-интегрирования, можно найти действительную и мнимую части функции $\mathbf{E}(\mathbf{k})$. Подстановка их в общее решение (7.14) даёт электрическое поле в любой момент времени. Аналогично записывается решение для магнитного поля:

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \int [\mathbf{B}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \mathbf{B}^*(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}] \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (7.15)$$

▷ В волновом уравнении (7.4) “теряется связь” между электрическим и магнитным полем. Чтобы её восстановить, подставим общие решения (7.14), (7.15) в уравнения Максвелла $\nabla \mathbf{E} = 0$ и $\partial \mathbf{B} / \partial t = \nabla \times \mathbf{E}$ в вакууме:

$$\mathbf{k} \mathbf{E}(\mathbf{k}) = 0, \quad \omega \mathbf{B}(\mathbf{k}) = \mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}). \quad (7.16)$$

Таким образом, функции $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{k})$ должны быть перпендикулярны друг другу и вектору \mathbf{k} . Напомним также, что $\omega = |\mathbf{k}|$.

Решения (7.14), (7.15) имеют смысл суммы плоских монохроматических волн с различной частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} (раздел “Комплексные обозначения”). Коэффициенты при этих волнах $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{k})$ являются их амплитудами. Для каждого волнового вектора выполняются условия ортогональности (7.16). Подчеркнём, что из ортогональности $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{k})$, вообще говоря не следует ортогональность $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$.

▷ Отметим, что $\omega = |\mathbf{k}|$ линейно зависит от волнового вектора \mathbf{k} . Это приводит к тому, что возможны решения в виде пакета волн, который не “расплывается” со временем, двигаясь как целое со скоростью света. Действительно, $\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t = \mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{u}t)$, где скорость $\mathbf{u} = \mathbf{k}/\omega$ и $\mathbf{u}^2 = 1$. Волны с различной длиной волны $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$ двигаются с одинаковой (по модулю) скоростью \mathbf{u} . Такие решения, возможные в электродинамике, называются *бездисперсионными* (нет дисперсии, т.е. разброса скоростей монохроматических волн в пакете). Примером бездисперсионного решения являются плоские волны $\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}(t - \mathbf{n}\mathbf{x})$, где \mathbf{n} – постоянный единичный вектор.

▷ Найдём полную энергию и импульс свободного электромагнитного поля в фурье-представлении. Вычислим сначала интеграл от \mathbf{E}^2 по $d^3\mathbf{x}$:

$$\int \mathbf{E}^2 d^3\mathbf{x} = \int (\mathbf{E}_p e^{-\imath px} + \mathbf{E}_p^* e^{\imath px}) (\mathbf{E}_k e^{-\imath kx} + \mathbf{E}_k^* e^{\imath kx}) \frac{d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3},$$

где для каждого $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ в скалярном произведении \mathbf{E}^2 подставлено своё фурье-разложение (в одном случае переменная интегрирования обозначена как \mathbf{p} , а во втором – как \mathbf{k}). Для уменьшения числа скобок используется индексное обозначение аргумента функций $\mathbf{E}_k \equiv \mathbf{E}(\mathbf{k})$. В силу интегрального представления функции Дирака:

$$\int e^{\imath \mathbf{q}\mathbf{x}} \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} = \int e^{\imath (\omega_q t - \mathbf{q}\mathbf{x})} \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} = \delta(\mathbf{q}) e^{\imath \omega_q t}. \quad (7.17)$$

Поэтому, перемножая скобки и интегрируя по \mathbf{x} , имеем:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{E}^2 d^3\mathbf{x} &= \int (\mathbf{E}_p \mathbf{E}_k^* e^{-\imath (\omega_p - \omega_k) t} + \mathbf{E}_p^* \mathbf{E}_k e^{\imath (\omega_p - \omega_k) t}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{k} \\ &\quad + \int (\mathbf{E}_p \mathbf{E}_k e^{-\imath (\omega_p + \omega_k) t} + \mathbf{E}_p^* \mathbf{E}_k^* e^{\imath (\omega_p + \omega_k) t}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{k}) d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Если теперь проинтегрировать с функцией Дирака по \mathbf{p} , получится:

$$\int \mathbf{E}^2 d^3\mathbf{x} = \int 2 |\mathbf{E}_k|^2 d^3\mathbf{k} + \int (\mathbf{E}_{-\mathbf{k}} \mathbf{E}_k e^{-2\imath \omega_p t} + \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^* \mathbf{E}_k^* e^{2\imath \omega_p t}) d^3\mathbf{k},$$

где в первом интеграле $\delta(\mathbf{p} - \mathbf{k})$ даёт $\mathbf{p} = \mathbf{k}$, а во втором $\delta(\mathbf{p} + \mathbf{k})$ даёт $\mathbf{p} = -\mathbf{k}$, что отражено в аргументе $\mathbf{E}_{-\mathbf{k}} \equiv \mathbf{E}(-\mathbf{k})$. Такое же выражение получается для интеграла от квадрата магнитного поля:

$$\int \mathbf{B}^2 d^3\mathbf{x} = \int 2 |\mathbf{B}_k|^2 d^3\mathbf{k} + \int (\mathbf{B}_{-\mathbf{k}} \mathbf{B}_k e^{-2\imath \omega_k t} + \mathbf{B}_{-\mathbf{k}}^* \mathbf{B}_k^* e^{2\imath \omega_k t}) d^3\mathbf{k}.$$

Аналогично упрощается интеграл от векторного произведения:

$$\int [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] d^3\mathbf{x} = \int (\mathbf{E}_p e^{-\imath px} + \mathbf{E}_p^* e^{\imath px}) \times (\mathbf{B}_k e^{-\imath kx} + \mathbf{B}_k^* e^{\imath kx}) \frac{d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3}.$$

Перемножая скобки и интегрируя сначала при помощи (7.17) по \mathbf{x} , а затем с функциями Дирака по \mathbf{p} , получаем:

$$\int [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] d^3\mathbf{x} = \int (\mathbf{E}_k \times \mathbf{B}_k^* + \text{к.с.}) d^3\mathbf{k} + \int (\mathbf{E}_{-\mathbf{k}} \times \mathbf{B}_k e^{-2\imath \omega_k t} + \text{к.с.}) d^3\mathbf{k},$$

где “к.с.” означает, что на его месте должно стоять комплексное сопряжение предыдущего слагаемого.

▷ Используя связь между фурье-образами напряжённостей электрического и магнитного полей (7.16), запишем:

$$\omega^2 |\mathbf{B}_k|^2 = [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_k] [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_k^*] = \mathbf{k}^2 |\mathbf{E}_k|^2,$$

где учтена ортогональность $\mathbf{k}\mathbf{E}_k = 0$. Аналогично:

$$\omega^2 \mathbf{B}_{-k} \mathbf{B}_k = [(-\mathbf{k}) \times \mathbf{E}_{-k}] [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_k] = -\mathbf{k}^2 (\mathbf{E}_{-k} \mathbf{E}_k).$$

Таким образом, так как $\mathbf{k}^2 = \omega^2$, имеем:

$$|\mathbf{B}_k|^2 = |\mathbf{E}_k|^2, \quad \mathbf{B}_{-k} \mathbf{B}_k = -\mathbf{E}_{-k} \mathbf{E}_k. \quad (7.18)$$

В результате, для полной энергии электромагнитного поля получаем следующее выражение:

$$\int \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} d^3x = \int \frac{|\mathbf{E}_k|^2}{2\pi} d^3k, \quad (7.19)$$

где, благодаря второму соотношению (7.18), слагаемые пропорциональные $e^{\pm 2i\omega_k t}$ сокращаются и выражение явным образом не зависит от времени (полная энергия является константой).

▷ Для суммарного импульса поля необходимо вычислить:

$$\mathbf{E}_k \times \mathbf{B}_k^* = \frac{1}{\omega} \mathbf{E}_k \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_k^*] = \frac{\mathbf{k}}{\omega} |\mathbf{E}_k|^2.$$

и

$$\mathbf{E}_{-k} \times \mathbf{B}_k = \frac{1}{\omega} \mathbf{E}_{-k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_k] = \frac{\mathbf{k}}{\omega} (\mathbf{E}_{-k} \mathbf{E}_k),$$

где при раскрытии двойного векторного произведения, снова учтена ортогональность волнового вектора и фурье-образа электрического поля. Полученное выражение является нечётным при замене $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{k}$, поэтому подынтегральная функция для слагаемых вида $\mathbf{E}_{-k} \times \mathbf{B}_k e^{-2i\omega_k t}$ является нечётной и интеграл от неё равен нулю. В результате для полного импульса поля получаем следующее выражение:

$$\int \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi} d^3x = \int \frac{\mathbf{k}}{\omega} \frac{|\mathbf{E}_k|^2}{2\pi} d^3k, \quad (7.20)$$

которое также не зависит от времени.

Из выражений (7.19) и (7.20) следует, что полная энергия и импульс поля определяется модулем комплексной функции \mathbf{E}_k . Чем больше амплитуда монохроматической волны, тем больший вклад она даёт в энергию и импульс. При этом импульс каждой монохроматической волны волны направлен вдоль волнового вектора \mathbf{k} . Отношение плотности (в \mathbf{k} пространстве) импульса и энергии совпадает со стандартным для фотонов соотношением \mathbf{k}/ω .

7.4 Потенциал в кулоновской калибровке

▷ Уравнения электромагнитного поля инвариантны относительно калибровочного преобразования 4-потенциала $A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$. Если A_0 не равен нулю, решая уравнение $\partial_0 f = -A_0$ (в данной системе отсчёта!), можно сделать скалярный потенциал нулевым: $A'_0 = 0$. Тогда уравнение (7.7) свободного векторного потенциала принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0. \quad (7.21)$$

Оно по-прежнему не меняется при замене $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla g(\mathbf{x})$, где g – не зависит от времени. При $A_0 = 0$ электрическое поле равно $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t$. В силу уравнения Максвелла $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, дивергенция $\nabla \cdot \mathbf{A}$ не зависит от времени. Следовательно, для данного \mathbf{A} , решая уравнение $\nabla^2 g = -\nabla \cdot \mathbf{A}$, можно перейти к потенциальному, удовлетворяющему условию $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Это называется кулоновской калибровкой потенциала:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad A_0 = 0. \quad (7.22)$$

Подчеркнём, что одновременное сосуществование последних двух условий (согласующихся с калибровкой Лоренца $\partial \mathbf{A} = 0$) возможно только для свободного поля: $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$). В этой калибровке 3-потенциал удовлетворяет волновому уравнению:

$$\partial^2 \mathbf{A} = 0.$$

Его решение сразу запишем по аналогии с (7.14):

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \int (\mathbf{A}_k e^{-ikx} + \mathbf{A}_k^* e^{ikx}) \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}}, \quad (7.23)$$

где $k = \{\omega, \mathbf{k}\}$ и $\omega = |\mathbf{k}|$. Кулоновская калибровка $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ выполняется в любой момент времени, если фурье-компоненты ортогональны волновому вектору:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_k = 0. \quad (7.24)$$

Так как $\mathbf{E} = -\partial_0 \mathbf{A}$ и $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, можно написать:

$$\mathbf{E}_k = i\omega \mathbf{A}_k, \quad \mathbf{B}_k = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_k, \quad (7.25)$$

т.е. с точностью до комплексного множителя $i\omega$ амплитуды фурье-разложения \mathbf{A}_k совпадают с амплитудами напряжённости электрического поля.

▷ Хотя 3-вектор \mathbf{A}_k имеет три компоненты, в силу связи $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_k = 0$, только 2 компоненты независимы. Чтобы их выделить, ведём два единичных, ортогональных друг другу и волновому вектору *векторы поляризации*: \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , по которым разложим потенциал:

$$\mathbf{A}_k = \sum_s c_{sk} \mathbf{e}_s = c_{1k} \mathbf{e}_1 + c_{2k} \mathbf{e}_2. \quad (7.26)$$

Так как \mathbf{A}_k – комплексные функции, векторы \mathbf{e}_s (*зависящие* от волнового вектора \mathbf{k}) могут быть как действительными, так и комплексными. В силу, этого условие ортогональности запишем следующим образом:

$$\mathbf{e}_s \mathbf{e}_\lambda^* = \delta_{s\lambda}, \quad \mathbf{e}_s \mathbf{k} = 0. \quad (7.27)$$

Выбор базиса произволен и переход к новому базису приводит к переопределению коэффициентов разложения c_{sk} . Монохроматическая волна соответствует $c_{sk} = (2\pi)^{3/2} c_s \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)/2\omega$, что приводит к:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_s (c_s \mathbf{e}_s e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}} + c_s^* \mathbf{e}_s^* e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{k}_0}{\omega} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}).$$

Пусть $\mathbf{k}_0 = \{0, 0, \omega\}$. Простейшим выбором базиса являются векторы с компонентами:

$$\mathbf{e}_1 = \{1, 0, 0\}, \quad \mathbf{e}_2 = \{0, 1, 0\}. \quad (7.28)$$

Этот базис называется базисом *линейной поляризации*. Если константы c_s действительны, то они определяют амплитуду колебаний по осям x, y :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \{c_1, c_2, 0\} \cos(\omega(z-t)).$$

Приведём так же пример комплексного выбора векторов поляризации

$$\mathbf{e}_1 = \{1, i, 0\}/\sqrt{2}, \quad \mathbf{e}_2 = \{1, -i, 0\}/\sqrt{2}. \quad (7.29)$$

Это соответствует *круговой поляризации*. Например, если $c_{2k} = 0$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{|c_{1k}|}{\sqrt{2}} \{ \cos(\omega(t-z) - \alpha), \sin(\omega(t-z) - \alpha), 0 \},$$

где α – фаза комплексного числа $c_{1k} = |c_{1k}| e^{i\alpha}$. Вектор напряжённости электрического поля вращается по кругу с угловой скоростью ω против часовой стрелки. Если $c_{1k} = 0$, то получается круговая поляризация с вращением против часовой стрелки с амплитудой пропорциональной c_{2k} .

7.5 Заряд в поле плоской волны

▷ Рассмотрим плоскую волну $F_{\alpha\beta}(kx)$, где $k^2 = 0$. Направим координатные оси таким образом, чтобы:

$$k^\alpha = \{\omega, 0, 0, \omega\}, \quad A^\alpha = \{0, A_x(kx), A_y(kx), 0\}. \quad (7.30)$$

Выбор компонент 4-потенциала кроме лоренцевской калибровки (7.8), удовлетворяет кулоновской калибровке $A^\alpha = \{0, \mathbf{A}\}$, где $\nabla \mathbf{A} = 0$ или $\mathbf{kA} = 0$, что всегда можно сделать для свободного поля (стр. 198).

При помощи представления (7.9) запишем уравнение движения пробного заряда $m dU^\mu/ds = q F^{\mu\nu} U_\nu$:

$$\frac{dU}{ds} = \frac{q}{m} [(U\mathbf{A}') \mathbf{k} - (kU) \mathbf{A}'], \quad (7.31)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{A}(kx)$ и штрих – производная 4-потенциала по аргументу kx . Умножая уравнение на k и учитывая, что $k^2 = 0$ и $k\mathbf{A} = 0$, получаем:

$$\frac{d(kU)}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad kU = kU_0 = \omega \pi_0 = const, \quad (7.32)$$

где $U_0 = U(0)$. Траектория заряда зависит от его собственного времени $x = x(s)$ и $U(s) = dx/ds$, поэтому:

$$\frac{d(kx)}{ds} = kU = \omega \pi_0 \quad \Rightarrow \quad kx = \omega (\pi_0 s - z_0), \quad (7.33)$$

где начальный момент времени $t = s = 0$ и $z_0 = z(0)$. В частности $d\mathbf{A}(kx)/ds = (kU) \mathbf{A}'$ и уравнение движения имеет вид:

$$\frac{dU}{ds} = \frac{q}{m \omega \pi_0} \left(U \frac{d\mathbf{A}}{ds} \right) \mathbf{k} - \frac{q}{m} \frac{d\mathbf{A}}{ds}. \quad (7.34)$$

Для x и y компонент 4-скорости уравнение легко интегрируется

$$U_x(s) = U_{x0} - \frac{q}{m} (A_x - A_{x0}), \quad U_y(s) = U_{y0} - \frac{q}{m} (A_y - A_{y0}), \quad (7.35)$$

где A_{x0}, A_{y0} – значения A_x, A_y при $s = 0$ (или $kx_0 = \omega z_0$). Теперь можно записать значения скалярного произведения:

$$U \frac{d\mathbf{A}}{ds} = -\frac{d}{ds} \left[\left(U_{x0} + \frac{q}{m} A_{x0} \right) A_x + \left(U_{y0} + \frac{q}{m} A_{y0} \right) A_y - \frac{q}{2m} (A_x^2 + A_y^2) \right]$$

и уравнение (7.34) для нулевой компоненты 4-скорости:

$$\frac{dU^0}{ds} = \frac{q}{m \pi_0} U \frac{d\mathbf{A}}{ds} \quad (7.36)$$

легко интегрируется. Ещё одно интегрирование $U^0 = ds/dt$ даёт связь лабораторного времени $x^0 = t$ и собственного времени частицы s .

▷ В частном случае *монохроматической* плоской волны ненулевые компоненты 4-потенциала можно выбрать в виде:

$$A_x = -\frac{E_0}{\omega} \sin(kx), \quad A_y = \frac{\sigma E_0}{\omega} \cos(kx).$$

Так как $kx = \omega(t - z)$, они приводят к следующим напряжённостям электромагнитного поля:

$$E_x = E_0 \cos(\omega(t-z)), \quad E_y = \sigma E_0 \sin(\omega(t-z)), \quad B_x = -E_y, \quad B_y = E_x.$$

Волна распространяется вдоль оси z . При $\sigma = 0$ – поляризация линейная, а в случае круговой поляризации $\sigma = \pm 1$. С учётом (7.33), 4-потенциал можно также выразить через собственное время заряда:

$$A_x = -\frac{E_0}{\omega} \sin(\pi_0 \omega s - \omega z_0), \quad A_y = \frac{\sigma E_0}{\omega} \cos(\pi_0 \omega s - \omega z_0). \quad (7.37)$$

▷ В задаче есть безразмерный параметр, связанный с мощностью потока электромагнитной волны (восстанавливаем константу c , стр. 22):

$$\alpha = \frac{q E_0}{\omega m} \mapsto \frac{(q/c)(E_0/c)}{(\omega c)m} = \lambda \left(\frac{r_e I_0}{\pi m c^3} \right)^{1/2} \sim 3 \cdot 10^{-12+n/2}, \quad (7.38)$$

где $r_e = q^2/mc^2 = 2.8 \cdot 10^{-15}$ м – классический радиус электрона, $\lambda = 2\pi c/\omega = 500$ нм – длина волны и $I_0 = cE_0^2/4\pi = 10^n$ Вт/м² – мощность потока (энергия, проходящая в единицу времени через единицу площади $\triangle H_{62}$). На поверхности Земли $I_0 \sim 10^3$ Вт/м² (т.е. $n = 3$). Для лазерных установок на коротких импульсах $I_0 \sim 10^{24}$ Вт/м² ($n = 24$).

▷ От начальных условий зависит безразмерная константа π_0 (7.32):

$$\pi_0 = U_0^0 - U_{z0} = \frac{1 - u_{z0}}{\sqrt{1 - \mathbf{u}_0^2}}, \quad U_0^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{u}_0^2}}, \quad (7.39)$$

где 3-скорость \mathbf{u}_0 обозначена маленьким шрифтом, тогда как 4-скорость $U^\alpha = dx^\alpha/ds$ – большим. Если из (7.36) получена нулевая компонента 4-скорости $U^0 = U^0(s)$, то компоненту 4-скорости U_z вдоль волнового вектора можно найти из (7.32):

$$U_z(s) = U^0(s) - \pi_0. \quad (7.40)$$

Остальные компоненты приведены в (7.35). Несложно видеть, что скорость заряда в поле такой волны является периодической функцией и не увеличивается монотонно со временем. Это на первый взгляд кажется странным, т.к. световое давление, действующее на заряд, должно его ускорять. Объяснение этого эффекта будет дано в следующем разделе. Сейчас же рассмотрим более детально несколько частных случаев.

▷ Пусть в начальный момент времени $t = s = 0$ заряд находится в начале координат $x = y = z = 0$, имея отличную от нуля 3-скорость u_{z0} вдоль оси z . Тогда

$$\pi_0 = U_0^0 - U_{z0} = \frac{1 - u_{z0}}{\sqrt{1 - u_{z0}^2}}, \quad U_0^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - u_{z0}^2}}$$

и для линейной поляризации ($\sigma = 0$) из (7.36) имеем:

$$U^0(s) = U_0^0 + \frac{\alpha^2}{2\pi_0} \sin^2(\pi_0 \omega s). \quad (7.41)$$

Энергия частицы $m U^0(s)$ периодически изменяется, имея среднее значение, которое превышает начальную энергию $m U_0^0$. Так как $U^0 = dt/ds$, *ещё одно* интегрирование даёт связь лабораторного времени $t = x^0$ и собственного времени заряда s :

$$t = \left[U_0^0 + \frac{\alpha^2}{4\pi_0} \right] s - \frac{\alpha^2}{8\pi_0^2 \omega} \sin(2\pi_0 \omega s). \quad (7.42)$$

Не смотря на наличие синуса, t монотонно увеличивается с ростом s , так как $dt/ds > 0$. Компоненты 4-скорости равны (7.35), (7.40):

$$U_x(s) = \alpha \sin(\pi_0 \omega s), \quad U_y(s) = 0, \quad U_z(s) = U^0(s) - \pi_0, \quad (7.43)$$

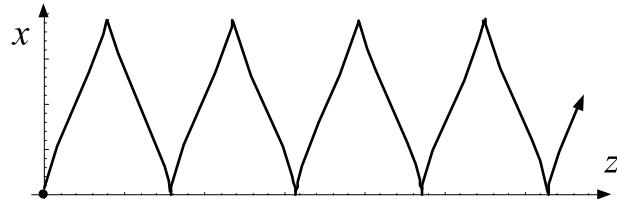
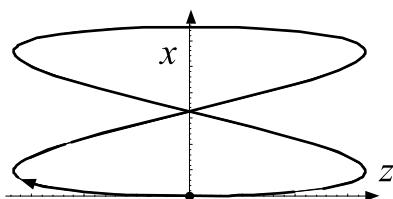
где U_z находится из (7.32). Интегрируя ещё раз, получаем:

$$x(s) = \alpha \left[1 - \frac{\cos(\pi_0 \omega s)}{\pi_0 \omega} \right], \quad z(s) = \left(U_{z0} + \frac{\alpha^2}{4\pi_0} \right) s - \alpha^2 \frac{\sin(2\pi_0 \omega s)}{8\pi_0^2 \omega} \quad (7.44)$$

и y координата заряда остаётся неизменной. Если начальная 4-скорость заряда U_{z0} равна $-\alpha^2/4\pi_0$ или

$$u_{z0} = -\frac{1}{1 + 4/\alpha^2}, \quad (7.45)$$

то он начинает описывать восьмёрку в плоскости (x, z) (левый рисунок):



Начально неподвижный заряд приобретает постоянную (в среднем) скорость, двигаясь вдоль z по пилообразной траектории (правый рисунок).

▷ Для круговой поляризации $A_x^2 + A_y^2 = E_0^2/\omega^2$. Пусть в начальный момент времени частица находится в начале координат и имеет нулевую скорость вдоль волнового вектора $u_{z0} = 0$. В этом случае $\pi_0 = U_0^0$. Уравнение (7.34) для нулевой компоненты 4-скорости даёт:

$$U^0(s) = \pi_0 + \frac{\alpha}{\pi_0} U_{x0} \sin(\pi_0 \omega s) - \frac{\alpha \sigma}{\pi_0} (U_{y0} + \alpha \sigma) (\cos(\pi_0 \omega s) - 1).$$

Энергия заряда $m U^0$ будет постоянна, если

$$U_{x0} = 0, \quad U_{y0} = -\alpha \sigma.$$

В этом случае лабораторное и собственное времена пропорциональны:

$$t = \pi_0 s, \quad \pi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}},$$

а компоненты 4-скорости в плоскости x, y равны:

$$U_x(s) = \alpha \sin(\pi_0 \omega s), \quad U_y(s) = -\alpha \sigma \cos(\pi_0 \omega s).$$

Соответственно, заряд движется по окружности:

$$x = -\frac{\alpha}{\omega \pi_0} (\cos(\omega t) - 1), \quad y = -\frac{\alpha \sigma}{\omega \pi_0} \sin(\omega t)$$

радиуса $R = \alpha \sqrt{1 - \alpha^2}/\omega$, центр которой имеет координаты $\{R, 0, 0\}$. Направление вращения совпадает с вращением векторов напряжённости поля. Впрочем, это не стоит связывать с моментом импульса поля, так как “передача” последнего заряду, не приводила бы к равномерному движению его по окружности. Импульс частицы вдоль оси z также не увеличивается и “световое давление” на пробный заряд не действует.

Если в начальный момент времени заряд находился в начале координат и был неподвижен, то $\pi_0 = 1$ и

$$U_x = \alpha \sin(\omega s), \quad U_y = \alpha \sigma [1 - \cos(\omega s)], \quad U_z = \alpha^2 [1 - \cos(\omega s)].$$

Траектория заряда имеет вид:

$$x = \alpha \left[1 - \frac{\cos(\omega s)}{\omega} \right], \quad y = \alpha \sigma \left[s - \frac{\sin(\omega s)}{\omega} \right], \quad z = \alpha^2 \left[s - \frac{\sin(\omega s)}{\omega} \right].$$

Связь лабораторного и собственного времён:

$$t = (1 + \alpha^2) s - \frac{\alpha^2}{\omega} \sin(\omega s)$$

получается из нулевой компоненты 4-скорости $U^0 = 1 - \alpha^2 [\cos(\omega s) - 1]$.

7.6 Световое давление

▷ Из уравнений Максвелла следует теорема Пойнтинга (стр. 69):

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \mathbf{P} + \mathbf{j} \mathbf{E} = 0, \quad W = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi}, \quad \mathbf{P} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi}. \quad (7.46)$$

Смысл этого уравнения устанавливается интегрированием по некоторому объёму в результате которого $\mathbf{j} \mathbf{E}$ равно сумме $q_k \mathbf{u}_k \mathbf{E}(\mathbf{r}_k)$ по всем зарядам в объёме. Изменение энергии движения заряда $\mathcal{E} = m/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$ равно скалярному произведению скорости заряда \mathbf{u} на силу Лоренца $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$, т.е. $d\mathcal{E}_k/dt = q_k \mathbf{u}_k \mathbf{E}(\mathbf{r}_k)$, что приводит к:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int W dV + \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k \right\} = - \oint \mathbf{P} d\mathbf{S}. \quad (7.47)$$

Его левая часть интерпретируется как суммарная энергия поля и зарядов. В дифференциальном уравнении (7.46) находятся токи \mathbf{j} , стоящие в уравнениях Максвелла. Это те заряды, которые *создают* поле. При получении интегрального соотношения (7.47) уже предполагается, что на эти заряды исходное поле действует силой Лоренца. Другими словами, заряды не разделяются на “большие”, которые создают поле и “маленькие” (пробные), которые в этом поле двигаются. Аналогична ситуация с законом сохранения импульса и момента импульса поля и зарядов.

Плоская волна распространяется в пустом пространстве, где плотность тока \mathbf{j} в уравнении (7.46) *равна нулю*. Поэтому совместного закона сохранения “поля + заряды” в модели пробного заряда просто не возникает. В области пространства, в которой движется *пробный* заряд, нет зарядов, создающих поле плоской электромагнитной волны.

Совместный закон сохранения энергии поля и зарядов предполагает, что часть энергии (импульса или момента импульса) поля передаётся зарядам. Само поле при этом должно *терять* энергию. Однако при решении задачи о поведении пробного заряда этого не происходит. Внешнее для него поле остаётся без изменения и, естественно, не может потерять энергию, которая “передаётся” заряду. В реальности, заряды в поле волны начинают излучать. Это излучение “гасит” исходную волну, в результате чего происходит её поглощение. В этом случае в законе сохранения (7.47) “после взаимодействия” должны стоять напряжённости не падающей волны, а суммарного поля, возникающего в результате сложения поля исходной волны и вторичных волн от зарядов.

Та же ситуация имеет место и при движении в электростатическом поле с нулевым импульсом. Пробный заряд в нём меняет свой импульс, что снова не имеет отношения к совокупным законам сохранения.

▷ Проследим как возникает световое давление, когда начинают учитывать излучение пробного заряда. Будем считать, что его скорость невелика, и запишем уравнение движения с учётом лоренцевской силы торможения (стр. 166):

$$m\ddot{\mathbf{v}} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \frac{2}{3}q^2\dot{\mathbf{v}}. \quad (7.48)$$

Как уже отмечалось, чтобы избежать самоускоряющихся решений, это уравнение необходимо решать методом последовательных приближений $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(0)}(t) + \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots$ и $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}^{(0)}(t) + \mathbf{v}^{(1)}(t) + \dots$, считая силу трения (последнее слагаемое) малым. В нулевом приближении имеем уравнение движения “пробного” заряда:

$$\dot{\mathbf{v}}^{(0)} = \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v}^{(0)} \times \mathbf{B}). \quad (7.49)$$

Продифференцировав его по времени и выразив $\dot{\mathbf{v}}^{(0)}$ с его же помощью, получим:

$$\ddot{\mathbf{v}}^{(0)} = \frac{q}{m} \left(\frac{d\mathbf{E}}{dt} + \mathbf{v}^{(0)} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right) + \frac{q^2}{m^2} [\mathbf{v}^{(0)} \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B} + \frac{q^2}{m^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]. \quad (7.50)$$

Таким образом в (7.48) появляется дополнительная сила, определяемая выражением (7.50). Ключевым в нём является последнее слагаемое, пропорциональное импульсу электромагнитного поля $\mathbf{P} = [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] / 4\pi$. Именно оно и приводит к световому давлению на заряд.

Для плоской волны с круговой поляризацией $\mathbf{E} \times \mathbf{B} = E_0^2 \mathbf{n}$, где E_0 – амплитуда колебаний электрического и магнитного полей и \mathbf{n} – единичный вектор в направлении распространения волны. Восстановим скорость света в выражении для этой составляющей силы (7.50):

$$F_n = \frac{2}{3}q^2 \cdot \frac{q^2}{m^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \mathbf{n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{q^4 E_0^2}{m^2} \mapsto \frac{2}{3} \frac{q^4 E_0^2}{m^2 c^4}.$$

Если считать, что давление P на заряд равно отношению силы F_n к “площади” этого заряда S , то

$$F_n = S P, \quad S = \frac{8}{3}\pi r_e^2, \quad P = \frac{E_0^2}{4\pi}, \quad (7.51)$$

где для P записано стандартное выражение для светового давления. Любопытно, что она пропорциональна площади поверхности шарика радиуса r_e , где $r_e = q^2/mc^2$ – классический радиус электрона. Правда в рассматриваемом случае длина волны света существенно больше, чем r_e , поэтому необходимо учитывать дифракцию. Впрочем и электрон, конечно, не является шариком радиуса r_e .

7.7 Момент импульса

▷ Рассмотрим напряжённость ограниченной электромагнитной волны (*световой пучок*), распространяющейся вдоль оси z . Пусть в плоскости x, y амплитуда напряженностей поля примерно постоянна в окрестности оси z , а при удалении от неё уменьшается, падая на больших радиальных расстояниях до нуля. Приближенное выражение для напряжённостей подобной волны можно записать следующим образом [25]:

$$\mathbf{E} = \left\{ (\mathbf{n}_x \pm i\mathbf{n}_y)F + \frac{\mathbf{n}_z}{k}(\imath\partial_x F \mp \partial_y F) \right\} e^{\imath(kz - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = \mp i\mathbf{E}, \quad (7.52)$$

где функция $F = F(x, y)$ задаёт профиль амплитуды волны в плоскости x, y , $\partial_x F = \partial F / \partial x$ и $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$ – единичные ортогональные базисные векторы. Два знака (\pm) в (7.52) соответствуют правой и левой круговой поляризации. Если $F = \text{const}$, получается (7.10).

Несложно проверить, что $\nabla \mathbf{E} = 0$ и $\nabla \mathbf{B} = 0$. Уравнения для роторов выполняются, если считать, что вторые производные от функции F много меньше первых производных и самой функции F (плавное изменение амплитуды). Для простоты положим, что $F = F(\rho)$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние от оси z . Гладкость функции $F(\rho)$ означает:

$$\frac{F''}{k^2} \ll \frac{F'}{k} \ll F. \quad (7.53)$$

Запишем среднее значение плотности энергии:

$$W = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{E}\mathbf{E}^* + \mathbf{B}\mathbf{B}^*}{8\pi} = \frac{F^2(\rho)}{4\pi} + \frac{F'^2(\rho)}{8\pi k^2} \approx \frac{F^2(\rho)}{4\pi},$$

где в приближенном равенстве учтено условие малости (7.53). Это означает, что в выражении $F^2 + F'^2/k^2 = F^2(1 + (F'/kF)^2) \approx F^2$ мы пренебрегаем вторым порядком малости по F'/kF (аналогично пренебрежению вторыми производными). Плотность импульса ограниченной плоской волны равна:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*}{4\pi} = \frac{F^2(\rho)}{4\pi} \mathbf{n}_z \pm \frac{F(\rho)F'(\rho)}{4\pi k\rho} (y\mathbf{n}_x - x\mathbf{n}_y),$$

где также проведено усреднение по времени. При интегрировании по объёму цилиндра плотности импульса последнее слагаемое равно нулю, а первое даёт суммарный импульс:

$$\int \mathbf{P} dV = \frac{\mathbf{n}_z}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L F^2(\rho) \rho d\rho d\phi dz = \frac{\mathbf{n}_z L}{2} \int_0^R F^2(\rho) \rho d\rho = \mathbf{n}_z \int W dV,$$

где L – длина цилиндра по оси z , а R – радиус основания цилиндра.

▷ Найдём теперь плотность момента импульса (стр. 137):

$$\mathbf{r} \times \mathbf{P} = \frac{F^2}{4\pi} (y\mathbf{n}_x - x\mathbf{n}_y) \pm \frac{FF'}{4\pi k} (z\mathbf{n}_\rho - \rho\mathbf{n}_z),$$

где $\mathbf{n}_\rho = (x\mathbf{n}_x + y\mathbf{n}_y)/\rho$ – единичный вектор в радиальном к оси z направлении. При интегрировании этого выражения по объёму цилиндра равны нулю все слагаемые, за исключением последнего:

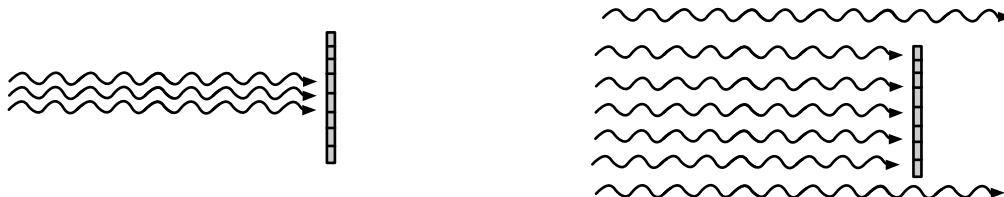
$$\int [\mathbf{r} \times \mathbf{P}] dV = \mp \mathbf{n}_z \frac{L}{2k} \int_0^R FF' \rho^2 d\rho = \mp \frac{\mathbf{n}_z L}{2k} \left\{ \frac{F^2(\rho)\rho^2}{2} \Big|_0^R - \int_0^R F^2(\rho) \rho d\rho \right\},$$

где выполнено интегрирование по частям. Так как мы рассматриваем ограниченную плоскую волну с конечной энергией на единицу длины L , то функция $F(\rho)$ при больших ρ должна убывать по крайней мере, как $1/\rho^{1+\epsilon}$, $\epsilon > 0$. Поэтому поверхностный член при интегрировании по частям при больших радиусах цилиндра R стремится к нулю. В результате суммарный момент прямо пропорционален энергии волны и обратно пропорционален её частоте:

$$\int [\mathbf{r} \times \mathbf{P}] dV = \pm \frac{\mathbf{n}_z}{\omega} \int W dV. \quad (7.54)$$

Подобное соотношение выполняется и в квантовой теории для фотона со спином $\pm\hbar$ и энергией $\hbar\omega$.

Таким образом, если пластина поглощает падающую волну и имеет размер больший, чем характерная ширина светового пучка, то она постоянно получает момент импульса волны (ниже левый рисунок).



Чуть иначе расчёт выглядит, если пластина находится в зоне плоской волны. Чтобы найти момент импульса пластины, необходимо найти момент импульса финального распределения напряжённости в поле волны (правый рисунок выше). Для этого надо окружить пластинку и поле цилиндром достаточно большого радиуса так, чтобы его боковая поверхность находилась в зоне плоской волны с постоянной амплитудой ($F = \text{const}$). Слева от пластины интегральный момент импульса равен нулю. Справа он вычисляется аналогично моменту светового пучка, однако при этом падение амплитуды волны происходит не при удалении от оси z , а при приближении к ней (тень от пластины). В итоге снова получается (7.54).

Глава 8

Кватернионы

В этой главе рассматривается ещё один подход к теории относительности. При помощи комплексных матриц 2×2 мы введём кватернионы, которые полностью эквивалентны 4-векторам. Кватернионы оказываются удобным инструментом для описания композиции преобразований Лоренца и позволяют записать уравнения Максвелла в очень изящном виде. Развитие кватернионной математики приведёт нас в следующей главе к спинорам, которые являются более общими математическими объектами по сравнению с “обычными” 4-векторами и тензорами.

8.1 Кватернионы

▷ Основным объектом теории относительности является 4-вектор $A^\nu = \{A^0, A^1, A^2, A^3\} \equiv \{A^0, \mathbf{A}\}$. Эту четвёрку чисел до сих пор мы представляли в виде столбика (или строки). Ещё одна возможность расположить четыре числа – это матрица 2×2 , имеющая 4 элемента:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A^0 + A^3 & A^1 - iA^2 \\ A^1 + iA^2 & A^0 - A^3 \end{pmatrix}, \quad (8.1)$$

где i – мнимая единица ($i^2 = -1$). Подобное положение компонент 4-вектора в элементах матрицы приводит к тому, что её определитель инвариантен относительно преобразований Лоренца:

$$\det \mathbb{A} = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2. \quad (8.2)$$

При изменении системы отсчёта элементы матрицы \mathbb{A} изменяются. Запишем это преобразование в матричном виде при помощи матрицы \mathbb{S} также размером 2×2 . Матрица \mathbb{A} *эрмитова* (не меняется при транспонировании и комплексном сопряжении: $\mathbb{A}^+ = \mathbb{A}$). Преобразованный 4-вектор в представлении (8.1) по-прежнему должен быть эрмитовым. Поэтому ($\prec H_{65}$) преобразование Лоренца выберем в виде:

$$\mathbb{A}' = \mathbb{S} \mathbb{A} \mathbb{S}^+, \quad \det \mathbb{S} = 1. \quad (8.3)$$

Определитель матрицы \mathbb{S} равен единице для обеспечения инвариантности квадрата 4-вектора $\det \mathbb{A}' = \det \mathbb{A}$ (определитель произведения равен произведению определителей матриц).

Матрица \mathbb{S} имеет 4 элемента, один из которых, при помощи уравнения $\det \mathbb{S} = 1$, может быть выражен через три остальных. Эти три элемента, вообще говоря, комплексные, поэтому существует $6 = 3 \cdot 2$ независимых действительных параметров, определяющих матрицу преобразований \mathbb{S} . Как мы увидим ниже, эти параметры связаны с компонентами скорости системы отсчёта и тремя углами, задающими её ориентацию.

Композиция двух преобразований (их последовательное выполнение) эквивалентно одному преобразованию:

$$\mathbb{A}' = \mathbb{S}_1 \mathbb{A} \mathbb{S}_1^+, \quad \mathbb{A}'' = \mathbb{S}_2 \mathbb{A}' \mathbb{S}_2^+, \quad \Rightarrow \quad \mathbb{A}'' = \mathbb{S} \mathbb{A} \mathbb{S}^+,$$

матрица которого равна произведению матриц каждого преобразования:

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_2 \mathbb{S}_1. \quad (8.4)$$

При этом порядок матриц обратный по сравнению с порядком выполненных преобразований.

▷ Матрицу (8.1) можно разложить по четырем матрицам 2x2:

$$\mathbb{A} = A^\mu \sigma_\mu = A^0 \sigma_0 + A^1 \sigma_1 + A^2 \sigma_2 + A^3 \sigma_3 = A^0 + \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}, \quad (8.5)$$

где $\sigma_0 = \mathbb{I}$ – единичная матрица, которая часто будет опускаться, а

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

называются *матрицами Паули*. Они объединяются в вектор $\boldsymbol{\sigma}$ с компонентами $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Перемножением ($\prec H_{66}$) проверяется, что матрицы Паули антисимметричны, их квадраты равны единичной матрице:

$$\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i, \quad i \neq j, \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \mathbb{I},$$

а произведения матриц снова выражаются через матрицы Паули:

$$\sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3, \quad \sigma_3 \sigma_1 = i \sigma_2, \quad \sigma_2 \sigma_3 = i \sigma_1.$$

Порядок индексов в последних двух равенствах получаются циклической перестановкой из $\sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3$. Эти соотношения эквиваленты одному, задающему алгебру матриц Паули (по k сумма от 1 до 3):

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (8.7)$$

где ε_{ijk} – антисимметричный 3-тензор Леви-Чевиты ($\varepsilon_{123} = 1$) и опущена единичная матрица в первом слагаемом. Сворачивая это соотношение с компонентами двух 3-векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , получаем ($\prec H_{67}$):

$$(\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{ab} + i [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \boldsymbol{\sigma}. \quad (8.8)$$

▷* Умножая алгебру матриц Паули (8.7) справа на матрицу σ_k и снова используя эту же алгебру, имеем:

$$\sigma_i \sigma_j \sigma_k = \delta_{ij} \sigma_k - \delta_{ik} \sigma_j + \delta_{jk} \sigma_i + i \varepsilon_{ijk}. \quad (8.9)$$

След (сумма диагональных элементов) матриц Паули равен нулю, а след единичной матрицы равен 2. Поэтому из (8.7) и (8.9) имеем:

$$\text{Tr } \sigma_i = 0, \quad \text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2 \delta_{ij}, \quad \text{Tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k) = 2 i \varepsilon_{ijk}. \quad (8.10)$$

Умножая (8.9) на σ_l и беря след, получаем:

$$\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l) = 2 (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (8.11)$$

Аналогично можно находить выражения для произведения произвольного числа матриц Паули и их следов.

▷ Произвольную матрицу 2×2 , разложенную по матрицам Паули:

$$\mathbb{Q} = Q^\mu \sigma_\mu = Q^0 + \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}, \quad (8.12)$$

будем называть *кватернионом*. Параметр Q^0 называется *скалярной* частью кватерниона, а \mathbf{Q} – *векторной*. Произведение двух кватернионов – снова является кватернионом:

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = (a_0 + \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma})(b_0 + \mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}) = a_0b_0 + \mathbf{ab} + (a_0\mathbf{b} + b_0\mathbf{a} + \imath \mathbf{a} \times \mathbf{b}) \boldsymbol{\sigma}, \quad (8.13)$$

где учтено (8.8). Умножение кватернионов (как и любых матриц) ассоциативно $(\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})$ и, в общем случае, некоммутативно:

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} + 2\imath [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \boldsymbol{\sigma}. \quad (8.14)$$

Кроме матриц σ_μ введём четыре матрицы, которые пометим чертой сверху. Они отличаются знаком у “пространственных” компонент:

$$\bar{\sigma}_\mu = \{1, -\boldsymbol{\sigma}\}, \quad \sigma_\mu = \{1, \boldsymbol{\sigma}\}. \quad (8.15)$$

Определим *сопряжённый* к \mathbb{Q} кватернион $\bar{\mathbb{Q}}$ (он всегда будет помечаться чертой сверху):

$$\bar{\mathbb{Q}} = Q^\mu \bar{\sigma}_\mu = Q^0 - \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma}. \quad (8.16)$$

Произведение кватерниона на его кватернионное сопряжение коммутирует и пропорционально единичной матрице (которая опускается):

$$\bar{\mathbb{Q}}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}\bar{\mathbb{Q}} = (Q^0)^2 - \mathbf{Q}^2 = \det \mathbb{Q} = |\mathbb{Q}|^2. \quad (8.17)$$

В частности, для матрицы преобразований Лоренца (8.3) с единичным определителем:

$$\bar{\mathbb{S}}\mathbb{S} = \mathbb{S}\bar{\mathbb{S}} = \mathbb{I}. \quad (8.18)$$

В общем случае определитель матрицы обозначается $|\mathbb{Q}|^2$ и называется *нормой кватерниона*. Обратной матрицей к \mathbb{Q} является матрица $\bar{\mathbb{Q}}/|\mathbb{Q}|^2$ и

$$|\mathbb{A}\mathbb{B}|^2 = |\mathbb{A}|^2 |\mathbb{B}|^2, \quad (8.19)$$

что следует из свойства определителя произведения матриц. В силу (8.13) справедливы следующие свойства сопряжения ($\prec H_{68}$):

$$\overline{\mathbb{A}\mathbb{B}} = \bar{\mathbb{B}}\bar{\mathbb{A}}, \quad \overline{\overline{\mathbb{A}}} = \mathbb{A}. \quad (8.20)$$

Отметим также соотношения:

$$\frac{\mathbb{A}\bar{\mathbb{B}} + \mathbb{B}\bar{\mathbb{A}}}{2} = a_0b_0 - \mathbf{ab}, \quad \frac{\mathbb{A}\bar{\mathbb{B}} - \mathbb{B}\bar{\mathbb{A}}}{2} = (b_0\mathbf{a} - a_0\mathbf{b} - \imath \mathbf{a} \times \mathbf{b}) \boldsymbol{\sigma}, \quad (8.21)$$

которые также следуют из правила произведения кватернионов (8.13).

▷* Кватернионы можно рассматривать как обобщение комплексных чисел с мнимой единицей $i^2 = -1$. Введем “обычную единицу” 1 три 3 “комплексные единицы” $\mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2, \mathbb{I}_3$, называемые *базисными кватернионами* со свойствами:

$$\mathbb{I}_1^2 = \mathbb{I}_2^2 = \mathbb{I}_3^2 = -1. \quad (8.22)$$

Пусть умножение 8 объектов: 1, \mathbb{I}_1 , \mathbb{I}_2 , \mathbb{I}_3 , -1 , $-\mathbb{I}_1$, $-\mathbb{I}_2$, $-\mathbb{I}_3$ обладает ассоциативностью, а результат их произведения снова даёт один из этих объектов (ассоциативная замкнутая алгебра). Найдем чему равно $\mathbb{I}_1 \mathbb{I}_2$. Результат не может быть равен $\pm \mathbb{I}_1$, $\pm \mathbb{I}_2$ или ± 1 . Действительно, пусть, например, $\mathbb{I}_1 \mathbb{I}_2 = \mathbb{I}_1$. Тогда, умножая слева обе части на \mathbb{I}_1 , и учитывая (8.22), получим $\mathbb{I}_2 = 1$. Однако, \mathbb{I}_2 и 1 – это различные объекты. Поэтому $\mathbb{I}_1 \mathbb{I}_2$ может быть равно только \mathbb{I}_3 или $-\mathbb{I}_3$. Выберем первый вариант:

$$\mathbb{I}_1 \mathbb{I}_2 = \mathbb{I}_3.$$

Возведём это уравнение в квадрат:

$$\mathbb{I}_1 \mathbb{I}_2 \mathbb{I}_1 \mathbb{I}_2 = \mathbb{I}_3^2 = -1$$

и умножим на $\mathbb{I}_2 \mathbb{I}_1$. Пользуясь ассоциативностью и свойствами (8.22), получаем $\mathbb{I}_1 \mathbb{I}_2 = -\mathbb{I}_2 \mathbb{I}_1$. Таким образом, произведение кватернионов *антисимметрично*, т.е при их перестановке появляется знак минус. Это свойство позволяет найти результат произведения остальных пар базисных кватернионов:

$$\mathbb{I}_3 \mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_1 \mathbb{I}_2 \mathbb{I}_1 = -\mathbb{I}_2 \mathbb{I}_1 \mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2.$$

Отсюда, возводя \mathbb{I}_2 в квадрат, приходим к выводу, что \mathbb{I}_3 и \mathbb{I}_1 также антисимметричны, и затем находим $\mathbb{I}_2 \mathbb{I}_3$ и т.д.

В результате получаются следующие значения произведений:

$$\mathbb{I}_1 \mathbb{I}_2 = \mathbb{I}_3, \quad \mathbb{I}_3 \mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2, \quad \mathbb{I}_2 \mathbb{I}_3 = \mathbb{I}_1 \quad (8.23)$$

и свойство антисимметричности произведений пар различных кватернионов:

$$\mathbb{I}_i \mathbb{I}_j = -\mathbb{I}_j \mathbb{I}_i, \quad i \neq j. \quad (8.24)$$

Символы Леви-Чевиты и Кронекера позволяют соотношения (8.22)-(8.24) объединить в одно:

$$\mathbb{I}_i \mathbb{I}_j = -\delta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \mathbb{I}_k, \quad (8.25)$$

где по k подразумевается суммирование от 1 до 3. Если индексы i и j одинаковы, символ Леви-Чевиты равен нулю, а символ Кронекера единице. Поэтому, получаются соотношения для квадратов (8.22). При различных индексах, символ Кронекера равен нулю и получаются (8.23). Например: $\mathbb{I}_1 \mathbb{I}_2 = \varepsilon_{12k} \mathbb{I}_k = \varepsilon_{123} \mathbb{I}_3 = \mathbb{I}_3$. Антисимметричность символа Леви-Чевиты приводит к свойству (8.24).

8.2 Ковариантные обозначения *

▷ Учитывая значения следов 3-мерных матриц Паули (8.10) несложно записать следы для ковариантных матриц:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Tr} \sigma_\mu = \delta_{\mu 0}, \quad \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma_\mu \sigma_\nu) = \delta_{\mu \nu}, \quad \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu) = g_{\mu \nu}. \quad (8.26)$$

Для этих матриц также справедливы соотношения (8.20), поэтому остальные следы получаются кватернионным сопряжением этих тождеств.

Будем различать высоту индекса у “ковариантных” матриц Паули. Его поднятие проводится тензором $g^{\mu\nu} = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$, меняя знак у векторных компонент: $\sigma^\mu = g^{\mu\nu} \sigma_\nu$. Коэффициенты в разложении кватерниона $\mathbb{Q} = Q^\mu \sigma_\mu$ по матрицам Паули можно найти при помощи следа:

$$Q^\mu = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\mathbb{Q} \bar{\sigma}^\mu). \quad (8.27)$$

Для ковариантных матриц Паули справедливо соотношение:

$$\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu = \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu + \bar{\sigma}_\nu \sigma_\mu = 2 g_{\mu \nu} \quad (8.28)$$

и произведение кватернионов $\mathbb{A}\bar{\mathbb{B}}$ можно записать в следующем виде:

$$\mathbb{A}\bar{\mathbb{B}} = a^\mu b^\nu \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + a^\mu b^\nu \sigma_{\mu \nu}, \quad (8.29)$$

где $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^0 b^0 - \mathbf{a}\mathbf{b}$ и во втором равенстве введены 16 матриц ($\mu \nu$ – номера матриц, а не их компоненты):

$$\sigma_{\mu \nu} = \frac{1}{2} (\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu), \quad \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu = g_{\mu \nu} + \sigma_{\mu \nu}. \quad (8.30)$$

▷ Прямым перемножением трёх произвольных кватернионов $\mathbb{A}\bar{\mathbb{B}}\mathbb{C}$ и опусканием их компонент, можно ($\lessdot H_{69}$) получить:

$$\sigma_\alpha \bar{\sigma}_\beta \sigma_\gamma = g_{\alpha\beta} \sigma_\gamma - g_{\alpha\gamma} \sigma_\beta + g_{\beta\gamma} \sigma_\alpha + i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} \sigma^\mu. \quad (8.31)$$

Умножая (8.31) на $\bar{\sigma}_\nu$, беря след и учитывая (8.26), имеем:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma_\alpha \bar{\sigma}_\beta \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu) = g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} + i \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (8.32)$$

▷ Подставим (8.27) в $\mathbb{Q} = Q^\mu \sigma_\mu$ и выпишем явно матричные индексы:

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} Q_{lk} (\bar{\sigma}^\mu)_{kl} (\sigma_\mu)_{ij}$$

Выберем матрицу у которой отличны от нуля все элементы кроме одного, равного единице. Пусть этот элемент имеет индексы $i = i_0$ и $j = j_0$, где i_0, j_0 – фиксированные числа. Тогда $Q_{ij} = \delta_{ii_0} \delta_{jj_0}$ и, следовательно:

$$\delta_{ii_0} \delta_{jj_0} = \frac{1}{2} (\sigma_\mu)_{ij} (\bar{\sigma}^\mu)_{j_0 i_0}. \quad (8.33)$$

Это тождество называется *соотношением полноты* (по μ – сумма!).

▷ Кватернионные обозначения удобны также для работы с антисимметричными 4-тензорами. Рассмотрим в качестве примера кватернион момента импульса $L^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$. Введём кватернионы 4-координаты $\mathbb{X} = t + \mathbf{r}\sigma$ и 4-импульса $\mathbb{P} = E + \mathbf{p}\sigma$ и определим следующий кватернион с нулевой скалярной и комплексной векторной частью:

$$\mathbb{L} = \frac{1}{2} (\mathbb{X}\bar{\mathbb{P}} - \mathbb{P}\bar{\mathbb{X}}) = L^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} L^{\mu\nu} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu = (\mathbf{G} - i\mathbf{L}) \boldsymbol{\sigma}, \quad (8.34)$$

где при помощи (8.21) введены два 3-вектора (стр. V₁:232): $\mathbf{G} = E \mathbf{r} - t \mathbf{p}$ и $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Они служат компонентами антисимметричного тензора:

$$\mathbf{G} = \{L^{10}, L^{20}, L^{30}\}, \quad \mathbf{L} = \{L^{23}, L^{31}, L^{12}\}.$$

Из тензора $L_{\mu\nu} = (-\mathbf{G}, \mathbf{L})$ можно построить *дualный* к нему антисимметричный тензор (стр. V₁:231) с компонентами

$${}^*L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} L_{\alpha\beta} = (\mathbf{L}, -\mathbf{G}).$$

На языке кватернионов он получается простым умножением \mathbb{L} на единицу:

$$i\mathbb{L} = (\mathbf{L} + i\mathbf{G}) \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} {}^*L^{\mu\nu} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu = {}^*L^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}. \quad (8.35)$$

Свёртка тензора $L^{\mu\nu} = (\mathbf{G}, \mathbf{L})$ и произвольного 4-вектора $A_\nu = \{A^0, -\mathbf{A}\}$ даёт 4-вектор с компонентами: $\{\mathbf{GA}, A^0\mathbf{G} + \mathbf{L} \times \mathbf{A}\}$. Перемножением кватернионов, получаем, что такие же компоненты имеет кватернион:

$$\frac{1}{2} (\mathbb{L}\mathbb{A} + \mathbb{A}\mathbb{L}^+) = L^{\mu\nu} A_\nu \sigma_\mu. \quad (8.36)$$

Найдём как преобразуется кватернион момента импульса (и, следовательно, любой антисимметричный 4-тензор) при преобразованиях Лоренца. Так как \mathbb{X} и \mathbb{P} кватернионы, связанные с 4-векторами, имеем:

$$\mathbb{X}'\bar{\mathbb{P}'} = \mathbb{S}\mathbb{X}\mathbb{S}^+ \bar{\mathbb{S}}\bar{\mathbb{P}}\bar{\mathbb{S}}^+ = \mathbb{S}\mathbb{X}\mathbb{S}^+ \bar{\mathbb{S}}^+ \bar{\mathbb{P}}\bar{\mathbb{S}} = \mathbb{S}(\mathbb{X}\bar{\mathbb{P}})\bar{\mathbb{S}},$$

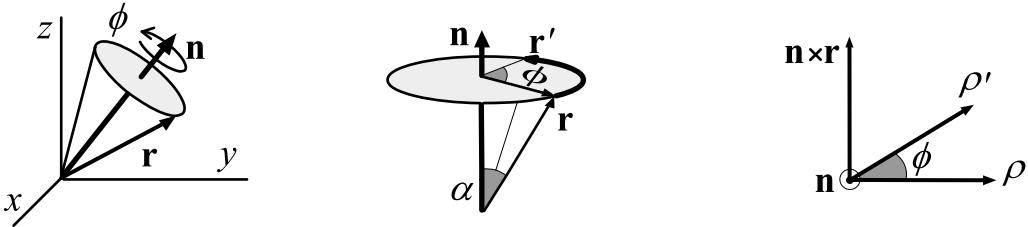
где учтено, что (8.18) или $\mathbb{S}^+ \bar{\mathbb{S}}^+ = \mathbb{I}$. Аналогично для $\mathbb{P}\bar{\mathbb{X}}$. Поэтому:

$$\mathbb{L}' = \mathbb{S}\mathbb{L}\bar{\mathbb{S}}. \quad (8.37)$$

Этот закон отличается от закона преобразования (8.3) и справа стоит не эрмитово, а кватернионно сопряженный кватернион \mathbb{S} (с чертой). Норма $\bar{\mathbb{L}}\mathbb{L} = \mathbf{L}^2 - \mathbf{G}^2 + 2i\mathbf{LG}$ по-прежнему является инвариантом ($\lessdot H_{72}$), действительная и мнимая части которого дают хорошо известные инварианты антисимметричного тензора.

8.3 Вращения в 3-пространстве

- Найдем выражение для матрицы поворота на угол ϕ вокруг произвольно направленного единичного вектора \mathbf{n} . Пусть с телом, вращающимся вокруг оси \mathbf{n} (ниже первый рисунок) жестко связан некоторый вектор \mathbf{r} . При повороте на угол ϕ он переходит в вектор \mathbf{r}' , скользя по перевёрнутому конусу (второй рисунок):



Обозначим проекцию \mathbf{r} на основание конуса через $\boldsymbol{\rho}$, а проекцию \mathbf{r}' через $\boldsymbol{\rho}'$. Их длины одинаковы, и вектор $\boldsymbol{\rho}$, в результате поворота на угол ϕ , переходит в $\boldsymbol{\rho}'$. Введём вектор $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$, лежащий в основании конуса перпендикулярно $\boldsymbol{\rho}$ (см. "вид сверху" на третьем рисунке). Его длина равна $|\mathbf{n} \times \mathbf{r}| = r \sin \alpha = |\boldsymbol{\rho}|$ (второй рисунок), поэтому $\boldsymbol{\rho}'$ можно разложить по двум перпендикулярным векторам, имеющим одинаковую длину:

$$\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho} \cos \phi + [\mathbf{n} \times \mathbf{r}] \sin \phi.$$

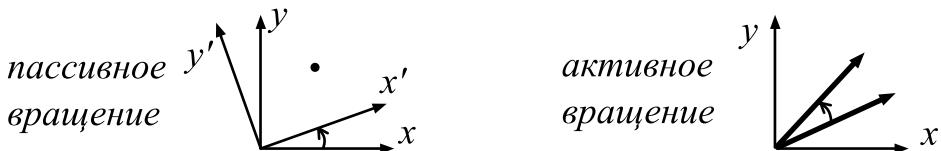
С другой стороны, векторы \mathbf{r} и \mathbf{r}' можно разложить следующим образом:

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{n} (\mathbf{n} \boldsymbol{\rho}), \quad \mathbf{r}' = \boldsymbol{\rho}' + \mathbf{n} (\mathbf{n} \boldsymbol{\rho}'), \quad (8.38)$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{n} \boldsymbol{\rho})$ направлен вдоль \mathbf{n} и равен высоте конуса. В результате, учитывая, что $\mathbf{r}' \mathbf{n} = \mathbf{r} \mathbf{n}$, получаем:

$$\mathbf{r}' = \boldsymbol{\rho} \cos \phi + [\mathbf{n} \times \mathbf{r}] \sin \phi + \mathbf{n} (\mathbf{n} \boldsymbol{\rho}). \quad (8.39)$$

▷ Принято различать *пассивные* и *активные* повороты. В первом случае сравниваются координаты одной и той же *фиксированной точки* пространства в двух системах координат (x, y, z) и (x', y', z') , повернутых относительно друг друга на угол ϕ . При активных вращениях рассматриваются координаты некоторого вектора, после *его* поворота относительно одной и той же системы координат:



Для пространственных вращений, как и преобразований Лоренца, будет использоваться пассивная интерпретация.

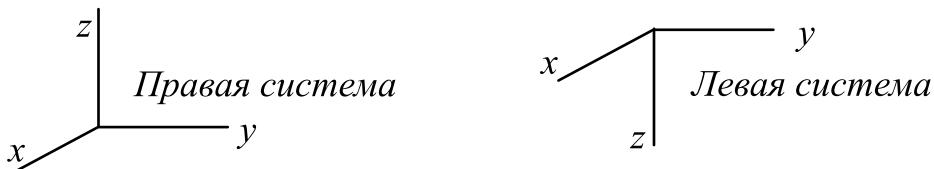
▷ Поворот тела на угол ϕ относительно неподвижной системы координат эквивалентен повороту системы координат при неподвижном теле на угол $-\phi$. Поэтому, делая в (8.38) замену $\phi \mapsto -\phi$ и меняя порядок векторов в векторном произведении, а также выражая ρ через \mathbf{r} при помощи первого соотношения (8.38), окончательно, получаем:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \phi + \mathbf{n} (\mathbf{n} \mathbf{r}) (1 - \cos \phi) - [\mathbf{n} \times \mathbf{r}] \sin \phi. \quad (8.40)$$

Пусть вектор \mathbf{n} направлен вдоль оси z . Тогда компоненты единичного вектора имеют значения $\mathbf{n} = \{0, 0, 1\}$. Записывая $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ и аналогично со штрихами, из (8.40) получаем преобразование (стр. V₁:194) для вращения в плоскости (x, y) :

$$\begin{cases} x' = x \cos \phi + y \sin \phi, \\ y' = y \cos \phi - x \sin \phi. \end{cases}$$

▷ Напомним, что при описании вращения используется правило правого винта (штопора). Этот винт вкручивается на угол ϕ в направлении оси \mathbf{n} и его поворот показывает направление вращения системы координат. Различают правые и левые системы координат:



В книге используется правая система. В этой системе ось z получается при помощи того же правого винта, если его рукоятку поворачивать от оси x к оси y в направлении z . В 3-мерном пространстве левая система координат получается из правой в результате инверсии (обращении) одной или трёх осей. После такой операции, ни каким поворотом нельзя совместить оси левой и правой систем координат.

▷ Соотношение (8.40) можно записать в матричном виде для преобразования (по j сумма)

$$x'_i = R_{ij} x_j, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{R} \mathbf{r}$$

при помощи символа Кронекера δ_{ij} и тензора Леви-Чивиты:

$$R_{ij} = \delta_{ij} \cos \phi + n_i n_j (1 - \cos \phi) + \varepsilon_{ijk} n_k \sin \phi \quad (8.41)$$

(по k -сумма и $\mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$). Эта матрица в общем случае не обладает симметрией, но является *ортогональной*:

$$\mathbf{R} \mathbf{R}^T = 1,$$

что следует из инвариантности длины радиус-вектора $\mathbf{r}'^2 = \mathbf{r}^2$.

• Применим теперь для описания вращения декартовой системы координат кватернионы. Пусть снова поворот осуществляется вокруг единичного вектора \mathbf{n} на угол ϕ . Определим следующий кватернион:

$$\mathbb{R} = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} = \exp\left\{i \frac{\phi}{2} \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}\right\}. \quad (8.42)$$

Второе равенство получается разложением экспоненты в ряд Тейлора. Из тождества (8.8) следует, что для единичного вектора $(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})^2 = \mathbb{I}$, поэтому $(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})^3 = \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$ и т.д.:

$$\exp\left\{i \frac{\phi}{2} \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}\right\} = 1 + i \frac{\phi}{2} \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 - \frac{i}{3!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^3 \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{4!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^4 + \dots$$

Учитывая разложения для \sin и \cos , получаем (8.42). Кватернион \mathbb{R} имеет действительную скалярную часть и чисто мнимую векторную, поэтому $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^+$. Норма (определитель) этого кватерниона равна единице (8.18). Кроме этого он *унитарен*:

$$\mathbb{R}\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+\mathbb{R} = \mathbb{I}. \quad (8.43)$$

При помощи компонент радиус вектора $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ и времени t определим кватернион 4-координат и найдём результат его преобразования:

$$\mathbb{X} = t + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbb{X}' = \mathbb{R}\mathbb{X}\mathbb{R}^+. \quad (8.44)$$

Пусть $c = \cos(\phi/2)$, $s = \sin(\phi/2)$. Произведение $\mathbb{R}\mathbb{X}\mathbb{R}^+$ вычислим при помощи (8.14), переставив местами кватернионы \mathbb{R} и \mathbb{X} , учитя свойство унитарности (8.43):

$$\mathbb{X}' = (\mathbb{X}\mathbb{R} + 2i^2 s [\mathbf{n} \times \mathbf{r}] \boldsymbol{\sigma}) \mathbb{R}^+ = \mathbb{X} - 2s [\mathbf{n} \times \mathbf{r}] \boldsymbol{\sigma} (c - is \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}).$$

Перемножим скобки при помощи (8.8):

$$\mathbb{X}' = \mathbb{X} - 2sc [\mathbf{n} \times \mathbf{r}] \boldsymbol{\sigma} - 2s^2 [[\mathbf{n} \times \mathbf{r}] \times \mathbf{n}] \boldsymbol{\sigma}$$

и, раскрыв двойное векторное произведение $[\mathbf{n} \times \mathbf{r}] \times \mathbf{n} = \mathbf{r} - \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{r})$, окончательно, получим:

$$t' + \mathbf{r}'\boldsymbol{\sigma} = t + ((1 - 2s^2) \mathbf{r} + 2s^2 \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{r}) - 2sc [\mathbf{n} \times \mathbf{r}]) \boldsymbol{\sigma}.$$

Скалярная часть кватерниона \mathbb{X} не меняется: $t' = t$. Это происходит благодаря унитарности матрицы \mathbb{R} , так как скалярная часть преобразованного вектора пропорциональна $\text{Tr}(\mathbb{R}\mathbb{X}\mathbb{R}^+) = \text{Tr}(\mathbb{X}\mathbb{R}^+\mathbb{R}) = \text{Tr}(\mathbb{X})$. Изменение векторной части (после применения тригонометрических тождеств) соответствует повороту системы координат (8.40).

▷ Запишем явный вид кватерниона поворотов \mathbb{R} :

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} c_{\phi/2} + i n_z s_{\phi/2} & i(n_x - i n_y) s_{\phi/2} \\ i(n_x + i n_y) s_{\phi/2} & c_{\phi/2} - i n_z s_{\phi/2} \end{pmatrix},$$

где $s_{\phi/2} = \sin(\phi/2)$ и $c_{\phi/2} = \cos(\phi/2)$. Прямым вычислением несложно проверить, что определитель этой матрицы равен (множество матриц \mathbb{R} принадлежит к группе $\mathbf{SU}(2)$ – специальных унитарных матриц 2×2 , стр. ??).

Стоит сравнить преобразование $\mathbb{X}' = \mathbb{R} \mathbb{X} \mathbb{R}^+$ с преобразованием (8.41), записанном в явном матричном виде:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} c_\phi + n_x^2(1 - c_\phi) & n_x n_y (1 - c_\phi) + n_z s_\phi & n_x n_z (1 - c_\phi) - n_y s_\phi \\ n_y n_x (1 - c_\phi) - n_z s_\phi & c_\phi + n_y^2(1 - c_\phi) & n_y n_z (1 - c_\phi) + n_x s_\phi \\ n_z n_x (1 - c_\phi) + n_y s_\phi & n_z n_y (1 - c_\phi) - n_x s_\phi & c_\phi + n_z^2(1 - c_\phi) \end{pmatrix},$$

где $s_\phi = \sin \phi$ и $c_\phi = \cos \phi$. Матрица вращения 3×3 выглядит более громоздкой, однако, при преобразовании вектора требуется только умножение матрицы на столбец. Кватернионные матрицы вращения 2×2 проще, но для получения преобразованного кватерниона необходимо выполнить два матричных умножения. Отметим также разницу в аргументах тригонометрических функций обоих матриц. Если в \mathbf{R} они зависят от угла поворота ϕ , то в кватернионе \mathbb{R} стоит половинный угол $\phi/2$.

▷ Преимущества кватернионной техники проявляются при рассмотрении композиции преобразований (8.4), стр. 210. Пусть кватернионы равны $\mathbb{R}_2 = c_2 + i s_2 \mathbf{n}_2 \boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbb{R}_1 = c_1 + i s_1 \mathbf{n}_1 \boldsymbol{\sigma}$, где $c_i = \cos(\phi_i/2)$ и т.д. Их произведение снова является *поворотом* с кватернионом:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_2 \mathbb{R}_1 = c_1 c_2 - s_1 s_2 (\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) + i (s_1 c_2 \mathbf{n}_1 + c_1 s_2 \mathbf{n}_2 + s_1 s_2 [\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2]) \boldsymbol{\sigma}.$$

Записывая результат как $\mathbb{R} = \cos(\phi/2) + i \sin(\phi/2) \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma}$, несложно выразить итоговый угол поворота ϕ и ось \mathbf{n} через углы и оси исходных поворотов. В частности:

$$\cos \frac{\phi}{2} = \cos \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} + (1 - \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \sin \frac{\phi_1}{2} \sin \frac{\phi_2}{2}. \quad (8.45)$$

Стоит получить это соотношение непосредственно из (8.40), чтобы в полной мере ощутить преимущество кватернионов перед матрицами 3×3 при выполнении композиции преобразований. Из (8.45) следует, что углы последовательных поворотов складываются только, если оси этих поворотов параллельны: $\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 = 1$. Последовательность поворотов важна, и в общем случае $\mathbb{R}_1 \mathbb{R}_2 \neq \mathbb{R}_2 \mathbb{R}_1$.

8.4 Преобразования Лоренца

▷ Перейдём теперь к преобразованиям Лоренца. Используя гиперболические косинус, синус и единичный вектор $\mathbf{m}^2 = 1$, определим кватернион *лоренцевского буста* (преобразования Лоренца без вращения):

$$\mathbb{L} = \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \mathbf{m}\boldsymbol{\sigma} = \exp\left\{-\frac{\alpha}{2} \mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}\right\}. \quad (8.46)$$

Представление экспоненты при помощи гиперболических функций проверяется также как и для 3-вращения (8.42). Кватернион буста \mathbb{L} , аналогично кватерниону поворотов \mathbb{R} , имеет *единичную норму*, так как

$$\mathbb{L}\bar{\mathbb{L}} = (c - s \mathbf{m}\boldsymbol{\sigma})(c + s \mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}) = (c^2 - s^2) = 1$$

(сейчас $c = \operatorname{ch}(\alpha/2)$ и аналогично s). Отсутствие мнимой единицы в векторной части приводит к тому, что матрица \mathbb{L} неунитарна:

$$\mathbb{L}\mathbb{L}^+ = \mathbb{L}^2 = (c - s \mathbf{m}\boldsymbol{\sigma})^2 = (c^2 + s^2) - 2sc \mathbf{m}\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{ch}(\alpha) - \operatorname{sh}(\alpha) \mathbf{m}\boldsymbol{\sigma} \neq \mathbb{I}.$$

Запишем преобразование $\mathbb{X}' = \mathbb{L}\mathbb{X}\mathbb{L}^+$ для $\mathbb{X} = t + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}$:

$$t' + \mathbf{r}'\boldsymbol{\sigma} = (c - s \mathbf{m}\boldsymbol{\sigma})(t + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma})(c - s \mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}).$$

Перемножая с сохранением порядка сомножителей (матрицы!) и пользуясь тождеством (8.8), получаем:

$$\mathbb{X}' = (c^2 + s^2)t - 2sc(\mathbf{r}\mathbf{m}) + c^2 \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma} - 2sct \mathbf{m}\boldsymbol{\sigma} + s^2(\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{r}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}).$$

Ещё раз дважды применяя (8.8) и раскрывая двойное векторное произведение, получаем: $(\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{r}\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}) = 2(\mathbf{m}\mathbf{r})(\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}$, поэтому:

$$t' + \mathbf{r}'\boldsymbol{\sigma} = (c^2 + s^2)t - 2sc(\mathbf{m}\mathbf{r}) + (c^2 - s^2)\mathbf{r}\boldsymbol{\sigma} - 2cst \mathbf{m}\boldsymbol{\sigma} + 2s^2(\mathbf{m}\mathbf{r})(\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}).$$

Приравнивая скалярные и векторные части и учитывая гиперболические тождества двойного угла (стр. V₁:322), приходим к преобразованиям Лоренца:

$$t' = t \operatorname{ch} \alpha - (\mathbf{m}\mathbf{r}) \operatorname{sh} \alpha, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - t \mathbf{m} \operatorname{sh} \alpha + (\operatorname{ch} \alpha - 1)(\mathbf{m}\mathbf{r}) \mathbf{m}. \quad (8.47)$$

Преобразования (4.3), стр. 92 получаются после переобозначений:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad \operatorname{ch} \alpha = \gamma, \quad \mathbf{m} \operatorname{sh} \alpha = \mathbf{v} \gamma, \quad v = \operatorname{th} \alpha, \quad (8.48)$$

где, как обычно, $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$, и α называется *быстротой*:

$$\alpha = \operatorname{ath} v = \frac{1}{2} \ln \frac{1+v}{1-v}. \quad (8.49)$$

Нулевая скорость $v = 0$ соответствует нулевой быстроте, а единичная (скорость света) имеет бесконечную быстроту.

▷ Рассмотрим два последовательных лоренцевских буста $\mathbb{L}_2 \mathbb{L}_1$ (сначала \mathbb{L}_1 , затем \mathbb{L}_2), где $\mathbb{L}_2 = c_2 - s_2 \mathbf{m}_2 \boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbb{L}_1 = c_1 - s_1 \mathbf{m}_1 \boldsymbol{\sigma}$:

$$\mathbb{S} = \mathbb{L}_2 \mathbb{L}_1 = c_1 c_2 + (\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2) s_1 s_2 - (\mathbf{m}_1 s_1 c_2 + \mathbf{m}_2 c_1 s_2 + i [\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2] s_1 s_2) \boldsymbol{\sigma}$$

(как обычно $c_1 = \text{ch}(\alpha_1/2)$, и т.д.). Векторная часть \mathbb{S} , при $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 \neq 0$ не является действительной. Поэтому это не лоренцевский буст (8.46). Тем не менее, его можно разложить на композицию буста (8.46) и пространственного вращения (8.42), например, таким образом (сначала буст, затем поворот):

$$\mathbb{L}_2 \mathbb{L}_1 = \mathbb{R} \mathbb{L}. \quad (8.50)$$

Найдем произведение вращения $\mathbb{R} = c_\phi + i s_\phi \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma}$ и буста $\mathbb{L} = c_\alpha - s_\alpha \mathbf{m} \boldsymbol{\sigma}$, где $c_\alpha = \text{ch}(\alpha/2)$, $c_\phi = \cos(\phi/2)$:

$$\mathbb{S} = \mathbb{R} \mathbb{L} = c_\alpha c_\phi - i \mathbf{n} \mathbf{m} s_\alpha s_\phi + (i \mathbf{n} c_\alpha s_\phi - \mathbf{m} s_\alpha c_\phi - [\mathbf{m} \times \mathbf{n}] s_\alpha s_\phi) \boldsymbol{\sigma}. \quad (8.51)$$

Этот кватернион совпадёт с $\mathbb{L}_2 \mathbb{L}_1$ (имеющего действительную скалярную часть), если итоговая скорость и ось вращения будут *перпендикулярны* друг другу ($\mathbf{n} \mathbf{m} = 0$). Кроме этого должны выполняться соотношения:

$$\begin{aligned} c_\alpha c_\phi &= c_1 c_2 + (\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2) s_1 s_2, & \mathbf{n} c_\alpha s_\phi &= -[\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2] s_1 s_2, \\ \mathbf{m} s_\alpha c_\phi + [\mathbf{m} \times \mathbf{n}] s_\alpha s_\phi &= \mathbf{m}_1 s_1 c_2 + \mathbf{m}_2 c_1 s_2. \end{aligned} \quad (8.52)$$

Теперь несложно получить связь между параметрами исходных бустов и эквивалентного им буста и поворота. Для этого введём $\mathbf{m} \operatorname{sh} \alpha = \mathbf{v} \gamma$, и аналогично с индексами для \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 . Так как векторы \mathbf{n} и \mathbf{m} единичные и перпендикулярные, то $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ также является единичным вектором. Возводя в квадрат третье соотношение (8.52), получим выражение для γ . Если умножить третье соотношение векторно на \mathbf{n} , и с его же помощью исключить $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$, то получится выражение для вектора \mathbf{m} . В результате параметры суммарного буста \mathbb{L} равны ($\lessdot H_{73}$):

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 (1 + \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2), \quad \mathbf{v} \frac{\gamma}{\gamma_2} = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \gamma_1 + \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2) \frac{\gamma_1 - 1}{v_1^2}. \quad (8.53)$$

Из второго соотношения (8.52) следует, что при $s_\phi > 0$ единичный вектор вдоль оси вращения равен $\mathbf{n} = -[\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]/|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|$. Перемножая первое и второе соотношения (8.52), получим выражение для угла ($\lessdot H_{74}$):

$$\mathbf{n} \sin \phi = -[\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2] \frac{\gamma_1 \gamma_2 (1 + \gamma + \gamma_1 + \gamma_2)}{(1 + \gamma)(1 + \gamma_1)(1 + \gamma_2)}. \quad (8.54)$$

Угол поворота ϕ называется *углом Вигнера*, а формулу для него в таком виде получил Стапп в 1956 г. [46]. Заметим, что всегда $\phi < \pi/2$.

▷ Произведение двух бустов можно также разложить и в обратную последовательность (сначала выполняется поворот системы координат, затем происходит переход в новую систему отсчёта – буст):

$$\mathbb{L}_2 \mathbb{L}_1 = \mathbb{L} \mathbb{R}. \quad (8.55)$$

Выражение для угла поворота ϕ и оси вращения \mathbf{n} (8.54) в этом случае не изменяется. Не поменяется также модуль скорости итогового буста \mathbb{L} (или лоренцевский фактор γ). Однако в выражении для вектора скорости произойдёт перестановка индексов 1 и 2 ($\ll H_{75}$):

$$\mathbf{v} \frac{\gamma}{\gamma_1} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \gamma_2 + \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1) \frac{\gamma_2 - 1}{v_2^2}. \quad (8.56)$$

Поэтому последовательность буста и поворота важна, и в общем случае:

$$\mathbb{L} \mathbb{R} \neq \mathbb{R} \mathbb{L}, \quad (8.57)$$

так как параметры \mathbb{L} слева и справа должны быть различными. Это свойство является отражением неабелевости группы Лоренца (стр. ??).

Обратим внимание, что при перемножении кватернионов вращения $\mathbb{R} = \exp(i\phi \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}/2)$ и буста $\mathbb{L} = \exp(-\alpha \mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}/2)$ нельзя складывать показатели экспонент (матрицы $\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}$ в общем случае не коммутируют).

▷ Любой кватернион $\mathbb{S} = S_0 + \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}$ с единичной нормой ($\mathbb{S}\bar{\mathbb{S}} = \bar{\mathbb{S}}\mathbb{S} = \mathbb{I}$) и комплексными коэффициентами всегда можно разложить на буст и вращение (с вообще говоря *неортогональными* осями $\mathbf{n}\mathbf{m} \neq 0$). Для этого необходимо воспользоваться (8.51):

$$S_0 = c_\alpha c_\phi - i \mathbf{n}\mathbf{m} s_\alpha s_\phi, \quad \mathbf{S} = i \mathbf{n} c_\alpha s_\phi - \mathbf{m} s_\alpha c_\phi - [\mathbf{m} \times \mathbf{n}] s_\alpha s_\phi$$

и выразить единичные векторы \mathbf{n} , \mathbf{m} и параметры ϕ , α через действительную и мнимую части кватерниона \mathbb{S} :

$$\mathbf{n} \frac{s_\phi}{c_\phi} = \frac{\mathbf{S}_I}{S_{0R}}, \quad c_\alpha = \frac{S_{0R}}{c_\phi}, \quad \mathbf{m} s_\alpha = [\mathbf{S}_R \times \mathbf{n}] s_\phi - \mathbf{S}_R c_\phi - \mathbf{n} S_{0I} s_\phi,$$

где \mathbf{S}_R , \mathbf{S}_I – действительная и мнимая части вектора \mathbf{S} , и т.д.

▷ При помощи произвольного кватерниона с единичной нормой можно представить кватернион лоренцевского буста в виде:

$$\mathbb{L} = \frac{\mathbb{K} + \mathbb{K}^+}{|\mathbb{I} + \mathbb{K}\bar{\mathbb{K}}^+|}, \quad \mathbb{K}\bar{\mathbb{K}} = \mathbb{I}.$$

Его эрмитовость очевидна, а единичность нормы $\mathbb{L}\bar{\mathbb{L}} = \mathbb{I}$ проверяется прямым перемножением ($\ll H_{76}$). Записав $\mathbb{K} = \mathbb{R}\mathbb{L}$ несложно найти кватернион $\mathbb{R} = \mathbb{K}\bar{\mathbb{L}}$ ($\ll H_{77}$). Однако это не кватернион вращения, т.к. его векторная часть, вообще говоря, не является чисто мнимой.

▷* Найдём связь матрицы 2×2 преобразования (8.3) с матрицей 4×4 “обычных” преобразований Лоренца для 4-векторов:

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu, \quad A^\beta = A'^\mu \Lambda_\mu{}^\beta.$$

Свёртка двух лоренцевских матриц по первым или по вторым индексам равна метрическому тензору (свойство ортогональности, стр. V₁):209):

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}, \quad g^{\alpha\beta} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g^{\mu\nu}. \quad (8.58)$$

Из закона преобразования кватерниона (8.3), связанного с компонентами 4-вектора (8.1) следует:

$$\mathbb{A}' = \mathbb{S} \mathbb{A} \mathbb{S}^+ \Rightarrow A'^\nu \sigma_\nu = \Lambda^\nu{}_\mu A^\mu \sigma_\nu = \mathbb{S} A^\mu \sigma_\mu \mathbb{S}^+.$$

В силу произвольности компонент 4-вектора, получаем связь кватернионной матрицы преобразования \mathbb{S} и лоренцевской матрицы:

$$\mathbb{S} \sigma_\mu \mathbb{S}^+ = \sigma_\nu \Lambda^\nu{}_\mu. \quad (8.59)$$

Свернём это выражение с $\Lambda_\alpha{}^\mu$ и умножим слева на $\bar{\mathbb{S}}$, а справа на $\bar{\mathbb{S}}^+$:

$$\bar{\mathbb{S}} \mathbb{S} \Lambda_\alpha{}^\mu \sigma_\mu \mathbb{S}^+ \bar{\mathbb{S}}^+ = \bar{\mathbb{S}} \sigma_\nu \bar{\mathbb{S}}^+ \Lambda^\nu{}_\mu \Lambda_\alpha{}^\mu.$$

Учитывая единичность определителя матрицы \mathbb{S} , т.е. $\bar{\mathbb{S}} \mathbb{S} = \mathbb{I}$, см. (8.17) и ортогональность (8.58), получаем связь матриц в ещё одном виде:

$$\bar{\mathbb{S}} \sigma_\alpha \bar{\mathbb{S}}^+ = \Lambda_\alpha{}^\mu \sigma_\mu. \quad (8.60)$$

▷* Запишем явную зависимость матрицы $\Lambda^\alpha{}_\beta$ от параметров s^ν кватерниона преобразований $\mathbb{S} = s^\nu \sigma_\mu$. Для этого возьмём кватернионное сопряжение (8.60) и учтём эрмитовость матриц σ_μ :

$$\Lambda_\alpha{}^\mu \bar{\sigma}_\mu = \mathbb{S}^+ \bar{\sigma}_\alpha \mathbb{S} = s^{*\mu} s^\nu \sigma_\mu \bar{\sigma}_\alpha \sigma_\nu.$$

Умножим это соотношение справа на $\bar{\sigma}_\beta$ и возьмём след от левой и правой частей равенства:

$$\Lambda_\alpha{}^\mu \text{Tr}(\bar{\sigma}_\mu \bar{\sigma}_\beta) = s^{*\mu} s^\nu \text{Tr}(\sigma_\mu \bar{\sigma}_\alpha \sigma_\nu \bar{\sigma}_\beta).$$

Воспользовавшись значением следов (8.26), (8.32), окончательно имеем:

$$\Lambda_\alpha{}^\beta = s_\alpha^* s_\beta + s_\beta^* s_\alpha - g_{\alpha\beta} s_\mu^* s^\mu + \imath \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} s^\mu s^{*\nu}. \quad (8.61)$$

Так как след матриц $\bar{\sigma}_\mu \bar{\sigma}_\beta$ пропорционален $\delta_{\mu\beta}$, а не $g_{\mu\beta}$ это соотношение имеет не вполне ковариантный вид. Однако его значения для конкретных индексов является верным. В качестве упражнения (<Н₇₁) предлагаются выписать в явном виде коэффициенты $\Lambda^\beta{}_\alpha$ и выяснить, когда они являются симметричными: $\Lambda^\beta{}_\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta$.

8.5 Кватернионная электродинамика

Уравнения электродинамики в оригинальных работах Джеймса Клерка Максвелла имели достаточно громоздкий внешний вид, так как записывались в не векторных обозначениях. Вместо значков дивергенции и ротора использовались частные производные и каждое уравнение выписывалось покомпонентно. Благодаря Оливеру Хевисайду эти уравнения приобрели существенно более компактный и привычный нам вид, сократившись с восьми уравнений до четырех. После появления теории относительности, Герман Минковский придумал как записать уравнения электродинамики в ещё более компактной форме, уменьшив их количество с четырех до двух. Кватернионы дают нам замечательную возможность свести все уравнения Максвелла только к *одному* матричному уравнению:

$$\bar{\mathbb{D}} \mathbb{F} = 4\pi \bar{\mathbb{J}}. \quad (8.62)$$

Разберемся с входящими в него величинами. Кватернион тока \mathbb{J} и производной \mathbb{D} определяются следующим образом:

$$\mathbb{J} = \rho + \mathbf{j} \boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbb{D} = \partial_0 - \boldsymbol{\sigma} \nabla. \quad (8.63)$$

Обратим внимание на различие знаков в векторной части для \mathbb{J} и \mathbb{D} . Так как с любым 4-вектором $A^\nu = \{A^0, \mathbf{A}\}$ мы связываем кватернион $\mathbb{A} = A^0 + \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}$, а пространственные компоненты 4-вектора $\partial^\nu = \{\partial_0, -\nabla\}$ содержат знак минус, он появляется и в векторной части кватерниона \mathbb{D} . Третья величина, входящая в уравнение (8.62) является кватернионом напряженности электромагнитного поля:

$$\mathbb{F} = (\mathbf{E} + i \mathbf{B}) \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu = F^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}. \quad (8.64)$$

где \mathbf{E} – электрическое и \mathbf{B} – магнитное поля. Это кватернион соответствует антисимметричному тензору $F^{\mu\nu}$.

Любое матричное уравнение $A_0 + \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} = 0$ эквивалентно $A_0 = 0$ и $\mathbf{A} = 0$. Действительно, беря след уравнения и учитывая, что $\text{Tr } \boldsymbol{\sigma} = 0$, получаем $A_0 = 0$. Умножая уравнение на σ_i и беря след, получаем $A^i = 0$. Поэтому перемножая кватернионы уравнения (8.62) и приравнивая нулю скалярную и векторные части, получаем

$$\nabla(\mathbf{E} + i \mathbf{B}) = 4\pi \rho, \quad \partial_0(\mathbf{E} + i \mathbf{B}) + \nabla \times (i \mathbf{E} - \mathbf{B}) = -4\pi \mathbf{j}.$$

Действительная и мнимая части этих уравнений приводят к четырем уравнениям Максвелла.

▷ Из уравнения поля (8.62) следует соотношение:

$$4\pi \operatorname{Tr}(\mathbb{D}\bar{\mathbb{J}}) = \operatorname{Tr}(\mathbb{D}\bar{\mathbb{D}}\mathbb{F}) = \partial^2 \operatorname{Tr}(\mathbb{F}) = 0,$$

где учтено, что след матриц Паули равен нулю. Поэтому *уравнение непрерывности для тока* в кватернионных обозначениях имеет вид:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\mathbb{D}\bar{\mathbb{J}}) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\mathbf{j} = 0. \quad (8.65)$$

Первое равенство получается ($\triangleleft H_{78}$) в результате перемножения (8.63), с последующим взятием следа (след единичной матрицы 2×2 равен 2).

▷ Скалярный φ и векторный \mathbf{A} потенциалы определяют компоненты *кватерниона потенциала*: $\mathbb{A} = \varphi + \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}$. Кватернион напряженности можно связать с кватернионом потенциала следующим образом ($\triangleleft H_{79}$):

$$\mathbb{F} = \frac{1}{2} (\mathbb{D}\bar{\mathbb{A}} - \overline{\mathbb{D}\bar{\mathbb{A}}}) = \frac{1}{2} (\mathbb{D}\bar{\mathbb{A}} - \mathbb{A}\overset{\leftarrow}{\mathbb{D}}), \quad (8.66)$$

где стрелка означает, что производная действует справа налево. *Калибровочное преобразование* не меняет тензора электромагнитного поля:

$$\mathbb{A} \mapsto \mathbb{A}' = \mathbb{A} + \mathbb{D}\Lambda, \quad \mathbb{F} \mapsto \mathbb{F}' = \mathbb{F} + \frac{1}{2} (\mathbb{D}\bar{\mathbb{D}} - \mathbb{D}\bar{\mathbb{D}})\Lambda = \mathbb{F},$$

где Λ скалярная функция координат. Так как $\mathbb{D}\bar{\mathbb{A}} + \mathbb{A}\overset{\leftarrow}{\mathbb{D}} = 2\partial \cdot \mathbf{A}$ ($\triangleleft H_{79}$), в *калибровке Лоренца* $\partial \cdot \mathbf{A} = 0$ (стр. V₁:??) связь потенциалов и напряженностей упрощается: $\mathbb{F} = \mathbb{D}\bar{\mathbb{A}}$. В этом случае, в силу уравнений Максвелла (8.62), кватернионный потенциал удовлетворяет уравнению:

$$\partial^2 \bar{\mathbb{A}} = 4\pi \bar{\mathbb{J}}$$

или аналогичному без черточек сопряжения.

▷ Определение кватерниона напряженностей \mathbb{F} через кватернион потенциалов \mathbb{A} приводит к выполнению следующего уравнения ($\triangleleft H_{80}$):

$$\mathbb{D}\mathbb{F}^+ = \mathbb{F}\overset{\leftarrow}{\mathbb{D}}, \quad (8.67)$$

которое эквивалентно ($\triangleleft H_{81}$) ковариантному уравнению Максвелла без токов. Запишем еще одно уравнение для кватерниона напряженностей:

$$\mathbb{F}\overset{\leftarrow}{\mathbb{D}} = -4\pi \mathbb{J}, \quad (8.68)$$

которое даёт ещё два уравнения Максвелла с токами.

Таким образом, кватернионные уравнения электродинамики состоят или из двух уравнений (8.67) и (8.68), или одного, эквивалентного им уравнения (8.62).

8.6 Уравнения движения

- Перейдем теперь к уравнениям движения. В тензорных обозначениях сила Лоренца, действующая на заряд q с массой m , приводит к изменению импульса (или скорости) частицы (стр. 101):

$$m \frac{dU^\alpha}{ds} = q F^{\alpha\beta} U_\beta, \quad (8.69)$$

где компоненты 4-вектора скорости $U^\alpha = \{U^0, \mathbf{U}\}$ связаны с 3-скоростью при помощи стандартных соотношений $U_0 = \gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$ и $\mathbf{U} = \gamma \mathbf{u}$. Напомним, что вектор \mathbf{U} обозначает пространственные компоненты 4-вектора, тогда как обычная скорость $d\mathbf{r}/dt$ обозначается вектором \mathbf{u} . Тензор напряженности электромагнитного поля $F^{\alpha\beta}$ считается заданным, а заряд “пробным”, в том смысле, что его собственное поле не искаивает $F^{\alpha\beta}$ (т.е. мы не учитываем эффекты самодействия, стр. 166).

При помощи кватерниона точки в пространстве-времени $\mathbb{X} = t + \mathbf{r}\boldsymbol{\sigma}$ определим *кватернион скорости* с единичной нормой:

$$\mathbb{U} = \frac{d\mathbb{X}}{ds} = U_0 + \mathbf{U}\boldsymbol{\sigma}, \quad \bar{\mathbb{U}}\mathbb{U} = \mathbb{U}\bar{\mathbb{U}} = \mathbb{I}.$$

Интервал ds (он же собственное время заряда) является инвариантом преобразований Лоренца, поэтому производная по нему не нарушает ковариантности кватернионных уравнений. Кватернион скорости эрмитов ($\mathbb{U}^+ = \mathbb{U}$), так как действительны его компоненты. Поэтому, сила Лоренца, пропорциональная произведению скорости и напряженности, также должна быть также эрмитова. В тоже время кватернион \mathbb{F} не является эрмитовым: $\mathbb{F}^+ = (\mathbf{E} - i\mathbf{B})\boldsymbol{\sigma}$. Чтобы правая часть была эрмитовой к произведению $\mathbb{F}\mathbb{U}$ необходимо добавить его эрмитово сопряжение. В результате кватернионные уравнения движения имеют вид:

$$m \frac{d\mathbb{U}}{ds} = \frac{q}{2} (\mathbb{F}\mathbb{U} + \mathbb{U}\mathbb{F}^+). \quad (8.70)$$

Множитель $1/2$ проверяется повторением стандартных выкладок с матрицами Паули. Скалярная часть (8.70) приводит к уравнению для изменения энергии, а векторная к трёхмерной силе Лоренца (кватернион импульса равен $\mathbb{P} = m\mathbb{U} = E + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}$). Кватернионное уравнение движения можно также получить из (8.69) при помощи соотношения (8.36).

Если есть только магнитное поле $\mathbb{F} = i\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}$, то кватернион напряженности *антиэрмитов*: $\mathbb{F}^+ = -\mathbb{F}$. В этом случае в правой части уравнения (8.70) находится коммутатор напряженности и скорости $\mathbb{F}\mathbb{U} - \mathbb{U}\mathbb{F}^+$. Его след равен нулю, поэтому скалярная часть 4-скорости сохраняется: $\text{Tr}(\mathbb{U}) = \text{const.}$

▷ Найдём общее решение уравнения (8.70). Для этого представим кватернион скорости в следующем виде:

$$\mathbb{U}(s) = e^{\mathbb{G}(s)} \mathbb{U}(0) e^{\mathbb{G}^+(s)}, \quad (8.71)$$

где $\mathbb{G}(s)$ некоторый кватернион, равный нулевому при $s = 0$ (начальные условия содержатся в $\mathbb{U}(0)$, а эрмитово сопряжение во второй экспоненте поставлено для сохранения эрмитовости скорости). Подставим это выражение в уравнения движения:

$$m \frac{d\mathbb{U}}{ds} = m \frac{d\mathbb{G}}{ds} \mathbb{U} + m \mathbb{U} \frac{d\mathbb{G}^+}{ds} = \frac{q}{2} (\mathbb{F} \mathbb{U} + \mathbb{U} \mathbb{F}^+).$$

Это соотношение выполняется, если кватернион \mathbb{G} удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d\mathbb{G}}{ds} = \frac{q}{2m} \mathbb{F}. \quad (8.72)$$

Пусть напряжённости поля зависят от времени или эквивалентно от собственного времени заряда s . Тогда, интегрируя (8.72), приходим к следующему представлению решения уравнений движения (8.70):

$$\mathbb{U}(s) = \exp \left(\frac{q}{2m} \int_0^s \mathbb{F}(s) ds \right) \mathbb{U}(0) \exp \left(\frac{q}{2m} \int_0^s \mathbb{F}^+(s) ds \right). \quad (8.73)$$

В случае, когда внешние электрическое и магнитное поля *постоянны* $\mathbb{F} = (\mathbf{E} + i\mathbf{B})\boldsymbol{\sigma} = const$, кватернион напряженности \mathbb{F} можно вынести за интеграл и решение имеет более простой вид:

$$\mathbb{U}(s) = \exp \left(\frac{q}{2m} \mathbb{F} s \right) \mathbb{U}(0) \exp \left(\frac{q}{2m} \mathbb{F}^+ s \right). \quad (8.74)$$

В показателе экспонент стоят матрицы. При наличии только в постоянного электрического поля их можно опустить вниз, аналогично преобразованиям вращения или Лоренца, при помощи разложения экспоненты в ряд Тейлора с учётом соотношений $(\mathbf{e}\boldsymbol{\sigma})^2 = 1$, $(\mathbf{e}\boldsymbol{\sigma})^3 = \mathbf{e}\boldsymbol{\sigma}$, ..., где $\mathbf{e} = \mathbf{E}/|\mathbf{E}|$ – единичный вектор в направлении электрического поля. В результате, вводя $\omega = q|\mathbf{E}|/m$, получаем:

$$\exp \left(\frac{q}{2m} \mathbf{E}\boldsymbol{\sigma} s \right) = \operatorname{ch}(\omega s/2) + \mathbf{e}\boldsymbol{\sigma} \operatorname{sh}(\omega s/2). \quad (8.75)$$

Аналогично, при наличии только магнитного поля, имеем:

$$\exp \left(i \frac{q}{2m} \mathbf{B}\boldsymbol{\sigma} s \right) = \cos(\omega s/2) + i\mathbf{b}\boldsymbol{\sigma} \sin(\omega s/2), \quad (8.76)$$

где $\omega = q|\mathbf{B}|/m$ и $\mathbf{b} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$. Перемножая эти кватернионы с кватернионом начальной скорости $\mathbb{U}(0)$ и интегрируя ещё раз, несложно получить ($\ll H_{82}$), ($\ll H_{83}$) выражения для траектории движения (стр. ??).

8.7 Законы сохранения

▷ Рассмотрим в кватернионных обозначениях симметричный тензор энергии импульса электромагнитного поля:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(g_{\mu\nu} F^{\alpha\mu} F^{\nu\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right).$$

Перемножим тензор напряженностей $\mathbb{F} = (\mathbf{E} + i\mathbf{B})\boldsymbol{\sigma}$ и его эрмитовое сопряжение:

$$\mathbb{F}\mathbb{F}^+ = \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 + 2[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \boldsymbol{\sigma}.$$

Учитывая определения для плотности энергии $T^{00} = W$ и импульса $T^{0i} = T^{i0} = \mathbf{P}^i$ (стр. V₁:??), имеем следующий кватернион:

$$\mathbb{T}_0 = \frac{\mathbb{F}\mathbb{F}^+}{8\pi} = W + \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}. \quad (8.77)$$

Обратим внимание, что W и \mathbf{P} не образуют 4-вектора, поэтому закон преобразования кватерниона \mathbb{T}_0 отличен от (8.3) и (8.37). Пространственные компоненты 4-тензора энергии-импульса определяются симметричным 3-тензором потока импульса (стр. V₁:??):

$$s_{ij} = s^{ij} = \delta_{ij} W - (E_i E_j + B_i B_j)/4\pi,$$

так, что $T^{ij} = T_{ij} = s_{ij}$.

Этот тензор возникает, в следующей тройке кватернионов:

$$\mathbb{T}^i = \frac{1}{8\pi} \mathbb{F} \boldsymbol{\sigma}^i \mathbb{F}^+ = P^i + s^{ij} \boldsymbol{\sigma}_j \quad (8.78)$$

(для проверки этого соотношения стоит свернуть его с единичным вектором \mathbf{n} , воспользоваться (8.8) и учесть, что $\boldsymbol{\sigma}^i = -\boldsymbol{\sigma}_i$).

Соотношения (8.77) и (8.78) можно объединить в одно:

$$\mathbb{T}^\mu = \frac{1}{8\pi} \mathbb{F} \boldsymbol{\sigma}^\mu \mathbb{F}^+ = T^{\mu\nu} \boldsymbol{\sigma}_\nu. \quad (8.79)$$

Эта четвёрка кватернионов является выражением симметричного тензора энергии-импульса в матричном виде.

При преобразованиях Лоренца кватернионы \mathbb{T}^ν изменяются подобно 4-вектору, к компонентам которого дополнительно применено кватернионное преобразование:

$$\mathbb{T}'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \mathbb{S} \mathbb{T}^\nu \mathbb{S}^+. \quad (8.80)$$

Отметим также, что

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbb{T}^\mu \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\nu), \quad (8.81)$$

где учтены условия ортогональности матриц Паули (8.26).

▷ Получим закон сохранения энергии-импульса в кватернионной форме. Для этого умножим уравнение Максвелла (8.62) слева на $\sigma^\mu \mathbb{F}^+$. Затем возьмем эрмитово сопряжение (8.62) и умножим его справа на $\mathbb{F}\sigma^\mu$:

$$\sigma^\mu \mathbb{F}^+ \bar{\mathbb{D}} \mathbb{F} = 4\pi \sigma^\mu \mathbb{F}^+ \bar{\mathbb{J}}, \quad \mathbb{F}^+ \leftarrow \bar{\mathbb{D}} \mathbb{F} \sigma^\mu = 4\pi \bar{\mathbb{J}} \mathbb{F} \sigma^\mu.$$

Возьмем след этих уравнений и сложим их:

$$\text{Tr}(\sigma^\mu \mathbb{F}^+ \bar{\mathbb{D}} \mathbb{F} + \mathbb{F}^+ \leftarrow \bar{\mathbb{D}} \mathbb{F} \sigma^\mu) = 4\pi \text{Tr}(\sigma^\mu \mathbb{F}^+ \bar{\mathbb{J}} + \bar{\mathbb{J}} \mathbb{F} \sigma^\mu).$$

Под следом матрицы можно циклическим образом переставлять. Поэтому в левой части получается производная произведения:

$$\text{Tr}(\bar{\mathbb{D}}_{\mathbb{F}} \mathbb{F} \sigma^\mu \mathbb{F}^+ + \bar{\mathbb{D}}_{\mathbb{F}^+} \mathbb{F} \sigma^\mu \mathbb{F}^+) = \text{Tr}(\bar{\mathbb{D}} (\mathbb{F} \sigma^\mu \mathbb{F}^+)),$$

где индексы у производных указывают на какую матрицу они действует. В результате получаем следующее уравнение:

$$\text{Tr}(\bar{\mathbb{D}} \mathbb{T}^\mu) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{\mathbb{J}} \sigma^\mu \mathbb{F}^+ + \mathbb{F} \sigma^\mu \bar{\mathbb{J}}). \quad (8.82)$$

При $\mu = 0$ оно эквивалентно теореме Пойнтинга, а при $\mu = i$ получается закон сохранения потока импульса.

▷ Подведём промежуточные итоги. Одни и те же физические сущности можно описывать при помощи различных математических формализмов. Естественно, если всё делается правильно, физические следствия не должны зависеть от того, какую математику мы используем. Выбор математического аппарата диктуется его эффективностью при решении конкретных задач. Кватернионы особенно удобны при рассмотрении композиции различных преобразований и при описании антисимметричных 4-тензоров.

Однако это не основное преимущество кватернионного подхода. Важнее то, что кватернионы позволяют наиболее естественным образом прийти к принципиально новым математическим объектам. Эти объекты называются спинорами и оказываются более общими сущностями по сравнению с “обычными” 4-векторами или тензорами. Самое замечательно, что им соответствуют реальные физические объекты, описать которые при помощи другой математики было бы крайне затруднительно. Спиноры лежат в основе физики частиц с полуцелым спином, которые являются фундаментом окружающего нас мира. На квантовом уровне они описываются биспинорными полями, изучению классических свойств которых посвящены следующие главы.

Глава 9

Спиноры

В этой главе развитие кватернионной математики приведёт нас к спинорам, которые являются более общими математическими объектами по сравнению с “обычными” 4-векторами и тензорами. Сначала мы рассмотрим определение спинора и введём спинорные тензоры. Тензоры второго ранга окажутся эквивалентными 4-векторам, тогда как собственно спиноры (спинорные тензоры первого ранга) к ним не сводятся. Затем, при помощи спинорной математики, записываются уравнения Максвелла.

9.1 Спиноры

▷ Запишем ещё раз матрицы кватернионов пространственного вращения и преобразований Лоренца (стр. 218, 220):

$$\mathbb{R} = \cos \frac{\phi}{2} + i\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} \sin \frac{\phi}{2}, \quad \mathbb{L} = \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} - \mathbf{m}\boldsymbol{\sigma} \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2}, \quad (9.1)$$

где $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ – матрицы Паули. Вращение \mathbb{R} происходит вокруг единичного вектора \mathbf{n} на угол ϕ . Лоренцевский кватернион \mathbb{L} содержит единичный вектор вдоль скорости $\mathbf{m} = \mathbf{v}/v$ и $\alpha = \operatorname{ath} v$. Их композиция $\mathbb{S} = \mathbb{R}\mathbb{L}$ – это матрицы 2×2 с комплексными коэффициентами:

$$\mathbb{S} = s^0 + \mathbf{s}\boldsymbol{\sigma} = s^\nu \sigma_\nu, \quad \mathbb{S}^{-1} = \bar{\mathbb{S}} = s^0 - \mathbf{s}\boldsymbol{\sigma} = s^\nu \bar{\sigma}_\nu, \quad (9.2)$$

которые имеют единичный определитель:

$$\det \mathbb{S} = \det \begin{pmatrix} s^0 + s^3 & s^1 - is^2 \\ s^1 + is^2 & s^0 - s^3 \end{pmatrix} = s_0^2 - \mathbf{s}^2 = 1. \quad (9.3)$$

Любой 4-вектор $x^\nu = \{x^0, \mathbf{x}\}$ можно записать как кватернион, а преобразования Лоренца в “квадратичном” по \mathbb{S} виде:

$$\mathbb{X} = x^0 + \mathbf{x}\boldsymbol{\sigma} = x^\nu \sigma_\nu, \quad \mathbb{X}' = \mathbb{S} \mathbb{X} \mathbb{S}^+. \quad (9.4)$$

Это соотношение похоже на преобразование “обычного” тензора второго ранга, в котором матрица преобразований стоит два раза. Разберемся какой объект получится, если при подобных преобразованиях будет присутствовать только одна матрица. Пусть матрицы (9.3) действуют на векторы, в результате чего получаются новые векторы. Их можно представить в виде столбика из двух комплексных чисел ψ^1, ψ^2 (вверху стоят индексы, а не степень). Эта пара чисел называется *спинором*:

$$\psi'^\alpha = S^\alpha_\beta \psi^\beta, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{S} = \begin{pmatrix} S^1_1 & S^1_2 \\ S^2_1 & S^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \quad (9.5)$$

Таким образом, спинор – это объект, преобразующийся как $\psi' = \mathbb{S}\psi$ при поворотах и бустах с матрицами (9.1) или их композицией (9.2).

Равенство единице определителя преобразований (9.3) приводит к тому, что для двух спиноров ψ и χ инвариантна следующая комбинация:

$$\psi^1 \chi^2 - \psi^2 \chi^1 = \operatorname{inv}. \quad (9.6)$$

Действительно, прямым вычислением несложно проверить ($<\!H_{84}$), что

$$\psi'^1 \chi'^2 - \psi'^2 \chi'^1 = (AD - BC)(\psi^1 \chi^2 - \psi^2 \chi^1) = \psi^1 \chi^2 - \psi^2 \chi^1,$$

где выражение $AD - BC$ равно определителю $\det \mathbb{S} = 1$, см. (9.5).

▷ Введём *ковариантные компоненты* спинора (или *коспинор*), которые будем помечать нижним индексом ψ_α :

$$\psi_1 = \psi^2, \quad \psi_2 = -\psi^1. \quad (9.7)$$

Придадим этому определению тензорную форму (по β сумма от 1 до 2):

$$\psi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} \psi^\beta, \quad \psi^\alpha = \psi_\beta \varepsilon^{\beta\alpha}, \quad (9.8)$$

где введена ортогональная ($\varepsilon\varepsilon^T = 1$) матрица:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.9)$$

со следующими свойствами:

$$\varepsilon^2 = -1, \quad \varepsilon^T = -\varepsilon, \quad \varepsilon\sigma\varepsilon = \sigma^T. \quad (9.10)$$

Кроме этого выполняется тождество ($\lessdot H_{87}$):

$$\varepsilon_{\mu\nu} \delta_\sigma^\alpha + \varepsilon_{\sigma\mu} \delta_\nu^\alpha + \varepsilon_{\nu\sigma} \delta_\mu^\alpha = 0. \quad (9.11)$$

Обратим внимание на обратный порядок индексов у $\varepsilon^{\alpha\beta}$ во втором соотношении (9.8). Он важен в силу антисимметричности матрицы $\varepsilon^{\alpha\beta}$.

▷ При помощи введенных обозначений, инвариантную комбинацию (9.6) теперь можно записать в тензорном виде:

$$\psi^\alpha \chi_\alpha = \psi^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} \chi^\beta = \psi^T \varepsilon \chi = \psi^1 \chi^2 - \psi^2 \chi^1 = inv.$$

При работе со спинорной математикой важно помнить, что перестановка суммационных индексов по высоте (в отличие от “обычного” тензорного анализа) приводит к *смене знака* выражения ($\lessdot H_{85}$):

$$\psi^\alpha \chi_\alpha = -\psi_\alpha \chi^\alpha, \quad (9.12)$$

а свёртка спинора с его коспинорными компонентами даёт ноль:

$$\psi^\alpha \psi_\alpha = 0. \quad (9.13)$$

▷ Используя закон преобразования спинора (9.5) и определения (9.7) можно найти ($\lessdot H_{86}$) как преобразуется коспинор:

$$(\psi'_1 \ \psi'_2) = (\psi_1 \ \psi_2) \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}, \quad \psi'_\alpha = \psi_\beta \bar{S}^\beta_\alpha, \quad (9.14)$$

где $\bar{S} = S^{-1}$ – обратная к S матрица. Заметим, что из (9.10) следует

$$\bar{S}^T = -\varepsilon S \varepsilon \quad (9.15)$$

и по-прежнему для матрицы преобразований: $\det \bar{S} = 1$.

9.2 Спинорные тензоры

▷ *Спинорным тензором* называется величина с верхними и/или нижними индексами, преобразующаяся также как произведение спинорных и коспинорных компонент. Например, спинорный тензор второго ранга, по определению, преобразуется следующим образом:

$$\psi'^\alpha_\beta = S^\alpha_\mu \psi^\mu_\nu \bar{S}^\nu_\beta.$$

Так как компоненты спиноров и матриц преобразования это комплексные числа, введём еще две спинорные компоненты, которые помечаются точкой над индексом. По определению, они преобразуются как комплексное сопряжение спинора ψ^α и коспинора ψ_α :

$$\begin{pmatrix} \psi'^1 \\ \psi'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi'_1 & \psi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^* & -B^* \\ -C^* & A^* \end{pmatrix}.$$

Соответственно, могут быть тензоры с верхними или нижними индексами, с точкой или без них: $\psi_{\alpha\dot{\beta}}$, $\psi_{\alpha\beta}^{\dot{\gamma}}$, ... Утверждение, что $\psi_{\dot{\alpha}}$ преобразуется как ψ_{α}^* часто записывается следующим образом: $\psi_{\dot{\alpha}} \sim \psi_{\alpha}^*$. Подчеркнём, что индексы α и $\dot{\alpha}$, несмотря на одинаковую букву, – это *различные* индексы.

▷ Для получения инвариантных комбинаций можно сворачивать (суммировать) верхний и нижний индекс *одного типа* (точки с точками, и т.д.). Но нельзя сворачивать индексы *разного типа*. Например, убедимся, что $\psi^\alpha \chi_{\dot{\alpha}}$ не является инвариантом. Будем использовать безиндексные обозначения:

$$\psi \equiv \psi^\alpha, \quad \dot{\psi} = \psi^{\dot{\alpha}}, \quad \psi' = \mathbb{S}\psi, \quad \dot{\psi}' = \mathbb{S}^*\dot{\psi}.$$

В этих обозначениях $\psi^\alpha \chi_{\dot{\alpha}}$ равно:

$$\psi'^T \varepsilon \dot{\chi}' = \psi^T \mathbb{S}^T \varepsilon \mathbb{S}^* \dot{\chi} = -\psi^T \varepsilon \varepsilon \mathbb{S}^T \varepsilon \mathbb{S}^* \dot{\chi} = \psi^T \varepsilon (\mathbb{S}^{-1} \mathbb{S}^*) \dot{\chi} \neq \psi^T \varepsilon \dot{\chi},$$

так как $\mathbb{S}^{-1} \mathbb{S}^*$ не равно 1 и учтено, что $\varepsilon \mathbb{S}^T \varepsilon = -\bar{\mathbb{S}} = -\mathbb{S}^{-1}$, см. (9.15).

Таким образом, записывая инварианты, мы всегда будем сворачивать только однотипные индексы. Поэтому нет необходимости следить за порядком чередования индексов разного типа, и по определению:

$$\psi_{\alpha\beta}^{\bullet} = \psi_{\beta\alpha}^{\bullet}, \quad \psi_{\alpha\beta\gamma}^{\bullet} = \psi_{\alpha\gamma\beta}^{\bullet} = \psi_{\gamma\alpha\beta}^{\bullet}.$$

Порядок индексов одного типа важен и в общем случае $\psi_{\alpha\beta} \neq \psi_{\beta\alpha}$.

▷ С помощью $\varepsilon_{\alpha\beta}$ из некоторого спинорного тензора $\psi^{\alpha\beta}$ можно получить *другие* тензоры с иным расположением индексов:

$$\psi^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \psi_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad (9.16)$$

$$\psi_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}, \quad \psi_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}. \quad (9.17)$$

Например $\psi_\alpha^\beta = \varepsilon_{\alpha\gamma}\psi^{\gamma\beta}$ получается прямым умножением матрицы ε на $\psi^{\alpha\beta}$. Для ψ_α^β необходимо записать $\varepsilon_{\beta\gamma}\psi^{\alpha\gamma} = -\psi^{\alpha\gamma}\varepsilon_{\gamma\beta}$, и т.д. Не стоит забывать, что для тензора с верхними индексами $\varepsilon^{\mu\nu}$ используется обратный порядок свертки и $\psi^{\alpha\beta} = \psi_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\alpha}\varepsilon^{\nu\beta} = -\varepsilon^{\alpha\mu}\psi_{\mu\nu}\varepsilon^{\nu\beta}$.

Если $b = c$, то тензоры $\psi^{\alpha\beta}$ и $\psi_{\alpha\beta}$ являются симметричными. Симметричными будут и ψ_β^α и ψ_α^β в том смысле, что $\psi_\beta^\alpha = \psi_\alpha^\beta = \psi_\beta^\alpha$. Например $\psi_2^1 = -a = \psi_1^2$ (первый индекс по горизонтали – номер строки, второй – номер столбца). Поэтому для *симметричного* тензора 2-го ранга можно писать индексы друг под другом (будем считать, что верхний индекс – это номер строки, а нижний – столбца). Однако, при этом $\psi_\beta^\alpha \neq \psi_\alpha^\beta$.

Антисимметричность тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ приводит к тому, что (по α сумма):

$$\psi_\alpha^\alpha = -\psi_\alpha^\alpha, \quad \text{и если } \psi_{\alpha\beta} = \psi_{\beta\alpha}, \quad \text{то} \quad \psi_\alpha^\alpha = 0.$$

▷ Величина $\varepsilon^{\alpha\beta}$ является спинорным тензором, компоненты которого не меняются при преобразованиях с единичным детерминантом:

$$\varepsilon'^{\alpha\beta} = S^\alpha_\mu S^\beta_\nu \varepsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det \mathbb{S} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \varepsilon^{\alpha\beta}.$$

Повышать и понижать индексы при помощи $\varepsilon^{\alpha\beta}$ можно и у самого спинорного тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$. Так $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\mu}\varepsilon_{\beta\nu}\varepsilon^{\mu\nu} = (\varepsilon\varepsilon^T)_{\alpha\beta} = (-\varepsilon^T)_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}$. Спинорным тензором, имеющим одинаковый вид во всех системах отсчёта, является также символ Кронекера δ_β^α .

▷ Рассмотрим свёртку двух спиноров с 4-матрицей Паули (стр. 214):

$$\psi^{*\alpha}(\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{\alpha}\beta}\chi^\beta \equiv \psi^+\bar{\sigma}^\mu\chi.$$

При преобразованиях Лоренца она изменяется как 4-вектор:

$$\psi'^+\bar{\sigma}^\mu\chi' = \psi^+\mathbb{S}^+\bar{\sigma}^\mu\mathbb{S}\chi = \Lambda^\mu_\nu \psi^+\bar{\sigma}^\nu\chi, \quad (9.18)$$

где учтено эрмитово сопряжение (8.60), стр. 223. Аналогично 4-вектором является комбинация спиноров с точками внизу, связанных 4-матрицами Паули без черты: $\psi_\alpha^*(\sigma^\mu)^{\alpha\dot{\beta}}\chi_\dot{\beta}$.

▷ Матрица пространственных вращений \mathbb{R} (9.1) является унитарной $\mathbb{R}^+ \mathbb{R} = \mathbb{I}$ (подгруппа $\mathbf{SU}(2) \subset \mathbf{SL}(2, C)$). Относительно этих преобразований инвариантна *длина* спинора и коспинора:

$$\psi^+ \psi = (\psi^{*1} \ \psi^{*2}) \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} = |\psi^1|^2 + |\psi^2|^2,$$

или в более общем случае $\chi^{\dot{\alpha}} \psi^\alpha$ ($\prec H_{88}$). Преобразования Лоренца длину спинора не сохраняют и она различна в разных инерциальных системах отсчета.

Для унитарных преобразований $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^{-1}$ и (см. (9.14)):

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^{+T} = (\mathbb{R}^{-1})^T = \begin{pmatrix} D & -C \\ -B & A \end{pmatrix}.$$

Поэтому компоненты коспинора $\{\psi_1, \psi_2\}$ при вращениях преобразуются также как $\{\psi^{*1}, \psi^{*2}\}$ или как $\{\psi^{\dot{1}}, \psi^{\dot{2}}\}$.

▷ Компоненты векторов при повороте на угол 2π не меняются. В отличие от этого, компоненты спинора (и коспинора) при повороте (9.1) на угол 2π меняют свой знак ($\cos \pi = -1, \sin \pi = 0$). В исходное значение компоненты спинора возвращаются после поворота на 4π . Это принципиально отличает спинор первого ранга (с одним индексом) и “обычный” вектор или тензор. Такое свойство спинора очень необычно. Мы привыкли к тому, что при повороте на 360 градусов система координат “возвращается” в исходное положение, поэтому все геометрические величины не должны измениться. Однако для спиноров это не так и они при таком повороте меняют знак. И только двойное вращение на 720 градусов не меняет “ориентации” спинора.

▷ Для спиноров второго ранга матрица преобразования оказывается в квадрате и они не меняются при повороте на 2π . Поэтому между спинорами второго ранга и 4-векторами существует непосредственная связь. При помощи кватернионов мы записали преобразования группы Лоренца $\mathbb{X}' = \mathbb{S} \mathbb{X} \mathbb{S}^+$ или в индексах:

$$X'^{\alpha\beta} = S^\alpha_\gamma X^{\gamma\delta} (S^+)_\delta^\beta = S^\alpha_\gamma (S^*)^\beta_\delta X^{\gamma\delta},$$

где, в силу определения эрмитового сопряжения, проведено комплексное сопряжение и переставлены местами строки и столбцы. Данное преобразование есть ни что иное, как преобразование спинора $\psi^{\alpha\beta}$, второй индекс которого взят с точкой.

▷ Компоненты кватерниона $\mathbb{A} = A_0 + \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}$ преобразуется также как и 4-вектор $\mathbf{A} = \{A^0, \mathbf{A}\}$. Поэтому произвольный спинор 2-го ранга со смешанными индексами $a^{\alpha\dot{\mu}}$ эквивалентен 4-вектору (преобразуется также):

$$a^{\alpha\dot{\mu}} = \begin{pmatrix} A^0 + A^3 & A^1 - iA^2 \\ A^1 + iA^2 & A^0 - A^3 \end{pmatrix} = A^0 + \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma} \equiv \mathbb{A}. \quad (9.19)$$

Используя формулы (9.16) можно аналогично записать смешанный спинорный тензор с нижними индексами:

$$a_{\alpha\dot{\mu}} = \begin{pmatrix} A^0 - A^3 & -A^1 - iA^2 \\ -A^1 + iA^2 & A^0 + A^3 \end{pmatrix} = A^0 - \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}^T \equiv \bar{\mathbb{A}}^T. \quad (9.20)$$

Знак минус перед векторной частью по определению даёт сопряжение кватерниона (черта над ним). Матрицу $a_{\alpha\dot{\mu}}$ можно получить непосредственной работой с матрицами Паули:

$$a_{\alpha\dot{\mu}} = \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\dot{\mu}\dot{\nu}}^{\bullet\bullet} a^{\beta\dot{\nu}} = -(\varepsilon \mathbb{A} \varepsilon)_{\alpha\dot{\mu}},$$

где $\mathbb{A} \equiv a^{\alpha\dot{\beta}}$ – спинорный тензор (кватернион) с верхними индексами. Поэтому, учитывая свойства $\varepsilon^2 = -1$ и $\varepsilon\boldsymbol{\sigma}\varepsilon = \boldsymbol{\sigma}^T$, стр. 233 имеем:

$$-\varepsilon \mathbb{A} \varepsilon = -\varepsilon(A^0 + \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma})\varepsilon = A^0 - \mathbf{A}\varepsilon\boldsymbol{\sigma}\varepsilon = A^0 - \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}^T = \bar{\mathbb{A}}^T. \quad (9.21)$$

Свертка спинорного тензора с верхними и нижними индексами пропорциональна норме соответствующего кватерниона:

$$a^{\alpha\dot{\gamma}} a_{\beta\dot{\gamma}} = a^{\alpha\dot{\gamma}} a_{\dot{\gamma}\beta}^T = (\mathbb{A}\bar{\mathbb{A}})^\alpha_\beta = (A_0^2 - \mathbf{A}^2) \delta_\beta^\alpha,$$

где во втором равенстве с учетом (9.20) транспонированный тензор с нижними индексами заменён на матрицу сопряженного кватерниона. Таким образом:

$$a^{\alpha\dot{\gamma}} a_{\beta\dot{\gamma}} = A^2 \delta_\beta^\alpha, \quad a^{\gamma\dot{\alpha}} a_{\gamma\dot{\beta}} = A^2 \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}, \quad (9.22)$$

где $A^2 = A_0^2 - \mathbf{A}^2$. Аналогично:

$$a^{\alpha\dot{\gamma}} b_{\beta\dot{\gamma}} \equiv \mathbb{A}\bar{\mathbb{B}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + (B_0 \mathbf{A} - A_0 \mathbf{B} - i \mathbf{A} \times \mathbf{B}) \boldsymbol{\sigma}, \quad (9.23)$$

где 4-вектор $\mathbf{B} = \{B_0, \mathbf{B}\}$ связан со спинором $b^{\alpha\dot{\beta}}$ и $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^0 B^0 - \mathbf{A}\mathbf{B}$.

При пространственных вращениях на угол 2π спинорные тензоры с *нечетным* числом индексов (независимо от их типа) меняют свой знак. Спинорные тензоры с четным числом индексов знака не меняют (матрица поворота в четной степени). Это трансформационное свойство связано с общим правилом – спинорные тензоры с четным числом индексов могут быть связаны с 4-тензорами того или иного ранга; для спинорных тензоров с нечетным числом индексов такой связи нет.

9.3 Симметричный спинорный тензор

▷ Симметричный спинорный тензор с двумя однотипными индексами (например, $f^{\alpha\beta} = f^{\beta\alpha}$) имеет 3 независимые комплексные компоненты (f^{11} , f^{22} и $f^{12} = f^{21}$) или 6 действительных. Антисимметричный действительный 4-тензор $F^{\mu\nu}$ также имеет 6 компонент. Построим тензор:

$$f^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (a^{\mu\dot{\sigma}} b_{\dot{\sigma}}^\nu + a^{\nu\dot{\sigma}} b_{\dot{\sigma}}^\mu) \quad (9.24)$$

со сверткой по индексам с точкой и симметризацией по индексам без точки. Опустим при помощи ε индекс ν вниз и запишем тензор в матричном виде ($\mathbb{A} \equiv a^{\alpha\dot{\beta}}$, $\mathbb{B} \equiv b^{\alpha\dot{\beta}}$):

$$f_\nu^\mu = \frac{1}{2} (a^{\mu\dot{\sigma}} b_{\nu\dot{\sigma}} - a_{\nu\dot{\sigma}} b^{\mu\dot{\sigma}}) = \frac{1}{2} (\mathbb{A}\bar{\mathbb{B}} - \mathbb{B}\bar{\mathbb{A}})_\nu^\mu = (\mathbb{F})_\nu^\mu. \quad (9.25)$$

Минус в первом равенстве появился после перестановки по вертикали суммационного индекса $\dot{\sigma}$, см. (9.12). Во втором равенстве переставлены местами индексы во вторых сомножителях и учтено (9.20). Компоненты тензора \mathbb{F} получаются перемножением \mathbb{A} и \mathbb{B} (8.21), стр. 212:

$$\mathbb{F} = (B_0 \mathbf{A} - A_0 \mathbf{B} - i \mathbf{A} \times \mathbf{B}) \boldsymbol{\sigma}. \quad (9.26)$$

Антисимметричный 4-тензор $F^{\mu\nu}$ преобразуется как антисимметризованное произведение двух 4-векторов: $F^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu - A^\nu B^\mu$. Его можно выразить через два 3-вектора $\mathbf{a} = \{F^{10}, F^{20}, F^{30}\}$ и $\mathbf{b} = \{F^{23}, F^{31}, F^{12}\}$ (не путать со спинорами a и b). При помощи комплексного вектора $\mathbf{f} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$ трансформационная связь (9.26) записывается в компактном виде:

$$\mathbb{F} = \mathbf{f} \boldsymbol{\sigma}, \quad (9.27)$$

где $\mathbf{a} = B_0 \mathbf{A} - A_0 \mathbf{B}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Тензоры f_ν^μ и $f^{\mu\nu} = (\mathbb{F}\varepsilon)^{\mu\nu}$ имеют следующие элементы:

$$f_\nu^\mu = \begin{pmatrix} f_z & f_x - if_y \\ f_x + if_y & -f_z \end{pmatrix}, \quad f^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f_x + if_y & f_z \\ f_z & f_x + if_y \end{pmatrix}.$$

Инвариант получается сверткой по обоим индексам, см. (9.16). стр. 235:

$$f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} = 2 \det f^{\mu\nu} = -2\mathbf{f}^2 = -2(\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2) + 4i\mathbf{ab}. \quad (9.28)$$

Аналогично строится симметричный спинорный тензор с точками:

$$f^{\dot{\mu}\dot{\nu}} = \frac{1}{2} (a^{\sigma\dot{\mu}} b_{\sigma}^{\dot{\nu}} + a^{\sigma\dot{\nu}} b_{\sigma}^{\dot{\mu}}) = f^{*\mu\nu}, \quad (9.29)$$

где во втором равенстве компоненты тензора $F^{\mu\nu}$ (вектора \mathbf{a} и \mathbf{b}) считаются действительными. Как и должно быть, спинорный тензор $f^{\dot{\mu}\dot{\nu}}$ преобразуются также, как и комплексное сопряжение $f^{\mu\nu}$.

\triangleright^* Симметричный (по каждому типу индексов) тензор $\psi^{\alpha_1 \dots \alpha_m \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_n}$ имеет $(m+1)(n+1)$ независимых компонент ($<\mathrm{H}_{89}$). Сверткой однотипных индексов такие тензоры не могут быть сведены к тензорам более низкого ранга. Так, $\psi^\alpha_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^{\alpha\beta} = 0$ (свертка антисимметричного и симметричного тензора всегда равна нулю). Говорят, что симметричный спинорный тензор ранга (m, n) реализует *неприводимое представление* собственной группы Лоренца (стр. ??).

Найдем связь симметричного спинорного тензора ранга $(2, 2)$ и произвольного 4-тензора $T^{\mu\nu}$ второго ранга. Для этого определим тензор

$$c^{\alpha\beta\dot{\mu}\dot{\nu}} = \frac{1}{4} \left(a^{\alpha\dot{\mu}} b^{\beta\dot{\nu}} + a^{\beta\dot{\mu}} b^{\alpha\dot{\nu}} + a^{\alpha\dot{\nu}} b^{\beta\dot{\mu}} + a^{\beta\dot{\nu}} b^{\alpha\dot{\mu}} \right),$$

в котором по обоим парам индексов α, β и $\dot{\mu}, \dot{\nu}$ проведена симметризация. Распишем, например, $c^{12\dot{1}\dot{2}}$:

$$c^{12\dot{1}\dot{2}} = \frac{1}{4} \left(a^{1\dot{1}} b^{2\dot{2}} + a^{2\dot{1}} b^{1\dot{2}} + a^{1\dot{2}} b^{2\dot{1}} + a^{2\dot{2}} b^{1\dot{1}} \right).$$

Выразим компоненты тензоров $a^{\alpha\dot{\mu}}$ и $b^{\alpha\dot{\mu}}$ через компоненты соответствующих 4-векторов (9.19):

$$a^{1\dot{1}} = A^0 + A^3, \quad a^{1\dot{2}} = A^1 - \imath A^2, \quad a^{2\dot{1}} = A^1 + \imath A^2, \quad a^{2\dot{2}} = A^0 - A^3$$

и аналогично для $b^{\alpha\dot{\mu}}$. Перемножая компоненты спинорных тензоров и вводя 4-тензор $T^{\alpha\beta} = A^\alpha B^\beta$, получаем искомую связь. Аналогично расписываются остальные компоненты. Всего возможно $(2+1)(2+1) = 9$ различных компонент. Они равны (точнее: “преобразуются также”):

$$c^{12\dot{1}\dot{2}} = T^{00} - T^{33} - \frac{T}{2},$$

$$c^{11\dot{1}\dot{1}} = T^{00} + T^{33} + T^{03} + T^{30},$$

$$c^{22\dot{2}\dot{2}} = T^{00} + T^{33} - T^{03} - T^{30},$$

$$c^{11\dot{2}\dot{2}} = (c^{22\dot{1}\dot{1}})^* = T^{11} - T^{22} - \imath(T^{12} + T^{21}),$$

$$c^{12\dot{1}\dot{1}} = (c^{11\dot{1}\dot{2}})^* = \frac{T^{01} + T^{10}}{2} + \frac{T^{13} + T^{31}}{2} + \imath \frac{T^{02} + T^{20}}{2} + \imath \frac{T^{23} + T^{32}}{2},$$

$$c^{12\dot{2}\dot{2}} = (c^{22\dot{1}\dot{2}})^* = \frac{T^{01} + T^{10}}{2} - \frac{T^{13} + T^{31}}{2} - \imath \frac{T^{02} + T^{20}}{2} + \imath \frac{T^{23} + T^{32}}{2},$$

где выделен инвариант $T = g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = T^{00} - T^{11} - T^{22} - T^{33}$ (след тензора). Комплексное сопряжение меняет тип индексов (с точками и без точек). Первые три компоненты симметричны относительно этой операции, поэтому они действительны. Остальные 6 компонент имеют мнимую часть и связаны комплексным сопряжением с другими компонентами (считаем $T^{\mu\nu}$ действительными). Например: $(c^{12\dot{1}\dot{1}})^* = c^{12\dot{1}\dot{1}} = c^{11\dot{1}\dot{2}}$.

9.4 Спиноры и уравнения Максвелла

▷ Уравнения физики, ковариантные относительно преобразований Лоренца, можно записывать не только при помощи 4-тензоров. Эквивалентным математическим аппаратом является спинорный анализ. Ранее мы привели основные соотношения электродинамики на языке кватернионов. Запишем их теперь при помощи спинорного тензорного анализа.

Для 4-потенциала поля $A = \{\varphi, \mathbf{A}\}$ и плотности 4-тока $j = \{\rho, \mathbf{j}\}$ введем спинорные тензоры со смешанными индексами:

$$a^{\alpha\dot{\mu}} \equiv \mathbb{A} = \varphi + \mathbf{A}\sigma, \quad j^{\alpha\dot{\mu}} \equiv \mathbb{J} = \rho + \mathbf{j}\sigma.$$

Определим также тензор производной. Так как $\partial^\nu = \{\partial_0, -\nabla\}$, необходимо поставить минус перед пространственными компонентами:

$$\partial^{\alpha\dot{\mu}} \equiv \mathbb{D} = \partial_0 - \sigma\nabla. \quad (9.30)$$

▷ Для любого тензора $a^{\alpha\dot{\mu}} = \mathbb{A}$ справедливо соотношение $a_{\dot{\mu}\alpha} = \bar{\mathbb{A}}$, т.е. опускание и перестановка индексов приводит к сопряженному кватерниону, см. (9.20). Рассмотрим два кватерниона \mathbb{A}, \mathbb{B} и соответствующие им спинорные тензоры второго ранга со смешанными индексами. Запишем следующую свёртку:

$$\frac{1}{2} a^{\alpha\dot{\mu}} b_{\alpha\dot{\mu}} = \frac{1}{2} a^{\alpha\dot{\mu}} b_{\dot{\mu}\alpha} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbb{A}\bar{\mathbb{B}}) = a^\nu b_\nu = a^0 b^0 - \mathbf{a}\mathbf{b}. \quad (9.31)$$

Обратим внимание, что во втором равенстве индексы α и $\dot{\mu}$ переставлены местами. Так как это смешанные индексы, их порядок в тензорном выражении роли не играет. Однако этот порядок важен в безиндексной матричной форме (третье равенство). Свертка двух индексов $\dot{\mu}$ соответствует умножению матриц \mathbb{A} и $\bar{\mathbb{B}}$, а свёртка по индексу α – это взятие суммы диагональных элементов получившейся матрицы (т.е. её след).

Так, квадрат производной пропорционален оператору Д'Аламбера:

$$\frac{1}{2} \partial^{\alpha\dot{\mu}} \partial_{\alpha\dot{\mu}} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbb{D}\bar{\mathbb{D}}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

Аналогично, свертка спинора ковариантной производной и спинора:

$$\frac{1}{2} \partial^{\alpha\dot{\mu}} j_{\alpha\dot{\mu}} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbb{D}\bar{\mathbb{J}}) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0 \quad (9.32)$$

дает *уравнение непрерывности*, см. (9.22), стр. 237.

▷ При помощи спинорных тензоров потенциалов определим тензоры напряженности электромагнитного поля без точек и с точками:

$$f^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial^{\mu\dot{\sigma}} a_{\dot{\sigma}}^\nu + \partial^{\nu\dot{\sigma}} a_{\dot{\sigma}}^\mu), \quad f^{\dot{\mu}\dot{\nu}} = \frac{1}{2} (\partial^{\sigma\dot{\mu}} a_{\sigma}^{\dot{\nu}} + \partial^{\sigma\dot{\nu}} a_{\sigma}^{\dot{\mu}}). \quad (9.33)$$

Эти тензоры симметричны, поэтому опуская один индекс вниз и записывая их друг под другом (см. стр. 235), имеем:

$$f_\nu^\mu = \frac{1}{2} (\partial^{\mu\dot{\sigma}} a_{\nu\dot{\sigma}} - \partial_{\nu\dot{\sigma}} a^{\mu\dot{\sigma}}) = \frac{1}{2} (\mathbb{D} \bar{\mathbb{A}} - \mathbb{A} \bar{\mathbb{D}})^\mu_\nu = (\mathbb{F})_\nu^\mu. \quad (9.34)$$

Обратим внимание на появившийся знак минус (в спинорном анализе $\psi^\alpha \xi_\alpha = -\psi_\alpha \xi^\alpha$). Второе равенство (9.34) записано аналогично (9.31), однако, для получения правильного порядка индексов (μ сверху нумерует строки, а ν снизу – столбцы), матрицы $\bar{\mathbb{D}}$ и $\bar{\mathbb{A}}$ переставлены местами. Аналогично

$$f_{\nu}^{\dot{\mu}} = \frac{1}{2} (\partial^{\sigma\dot{\mu}} a_{\sigma\nu} - \partial_{\sigma\nu} a^{\sigma\dot{\mu}}) = \frac{1}{2} (\mathbb{D}^T \bar{\mathbb{A}}^T - \mathbb{A}^T \bar{\mathbb{D}}^T)^{\dot{\mu}}_\nu = (\mathbb{F}^*)^{\dot{\mu}}_\nu, \quad (9.35)$$

где звездочка обозначает комплексное спряжение элементов матрицы напряженностей: $\mathbb{F}^* = \mathbb{F}^{+T}$. Это сопряжение появилось так как транспонирование произведения во втором равенстве можно вынести за скобку, переставляя местами сомножители. Затем, для восстановления их обратного порядка берём эрмитово сопряжение и учитываем, что $\mathbb{A}^+ = \mathbb{A}$, $\mathbb{D}^+ = \mathbb{D}$. Кватернион напряженостей электромагнитного поля равен $\mathbb{F} = \mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}$, где $\mathbf{f} = \mathbf{E} + i\mathbf{B}$ и при $\mathbf{B} \neq 0$ не является эрмитовым

▷ Спинорный тензор напряженностей инвариантен относительно *калибровочного преобразования* тензоров потенциалов:

$$a^{\mu\nu} \mapsto a'^{\mu\nu} = a^{\mu\nu} + \partial^{\mu\nu} \Lambda,$$

где Λ произвольная скалярная функция координат. Действительно, подставляя связь тензора f_ν^μ и потенциалов (9.34), имеем:

$$f'^\mu_\nu = f_\nu^\mu + \frac{1}{2} (\partial^{\mu\dot{\sigma}} \partial_{\nu\dot{\sigma}} - \partial_{\nu\dot{\sigma}} \partial^{\mu\dot{\sigma}}) \Lambda = f_\nu^\mu. \quad (9.36)$$

В качестве упражнения ($\lessdot H_{90}$) предлагается убедиться, что в калибровке Лоренца $\partial^{\mu\nu} a_{\mu\nu} = 0$ справедливо соотношение:

$$\partial^{\mu\dot{\sigma}} a_{\dot{\sigma}}^\nu = \partial^{\nu\dot{\sigma}} a_{\dot{\sigma}}^\mu,$$

В такой калибровке выражения для тензоров напряженности (9.33) упрощаются: $f^{\mu\nu} = \partial^{\mu\dot{\sigma}} a_{\dot{\sigma}}^\nu$ и $f^{\dot{\mu}\dot{\nu}} = \partial^{\sigma\dot{\mu}} a_{\sigma}^{\dot{\nu}}$.

▷ Запишем в спинорной форме уравнения поля. Ковариантное уравнение Максвелла без источников имеет вид:

$$\partial^{\mu\dot{\alpha}} f_{\dot{\alpha}}^{\dot{\nu}} - \partial^{\alpha\dot{\nu}} f_{\alpha}^{\mu} = 0. \quad (9.37)$$

Убедимся, что при любом спинорном тензоре $a_{\mu\nu}$ это уравнение тождественно выполняется. Подставим определения тензоров напряженности:

$$\partial^{\mu\dot{\alpha}} (\partial^{\sigma\dot{\nu}} a_{\sigma\dot{\alpha}} - \partial_{\sigma\dot{\alpha}} a^{\sigma\dot{\nu}}) - \partial^{\alpha\dot{\nu}} (\partial^{\mu\dot{\sigma}} a_{\alpha\dot{\sigma}} - \partial_{\alpha\dot{\sigma}} a^{\mu\dot{\sigma}}) = 0.$$

Раскрывая скобки и переставляя второе и третье слагаемое, имеем:

$$\partial^{\mu\dot{\alpha}} \partial^{\sigma\dot{\nu}} a_{\sigma\dot{\alpha}} - \partial^{\alpha\dot{\nu}} \partial^{\mu\dot{\sigma}} a_{\alpha\dot{\sigma}} - \partial^{\mu\dot{\alpha}} \partial_{\sigma\dot{\alpha}} a^{\sigma\dot{\nu}} + \partial^{\alpha\dot{\nu}} \partial_{\alpha\dot{\sigma}} a^{\mu\dot{\sigma}} = 0.$$

Первые два слагаемых сокращаются, если во втором переставить производные и переименовать суммационные индексы α и σ , переставив их местами. Для третьего слагаемого, имеем:

$$\partial^{\mu\dot{\alpha}} \partial_{\sigma\dot{\alpha}} = \delta_{\sigma}^{\mu} (\partial_0^2 - \Delta), \quad (9.38)$$

где учтено тождество (9.22), стр. 237. Аналогичное выражение получается и для четвертого слагаемого, поэтому последние два слагаемых сокращаются и получается ноль в не зависимости от значений компонент тензора $a_{\mu\nu}$.

▷ Несложно записать уравнения Максвелла без источников (9.37) в матричном виде:

$$\partial^{\mu\dot{\alpha}} f_{\dot{\alpha}}^{\dot{\nu}} - \partial^{\alpha\dot{\nu}} f_{\alpha}^{\mu} = \partial^{\mu\dot{\alpha}} f_{\dot{\alpha}}^{\dot{\nu}} - f_{\alpha}^{\mu} \overset{\leftarrow}{\partial}^{\alpha\dot{\nu}} = (\mathbb{D}\mathbb{F}^{*T} - \overset{\leftarrow}{\mathbb{F}\mathbb{D}})^{\mu\dot{\nu}},$$

где в последнем равенстве в первом слагаемом поставлен значок транспонирования, чтобы добиться правильного порядка индексов при записи умножения матриц (для наглядности нижние индексы у f сдвинуты вправо, так как они нумеруют столбцы матриц). В результате, учитывая определение эрмитового сопряжения матрицы, окончательно, имеем:

$$\mathbb{D}\mathbb{F}^{+} - \overset{\leftarrow}{\mathbb{F}\mathbb{D}} = 0. \quad (9.39)$$

Стрелка над \mathbb{D} , как обычно, означает, что производная действует справа налево. Это уравнение уже было записано при рассмотрении кватернионной формулировки электродинамики (стр. 225).

▷ Второе ковариантное уравнение (с токами) имеет следующий вид:

$$\frac{1}{2} (\partial^{\mu\dot{\sigma}} f_{\dot{\sigma}}^{\nu} + \partial^{\sigma\dot{\nu}} f_{\dot{\sigma}}^{\mu}) = -4\pi j^{\mu\nu}. \quad (9.40)$$

Воспользовавшись (9.37), его можно переписать только через один тензор напряженности, например:

$$\partial^{\sigma\dot{\nu}} f_{\dot{\sigma}}^{\mu} = -4\pi j^{\mu\nu}. \quad (9.41)$$

Подставляя кватернионные матрицы, имеем:

$$\overset{\leftarrow}{\mathbb{F}\mathbb{D}} = -4\pi \mathbb{J}. \quad (9.42)$$

Чтобы поставить производную на привычное место слева от \mathbb{F} , можно взять сопряжение этого уравнения. При сопряжении поменяется порядок сомножителей, и так как кватернион $\mathbb{F} = \mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}$ не имеет скалярной части $\bar{\mathbb{F}} = -\mathbb{F}$. Поэтому сопряженное к (9.42) уравнение имеет вид:

$$\bar{\mathbb{D}}\mathbb{F} = 4\pi \bar{\mathbb{J}}. \quad (9.43)$$

Как мы видели (стр. 225), уравнение (9.43) эквивалентно *всем* уравнениям Максвелла. Связано это с использованием (9.37) при записи (9.41). Исходное же уравнение (9.40) даёт только уравнения Максвелла с плотностью заряда и тока.

▷ Перейдем к уравнениям движения (силе Лоренца). Кватернион скорости $\mathbb{U} = d\mathbb{X}/ds$ является матричной записью спинорного тензора второго ранга $u^{\mu\nu}$. В левой части уравнения Лоренца должна стоять производная скорости по интервалу, умноженная на массу $m du^{\mu\nu}/ds$. Из симметричных тензоров напряженностей $f^{\mu\nu}$ и $f^{\dot{\mu}\dot{\nu}}$ и тензора скорости $u^{\mu\nu}$ необходимо сформировать линейную комбинацию с двумя смешанными индексами. Вариантов немного, и уравнения движения выглядят следующим образом:

$$m \frac{du^{\mu\nu}}{ds} = \frac{q}{2} (u^{\mu\dot{\alpha}} f_{\dot{\alpha}}^{\nu} + u^{\alpha\dot{\nu}} f_{\dot{\alpha}}^{\mu}), \quad (9.44)$$

где m – масса частицы, q – её заряд. Несложно убедится, что матричная запись этого уравнения имеет форму (8.70), стр. 226:

$$m \frac{d\mathbb{U}}{ds} = \frac{q}{2} (\mathbb{U}\mathbb{F}^+ + \mathbb{F}\mathbb{U}). \quad (9.45)$$

Таким образом, переход от матричной формы уравнений поля и движения к тензорной и обратно не представляет особых затруднений. Тем не менее матричная запись электродинамики выглядит более компактной и в ряде случаев оказывается удобнее.

• Применим лагранжев подход к спинорным уравнениям. Лагранжиан электромагнитного поля в обычных ковариантных обозначениях имеет вид (стр. 117):

$$\mathcal{L} = -A^\alpha j_\alpha - \frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}.$$

Инвариант $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ равен (стр. 102):

$$F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2).$$

В тоже время для спинорного тензора:

$$f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} = -f_\nu^\mu f_\mu^\nu = -\text{Tr}(\mathbb{F}\mathbb{F}) = -\text{Tr}(\mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}) = -2\mathbf{f}^2,$$

где двойка равна следу единичной матрицы 2×2 . Аналогичное выражение получается для $f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} = -\text{Tr}(\mathbb{F}\mathbb{F})^* = -2\mathbf{f}^{*2}$. Их сумма даёт $2F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$, так как $\mathbf{f} = \mathbf{E} + i\mathbf{B}$. Поэтому лагранжиан можно записать в спинорных обозначениях следующим образом:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} a^{\alpha\dot{\beta}} j_{\alpha\dot{\beta}} - \frac{1}{32\pi} (f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + f^{\mu\dot{\nu}} f_{\mu\dot{\nu}}). \quad (9.46)$$

Очевидно, что он является действительным. Комплексное сопряжение ставит над индексами без точек точки и наоборот. В результате получается исходное выражение.

▷ Уравнения Лагранжа для любого тензорного поля $a^{\alpha\beta}$ выводятся абсолютно аналогично ковариантному формализму и имеют вид:

$$\partial^{\mu\dot{\nu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^{\mu\dot{\nu}} a^{\alpha\beta})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a^{\alpha\beta}}. \quad (9.47)$$

Так как $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (аналог метрического тензора) *антисимметричен*, взятие производной от лагранжиана требует определенной аккуратности. Необходимо, при помощи тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ все индексы поднять вверх и только после этого вычислять производную. Запишем сначала производную:

$$\frac{\partial(\partial^{\tau\dot{\gamma}} a^{\sigma\dot{\delta}})}{\partial(\partial^{\mu\dot{\nu}} a^{\alpha\beta})} = \delta_\mu^\tau \delta_{\dot{\nu}}^{\dot{\gamma}} \delta_\alpha^\sigma \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\delta}}.$$

Если все индексы попарно совпадают получается единица, если же хотя бы одна пара индексов (один в числителе, а второй под ним в знаменателе) различны, то частная производная будет равна нулю.

▷ Вычислим производную от спинорного тензора напряженностей поля. Для этого поднимем все индексы вверх:

$$\frac{\partial f^{\tau\sigma}}{\partial(\partial^{\mu\nu} a^{\alpha\beta})} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\partial^{\tau\dot{\gamma}} a^{\sigma\dot{\delta}} + \partial^{\sigma\dot{\gamma}} a^{\tau\dot{\delta}})}{\partial(\partial^{\mu\nu} a^{\alpha\beta})} \varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\delta}} = \frac{1}{2} (\delta_\mu^\tau \delta_\nu^\sigma \delta_\alpha^\delta + \delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\tau \delta_\alpha^\delta) \varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\delta}}.$$

Сворачивая суммы с символом Кронекера, имеем

$$\frac{\partial f^{\tau\sigma}}{\partial(\partial^{\mu\nu} a^{\alpha\beta})} = \frac{1}{2} (\delta_\mu^\tau \delta_\alpha^\sigma + \delta_\mu^\sigma \delta_\alpha^\tau) \varepsilon_{\dot{\nu}\dot{\beta}}.$$

Полученный результат позволяет найти производную от инвариантного квадрата тензора напряженостей. Для этого поднимаем все индексы

$$\frac{\partial(f^{\tau\sigma} f_{\tau\sigma})}{\partial(\partial^{\mu\nu} a^{\alpha\beta})} = \frac{\partial(f^{\tau\sigma} f^{\gamma\delta})}{\partial(\partial^{\mu\nu} a^{\alpha\beta})} \varepsilon_{\tau\gamma} \varepsilon_{\sigma\delta}$$

и берем производную, как производную произведения:

$$\frac{\partial(f^{\tau\sigma} f_{\tau\sigma})}{\partial(\partial^{\mu\nu} a^{\alpha\beta})} = \frac{1}{2} ((\delta_\mu^\tau \delta_\alpha^\sigma + \delta_\mu^\sigma \delta_\alpha^\tau) f^{\gamma\delta} + f^{\tau\sigma} (\delta_\mu^\gamma \delta_\alpha^\delta + \delta_\mu^\delta \delta_\alpha^\gamma)) \varepsilon_{\tau\gamma} \varepsilon_{\sigma\delta} \varepsilon_{\dot{\nu}\dot{\beta}}.$$

Опуская индексы при помощи $\varepsilon_{\tau\gamma}$, $\varepsilon_{\sigma\delta}$:

$$\frac{\partial(f^{\tau\sigma} f_{\tau\sigma})}{\partial(\partial^{\mu\nu} a^{\alpha\beta})} = \frac{1}{2} ((\delta_\mu^\tau \delta_\alpha^\sigma + \delta_\mu^\sigma \delta_\alpha^\tau) f_{\tau\sigma} + f_{\gamma\delta} (\delta_\mu^\gamma \delta_\alpha^\delta + \delta_\mu^\delta \delta_\alpha^\gamma)) \varepsilon_{\dot{\nu}\dot{\beta}}$$

и сворачивая с символами Кронекера, окончательно, получаем:

$$\frac{\partial(f^{\tau\sigma} f_{\tau\sigma})}{\partial(\partial^{\mu\nu} a^{\alpha\beta})} = 2f_{\mu\alpha} \varepsilon_{\dot{\nu}\dot{\beta}}.$$

Аналогично берутся производные от тензора напряженности с точками:

$$\frac{\partial f^{\tau\dot{\sigma}}}{\partial(\partial^{\mu\nu} a^{\alpha\beta})} = \frac{1}{2} (\delta_\nu^\tau \delta_\beta^\dot{\sigma} + \delta_\nu^\dot{\sigma} \delta_\beta^\tau) \varepsilon_{\mu\alpha}, \quad \frac{\partial(f^{\tau\dot{\sigma}} f_{\tau\dot{\sigma}})}{\partial(\partial^{\mu\nu} a^{\alpha\beta})} = 2f_{\dot{\nu}\dot{\beta}} \varepsilon_{\mu\alpha}.$$

Эти выражения могут быть получены сразу, взятием комплексного сопряжения от производных от $f^{\tau\sigma}$. Подставляя все производные в уравнения Лагранжа (9.47), приходим к уравнениям Максвелла:

$$\frac{1}{2} (\partial_\alpha^\mu f_{\mu\beta} + \partial_\beta^\mu f_{\mu\alpha}) = -4\pi j_{\alpha\beta}, \tag{9.48}$$

где знак минус появился так как $\partial^{\mu\nu} f_{\mu\alpha} \varepsilon_{\dot{\nu}\dot{\beta}} = -\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\nu}} \partial^{\mu\nu} f_{\mu\alpha} = -\partial_\beta^\mu f_{\mu\alpha}$ и аналогично для f с точками.

▷ Выведем закон сохранения энергии-импульса поля в спинорной форме. Для этого запишем уравнения Максвелла (9.41) и их сопряженный аналог:

$$\partial^{\alpha\dot{\mu}} f_{\alpha\beta} = -4\pi j_{\beta}^{\dot{\mu}}, \quad \partial^{\alpha\dot{\mu}} f_{\mu\nu}^{\bullet} = -4\pi j_{\nu}^{\alpha}.$$

Умножим первое уравнение на $f_{\mu\nu}^{\bullet}$, свернув по индексу $\dot{\mu}$, а второе на $f_{\alpha\beta}$, свернув по α . После этого уравнения сложим:

$$f_{\mu\nu}^{\bullet} \partial^{\alpha\dot{\mu}} f_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta} \partial^{\alpha\dot{\mu}} f_{\mu\nu}^{\bullet} = \partial^{\alpha\dot{\mu}} (f_{\alpha\beta} f_{\mu\nu}^{\bullet}) = -4\pi (f_{\mu\nu}^{\bullet} j_{\beta}^{\dot{\mu}} + f_{\alpha\beta} j_{\nu}^{\alpha}),$$

где во втором равенстве записана производная произведения. Введя спинорный тензор энергии-импульса:

$$t_{\alpha\beta\mu\nu}^{\bullet\bullet} = \frac{1}{4\pi} f_{\alpha\beta} f_{\mu\nu}^{\bullet},$$

полученное уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\partial^{\alpha\dot{\mu}} t_{\alpha\beta\mu\nu}^{\bullet\bullet} = -j_{\beta}^{\sigma} f_{\sigma\nu}^{\bullet} - f_{\beta\sigma} j_{\nu}^{\sigma}.$$

Оно является спинорным аналогом уравнения (5.22), стр. 130.

▷ Выражая компоненты спинорных тензоров напряженности через электромагнитные поля и используя выражения для 4-тензора энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ можно ($\Leftarrow H_9$) связать компоненты спинорного тензора $t^{\alpha\beta\dot{\mu}\dot{\nu}}$ и симметричного 4-тензора $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. Так как спинорные тензоры напряженности поля симметричны, они имеют по 3 компоненты (комплексные). Соответственно у $t^{\alpha\beta\dot{\mu}\dot{\nu}}$ различных компонент будет 9:

$$\begin{aligned} t^{12\dot{1}\dot{2}} &= T^{00} - T^{33} \\ t^{11\dot{1}\dot{1}} &= T^{00} + T^{33} + 2T^{03} \\ t^{22\dot{2}\dot{2}} &= T^{00} + T^{33} - 2T^{03} \\ t^{11\dot{2}\dot{2}} &= (t^{22\dot{1}\dot{1}})^* = T^{11} - T^{22} - 2iT^{12} \\ t^{12\dot{2}\dot{2}} &= (t^{22\dot{1}\dot{2}})^* = T^{01} + T^{13} + i(T^{23} + T^{02}) \\ t^{11\dot{1}\dot{1}} &= (t^{11\dot{2}\dot{2}})^* = T^{01} - T^{13} + i(T^{23} - T^{02}). \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что произвольный симметричный тензор $T^{\mu\nu}$ имеет 10 независимых компонент. Тогда как у $t_{\alpha\beta\mu\nu}^{\bullet\bullet}$ их только 9. Однако, тензор энергии-импульса зависит от двух 3-векторов **E** и **B**, а, следовательно, имеет 9 независимых компонент. Это проявляется в существовании дополнительного условия на тензор энергии-импульса – его след равен нулю: $g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = T^{00} - T^{11} - T^{22} - T^{33} = 0$.

▷ Получим тензор энергии-импульса из лагранжиана. Фактически необходимо повторить те же выкладки, что и для его построения при помощи обычного 4-тензорного анализа (стр. 128). Возьмём спинорную производную от лагранжиана (индексы ν и $\dot{\nu}$ – это различные индексы и по ним нет суммы!):

$$\partial_{\nu\dot{\nu}} \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a^{\sigma\dot{\tau}}} \partial_{\nu\dot{\nu}} a^{\sigma\dot{\tau}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^{\mu\dot{\mu}} a^{\sigma\dot{\tau}})} \partial_{\nu\dot{\nu}} \partial^{\mu\dot{\mu}} a^{\sigma\dot{\tau}}.$$

В правой части в первом слагаемом подставим уравнения движения (9.47):

$$\partial_{\nu\dot{\nu}} \mathcal{L} = \partial^{\mu\dot{\mu}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^{\mu\dot{\mu}} a^{\sigma\dot{\tau}})} \right) \partial_{\nu\dot{\nu}} a^{\sigma\dot{\tau}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^{\mu\dot{\mu}} a^{\sigma\dot{\tau}})} \partial_{\nu\dot{\nu}} \partial^{\mu\dot{\mu}} a^{\sigma\dot{\tau}}$$

и соберём всё в полную производную произведения:

$$\partial_{\nu\dot{\nu}} \mathcal{L} = \partial^{\mu\dot{\mu}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^{\mu\dot{\mu}} a^{\sigma\dot{\tau}})} \partial_{\nu\dot{\nu}} a^{\sigma\dot{\tau}} \right).$$

В результате получается уравнение непрерывности $\partial^{\mu\dot{\mu}} t_{\mu\nu\dot{\mu}\dot{\nu}} = 0$ для:

$$t_{\mu\nu\dot{\mu}\dot{\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^{\mu\dot{\mu}} a^{\sigma\dot{\tau}})} \partial_{\nu\dot{\nu}} a^{\sigma\dot{\tau}} - \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{\dot{\mu}\dot{\nu}} \mathcal{L}, \quad (9.49)$$

где в отличие от (5.17), стр. 128 множителем у лагранжиана стоит не метрический тензор, а произведение антисимметричных тензоров ε . Подставляя вычисленные уже производные, для лагранжиана в отсутствии источников и поднимая индексы, имеем:

$$t^{\mu\nu\dot{\mu}\dot{\nu}} = \frac{1}{16\pi} (f^{\mu\sigma} \partial^{\nu\dot{\tau}} a_{\sigma}^{\dot{\mu}} + f^{\dot{\mu}\dot{\nu}} \partial^{\nu\dot{\tau}} a_{\tau}^{\mu}) + \frac{1}{32\pi} \varepsilon^{\mu\nu} \varepsilon^{\dot{\mu}\dot{\nu}} (f^{\sigma\tau} f_{\sigma\tau} + f^{\dot{\sigma}\dot{\tau}} f_{\dot{\sigma}\dot{\tau}}).$$

Для симметризации этого выражения по каждой паре индексов необходимо прибавить спинорную дивергенцию от тензоров:

$$\tilde{t}^{\mu\nu\dot{\mu}\dot{\nu}} = t^{\mu\nu\dot{\mu}\dot{\nu}} + \partial_{\gamma\dot{\gamma}} (\Psi^{\gamma\mu\nu\dot{\gamma}\dot{\mu}\dot{\nu}} + \Phi^{\gamma\mu\nu\dot{\gamma}\dot{\mu}\dot{\nu}}),$$

первый из которых симметричен по γ, μ и антисимметричен по $\dot{\gamma}, \dot{\mu}$, а для второго наоборот ($\ll H_{92}$).

Тогда эта дивергенция будет автоматически удовлетворять уравнению непрерывности с производной по $\partial_{\mu\dot{\mu}}$.

Таким образом, спинорный тензорный анализ позволяет описывать ковариантные уравнения также эффективно, как и обычный анализ на основе 4-тензоров. Для электродинамики последний оказывается несколько проще и удобнее. Однако, существуют поля которые могут быть описаны только при помощи спиноров.

9.5 Уравнение Дирака

▷ Если спинорный тензор зависит от координат и времени, он становится полем. Спинорные поля с нечетным числом индексов не выражаются через 4-тензоры. Поэтому интерес представляет построение соответствующих спинорных полевых теорий. К тому же эксперимент показывает, что все фундаментальные частицы “материи” (лептоны и кварки) являются фермионами, и описываются спинорным дираковским полем. Рассмотрим простейший случай спинора с одним индексом χ^μ . Для него можно записать обычное уравнение второго порядка с массовым членом:

$$\partial^2 \chi^\mu + m^2 \chi^\mu = 0.$$

Далее будет удобно использовать оператор производной, умноженный на мнимую единицу $\hat{p}^\mu = i\partial^\mu = \{i\partial_0, -i\nabla\}$. Шляпка сверху \hat{p}^μ напоминает, что это не просто 4-вектор, а оператор, который должен действовать на функцию. В этих обозначениях уравнение второго порядка имеет вид:

$$\hat{p}^2 \chi^\mu = m^2 \chi^\mu. \quad (9.50)$$

Спинорные уравнения могут быть также дифференциальными уравнениями первого порядка. Для их записи необходимо ввести спинорный тензор $\hat{p}_{\nu\bullet}^\mu$, построенный по компонентам 4-вектора \hat{p}^μ (9.19), стр. 237. Свертка такого тензора с χ^ν приводит к выражению, имеющему индекс с точкой. Его можно построить или из комплексного сопряжения χ_ν или, в более общем случае, введя ещё одно спинорное поле с соответствующим индексом. Для него необходимо записать аналогичное уравнение:

$$\hat{p}_{\nu\bullet}^\mu \chi^\nu = m \xi_\nu^\bullet, \quad \hat{p}^{\mu\nu} \xi_\nu^\bullet = m \chi^\mu. \quad (9.51)$$

В обоих уравнениях стоит одна и та же константа m . Можно было бы ввести различные константы, однако это не добавит общности. Уравнения линейны, поэтому переопределением спиноров (умножая их на константы) эти два параметра всегда можно сделать равными.

Умножим обе части второго уравнения (9.51) на m и подставим $m\xi_\nu^\bullet$ из первого уравнения:

$$m^2 \chi^\mu = \hat{p}^{\mu\nu} m \xi_\nu^\bullet = \hat{p}^{\mu\nu} \hat{p}_{\alpha\bullet}^\nu \chi^\alpha = \delta_\alpha^\mu \hat{p}^2 \chi^\alpha = \hat{p}^2 \chi^\mu,$$

где мы воспользовались соотношением (9.22), стр. 237. Таким образом, решения системы уравнений (9.51) удовлетворяют уравнению (9.50) и аналогичному для спинора ξ_μ^\bullet . Однако, вообще говоря, не наоборот!

▷ При помощи матриц Паули (стр. 211) систему (9.51) можно переписать в матричном виде. Для этого введем два столбика с компонентами:

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1^\bullet \\ \xi_2^\bullet \end{pmatrix}.$$

Меняя в первом уравнении (9.51) порядок индексов $\hat{p}_{\nu\mu} \chi^\nu = (\hat{p}^T)_{\mu\nu} \chi^\nu$ и учитывая (9.19), (9.20) стр. 237 получаем систему матричных уравнений:

$$(\hat{p}^0 - \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}})\chi = m\xi, \quad (\hat{p}^0 + \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}})\xi = m\chi. \quad (9.52)$$

Их можно объединить, перейдя от матриц 2x2 к матрице 4x4:

$$\begin{pmatrix} 0 & \hat{p}_0 + \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}} \\ \hat{p}_0 - \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix},$$

блоки которой – это матрицы 2x2. Введя 4-х компонентную величину, которую называют *дираковским биспинором*:

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \\ \xi_1^\bullet \\ \xi_2^\bullet \end{pmatrix},$$

системе (9.51) можно ($\prec H_{93}$) придать вид (по μ сумма от 0 до 3):

$$\gamma^\mu \hat{p}_\mu \psi = m\psi. \quad (9.53)$$

Это уравнение носит имя Поля Антуана Марии Дирака. Четыре матрицы $\gamma^\mu = \{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\} = \{\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}\}$ также названы в честь него:

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (9.54)$$

В уравнении Дирака можно ($\prec H_{94}$) явным образом выделить производную по времени, умножив его обе части на γ^0 (учитывая, что $(\gamma^0)^2 = 1$):

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}} + \beta m)\psi, \quad (9.55)$$

где $\boldsymbol{\alpha} = \{\gamma^0\gamma^1, \gamma^0\gamma^2, \gamma^0\gamma^3\}$ – введенные в (9.54) три матрицы и $\beta = \gamma^0$. Запишем в явном виде все индексы в уравнении Дирака (9.53):

$$\gamma_{ab}^\mu \hat{p}_\mu \psi_b = m \psi_a.$$

По индексу b проводится суммирование от 1 до 4, а по индексу μ от 0 до 3. Часто опускают не только индексы a и b , но и индекс μ , используя ковариантные обозначения 4-векторов: $\gamma^0 \hat{p}^0 - \boldsymbol{\gamma}\hat{\mathbf{p}} = \gamma^\mu \hat{p}_\mu = \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$.

▷ Кроме дираковского биспинора ψ введём *сопряженный биспинор*:

$$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0 = (\chi^+ \ \xi^+) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\xi^+ \ \chi^+). \quad (9.56)$$

Крестик – это эрмитово сопряжение, которое превращает столбик ψ в строку комплексно сопряженных элементов. Матрица γ^0 умножается на эту строку справа, в результате чего снова получается строка. Обратим внимание, что матрица γ^0 переставляет местами биспиноры χ и ξ .

Сопряженный биспинор важен тем, что его свертка с исходным биспинором даёт инвариант относительно преобразований Лоренца:

$$\bar{\psi}\psi = (\xi^+ \ \chi^+) \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix} = \xi^+ \chi + \chi^+ \xi = \xi_\alpha^* \chi^\alpha + \chi^{*\alpha} \xi_\alpha = \text{inv.}$$

В этом выражении свёрнуты разнотипные индексы (с точкой и без неё). Однако, так как комплексно сопряженный спинор с точкой преобразуется, по определению, также как без точки, по своим трансформационным свойствам это выражение является инвариантом.

Сопряженный биспинор участвует также в выражениях преобразующихся как 4-векторы или в более общем случае как 4-тензоры. Действительно, напомним (9.18), стр. 235, что следующие свёртки спиноров преобразуются как 4-векторы по индексу μ :

$$\chi^+ \bar{\sigma}^\mu \chi \equiv \chi^{*\alpha} (\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{\alpha}\beta} \chi^\beta, \quad \xi^+ \sigma^\mu \xi \equiv \xi_\alpha^* (\sigma^\mu)^{\alpha\dot{\beta}} \xi_{\dot{\beta}}. \quad (9.57)$$

В терминах ковариантных матриц Паули, матрицы Дирака можно записать следующим образом:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.58)$$

Поэтому:

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = (\xi^+ \ \chi^+) \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix} = \chi^+ \bar{\sigma}^\mu \chi + \xi^+ \sigma^\mu \xi$$

преобразуется как 4-вектор. Заметим, что, в силу определения $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$ и $(\gamma^0)^2 = 1$, компонентами 4-вектора являются:

$$\{\psi^+ \psi, \ \psi^+ \boldsymbol{\alpha} \psi\}.$$

Поэтому, $\psi^+ \psi$ – не скаляр, а нулевая компонента 4-вектора (в отличии от скалярной свёртки $\bar{\psi} \psi$).

▷ Найдем уравнение которому удовлетворяет сопряженный биспинор. Для этого возьмём эрмитово сопряжение от уравнения Дирака (9.53):

$$-\hat{p}_\mu \psi^+ (\gamma^\mu)^+ = m\psi^+$$

(знак минус появился от мнимой единицы $\hat{p}_\mu = i\partial_\mu$). Матрица γ^0 – эрмитово самосопряженная. Эрмитовыми матрицами являются также матрицы Паули. Перемножая матрицы несложно проверить соотношение:

$$\boldsymbol{\gamma}^+ = -\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \gamma^0. \quad (9.59)$$

Так как $(\gamma^0)^2 = 1$ (единичная матрица), имеем следующее правило для эрмитового сопряжения матриц Дирака:

$$(\gamma^\mu)^+ = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (9.60)$$

В результате:

$$-\hat{p}_\mu \psi^+ \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = m\psi^+,$$

Умножая обе части уравнения справа на γ^0 и вводя сопряженный биспинор, получаем уравнение:

$$\hat{p}_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu = -m\bar{\psi}. \quad (9.61)$$

При помощи этого уравнения и исходного уравнения Дирака можно получить уравнение непрерывности. Для этого умножим (9.53) слева на $\bar{\psi}$, а сопряженное уравнение (9.61) справа на ψ и сложим их:

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \hat{p}_\mu \psi + (\hat{p}_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi = \hat{p}_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0.$$

Вспоминая, что $\hat{p}_\mu = i\partial_\mu$, приходим к уравнению непрерывности:

$$\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0.$$

Выражение в скобках является 4-вектором $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$, поэтому полученное уравнение инвариантно при преобразованиях Лоренца.

Обратим внимание, что нулевая компонента 4-плотности тока (“плотность заряда”) $j^0 = \chi^+ \chi + \xi^+ \xi$ является положительно определенной, а 3-плотность тока – нет. Например, для $j_z = \chi^+ \sigma_z \chi - \xi^+ \sigma_z \xi$, имеем:

$$j_z = (\chi^{*1} \chi^{*2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix} - (\xi_1^* \xi_2^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{pmatrix}$$

или, перемножая матрицы:

$$j_z = |\chi^1|^2 - |\chi^2|^2 - |\xi_1^*|^2 + |\xi_2^*|^2.$$

В зависимости от соотношения компонент спиноров это выражение может быть как положительным, так и отрицательным.

9.6 Алгебра матриц Дирака

▷ Кроме четырех матриц Дирака γ^0 и $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}$ важную роль играют их произведения:

$$\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}, \quad \gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3.$$

Матрицы можно записывать в различных представлениях $\tilde{\gamma}^\mu = U \gamma^\mu U^{-1}$, которые соответствуют линейным комбинациям биспинора $\tilde{\psi} = U \psi$. Приведем в справочных целях наиболее популярные представления:
спинорное представление:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

стандартное представление или *представление Дирака*:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

представление Вейля:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В спинорном представлении матрица γ^5 определяет так называемые *проекционные матрицы*:

$$\frac{1}{2} (1 + \gamma^5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

“вырезающие” при действии на биспинор верхний или нижний спиноры. В вейлевском представлении проекционные матрицы меняются местами. Стоит найти матрицу U перехода от спинорного представления к представлению Вейля ($\Leftarrow H_{96}$).

Прямым перемножением можно проверить, что для матриц Дирака выполняется следующая алгебра:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \tag{9.62}$$

где $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ – метрический тензор 4-пространства, который умножается на единичную матрицу. В соотношение (9.62) можно включить и матрицу γ^5 если считать, что $g^{55} = 1$. Достаточно проверить эту алгебру только для одного представления, так как она инварианта относительно преобразования $\tilde{\gamma}^\mu = U \gamma^\mu U^{-1}$. Таким образом, квадрат матриц γ^0 и γ^5 равен 1, а квадрат матриц $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ равен -1 . Если индексы μ и ν *различны*, то матрицы *антикоммутируют*: $\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu$.

▷ Матрицы α обладают похожей алгеброй, но с символом Кронекера:

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}. \quad (9.63)$$

Матрицы γ^5 и α коммутируют, а $\beta = \gamma^0$ с γ^5 и α – антисимметричны:

$$\alpha \gamma^5 = \gamma^5 \alpha, \quad \beta \gamma^5 = -\gamma^5 \beta, \quad \beta \alpha = -\alpha \beta. \quad (9.64)$$

Эти соотношения можно ($\lessdot H_{97}$) уже проверить не перемножая матрицы, а используя алгебру (9.62) и определение α и β .

▷ Нам потребуется также следующий набор из шести матриц:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = \gamma^\mu \gamma^\nu - g^{\mu\nu}, \quad (9.65)$$

где второе равенство записано при помощи алгебры (9.62). Заметим, что $\gamma^\mu \gamma^\nu = \sigma^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}$ разбивается на сумму симметричного тензора $g^{\mu\nu}$ (умноженного на единичную матрицу) и антисимметричного матричного тензора $\sigma^{\mu\nu}$.

Обратим внимание, что индексы μ и ν перечисляют матрицы $\sigma^{\mu\nu}$, а не являются номерами их компонент. Антисимметричный матричный тензор $\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$ можно выразить через два матричных вектора. Так, $\sigma^{0i} = \gamma^0 \gamma^i = \alpha^i$ или $\alpha = \{\sigma^{01}, \sigma^{02}, \sigma^{03}\}$. Три независимые пространственные компоненты выражаются через векторную матрицу:

$$\Sigma = i \{\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12}\} = i \{\gamma^2 \gamma^3, \gamma^3 \gamma^1, \gamma^1 \gamma^2\} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (9.66)$$

где запись через матрицы Паули справедлива для всех приведенных выше представлений (но не для всех возможных!). Через векторные матрицы α и Σ тензорную матрицу $\sigma^{\mu\nu}$ можно записать следующим образом:

$$\sigma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ -\alpha_x & 0 & -i\Sigma_z & i\Sigma_y \\ -\alpha_y & i\Sigma_z & 0 & -i\Sigma_x \\ -\alpha_z & -i\Sigma_y & i\Sigma_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.67)$$

В обозначениях 3-й главы первого тома (стр. V₁:228) $\sigma^{\mu\nu} = (-\alpha, -i\Sigma)$.

▷ В любом представлении можно проверить ($\lessdot H_{98}$), что

$$\det \gamma^0 = \det \boldsymbol{\gamma} = \det \gamma^5 = \det \boldsymbol{\alpha} = \det \boldsymbol{\Sigma} = 1. \quad (9.68)$$

Определитель инвариантен относительно смены представления:

$$\det(U\Gamma U^{-1}) = \det U \det \Gamma \det U^{-1} = \det \Gamma \det(UU^{-1}) = \det \Gamma,$$

поэтому определители матриц будут равны единице в любом представлении.

▷ Введём матрицы Дирака с нижним индексом:

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu = \{\gamma^0, -\boldsymbol{\gamma}\} = (\gamma^\mu)^+ = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0, \quad (9.69)$$

где крестик – это эрмитово сопряжение. Соотношение $(\gamma^\mu)^+ = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ справедливо для представлений, получающихся из спинорного при помощи *унитарной* матрицы $U^+ U = 1$ ($\ll H_{99}$). В таких представлениях (все приведенные выше) $\beta = \gamma^0, \gamma^5, \boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$ являются эрмитовыми матрицами, а ($\ll H_{100}$)

$$(\sigma^{\mu\nu})^+ = -\gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0 = -\sigma_{\mu\nu}. \quad (9.70)$$

По аналогии с ковариантным тензорным анализом определяется матричный тензор $\sigma_{\mu\nu}$ с нижними индексами, при помощи свертки $\sigma^{\mu\nu}$ с двумя метрическими тензорами. В этом случае нулевые компоненты меняют знак, а пространственные – нет: $\sigma_{\mu\nu} = (\boldsymbol{\alpha}, -\imath \boldsymbol{\Sigma})$.

▷ Во всех приведенных выше представлениях матрицы γ^0 и γ^2 *симметричны*, а γ^1 и γ^3 – *антисимметричны*:

$$(\gamma^0)^T = \gamma^0, \quad (\gamma^2)^T = \gamma^2, \quad (\gamma^1)^T = -\gamma^1, \quad (\gamma^3)^T = -\gamma^3.$$

Подобное свойство выполняется и в других представлениях, которые получаются при помощи *ортогональной* матрицы $U^T U = 1$. (т.е. не во всех представлениях). При помощи матрицы γ^2 эти соотношения можно записать в виде одного (в первом равенстве индекс внизу!):

$$(\gamma^\mu)^T = \gamma^2 \gamma_\mu \gamma^2 = \gamma^2 \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^2. \quad (9.71)$$

Кроме этого из $(\gamma^\mu)^+ = (\gamma^\mu)^{*T} = \gamma_\mu$ следует, что при комплексном сопряжении матрицы меняются следующим образом: $(\gamma^\mu)^* = \gamma_\mu^T = \gamma^2 \gamma^\mu \gamma^2$.

▷ При помощи алгебры матриц Дирака (9.62) можно вычислять коммутаторы (напомним, что $[A, B] = AB - BA$). Например ($\ll H_{101}$):

$$[\gamma^\alpha, \gamma^\mu \gamma^\nu] = 2(g^{\alpha\mu} \gamma^\nu - g^{\alpha\nu} \gamma^\mu). \quad (9.72)$$

Такой же результат получится при коммутировании γ^α с $\sigma^{\mu\nu}$. Свертка коммутатора с $g_{\mu\nu}$ в правой части (9.72) даёт ноль. Это связано с тем, что $g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = \gamma^\mu \gamma_\mu$ пропорциональна единичной матрице. Действительно, при помощи алгебры (9.62) докажем что

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4. \quad (9.73)$$

По определению $\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu$ и $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, поэтому:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = g_{\mu\nu} (-\gamma^\nu \gamma^\mu + 2g^{\mu\nu}) = -\gamma^\mu \gamma_\mu + 2g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}.$$

Перенося $\gamma^\mu \gamma_\mu$ влево и учитывая $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = 4$, приходим к (9.73).

▷ Пусть между свертывающимися матрицами Дирака стоит произведение произвольного числа матриц Дирака: $\gamma^\mu A \gamma_\mu$, где $A = \gamma^{\lambda_1} \dots \gamma^{\lambda_n}$. Для упрощения таких выражений, одна из сворачивающихся матриц при помощи алгебры (9.62) переносится ко второй, после чего их свертка убирается по (9.73): Например:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\mu + 2g^{\mu\nu} \gamma_\mu = -4\gamma^\nu + 2\gamma^\nu = -2\gamma^\nu. \quad (9.74)$$

Приведём несколько таких свёрток:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= -2\gamma^\nu, \\ \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma_\mu &= 4g^{\lambda\rho}, \\ \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= -2\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\lambda, \\ \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= 2(\gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\lambda). \end{aligned}$$

Аналогично упрощаются выражения со свертками матриц Дирака, стоящими в произвольных местах. Матрицы с одинаковыми индексами собираются вместе, после чего применяется соотношение (9.73).

▷ След (сумма диагональных элементов) матриц Дирака γ^μ , γ^5 равен нулю. Для следа произведения матриц Дирака справедливы следующие соотношения (индексы равны 0, ..., 5 и $g^{00} = g^{55} = 1$):

$$\frac{1}{4} \operatorname{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = g^{\mu\nu}, \quad (9.75)$$

$$\frac{1}{4} \operatorname{Tr}(\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) = g^{\lambda\mu} g^{\nu\rho} - g^{\lambda\nu} g^{\mu\rho} + g^{\lambda\rho} g^{\mu\nu}. \quad (9.76)$$

Для доказательства необходимо перенести первую матрицу под следом вправо, при помощи алгебры (9.62), затем, воспользовавшись тем, что под следом можно делать циклическую перестановку, получить исходное выражение. Так:

$$\operatorname{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = \operatorname{Tr}(-\gamma^\nu \gamma^\mu + 2g^{\mu\nu}) = -\operatorname{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) + 2g^{\mu\nu} \operatorname{Tr}1.$$

Так как $\operatorname{Tr}1 = 4$, получаем (9.75) и аналогично (9.76). След нечетного произведения матриц Дирака равен нулю (например, $\operatorname{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda) = 0$, индексы 0...3). Это можно показать ($\lessdot H_{102}$), умножив выражение под следом на $1 = \gamma^5 \gamma^5$ (γ^5 антикоммутирует со всеми матрицами Дирака).

След γ^5 с двумя и четырьмя матрицами Дирака равен ($\lessdot H_{103}$):

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) &= 0, \\ \operatorname{Tr}(\gamma^5 \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) &= 4\imath \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ – тензор Леви-Чивиты ($\varepsilon^{0123} = -1$). Заметим, что матрицу γ^5 можно также записать в виде $\gamma^5 = (\imath/4!) \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho$, где $\varepsilon_{0123} = 1$.

▷ Матрицы γ^5 , $\sigma^{\mu\nu}$ или γ^5 , $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\Sigma}$, вместе с единичной матрицей образуют *замкнутую алгебру*, в том смысле, что их произведения выражаются снова через эти же матрицы. Так:

$$\gamma^5 \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} \gamma^5 = \boldsymbol{\Sigma}, \quad \gamma^5 \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma} \gamma^5 = \boldsymbol{\alpha}. \quad (9.77)$$

Эти формулы проще всего проверить в любом конкретном представлении. Понятно, что при преобразовании $\tilde{\Gamma} = U\Gamma U^{-1}$ эти и им подобные соотношения не изменятся. Для описания алгебры матриц $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$ удобно скалярно умножить их на два произвольных вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} . Снова выбирая, например, спинорное представление и, используя алгебру матриц Паули (стр. 211), получаем:

$$(\mathbf{a}\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{b}\boldsymbol{\alpha}) = (\mathbf{a}\boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{b}\boldsymbol{\Sigma}) = \mathbf{ab} + \imath[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \boldsymbol{\Sigma}, \quad (9.78)$$

$$(\mathbf{a}\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{b}\boldsymbol{\Sigma}) = (\mathbf{a}\boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{b}\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{ab} \gamma^5 + \imath[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \boldsymbol{\alpha}. \quad (9.79)$$

Обратим внимание, что при умножении матриц $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$ возникает матрица γ^5 , поэтому без неё алгебра будет незамкнута. При помощи этих тождеств можно получать различные производные соотношения. Например, опуская вектор \mathbf{a} (он произвольный!) в последнем равенстве, имеем:

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{b}\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{b} \gamma^5 + \imath[\mathbf{b} \times \boldsymbol{\alpha}], \quad (9.80)$$

где вектор \mathbf{a} был предварительно внесен из векторного произведения (правило выталкивания). Аналогично, тождество (9.79) даёт значение коммутатора:

$$[\mathbf{a}\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{b}\boldsymbol{\alpha}] = 2\imath[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \boldsymbol{\alpha}. \quad (9.81)$$

Из (9.78) следуют коммутаторы для векторных матриц между собой:

$$[\mathbf{a}\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{b}\boldsymbol{\alpha}] = [\mathbf{a}\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{b}\boldsymbol{\Sigma}] = 2\imath[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \boldsymbol{\Sigma}. \quad (9.82)$$

Если опустить векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} , то вместо векторного произведения необходимо будет написать символ Леви-Чивиты $\varepsilon_{ijk} \boldsymbol{\Sigma}_k$. Матрица γ^5 в соответствии с (9.77) коммутирует с $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$.

В представлениях в которых справедливо правило транспонирования матриц Дирака (9.71), стр. 254 выполняются соотношения ($\ll H_{104}$):

$$(\gamma^5)^T = \gamma^5, \quad \boldsymbol{\alpha}^T = -\gamma^2 \boldsymbol{\alpha} \gamma^2, \quad \boldsymbol{\Sigma}^T = \gamma^2 \boldsymbol{\Sigma} \gamma^2. \quad (9.83)$$

Из тождеств (9.78) следует, что для единичного вектора $\mathbf{n}^2 = 1$ имеет место $(\mathbf{n}\boldsymbol{\Sigma})^2 = (\mathbf{n}\boldsymbol{\alpha})^2 = 1$. Поэтому, раскладывая экспоненту в ряд, можно получить следующее соотношение: $e^{\phi \mathbf{n}\boldsymbol{\alpha}} = \text{ch } \phi + \mathbf{n}\boldsymbol{\alpha} \text{sh } \phi$ и аналогичное соотношение для $\boldsymbol{\Sigma}$. Кроме этого $e^{\phi \gamma^5} = \text{ch } \phi + \gamma^5 \text{sh } \phi$.

▷ Любая матрица 2x2 с четырьмя комплексными элементами может быть разложена по базису, состоящему из единичной матрицы и трех матриц Паули σ . Аналогично, любая матрица 4x4 имеет 16 элементов и может быть разложена по шестнадцати матрицам ($\mu < \nu$):

$$\Gamma_a = \{ 1, \gamma^5, \gamma^\mu, \imath\gamma^\mu\gamma^5, \imath\sigma^{\mu\nu} \}, \quad (9.84)$$

которые составляют базис в пространстве матриц 4x4. Вместо 6 матриц $\sigma^{\mu\nu}$, $\mu < \nu$ можно использовать 2 векторные матрицы $\imath\alpha$ и Σ .

Семь матриц базиса Γ_a являются эрмитовыми: $\{1, \gamma^5, \gamma^0, \imath\gamma^0\gamma^5, \Sigma\}$, остальные девять: $\{\gamma, \imath\gamma\gamma^5, \imath\alpha\}$ – антиэрмитовыми (при эрмитовом сопряжении у них появляется знак минус). Мнимые единицы поставлены множителями в (9.84), чтобы эрмитово сопряжение приводило к опусканию ковариантных индексов μ и ν вниз:

$$\Gamma_a^+ = \{ 1, \gamma^5, \gamma_\mu, \imath\gamma_\mu\gamma^5, \imath\sigma_{\mu\nu} \}. \quad (9.85)$$

В спинорном представлении след всех матриц базиса Γ_a , кроме единичной $\Gamma_0 = 1$, равен нулю. След инвариантен относительно унитарного преобразования $\tilde{\Gamma}_a = U\Gamma_a U^+$, поэтому в любом таком представлении:

$$\frac{1}{4} \operatorname{Tr} \Gamma_a = \delta_{0a}, \quad \frac{1}{4} \operatorname{Tr}(\Gamma_a \Gamma_b^+) = \delta_{ab}, \quad (9.86)$$

где второе соотношение проверяется при помощи (9.75), (9.76). Для произвольной матрицы M всегда можно записать:

$$M = \sum_{a=1}^{16} c_a \Gamma_a, \quad c_a = \frac{1}{4} \operatorname{Tr}(M \Gamma_a^+). \quad (9.87)$$

где c_a – комплексные коэффициенты разложения (проекции матрицы M на базисные матричные векторы Γ_a), значения которых получаются при помощи следов (9.86). Последние два соотношения можно объединить в одно, выписав в явном виде матричные индексы:

$$M_{ij} = \frac{1}{4} \sum_a M_{lk} (\Gamma_a^+)^{kl} (\Gamma_a)_{ij}.$$

Возьмём матрицу M_{ij} у которой элементы равны нулю, кроме одного с индексами i_0, j_0 . Такая матрица имеет вид $M_{ij} = \delta_{ii_0}\delta_{jj_0}$, поэтому:

$$\delta_{ii_0}\delta_{jj_0} = \frac{1}{4} \sum_a (\Gamma_a)_{ij} (\Gamma_a^+)_{j_0 i_0}.$$

Это тождество называется *условием полноты*.

9.7 Преобразование биспинора

Двухкомпонентные спиноры, по определению, преобразуются при помощи матрицы 2×2 , с единичным определителем (группа $\mathbf{SL}(2, C)$). Запишем эту матрицу (стр. 232), выделив действительную и мнимую части в её параметрах:

$$\mathbb{S} = c_0 + i c_1 + (\mathbf{a} + i \mathbf{b}) \boldsymbol{\sigma}.$$

Так как $\mathbb{S}\bar{\mathbb{S}} = 1$, то существует связь $(c_0 + i c_1)^2 - (\mathbf{a} + i \mathbf{b})^2 = 1$. Матрица \mathbb{S} преобразует спинор без точки с верхним индексом: $\chi^\mu = \mathbb{S}^\mu{}_\nu \chi^\nu$. Преобразование же спинора с нижним индексом выглядит так:

$$\chi'_\mu = \varepsilon_{\mu\nu} \chi^\nu = \varepsilon_{\mu\nu} \mathbb{S}^\nu{}_\lambda \chi^\lambda = \varepsilon_{\mu\nu} \mathbb{S}^\nu{}_\lambda \chi_\tau \varepsilon^{\tau\lambda} = -(\varepsilon \mathbb{S} \varepsilon)_\mu{}^\tau \chi_\tau.$$

Спинор с нижним индексом и точкой, преобразуется как комплексное сопряжение спинора без точки:

$$\xi'_\mu = -(\varepsilon \mathbb{S}^* \varepsilon)_\mu{}^\tau \dot{\xi}_\tau$$

(напомним, что ε – действительна). Квадрат матрицы ε равен $\varepsilon^2 = -1$ и $\varepsilon \boldsymbol{\sigma} \varepsilon = \boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}^*$, поэтому:

$$-\varepsilon \mathbb{S}^* \varepsilon = c_0 - i c_1 - (\mathbf{a} - i \mathbf{b}) \boldsymbol{\sigma}.$$

Запишем преобразование для биспинора $\psi = (\chi^\nu \ \xi'_\mu)^T \equiv (\chi \ \xi)^T$:

$$\psi' = \begin{pmatrix} \chi' \\ \xi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{S} & 0 \\ 0 & -\varepsilon \mathbb{S}^* \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix} = S\psi.$$

Учитывая явный вид матриц в *спинорном* представлении, окончательно, получаем:

$$S = c_0 + i c_1 \gamma^5 + \mathbf{a} \boldsymbol{\alpha} + i \mathbf{b} \boldsymbol{\Sigma}. \quad (9.88)$$

Несложно видеть, что преобразование $\psi' = S\psi$ с такой матрицей справедливо в любом представлении $\tilde{\psi} = U\psi$, $\tilde{\Gamma} = U\Gamma U^{-1}$, а не только в спинорном. Обратим внимание на наличие матрицы γ^5 . Часто её игнорируют, ограничиваясь только матрицами $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ или их ковариантным аналогом $\sigma^{\mu\nu}$. В случае бустов или пространственных вращений скалярная часть кватернионов преобразований действительна и $c_1 = 0$. Поэтому, в этом случае матрица γ^5 не возникает. Однако уже композиция произвольного буста и вращения приводит к γ^5 . Связано это с тем фактом, что $\sigma^{\mu\nu}$ или $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ не образуют замкнутой алгебры относительно умножения. Как было показано в предыдущем разделе такую алгебру, наряду с единичной матрицей, имеют матрицы $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ и γ^5 . Поэтому последняя неизбежно появляется в матрице преобразования биспинора относительно общих преобразований Лоренца.

Обратный кватернион преобразования получается из исходного, со-пряжением $\bar{S}\bar{S} = \mathbf{1}$, т.е. сменой знака у векторных компонент. Поэтому, для записи обратной матрицы S^{-1} необходимо изменить знак у векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Действительно, прямым перемножением с учетом тождеств (9.77)-(9.79) и соотношений $c_0^2 - c_1^2 - \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = 1$, $c_0c_1 = \mathbf{ab}$, следующих из связи коэффициентов кватерниона, несложно проверить, что:

$$S^{-1} = c_0 + i c_1 \gamma^5 - \mathbf{a}\boldsymbol{\alpha} - i \mathbf{b}\boldsymbol{\Sigma}. \quad (9.89)$$

Если ввести антисимметричный тензор $\omega_{\mu\nu} = 2(-\mathbf{a}, -\mathbf{b})$, компоненты которого определяются действительной и мнимой частью векторных компонент кватерниона и матрицу $\sigma^{\mu\nu} = (-\boldsymbol{\alpha}, -i\boldsymbol{\Sigma})$, то матрицы преобразования биспинора можно записать в следующем виде:

$$S = c_0 + i c_1 \gamma^5 + \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}, \quad S^{-1} = c_0 + i c_1 \gamma^5 - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}. \quad (9.90)$$

Для лоренцевского буста со скоростью \mathbf{v} и пространственного вращения на угол ϕ вокруг единичного вектора \mathbf{n} матрицы преобразования биспинора выглядят следующим образом (см.(9.1), стр. 232):

$$L = \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \mathbf{m}\boldsymbol{\alpha}, \quad R = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \mathbf{n}\boldsymbol{\Sigma}, \quad (9.91)$$

где $\operatorname{th} \alpha = v$, $\mathbf{m} = \mathbf{v}/v$ (не путать параметр α с тройкой матриц $\boldsymbol{\alpha}$). Перемножение матриц L и R при произвольном значении их параметров даст матрицу общего преобразования. Напомним, что при этом дополнительно к матрицам $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$ появится матрица γ^5 .

При бесконечно малом преобразовании $\delta\mathbf{v} = \alpha \mathbf{m}$ и $\delta\phi = \phi \mathbf{n}$ синусы и косинусы в (9.91) можно разложить в ряд и матрицы преобразований принимают вид:

$$L \approx 1 - \frac{1}{2} \delta\mathbf{v} \boldsymbol{\alpha}, \quad R \approx 1 + \frac{i}{2} \delta\phi \boldsymbol{\Sigma}.$$

В первом приближении такая композиция лоренцевского буста и поворота выполненная *в любом* порядке, равна:

$$S = LR \approx RL \approx 1 - \frac{1}{2} \delta\mathbf{v} \boldsymbol{\alpha} + \frac{i}{2} \delta\phi \boldsymbol{\Sigma} = 1 + \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}, \quad (9.92)$$

где $\omega_{\mu\nu} = (\delta\mathbf{v}, -\delta\phi)$. *В этом* приближении скалярная часть кватерниона действительна, поэтому, в отличие от (9.90), матрица γ^5 не возникает. В качестве упражнения (<H105) предлагается убедиться, что антисимметричная матрица $\omega^\mu_\nu = g^{\mu\alpha}\omega_{\alpha\nu}$ является матрицей бесконечно малого преобразования 4-векторов: $x'^\mu \approx x^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu$.

▷ Найдём связь матрицы S преобразования спинора и матрицы Λ^μ_ν преобразования 4-вектора:

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x') = S\psi(x), \quad x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (9.93)$$

где Λ^μ_ν является матрицей группы Лоренца (считаем, что $\Lambda^0_0 > 0$). Запишем уравнение Дирака в штрихованной системе отсчета:

$$i\gamma^\mu \partial'_\mu \psi'(x') = m\psi'(x').$$

Производная ∂^μ преобразуется как и любой 4-вектор в соответствии со вторым соотношением (9.93):

$$\partial'_\mu = g_{\mu\alpha} \partial'^\alpha = g_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha_\beta \partial^\beta = g_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha_\beta g^{\beta\nu} \partial_\nu = \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu. \quad (9.94)$$

Поэтому в нештрихованной системе уравнение Дирака имеет вид:

$$i\gamma^\mu \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu S\psi(x) = m S\psi(x).$$

Умножая его слева на S^{-1} и требуя, чтобы получилось исходное уравнение $i\gamma^\nu \partial_\nu \psi = m\psi$, имеем:

$$S^{-1} \gamma^\mu S \Lambda_\mu^\nu = \gamma^\nu.$$

Это соотношение эквивалентно следующей связи S и Λ :

$$S^{-1} \gamma^\mu S = \Lambda^\mu_\lambda \gamma^\lambda, \quad (9.95)$$

что легко проверяется, при помощи условия ортогональности лоренцевской матрицы: $\Lambda_\mu^\nu \Lambda^\mu_\lambda = \delta_\lambda^\nu$, см. стр. V₁:209. В качестве полезного упражнения (<H₁₀₆) предлагается ещё раз найти матрицу S при бесконечно малом преобразовании Лоренца. Для этого её необходимо записать в виде $S \approx 1 + \Omega$, найдя при помощи (9.95) матрицу Ω .

Из инвариантности $\bar{\psi}'\psi' = \psi'^+\gamma^0\psi' = \psi^+S^+\gamma^0S\psi = \psi^+\gamma^0\psi$ следует, что $S^+\gamma^0S = \gamma^0$ или

$$S^{-1} = \gamma^0 S^+ \gamma^0. \quad (9.96)$$

При помощи этого соотношения, стоит проверить (9.89). В представлениях в которых справедливы правила транспонирования (9.83), стр. 256, из (9.88) и эрмитовости матриц, входящих в S несложно получить:

$$S^+ = -\gamma^2 S^T \gamma^2. \quad (9.97)$$

Отметим также, преобразование сопряженного биспинора:

$$\bar{\psi}(x) \mapsto \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}, \quad (9.98)$$

которое непосредственно следует из (9.96) и (9.93).

▷ Соотношение (9.95) позволяет устанавливать трансформационные свойства различных выражений содержащих спиноры и матрицы Дирака (т.н. *билинейные формы*). Докажем, например, ещё раз, что $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ преобразуется как 4-вектор:

$$\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = \bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu S\psi = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi}\gamma^\nu\psi. \quad (9.99)$$

Аналогично, 4-тензором будет выражение в котором между сопряженным спинором и спинором находится произведение произвольного числа матриц Дирака. Например:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi \mapsto \bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu\gamma^\nu S\psi = \bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu SS^{-1}\gamma^\nu S\psi = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \bar{\psi}\gamma^\alpha\gamma^\beta\psi.$$

Последнее равенство является преобразованием 4-тензора второго ранга. В частности $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ является антисимметричным 4-тензором. Очевидно также, что $\bar{\psi}\psi$ – это скаляр (инвариант преобразований Лоренца).

Матрица S преобразования спинора зависит только от α , Σ и γ^5 , с которыми γ^5 коммутирует, поэтому:

$$S\gamma^5 = \gamma^5 S. \quad (9.100)$$

В результате, 4-вектором оказывается следующий *псевдовектор*: $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ (смысл приставки “псевдо” прояснится на стр. ??, при изучении дискретных симметрий). Действительно:

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \mapsto \bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu\gamma^5 S\psi = \bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu S\gamma^5\psi = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi.$$

Комбинация $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ называется *псевдоскаляром* и, как легко видеть, она инвариантна относительно преобразований Лоренца.

Напомним (стр. 257), что любую матрицу 4x4 можно разложить по базису из 16 матриц $\Gamma_a = \{1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$. Каждая из этих матриц в билинейном выражении $\bar{\psi}\Gamma_a\psi$ принимает понятный смысл относительно преобразований Лоренца. Поэтому, любая билинейная форма с произвольной матрицей 4x4, находящаяся между $\bar{\psi}$ и ψ может быть представлена в виде некоторого ковариантного выражения. Коэффициенты разложения такого выражения по базисным матрицам, в свою очередь, являются скалярами, 4-векторами или тензорами.

Используя определение $\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0$ можно записывать билинейные формы и в виде $\psi^+\dots\psi$. Например, так как $\gamma^0\Sigma = \gamma\gamma^5$, то выражения $\psi^+\gamma^5\psi$ и $\psi^+\Sigma\psi$ являются компонентами 4-вектора.

Отметим также инвариантность комбинации: $\psi^T\gamma^0\gamma^2\psi = inv$, которую можно доказать при помощи (9.96) и (9.97) из которых следует правило транспонирования $S^T = \gamma^0\gamma^2 S^{-1}\gamma^0\gamma^2$.

9.8 Принцип калибровочной инвариантности

Н: Помощь

В этой главе приведены решения задач или громоздких выводов, которые в основном тексте были помечены символом ($\Leftarrow H_i$).

Закон Кулона

- **H₁** Поле бесконечной тонкой заряженной нити (стр. 15)

Окружая нить цилиндром так, чтобы она проходила по его оси симметрии, имеем:

$$\int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = |\mathbf{E}| 2\pi r_{\perp} L = 4\pi Q,$$

где r_{\perp} – радиус цилиндра, L – его длина и $2\pi r_{\perp} L$ – площадь его поверхности. Заряд Q находится на участке нити длиной L . Поэтому

$$\mathbf{E} = \frac{2Q/L}{r_{\perp}^2} \mathbf{r}_{\perp} = \frac{2\mu}{r_{\perp}^2} \mathbf{r}_{\perp},$$

где $\mu = Q/L$ – удельный заряд нити (заряд на единицу длины L).

Введём единичный вектор \mathbf{k} в направлении линии. Вектор, перпендикулярный нити \mathbf{r}_{\perp} (см. рисунок на стр. 15), можно выразить через радиус-вектор к произвольной точке пространства:

$$\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - (\mathbf{r}\mathbf{k}) \mathbf{k} = \mathbf{k} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{k}], \quad \mathbf{r}_{\perp}^2 = \mathbf{r}^2 - (\mathbf{r}\mathbf{k})^2 = [\mathbf{r} \times \mathbf{k}]^2,$$

откуда получается напряжённость (стр. 15).

- **H₂** Регуляризация поля заряженной нити (стр. 15)

Вычислим дивергенцию, устранив сингулярность в знаменателе:

$$\frac{\nabla \mathbf{E}}{2\mu} = \nabla \frac{\mathbf{r} - (\mathbf{r}\mathbf{k}) \mathbf{k}}{r^2 - (\mathbf{r}\mathbf{k})^2 + a^2} = \frac{3 - \mathbf{k}^2}{r^2 - (\mathbf{r}\mathbf{k})^2 + a^2} - \frac{(\mathbf{r} - (\mathbf{r}\mathbf{k}) \mathbf{k})(2\mathbf{r} - 2(\mathbf{r}\mathbf{k}) \mathbf{k})}{(r^2 - (\mathbf{r}\mathbf{k})^2 + a^2)^2}.$$

Приводя к общему знаменателю ($\mathbf{k}^2 = 1$), имеем:

$$\frac{\nabla \mathbf{E}}{2\mu} = \frac{2a^2}{(r_{\perp}^2 + a^2)^2}.$$

При $r_{\perp} > 0$ и $a \rightarrow 0$ дивергенция стремится к нулю. Если $r_{\perp} = 0$ и $a = 0$, получается бесконечность. Пусть нить расположена вдоль оси z . Вычислим следующий интеграл в цилиндрических координатах, интегрируя по z вдоль участка длиной L :

$$\int_0^\infty r_{\perp} dr_{\perp} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz \frac{a^2/\pi}{(r_{\perp}^2 + a^2)^2} = 2L \int_0^\infty \frac{a^2 r_{\perp} dr_{\perp}}{(r_{\perp}^2 + a^2)^2} = L \int_0^\infty \frac{d\chi}{(\chi + 1)^2} = L.$$

Поэтому при $a \rightarrow 0$

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi\mu \delta_L(\mathbf{r}), \quad \delta_L(\mathbf{r}) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2/\pi}{(r_{\perp}^2 + a^2)},$$

где $\delta_L(\mathbf{r})$ – функция Дирака с линейной сингулярностью (см. стр. 314).

• **H₃** *Тождества, следующие из преобразований Лоренца* (стр. 21)

Соотношение $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r})$ получается непосредственно из преобразований Лоренца при $t = 0$. Возводя его в квадрат, имеем:

$$\mathbf{r}'^2 = \mathbf{r}^2 + (2\Gamma + \Gamma^2 v^2)(\mathbf{v}\mathbf{r})^2.$$

Учитывая определение фактора Γ (1.28), упростим выражение в скобках:

$$2\Gamma + \Gamma^2 v^2 = \Gamma \left(2 + \frac{\gamma - 1}{v^2} v^2 \right) = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\gamma + 1) = \gamma^2.$$

Аналогично, умножая \mathbf{r}' на скорость \mathbf{v} :

$$\mathbf{v}\mathbf{r}' = \mathbf{v}\mathbf{r} + \Gamma \mathbf{v}^2 (\mathbf{v}\mathbf{r}) = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{v^2} v^2 \right) (\mathbf{v}\mathbf{r}) = \gamma (\mathbf{v}\mathbf{r}).$$

• **H₄** *Соотношение для скорости* (стр. 21)

Перемножим \mathbf{u}' и \mathbf{r}' при $t = 0$:

$$\mathbf{u}'\mathbf{r}' = \frac{(\mathbf{u} - \gamma \mathbf{v} + \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{u}))(\mathbf{r} + \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}))}{\gamma(1 - \mathbf{v}\mathbf{u})}.$$

Раскрывая произведение скобок, имеем:

$$\mathbf{u}'\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{u}\mathbf{r} - \gamma(1 + \Gamma v^2)(\mathbf{v}\mathbf{r}) + (2\Gamma + \Gamma^2 v^2)(\mathbf{v}\mathbf{r})(\mathbf{v}\mathbf{u})}{\gamma(1 - \mathbf{v}\mathbf{u})}$$

или, учитывая, что $1 + \Gamma v^2 = \gamma$ и $2\Gamma + \Gamma^2 v^2 = \gamma^2$:

$$\mathbf{u}'\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{u}\mathbf{r} - \gamma^2(1 - \mathbf{v}\mathbf{u})(\mathbf{v}\mathbf{r})}{\gamma(1 - \mathbf{v}\mathbf{u})} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{r}}{\gamma(1 - \mathbf{v}\mathbf{u})} - \gamma(\mathbf{v}\mathbf{r}).$$

• **H₅** *Дивергенция \mathbf{E} движущегося заряда* (стр. 24)

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{Q\gamma \nabla \mathbf{r}}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2 + a^2)^{3/2}} + \mathbf{r} \nabla \frac{Q\gamma}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2 + a^2)^{3/2}}$$

учитывая, что $\nabla \mathbf{r} = 3$, $\nabla r^2 = 2\mathbf{r}$, $\nabla(\mathbf{v}\mathbf{r}) = \mathbf{v}$, имеем:

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{3Q\gamma}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \mathbf{r} \frac{Q\gamma(2\mathbf{r} + 2\gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})\mathbf{v})}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2 + a^2)^{5/2}}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем:

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{3Q\gamma a^2}{(r^2 + \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{r})^2 + a^2)^{5/2}}.$$

- **H₆** Тождество $(\mathbf{v}\nabla)[\mathbf{v} \times \mathbf{r}] = 0$ (стр. 26)

Так как вектор \mathbf{v} – константа, скалярный оператор $(\mathbf{v}\nabla)$ можно внести под векторное произведение:

$$(\mathbf{v}\nabla)[\mathbf{v} \times \mathbf{r}] = [\mathbf{v} \times (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{r}] = [\mathbf{v} \times \mathbf{v}] = 0,$$

где учтено тождество $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{v}$, проверяемое в компонентах.

- **H₇** Вычисление $\mathbf{v}\nabla$ от электрического поля (стр. 26)

Берём, как производную сложной функции, учитывая

$$(\mathbf{v}\nabla)r^2 = 2(\mathbf{v}\mathbf{r}), \quad (\mathbf{v}\nabla)(\mathbf{v}\mathbf{r})^2 = 2(\mathbf{v}\mathbf{r})\mathbf{v}^2.$$

Магнитное поле

- **H₈** Полный дифференциал (стр. 39)

Интегрируя по \mathbf{r}_1 , при фиксированном \mathbf{r}_2 (константа) имеем:

$$d\left(\frac{1}{|\mathbf{r}_{12}|}\right) = \nabla_1\left(\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\right) d\mathbf{r}_1 = -\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} d\mathbf{r}_1 = -\frac{\mathbf{r}_{12} d\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_{12}|^3}.$$

- **H₉** Притяжение двух проводников (стр. 39)

Интегралы по проводникам берутся от $-L/2$ до $L/2$, где L стремится в бесконечность. Из соображений симметрии ненулевой будет компонента силы перпендикулярная проводникам. Пусть проводники параллельны оси x ($d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = dx_1 dx_2$) и $x_1 = 0$. Тогда интегрирование по x_2 равно

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{R}{(R^2 + x_2^2)^{3/2}} dx_2 = \frac{x_2/R}{(R^2 + x_2^2)^{1/2}} \Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{L/R}{(R^2 + L^2/4)^{1/2}} \rightarrow \frac{2}{R},$$

где в конце L устремлено к бесконечности. Интегрирование по x_1 дает L (которое бесконечно). Поэтому мы относим силу на единицу длины (эта величина будет конечна), т.е. делим F на L . Выбор $x_1 = 0$ (опять же из соображений симметрии и бесконечности проводников) несущественен.

- **H₁₀** Производная $\nabla(r_i r_j \mathbf{j})$ (стр. 42)

Компонентами оператора набла являются частные производные. Поэтому k -тая компонента вектора ∇ равна $\nabla_k = \partial/\partial r_k$. Кроме этого,

$$\partial r_i / \partial r_j = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, равный 1, если $i = j$, и 0, если $i \neq j$. Поэтому, если $\nabla \mathbf{j} = \nabla_k j_k = 0$, то

$$\nabla(r_i r_j \mathbf{j}) = \nabla_k(r_i r_j j_k) = \delta_{ki} r_j j_k + r_i \delta_{kj} j_k = r_j j_i + r_i j_j,$$

где по повторяющемуся индексу k подразумевается суммирование от 1 до 3. В суммах выживает только одно слагаемое, для которого $\delta_{ij} \neq 0$.

• **H₁₁** *Ларморова прецессия* (стр. 45)

Проекция момента импульса \mathbf{L} на магнитное поле \mathbf{B} не меняется со временем:

$$\frac{d(\mathbf{LB}_0)}{dt} = -\frac{Q}{2m} \mathbf{B}_0 [\mathbf{B}_0 \times \mathbf{L}] = 0.$$

Возьмём вторую производную уравнения (2.26):

$$\frac{d^2\mathbf{L}}{dt^2} = -\left(\frac{Q}{2m}\right)^2 [\mathbf{B}_0 \times [\mathbf{B}_0 \times \mathbf{L}]] = \left(\frac{Q}{2m}\right)^2 \mathbf{B}_0 (\mathbf{B}_0 \mathbf{L}) - \left(\frac{Q \mathbf{B}_0}{2m}\right)^2 \mathbf{L}.$$

Перпендикулярная к \mathbf{B}_0 составляющая \mathbf{L}_\perp , где $\mathbf{B}_0 \mathbf{L}_\perp = 0$ удовлетворяет осцилляторному уравнению $d^2\mathbf{L}_\perp/dt^2 + \omega^2 \mathbf{L}_\perp = 0$, где $\omega = QB_0/2m$, т.е. вращается с угловой скоростью ω .

• **H₁₂** *Преобразования в компонентах* (стр. 53)

Запишем $\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})$ для $\mathbf{v} = \{v, 0, 0\}$:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y - vB_z \\ E'_z + vB_y \end{pmatrix} - \frac{\gamma - 1}{v^2} (vE_x) \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Электромагнитные волны

• **H₁₃** *Тождество для $\mathbf{E} \times [\nabla \times \mathbf{E}]$* (стр. 70)

Формулу “бац минус цаб” (стр. V₁:302) запишем с индексом i , сумма от 1 до 3 по которому даёт свёртку скалярного произведения:

$$\mathbf{E} \times [\nabla \times \mathbf{E}] = E_i \nabla E_i - (\mathbf{E} \nabla) \mathbf{E} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{E}^2) - (\mathbf{E} \nabla) \mathbf{E},$$

Вычислим теперь производную произведения:

$$\nabla_i (E_i E_j) = E_j \nabla_i E_i + E_i \nabla_i E_j = E_j (\nabla \mathbf{E}) + (\mathbf{E} \nabla) E_j.$$

Выражая $(\mathbf{E} \nabla) E_j$, приходим к требуемому тождеству.

• **H₁₄** *Якобиан преобразований Лоренца* (стр. 57)

Якобиан является определителем матрицы, получаемой дифференцированием старых координат по новым. При переходе от интегрирования в штрихованной системе к нештрихованной, имеем:

$$d^4 x' = \det \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \right) d^4 x = \det \Lambda d^4 x = d^4 x,$$

где учтено, что $\det \Lambda = 1$ (см. стр. V₁:209). Это же можно показать более неформально. При движении, в силу сокращения длины, 3-объём в γ сокращается, а время dt в γ раз замедляется (удлиняется), поэтому их произведение $d^4 x = dt dV$ остаётся неизменным.

- \mathbf{H}_{15} Напряжённости поля движущегося заряда $\mathbf{x}_0(t)$ (стр. 86)

Приведём детали вычислений. Так как $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(T)$, имеем:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dT} = \frac{d\mathbf{x}_0}{dT} = -\mathbf{V}, \quad \frac{dR}{dT} = \frac{d\sqrt{\mathbf{R}^2}}{dT} = -\frac{\mathbf{VR}}{R}.$$

Выражение для градиента скалярного поля равно:

$$\nabla\varphi = -\frac{Q}{(R - \mathbf{VR})^2} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} - \mathbf{V} \right) - \frac{Q\mathbf{R}}{(R - \mathbf{VR})^3} \left(\frac{\mathbf{VR}}{R} + \mathbf{WR} - \mathbf{V}^2 \right),$$

где первый член – производная по \mathbf{x} , а второй – производная по T и $\mathbf{W} = d\mathbf{V}/dT$ – ускорение заряда. Аналогично вычисляется производная по времени от векторного потенциала:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{QR\mathbf{W}}{(R - \mathbf{VR})^2} + \frac{QR\mathbf{V}}{(R - \mathbf{VR})^3} \left(\frac{\mathbf{VR}}{R} + \mathbf{WR} - \mathbf{V}^2 \right).$$

Собирая все производные вместе и учитывая тождество для двойного векторного произведения:

$$[\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - \mathbf{VR}) \times \mathbf{W}]] = (\mathbf{R} - \mathbf{VR})(\mathbf{RW}) - \mathbf{WR}(R - \mathbf{VR}),$$

получающееся по формуле “бац-минус-цац”, находим напряжённость электрического поля:

$$\mathbf{E} = Q \frac{(1 - V^2)(\mathbf{R} - \mathbf{VR})}{(R - \mathbf{VR})^3} + Q \frac{[\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - \mathbf{VR}) \times \mathbf{W}]]}{(R - \mathbf{VR})^3}.$$

Ротор векторного потенциала:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{Q\mathbf{W} \times \mathbf{R}}{(R - \mathbf{VR})^2} + \frac{Q\mathbf{V} \times \mathbf{R}}{R(R - \mathbf{VR})^2} + \frac{Q\mathbf{V} \times \mathbf{R}}{(R - \mathbf{VR})^3} \left(\frac{\mathbf{VR}}{R} + \mathbf{WR} - \mathbf{V}^2 \right).$$

Приводя к общему знаменателю, имеем:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = Q \frac{\mathbf{VR}(1 - V^2) + \mathbf{VR}(\mathbf{WR}) + \mathbf{WR}(R - \mathbf{VR})}{(R - \mathbf{VR})^3} \times \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

Так как $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = 0$, несложно видеть, что это эквивалентно выражению:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{E}}{R},$$

которое является искомой напряжённостью магнитного поля.

- H₁₆ *Полная энергия, теряемая зарядом* (стр. 89)

Запишем второе слагаемое в (3.44), стр. 86, при помощи единичного вектора $\mathbf{N} = \mathbf{R}/R$:

$$\frac{R}{Q} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{N} \times [(\mathbf{N} - \mathbf{V}) \times \mathbf{W}]}{(1 - \mathbf{NV})^3} = \frac{(\mathbf{N} - \mathbf{V})(\mathbf{NW})}{(1 - \mathbf{NV})^3} - \frac{\mathbf{W}}{(1 - \mathbf{NV})^2}.$$

Возведём это выражение в квадрат:

$$\frac{R^2}{Q^2} \mathbf{E}^2 = \frac{\mathbf{W}^2}{(1 - \mathbf{NV})^4} + \frac{2(\mathbf{VW})(\mathbf{NW})}{(1 - \mathbf{NV})^5} - \frac{(\mathbf{NW})^2(1 - V^2)}{(1 - \mathbf{NV})^6}.$$

Введём следующее обозначение:

$$I_n = \frac{(1 + V)^n - (1 - V)^n}{nV(1 - V^2)^n},$$

при помощи которого запишем интегралы, возникающие при интегрировании по телесному углу ($\ll H_{17}$):

$$\int \frac{d\Omega}{(1 - \mathbf{NV})^4} = 2\pi I_3, \quad \int \frac{(\mathbf{NW}) d\Omega}{(1 - \mathbf{NV})^5} = 2\pi \frac{(\mathbf{VW})}{V^2} (I_4 - I_3),$$

Третий необходимый интеграл имеет вид:

$$\int \frac{(\mathbf{NW})^2 d\Omega}{(1 - \mathbf{NV})^6} = \frac{[\mathbf{V} \times \mathbf{W}]^2}{V^2} \pi I_5 + \left(\frac{\mathbf{W}^2}{V^2} - \frac{3(\mathbf{VW})^2}{V^4} \right) \pi (2I_4 - I_3 - I_5).$$

Учитывая их, после алгебраических преобразований получаем:

$$I = \int R^2 \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi} d\Omega = \frac{2Q^2}{15} \frac{\mathbf{W}^2(5 + V^2) - 2[\mathbf{V} \times \mathbf{W}]^2(2 + V^2)}{(1 - V^2)^4}.$$

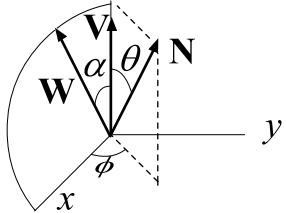
Чтобы найти потерю зарядом энергии, необходимо учесть дополнительный фактор $1 - \mathbf{NV}$ (стр. 89). Его можно также получить при помощи следующих рассуждений. Сфера с центром запаздывающего положения заряда, по которой проведено интегрирование, движется со скоростью \mathbf{V} . Внутри неё находится плотность энергии $(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)/8\pi$. Поэтому поток, теряемый зарядом, *без учёта переносимого поля* равен:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi} - \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} \mathbf{V} = \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi}(1 - \mathbf{NV}) \mathbf{N}.$$

При интегрировании этого выражения во всех приведенных выше интегралах необходимо уменьшить на 1 индексы ($I_k \mapsto I_{k-1}$). В результате чего получается формула Льенара (3.53), стр. 89.

• **H₁₇** Интегрирование интенсивности излучения (стр. 269,88)

В общем случае возникающие интегралы зависят от двух векторов \mathbf{V} и \mathbf{W} . Выберем сферическую систему координат таким образом, что \mathbf{V} направлен вдоль оси z , а \mathbf{W} лежит в плоскости (x, z) . Кроме сферических углов (θ, ϕ) введём угол α между векторами \mathbf{V} и \mathbf{W} . Компоненты векторов и их скалярное произведение равны:



$$\mathbf{N} = \{s_\theta c_\phi, s_\theta s_\phi, c_\theta\}, \quad \mathbf{W} = W \{s_\alpha, 0, c_\alpha\}$$

$$\mathbf{N}\mathbf{W} = W (s_\alpha s_\theta c_\phi + c_\alpha c_\theta),$$

где, как обычно, c и s с индексами обозначают косинус и синус с соответствующим аргументом. В подынтегральном выражении самого простого интеграла зависимости от ϕ нет, поэтому для $d\Omega = d\phi s_\theta d\theta$ имеем:

$$\int \frac{d\Omega}{(1 - \mathbf{N}\mathbf{V})^4} = \int_0^\pi \frac{2\pi s_\theta d\theta}{(1 - V c_\theta)^4} = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{dz}{(1 - V z)^4} = 2\pi I_3,$$

где сделана замена $z = c_\theta$ и введено обозначение:

$$I_n = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{(1 - V z)^{n+1}} = \frac{1/(V n)}{(1 - V z)^n} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{(1 + V)^n - (1 - V)^n}{n V (1 - V^2)^n}.$$

Заметим, что при $V = 0$ получается $I_n = 2$.

Второй интеграл требует предварительного интегрирования по ϕ :

$$\int \frac{(\mathbf{N}\mathbf{W}) d\Omega}{(1 - \mathbf{N}\mathbf{V})^5} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (s_\alpha s_\theta c_\phi + c_\alpha c_\theta) d\phi \frac{W s_\theta d\theta}{(1 - V c_\theta)^5} = \int_0^\pi \frac{2\pi c_\alpha c_\theta W s_\theta d\theta}{(1 - V c_\theta)^5},$$

где линейное по c_ϕ слагаемое при интегрировании от 0 до 2π равно нулю. Учитывая, что $\mathbf{V}\mathbf{W} = W V c_\alpha$ и снова делая замену $z = c_\theta$, имеем:

$$\int \frac{(\mathbf{N}\mathbf{W}) d\Omega}{(1 - \mathbf{N}\mathbf{V})^5} = \frac{2\pi(\mathbf{W}\mathbf{V})}{V^2} \int_{-1}^1 \frac{(1 - 1 + V z) dz}{(1 - V z)^5} = 2\pi \frac{(\mathbf{W}\mathbf{V})}{V^2} (I_4 - I_3),$$

где под интегралом в числителе добавлена и вычтена 1.

Третий интеграл:

$$I = \int \frac{(\mathbf{N}\mathbf{W})^2 d\Omega}{(1 - \mathbf{N}\mathbf{V})^6} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (s_\alpha s_\theta c_\phi + c_\alpha c_\theta)^2 d\phi \frac{W^2 s_\theta d\theta}{(1 - V c_\theta)^6}$$

также сначала требует интегрирования по ϕ :

$$\int_0^{2\pi} (s_\alpha^2 s_\theta^2 c_\phi^2 + c_\alpha^2 c_\theta^2) d\phi = \pi s_\alpha^2 s_\theta^2 + 2\pi c_\alpha^2 c_\theta^2,$$

где опущено линейное по c_ϕ слагаемое, равное нулю, и подставлен косинус двойного угла $c_\phi^2 = (1 + c_{2\phi})/2$. Теперь можно проинтегрировать по θ :

$$I = \pi W^2 \int_{-1}^1 \frac{(s_\alpha^2 - (1 - 3c_\alpha^2)z^2) dz}{(1 - Vz)^6} = \pi W^2 s_\alpha^2 I_5 - \pi \frac{W^2}{V^2} (1 - 3c_\alpha^2) \int_{-1}^1 \frac{V^2 z^2 dz}{(1 - Vz)^6}.$$

Интеграл в последнем слагаемом вычисляется следующим образом:

$$\int_{-1}^1 \frac{-V^2 z^2 dz}{(1 - Vz)^6} = \int_{-1}^1 \frac{(1 - V^2 z^2 - 1) dz}{(1 - Vz)^6} = \int_{-1}^1 \frac{(1 + Vz) dz}{(1 - Vz)^5} - I_5 = 2I_4 - I_3 - I_5.$$

Поэтому:

$$I = \pi W^2 \int_{-1}^1 \frac{(s_\alpha^2 - (1 - 3c_\alpha^2)z^2) dz}{(1 - Vz)^6} = \pi W^2 s_\alpha^2 I_5 + \pi \frac{W^2}{V^2} (1 - 3c_\alpha^2)(2I_4 - I_3 - I_5).$$

Подставляя вместо синуса и косинуса от α квадраты векторного и скалярного произведений:

$$[\mathbf{V} \times \mathbf{W}]^2 = V^2 W^2 s_\alpha^2, \quad (\mathbf{V}\mathbf{W})^2 = V^2 W^2 c_\alpha^2,$$

окончательно получаем:

$$\int \frac{(\mathbf{N}\mathbf{W})^2 d\Omega}{(1 - \mathbf{N}\mathbf{V})^6} = \frac{[\mathbf{V} \times \mathbf{W}]^2}{V^2} \pi I_5 + \left(\frac{\mathbf{W}^2}{V^2} - \frac{3(\mathbf{V}\mathbf{W})^2}{V^4} \right) \pi (2I_4 - I_3 - I_5).$$

• **H₁₈** *Формула Фейнмана* (стр. 87)

Вычислим первую и вторую производную от вектора $\mathbf{N} = \mathbf{R}/R$ по времени T :

$$\frac{d\mathbf{N}}{dT} = \frac{d}{dT} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) = -\frac{\mathbf{V}}{R} + \frac{\mathbf{R}(\mathbf{RV})}{R^3} = \frac{\mathbf{R} \times [\mathbf{R} \times \mathbf{V}]}{R^3}.$$

$$\frac{d^2\mathbf{N}}{dT^2} = \frac{\mathbf{V} \times [\mathbf{V} \times \mathbf{R}] + \mathbf{R} \times [\mathbf{R} \times \mathbf{W}]}{R^3} + \frac{3(\mathbf{RV})}{R^5} [\mathbf{R} \times [\mathbf{R} \times \mathbf{V}]].$$

Выразим производные по T через производные по $t = T + R(T)$. Первая производная равна:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dT} = \frac{d\mathbf{N}}{dt} \frac{dt}{dT} = \frac{d\mathbf{N}}{dt} (1 + \dot{R}).$$

Учитывая, что $\dot{R} = dR/dT = -(\mathbf{RV})/R$, имеем:

$$R \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{N}}{R^2} \right) = \frac{d}{dT} \left(\frac{\mathbf{N}}{R^2} \right) \frac{R^2}{R - \mathbf{RV}} = \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{RV}) - \mathbf{VR}^2}{R^3(R - \mathbf{RV})}.$$

Складывая с \mathbf{N}/R^2 получаем:

$$\frac{\mathbf{N}}{R^2} + R \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{N}}{R^2} \right) = \frac{\mathbf{RR} + 2\mathbf{R}(\mathbf{RV}) - \mathbf{VR}^2}{R^3(R - \mathbf{RV})}.$$

Теперь точно также вычисляем вторую производную

$$\frac{d^2\mathbf{N}}{dT^2} = \frac{d^2\mathbf{N}}{dt^2} (1 + \dot{R})^2 + \frac{d\mathbf{N}}{dt} \ddot{R}$$

или

$$\frac{d^2\mathbf{N}}{dt^2} = \frac{R^2}{(R - \mathbf{RV})^2} \frac{d^2\mathbf{N}}{dT^2} - \frac{d\mathbf{N}}{dT} \frac{1}{(R - \mathbf{RV})^3} (R^2\mathbf{V}^2 - R^2(\mathbf{RW}) - (\mathbf{RV})^2).$$

Подставляя производные $d\mathbf{N}/dT$ и $d^2\mathbf{N}/dT^2$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{N}}{dt^2} &= \frac{[\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - \mathbf{VR}) \times \mathbf{W}]]}{(R - \mathbf{RV})^3} + \\ &+ \frac{V^2R\mathbf{V} - V^2\mathbf{R} - 2(\mathbf{RV})\mathbf{V} + (\mathbf{RV})^2\mathbf{V}/R + 3(\mathbf{RV})^2\mathbf{R}/R^2 - 2(\mathbf{RV})^3\mathbf{R}/R^3}{(R - \mathbf{RV})^3}. \end{aligned}$$

Складывая все выражения, окончательно имеем:

$$\frac{\mathbf{N}}{R^2} + R \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{N}}{R^2} \right) + \frac{d^2\mathbf{N}}{dt^2} = \frac{(1 - V^2)(\mathbf{R} - \mathbf{RV})}{(R - \mathbf{RV})^3} + \frac{[\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - \mathbf{VR}) \times \mathbf{W}]]}{(R - \mathbf{RV})^3}.$$

Теория поля

- **H₁₉** Производные от η (стр. 97)

Так как $\partial_\alpha x^\beta = \delta_\alpha^\beta$, записывая η в компонентах, имеем:

$$\partial_\alpha (x^\beta - x^\gamma V_\gamma V^\beta) = \delta_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\gamma V_\gamma V^\beta = \delta_\alpha^\beta - V_\alpha V^\beta,$$

где в последнем равенстве проведено суммирование с символом Кронекера. Свёрка символа Кронекера равна $\delta_\alpha^\alpha = \delta_0^0 + \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 4$, поэтому 4-дивергенция $\partial_\alpha \eta^\alpha = 4 - V^2 = 4 - 1 = 3$. Градиент квадрата 4-вектора η равен:

$$\partial_\alpha \eta^2 = 2 (\partial_\alpha \eta^\beta) \eta_\beta = 2 (\delta_\alpha^\beta - V_\alpha V^\beta) \eta_\beta = 2 (\eta_\alpha - V_\alpha V\eta) = 2 \eta_\alpha,$$

где учтена ортогональность $V\eta = 0$. Это же вычисление можно провести и так:

$$\partial_\alpha \eta^2 = \partial_\alpha (x^2 - (x \cdot V)^2) = 2 x_\alpha - 2 (x \cdot V) V_\alpha = 2 \eta_\alpha.$$

- **H₂₀** Ток точечного заряда в ковариантных обозначениях (стр. 97)

Запишем производную тензора $F^{\alpha\beta}$ по x^γ :

$$\partial_\gamma F^{\alpha\beta} = Q \frac{\partial_\gamma \eta^\alpha V^\beta - \partial_\gamma \eta^\beta V^\alpha}{(a^2 - \eta^2)^{3/2}} + Q \frac{3}{2} \frac{\eta^\alpha V^\beta - \eta^\beta V^\alpha}{(a^2 - \eta^2)^{5/2}} \partial_\gamma \eta^2.$$

Подставим производные (4.25):

$$\partial_\gamma F^{\alpha\beta} = Q \frac{\delta_\gamma^\alpha V^\beta - \delta_\gamma^\beta V^\alpha}{(a^2 - \eta^2)^{3/2}} + 3Q \frac{\eta_\gamma (\eta^\alpha V^\beta - \eta^\beta V^\alpha)}{(a^2 - \eta^2)^{5/2}}.$$

Положим $\gamma = \alpha$ и просуммируем, учитывая: $V^\alpha V^\alpha = 1$, $V^\alpha \eta_\alpha = 0$.

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = Q \frac{4 V^\beta - V^\beta}{(a^2 - \eta^2)^{3/2}} + 3Q \frac{\eta^2 V^\beta}{(a^2 - \eta^2)^{5/2}} = Q \frac{3 V^\beta a^2}{(a^2 - \eta^2)^{5/2}}.$$

Чтобы получить второе уравнение, опустим при помощи метрического тензора индексы α, β вниз ($\delta_\gamma^\alpha \mapsto g_{\alpha\gamma}$). В числители каждой дроби $\partial_\gamma F^{\alpha\beta}$ стоят выражения вида $S_{\gamma\alpha} V_\beta - S_{\gamma\beta} V_\alpha$, где $S_{\gamma\alpha}$ – симметричный тензор $g_{\gamma\alpha}$ или $\eta_\gamma \eta_\alpha$. Сумма таких выражений, в которых циклическим образом переставляются индексы:

$$(S_{\gamma\alpha} V_\beta - S_{\gamma\beta} V_\alpha) + (S_{\beta\gamma} V_\alpha - S_{\alpha\gamma} V_\beta) + (S_{\alpha\beta} V_\gamma - S_{\beta\alpha} V_\gamma)$$

равна нулю. Действительно, группируя слагаемые, имеем:

$$(S_{\beta\gamma} - S_{\gamma\beta}) V_\alpha + (S_{\gamma\alpha} - S_{\alpha\gamma}) V_\beta + (S_{\alpha\beta} - S_{\beta\alpha}) V_\gamma = 0,$$

т.к. $S_{\beta\gamma} = S_{\gamma\beta}$ и т.д.

• **H₂₁** Тензор ${}^*F^{\alpha\beta}$ (стр. 99)

Например, расписывая сумму и опуская одинаковые индексы для которых символ Леви-Чивиты равен нулю, имеем:

$${}^*F_{01} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{0123} F^{23} + \varepsilon_{0132} F^{32}) = \varepsilon_{0123} F^{23} = -B_x,$$

$${}^*F_{12} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{1203} F^{03} + \varepsilon_{1230} F^{30}) = \varepsilon_{1203} F^{03} = -E_z,$$

где $\varepsilon_{0132} F^{32} = \varepsilon_{0123} F^{23}$, и т.д., так как ε_{0132} и F^{32} одновременно антисимметричны по индексам 3, 2. Для вычисления ε_{1203} индекс 0 в символе Леви-Чивиты необходимо перенести в начало: $\varepsilon_{1203} = -\varepsilon_{1023} = \varepsilon_{0123} = 1$.

• **H₂₂** Уравнение $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 4\pi j^\beta$ для $\beta = 1$ (стр. 100)

Опуская сразу $F^{11} = 0$, имеем:

$$\partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = -\partial_t E_x + \partial_y B_z - \partial_z B_y = 4\pi j^1 = 4\pi j_x,$$

или $[\nabla \times \mathbf{B}]_x = 4\pi j_x + \partial E_x / \partial t$. Остальные уравнения даёт $\beta = 2, 3$.

• **H₂₃** $\partial_\alpha {}^*F^{\alpha\beta} = 0$ в компонентах (стр. 100)

Для $\beta = 0$ имеем закон Гаусса для магнитного поля:

$$\partial_\alpha {}^*F^{\alpha 0} = \partial_1 {}^*F^{10} + \partial_2 {}^*F^{20} + \partial_3 {}^*F^{30} = -\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Аналогично при $\beta = 1$ получаем проекцию на ось x закона Фарадея:

$$\partial_\alpha {}^*F^{\alpha 1} = \partial_0 {}^*F^{01} + \partial_2 {}^*F^{21} + \partial_3 {}^*F^{31} = \partial_t B_x + \partial_y E_z - \partial_z E_y = 0.$$

• **H₂₄** Уравнения Максвелла без источников из $F_{\mu\nu}$ (стр. 101)

Подставляя определение $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ в уравнение

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0,$$

с учётом перестановочности частных производных ($\partial_\alpha \partial_\beta = \partial_\beta \partial_\alpha$), имеем

$$\partial_\alpha (\partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma A_\beta) + \partial_\beta (\partial_\gamma A_\alpha - \partial_\alpha A_\gamma) + \partial_\gamma (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = 0.$$

• **H₂₅** $\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$ (стр. 101)

Свернём уравнение $\partial_\mu {}^*F^{\mu\lambda}$ с символом Леви-Чивиты по λ :

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda} \partial_\mu {}^*F^{\mu\lambda} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda} \varepsilon^{\mu\lambda\nu\sigma} \partial_\mu F_{\nu\sigma} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} \partial_\mu F_{\nu\sigma} = 0$$

При использовании тождества (4.11), стр. 4.11, учитываем, что в силу антисимметрии $\varepsilon_{\alpha\beta}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2F_{\alpha\beta}$.

• **H₂₆** 4-Потенциал точечного заряда (стр. 101)

$$A^\alpha = \frac{Q V^\alpha}{\sqrt{a^2 - \eta^2}}, \quad \partial_\alpha A_\beta = Q \frac{\eta_\alpha V_\beta}{(a^2 - \eta^2)^{3/2}}.$$

Отсюда, по определению $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, следует (4.23). 4-потенциал удовлетворяет калибровке Лоренца $\partial_\alpha A^\alpha = 0$. В системе где заряд покойится, потенциал φ не зависит от времени, а $\mathbf{A} = 0$ (закон Кулона) и $\partial_\alpha A^\alpha = 0$. В силу своей ковариантности $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ будет иметь одинаковое значение (ноль) и в любой другой системе.

Так как $\gamma(t - \mathbf{r}\mathbf{v}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{V}$ и $t^2 - \mathbf{r}^2 = \mathbf{x}^2$, то

$$-\eta^2 = \gamma^2(t - \mathbf{r}\mathbf{v})^2 - (t^2 - \mathbf{r}^2) = (\mathbf{r} - \mathbf{v}t)^2 + \gamma^2((\mathbf{r} - \mathbf{v}t)\mathbf{v})^2.$$

Поэтому 4-потенциал заряда, равномерно движущегося со скоростью \mathbf{v} в 3-мерных обозначениях равен (стр. V₁:??):

$$A^\alpha(t, \mathbf{r}) = Q \frac{\{\gamma, \gamma\mathbf{v}\}}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)^2 + \gamma^2((\mathbf{r} - \mathbf{v}t)\mathbf{v})^2 + a^2}},$$

• **H₂₇** Ортогональные электрическое и магнитное поля (стр. 104)

Например, $B_z = F^{21} = N^2 M^1 - N^1 M^2 = -[\mathbf{E} \times \mathbf{M}]_z$, поэтому:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{M} = \frac{\mathbf{E} \times [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{\mathbf{E}^2} = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{E}\mathbf{B}) - \mathbf{B}\mathbf{E}^2}{\mathbf{E}^2} = -\mathbf{B}.$$

Лагранжев формализм

- **H₂₈** *Нулевой интеграл в выводе уравнений Лагранжа* (стр. 109)

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \varphi^k \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} d \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \varphi^k \right) = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \varphi^k \right) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0,$$

где учтено, что $\varphi^k(t_1) = 0$, $\varphi^k(t_2) = 0$.

- **H₂₉** *Лагранжиан в 3-мерных обозначениях* (стр. 113)

Обозначая скорость как $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$, распишем дифференциал интервала: $ds = \sqrt{dt^2 - d\mathbf{r}^2} = \sqrt{1 - \mathbf{u}^2} dt$. Аналогично расписывается свёртка 4-потенциала и dx^α : $A_\alpha dx^\alpha = \varphi dt - \mathbf{A} d\mathbf{r} = (\varphi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) dt$.

- **H₃₀** *Полный дифференциал векторного потенциала* (стр. 113)

Каждая компонента векторного потенциала является функцией координат и времени. Обозначим эту функцию как F . Её дифференциал равен:

$$dF(t, \mathbf{r}) = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial F}{\partial t} dt + (d\mathbf{r} \nabla) F.$$

Так как нас интересуют координаты вдоль траектории частицы, движущейся со скоростью $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$, подставляем $d\mathbf{r} = \mathbf{u}(t) dt$.

- **H₃₁** *Производные от лагранжиана I* (стр. 116)

Аккуратное вычисление частных производных можно проводить при помощи символа Кронекера. Например, найдём производную по $\partial_\lambda A_\sigma$ от

$$\mathcal{L} = (\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\alpha A^\beta) = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} (\partial_\alpha A_\beta)(\partial_\mu A_\nu).$$

Заметим, что в выражении \mathcal{L} , при помощи метрического тензора, опущены все индексы вниз, а производная берётся по тензору с индексами, отличающимися от суммационных индексов в \mathcal{L} . Воспользуемся следующим соотношением:

$$\frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}{\partial(\partial_\lambda A_\sigma)} = \delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\sigma.$$

Действительно, если все индексы совпадают то производная равна единице (аналогично $\partial x/\partial x = 1$). Если хотя бы одна пара индексов различна, то мы имеем производную типа $\partial x/\partial y$, которая равна нулю.

Обратим внимание, что в левой части индексы λ и σ находятся внизу, но под дробью. В результате взятия производной, они как бы перепрыгивают вверх над дробью и получается тензор с верхними индексами. Однако это замечание является лишь мнемоническим правилом. Теперь предлагается ($\lessdot H_{32}$) взять производную \mathcal{L} , как производную произведения.

- H₃₂ Производные от лагранжиана II (стр. 276)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda A_\sigma)} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\sigma (\partial_\mu A_\nu) + g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} (\partial_\alpha A_\beta) \delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\sigma.$$

Проводя суммирование с символами Кронекера, получаем:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda A_\sigma)} = g^{\lambda\mu} g^{\sigma\nu} (\partial_\mu A_\nu) + g^{\alpha\lambda} g^{\beta\sigma} (\partial_\alpha A_\beta) = \partial^\lambda A^\sigma + \partial^\lambda A^\sigma = 2\partial^\lambda A^\sigma.$$

Обычно такие педантичные выкладки не делают. В частности, можно не опускать при помощи $g^{\alpha\beta}$ индексы вниз, временно игнорируя ковариантный порядок суммирования (один индекс внизу, а другой вверху). В финальном выражении, индексы можно расставить по своим местам. Поэтому, например, для производной от $\mathcal{L} = (\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\alpha A^\beta)$ пишут:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda A_\sigma)} = \delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\sigma (\partial^\alpha A^\beta) + (\partial_\alpha A_\beta) \delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\sigma = 2\partial^\lambda A^\sigma.$$

После некоторого навыка, можно даже не использовать символы Кронекера и при дифференцировании сразу подставлять нужные индексы.

- H₃₃ Запись лагранжиана через тензор $F^{\alpha\beta}$ (стр. 117)

$$F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha).$$

Перемножая скобки, получаем:

$$F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta \partial_\alpha A_\beta - \partial^\alpha A^\beta \partial_\beta A_\alpha - \partial^\beta A^\alpha \partial_\alpha A_\beta + \partial^\beta A^\alpha \partial_\beta A_\alpha.$$

Переобозначим суммационные индексы в последнем и предпоследнем слагаемых (меняя местами α и β):

$$\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = (\partial^\alpha A^\beta) (\partial_\alpha A_\beta) - (\partial^\alpha A^\beta) (\partial_\beta A_\alpha).$$

- H₃₄ Массивное векторное поле I (стр. 117)

Рассмотрим лагранжиан с константой μ :

$$\mathcal{L} = -A_\alpha j^\alpha - \frac{1}{8\pi} (\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\alpha A^\beta) + \frac{\mu^2}{8\pi} A^\alpha A_\alpha.$$

Запишем производные для уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} = -j^\beta + \frac{\mu^2}{4\pi} A^\beta, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = -\frac{1}{4\pi} \partial^\alpha A^\beta,$$

что даёт уравнение поля: $\partial^\alpha A^\alpha + \mu^2 A^\alpha = 4\pi j^\alpha$. Стоит (\Leftarrow H₃₅). теперь его записать в векторных обозначениях

• **H₃₅** *Массивное векторное поле II* (стр. 277)

Если лагранжиан пробной частицы остаётся неизменным, то не изменится и сила Лоренца. Однако уравнения Максвелла для напряжённостей начинают зависеть также от потенциалов (помните о $\partial\mathbf{A} = 0$):

$$\nabla\mathbf{E} = 4\pi\rho - \mu^2\varphi, \quad \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - \mu^2\mathbf{A}.$$

Например $\nabla\mathbf{E} = \nabla(-\nabla\varphi - \partial_0\mathbf{A}) = -\Delta\varphi + \partial_0^2\varphi = \partial^2\varphi$. Пара уравнений без источников остаётся без изменений.

• **H₃₆** *Электростатика массивного векторного поля* (стр. 117)

Пусть все поля не зависят от времени и векторный потенциал равен нулю. В этом случае для скалярного потенциала имеем уравнение:

$$\Delta\varphi - \mu^2\varphi = -4\pi\rho.$$

Решим его для пустого пространства $\rho = 0$, предполагая сферическую симметрию $\varphi = \varphi(r)$. Так как $r = \sqrt{\mathbf{r}^2}$, имеем:

$$\nabla\varphi = \varphi' \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \Delta\varphi = \nabla(\nabla\varphi) = \varphi'' + \varphi' \frac{2}{r} = \frac{1}{r^2} (r^2 \varphi')',$$

где штрих – производная по аргументу функции $\varphi(r)$. Таким образом:

$$\frac{1}{r^2} (r^2 \varphi')' = \mu^2\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = Q \frac{e^{-\mu r}}{r},$$

где сделана замена $\varphi = u(r)/r$. Константа Q соответствует точечному заряду, если $\rho = Q\delta(\mathbf{r})$.

• **H₃₇** *Массивная электромагнитная волна* (стр. 117)

Рассмотрим частное решение волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi + \mu^2\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \phi_0 e^{-\mu(\mathbf{n}\mathbf{r}-ut)/\sqrt{1-u^2}},$$

где \mathbf{n} – единичный постоянный вектор, а $u < 1$ – скорость. Естественно волновое уравнение допускает и другие, более физичные решения. При Fourier-разложении потенциала получается следующий закон дисперсии $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}$. Это соотношение собственно и дало название “массы поля” для константы μ .

• **H₃₈** *Градиент в калибровочном преобразовании* (стр. 119)

$$\nabla R = \nabla \sqrt{\mathbf{R}^2} = \frac{2\mathbf{R}}{2R} = \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

Аналогично ($\partial\mathbf{R}/\partial t = \partial(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t))/\partial t = -\mathbf{v}$):

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial \sqrt{\mathbf{R}^2}}{\partial t} = \frac{2\mathbf{R}(\partial\mathbf{R}/\partial t)}{2R} = -\frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{R}.$$

- **H₃₉** Приближенное выражение для **B** (стр. 119)

$$\nabla \times \frac{\mathbf{v}}{R} = -\mathbf{v} \times \nabla \frac{1}{R} = \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{R}}{R^3}, \quad \nabla \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} = 0, \quad \nabla(\mathbf{v}\mathbf{R}) = \mathbf{v}.$$

- **H₄₀** Электрическое поле (стр. 119)

Учитывая, что $\partial \mathbf{v}/\partial t = \mathbf{a}$, $\partial \mathbf{R}/\partial t = -\mathbf{v}$ и $\partial R/\partial t = -\mathbf{v}\mathbf{R}/R$, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{v}}{R} \right) &= \frac{\mathbf{a}}{R} + \frac{(\mathbf{v}\mathbf{R})\mathbf{v}}{R^3}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{(\mathbf{v}\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^3} \right) &= \frac{(\mathbf{a}\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{v}^2 \mathbf{R}}{R^3} - \frac{(\mathbf{v}\mathbf{R})\mathbf{v}}{R^3} + 3 \frac{(\mathbf{v}\mathbf{R})^2 \mathbf{R}}{R^5}. \end{aligned}$$

- **H₄₁** Уравнения движения системы зарядов (стр. 121)

Учитывая значения производных для $\mathbf{R} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$, $\mathbf{N} = \mathbf{R}/R$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}}{dt} &= \mathbf{V} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b, \quad \frac{dR}{dt} = \mathbf{N}\mathbf{V}, \quad \frac{d\mathbf{N}}{dt} = \frac{\mathbf{N} \times [\mathbf{V} \times \mathbf{N}]}{R}, \\ \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}_a} &= \mathbf{N}, \quad \frac{\partial N^i}{\partial x_a^j} = \frac{\delta^{ij} - N^i N^j}{R}, \end{aligned}$$

где верхние индексы – компоненты векторов, а нижние – номера частиц:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \right) &= \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} + \frac{1}{2} \sum_b^{b \neq a} \frac{Q_a Q_b}{R} \{ \mathbf{a}_b + \mathbf{N}(\mathbf{N}\mathbf{a}_b) \} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_b^{b \neq a} \frac{Q_a Q_b}{R^2} \{ \mathbf{N} \times [\mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_b] + \mathbf{N}(\mathbf{V}\mathbf{v}_b) - 3\mathbf{N}(\mathbf{N}\mathbf{V})(\mathbf{N}\mathbf{v}_b) \}, \end{aligned}$$

Правая часть уравнений Лагранжа равна:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_a} = \sum_b^{b \neq a} \frac{Q_a Q_b}{R^2} \left[\mathbf{N} + \frac{\mathbf{v}_a(\mathbf{N}\mathbf{v}_b) + (\mathbf{N}\mathbf{v}_a)\mathbf{v}_b - \mathbf{N}(\mathbf{v}_a\mathbf{v}_b) - 3\mathbf{N}(\mathbf{N}\mathbf{v}_a)(\mathbf{N}\mathbf{v}_b)}{2} \right]$$

Приравнивая эти два выражения, получаем уравнения движения.

- **H₄₂** Движение зарядов по окружности (стр. 121)

Единичный вектор **N** ортогонален скоростям $\mathbf{N}\mathbf{v}_a = \mathbf{N}\mathbf{v}_b = 0$ и направлен от заряда *b* к заряду *a*. Поэтому в силу подставляем соотношения:

$$\mathbf{v}_a \times [\mathbf{v}_b \times \mathbf{N}] = \mathbf{v}_b(\mathbf{v}_a \mathbf{N}) - \mathbf{N}(\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b) = \mathbf{N}v^2, \quad \mathbf{a}_b = \mathbf{N} \frac{v^2}{R/2}.$$

Законы сохранения

- **H₄₃** Производная лагранжиана электромагнитного поля (стр. 129)

Распишем взятие производной подробно ($\Leftarrow H_{31}$). При помощи двух метрических тензоров опускаем все индексы вниз и берём производную

$$-\frac{g^{\mu\lambda}g^{\nu\tau}}{8\pi} \frac{\partial\{(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\lambda A_\tau) - (\partial_\mu A_\nu)(\partial_\tau A_\lambda)\}}{\partial(\partial_\alpha A_\gamma)}$$

как производную произведения:

$$-\frac{g^{\mu\lambda}g^{\nu\tau}}{8\pi} (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\gamma \partial_\lambda A_\tau + \partial_\mu A_\nu \delta_\lambda^\alpha \delta_\tau^\gamma - \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\gamma \partial^\tau A^\lambda - \partial_\mu A_\nu \delta_\tau^\alpha \delta_\lambda^\gamma).$$

Сворачивая с символами Кронекера:

$$-\frac{1}{8\pi} (g^{\alpha\lambda} g^{\gamma\tau} \partial_\lambda A_\tau + g^{\mu\alpha} g^{\nu\gamma} \partial_\mu A_\nu - g^{\alpha\lambda} g^{\gamma\tau} \partial^\tau A^\lambda - g^{\mu\gamma} g^{\nu\alpha} \partial_\mu A_\nu),$$

а затем с метрическими тензорами, окончательно имеем:

$$-\frac{1}{8\pi} (\partial^\alpha A^\gamma + \partial^\alpha A^\gamma - \partial^\gamma A^\alpha - \partial^\gamma A^\alpha) = -\frac{1}{4\pi} (\partial^\alpha A^\gamma - \partial^\gamma A^\alpha) = -\frac{1}{4\pi} F^{\alpha\gamma}.$$

- **H₄₄** Равенство нулю следа тензора энергии-импульса (стр. 129)

$$T^\alpha_\alpha = \frac{1}{4\pi} \left[F^{\alpha\gamma} F_{\gamma\alpha} + \frac{1}{4} \delta_\alpha^\alpha F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] = \frac{1}{4\pi} [-F^{\alpha\gamma} F_{\alpha\gamma} + F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] = 0.$$

- **H₄₅** Квадарт тензора энергии-импульса (стр. 131)
-

Теорема Нёттер

- **H₄₆** Обратное бесконечно малое преобразование (стр. 146)

$$x'_\mu = x_\mu + \omega_{\mu\nu} x^\nu = x'_\mu - \omega_{\mu\nu} x'^\nu + \omega_{\mu\nu} (x'^\nu - \omega^{\nu\sigma} x'_\sigma) \approx x'_\mu - \omega_{\mu\nu} x'^\nu + \omega_{\mu\nu} x^\nu + \dots$$

- **H₄₇** Явный вид матрицы ω (стр. 146)

Для буста матрица следует из (4.3), т.к. в первом порядке по скорости $\gamma = 1$. Матрица для 3-вращений получается из разложения косинусов и синусов, см. стр. V₁:194.

- **H₄₈** Тензор $\Sigma_{ij}^{\alpha\beta}$ (стр. 147)

$$\frac{1}{2} (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu) \omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\omega_{\alpha\beta} - \omega_{\beta\alpha}) = \omega_{\alpha\beta}$$

- **H₄₉** Функциональное и полное изменения потенциала (стр. ??)

Зависимость 4-потенциала от координат входит в виде инварианта $a^2 + (x \cdot u)^2 - x^2$, поэтому $\bar{\delta}A^\alpha = 0$. Полное изменение δA^α соответствует преобразованиям Лоренца, которые “обеспечивает” 4-вектор u^α :

$$A'^\alpha(x') = \Lambda_\beta^\alpha A^\beta(x), \quad u'^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha u^\beta.$$

- **H₅₀** Уравнения движения для скалярного поля (стр. ??)

Вычисляя производные лагранжиана

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_1)} = \partial^\mu \Phi_1, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_1} = m^2 \Phi_1$$

и подставляя в уравнения Лагранжа, получаем $(\partial^2 + m^2) \Phi_1 = 0$.

- **H₅₁** Тензор энергии-импульса и спина (стр. 150)

Производная от лагранжиана равна:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi} (\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\alpha A^\beta) \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4\pi} \partial^\mu A^\nu.$$

Поэтому канонический тензор энергии-импульса имеет вид:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\gamma)} \partial^\beta A_\gamma - g^{\alpha\beta} \mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi} \partial^\alpha A^\gamma \partial^\beta A_\gamma + \frac{g^{\alpha\beta}}{8\pi} (\partial_\mu A_\nu)^2.$$

Тензор спина:

$$S_{\mu,\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\alpha)} A_\beta - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\beta)} A_\alpha = \frac{1}{4\pi} (A_\alpha \partial_\mu A_\beta - A_\beta \partial_\mu A_\alpha).$$

Стоит проверить, что, в силу $\partial^2 A_\alpha = 0$, выполняется $\partial^\mu S_{\mu,\alpha\beta} = 0$.

• **H₅₂** *Процедура Белифанте* (стр. 151)

Для лагранжиана:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = -\frac{F^{\alpha\beta}}{4\pi}$$

запишем спиновую компоненту полного момента:

$$S^{\mu, \alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} (F^{\mu\alpha} A^\beta - F^{\mu\beta} A^\alpha) = \Phi^{\mu, \alpha\beta}$$

и вычислим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_\gamma (\Phi^{\gamma, \mu\nu} - \Phi^{\mu, \gamma\nu} - \Phi^{\nu, \gamma\mu}) \\ &= \frac{\partial_\gamma}{8\pi} (F^{\gamma\mu} A^\nu - F^{\gamma\nu} A^\mu - F^{\mu\gamma} A^\nu + F^{\mu\nu} A^\gamma - F^{\nu\gamma} A^\mu + F^{\nu\mu} A^\gamma) = -\frac{\partial_\gamma}{4\pi} (F^{\gamma\mu} A^\nu). \end{aligned}$$

• **H₅₃** *Производная лагранжиана по вектору **c*** (стр. 154)

Записывая производную лагранжиана по вектору, мы используем безиндексные обозначения. Стоит их переписать при помощи индексов. Номера проекций векторов будем писать сверху, а номера частиц, по-прежнему снизу:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}_a + \mathbf{c})}{\partial c^k} \Big|_{\mathbf{c}=0} = \sum_a \frac{\partial L(\mathbf{x}_a + \mathbf{c})}{\partial(\mathbf{x}_a + \mathbf{c})^j} \frac{\partial(\mathbf{x}_a + \mathbf{c})^j}{\partial c^k} \Big|_{\mathbf{c}=0} = \sum_a \frac{\partial L(\mathbf{x}_a)}{\partial \mathbf{x}_a^j} \delta^{jk}.$$

Сворачивая с символом Кронекера, получаем $\sum \partial L / \partial \mathbf{x}_a$.

• **H₅₄** *Производная лагранжиана по углу ϕ* (стр. 155)

Возьмем производную для одной частицы, используя индексы:

$$\frac{\partial L(\mathbf{r} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\phi})}{\partial \phi_i} \Big|_{\boldsymbol{\phi}=0} = \frac{\partial L}{\partial r_j} \frac{\partial(r_j + \varepsilon_{jkl} r_k \phi_l)}{\partial \phi_i} \Big|_{\boldsymbol{\phi}=0} = \frac{\partial L}{\partial r_j} \varepsilon_{jki} r_k = \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{r} \right)_i.$$

Самодействие

- **H₅₅** Интеграл от η^2 (стр. 162)

Когда заряд при $t = 0$ находится в начале координат $-\eta^2 = \mathbf{x}^2 + \gamma^2 (\mathbf{v}\mathbf{x})^2$. Направим ось z вдоль скорости $\mathbf{v} = \{0, 0, v\}$. Тогда $-\eta^2 = x^2 + y^2 + \gamma^2 z^2$. Делаем замену $z \mapsto z/\gamma$ и переходим к сферическим координатам:

$$\int F(x^2 + y^2 + \gamma^2 z^2) d^3\mathbf{x} = \frac{1}{\gamma} \int F(r^2) d^3\mathbf{x} = \frac{4\pi}{\gamma} \int F(r^2) r^2 dr.$$

- **H₅₆** Связь масс (стр. 162)

Умножим (6.13) на η^2 и воспользуемся соотношением (6.14) ($\eta^2 = -r^2$):

$$\frac{4\pi}{\gamma} \int_0^\infty [r^4 f'_0 + 3r^2 f_0 + r^2 f_1 + r^4 f'_1 + 4r^2 f_2 + 2r^4 f'_2] r^2 dr = 0.$$

Затем используем тождество следующей задачи и определение (6.15).

- **H₅₇** Интегрирование по частям (стр. 162)

$$\int_0^\infty f'(a^2 + r^2) r^6 dr = -\frac{5}{2} \int_0^\infty f(a^2 + r^2) r^4 dr.$$

- **H₅₈** Интеграл от $\eta^0 \boldsymbol{\eta} F(-\eta^2)$ (стр. 163)

$$\int \eta^0 \boldsymbol{\eta} F(-\eta^2) d^3\mathbf{x} = \int \gamma^2 (\mathbf{v}\mathbf{x}) [\mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x}\mathbf{v})] F(\mathbf{x}^2 + \gamma^2 (\mathbf{x}\mathbf{v})) d^3\mathbf{x} = \mathbf{v} I$$

Единственный вектор от которого зависит интеграл – это скорость \mathbf{v} , поэтому результат интегрирования равен $\mathbf{v} I$. Умножим обе части на \mathbf{v} :

$$v^2 I = \int \gamma^4 (\mathbf{v}\mathbf{x})^2 F(\mathbf{x}^2 + \gamma^2 (\mathbf{x}\mathbf{v})) d^3\mathbf{x} = \frac{\gamma^4}{\gamma} \frac{v^2}{\gamma^2} \int z^2 F(r^2) d^3\mathbf{x},$$

где сделана замена $z \mapsto z/\gamma$. Далее переходим к сферическим координатам $z = r \cos \theta$ и $d^3\mathbf{x} = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$.

- **H₅₉** Интегральные величины (стр. 163)

Например, интеграл по $d^3\mathbf{x}$ от T^{00} равен:

$$\frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{\eta^2}{2} - (\eta^0)^2 - \gamma^2 \eta^2 \right) f_0(-\eta^2) d^3\mathbf{x} = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{2} - \gamma^2 \right) m_0 - \frac{\gamma v^2}{3} m_0.$$

- **H₆₀** Фактор $1/3$ при вычислении интеграла (стр. 168)

Сделаем замену $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}$:

$$\int \frac{\rho(r)\rho(r')}{R^3} (\mathbf{n}\mathbf{R})^2 d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' = - \int \frac{\rho(r)\rho(|\mathbf{r} - \mathbf{R}|)}{R^3} (\mathbf{n}\mathbf{R})^2 d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{R}.$$

Перейдем в сферические координаты $\mathbf{r} = \{r, \alpha, \phi_1\}$ и $\mathbf{R} = \{R, \theta, \phi_2\}$, где α – угол между \mathbf{r} и \mathbf{R} , а θ – угол между \mathbf{R} и \mathbf{n} . Выражение $|\mathbf{r} - \mathbf{R}| = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \alpha}$ не зависит от угла θ . Интеграл по α даст некоторую функцию от r и R . Интегрируя затем по θ , имеем:

$$\int_0^\pi (\mathbf{n}\mathbf{R})^2 \sin \theta d\theta = \int_0^\pi R^2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = R^2 \int_{-1}^1 z^2 dz = \frac{2}{3} R^2.$$

С другой стороны, если бы множителя $(\mathbf{n}\mathbf{R})^2$ не было, мы бы получили $2R^2$. Поэтому $(\mathbf{n}\mathbf{R})^2$ под интегралом можно заменить на $R^2/3$.

- **H₆₁** Сила трения произвольного равноускоренного движения (стр. 173)

При движении в постоянном электрическом поле компоненты 4-скорости, как функции собственного времени s , равны:

$$u_0(s) = A \operatorname{ch}(\omega s) + B \operatorname{sh}(\omega s), \quad \mathbf{u}(s) = \mathbf{e} [A \operatorname{sh}(\omega s) + B \operatorname{ch}(\omega s)] + \mathbf{C},$$

где $A = \mathcal{E}_0/m$ и $B = \mathbf{e}\mathbf{p}_0/m$, $m\mathbf{C} = \mathbf{p}_0 - \mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{p}_0)$. Поэтому:

$$\begin{aligned} u_0'' + (u')^2 u_0 &= -\omega^2 [A^2 - B^2 - 1] u_0 \\ \mathbf{u}'' + (u')^2 \mathbf{u} &= -\omega^2 [A^2 - B^2 - 1] \mathbf{u} - \omega^2 \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Ноль получается, если $\mathbf{C} = 0$ и $A^2 - B^2 = 1$, т.е. только тогда, когда начальный импульс \mathbf{p}_0 параллелен электрическому полю $\mathbf{e} = \mathbf{E}/|\mathbf{E}|$.

Электромагнитные волны

- **H₆₂** *Мощность потока* (стр. 201)

Энергия электромагнитного поля плоской волны, поляризованной по кругу в объёме V равна $\mathcal{E} = V E_0^2 / 4\pi$. Пусть объём равен $V = L S$, где длина L (перпендикулярно площади S) направлена вдоль волнового вектора. За время $\Delta t = L/c$ ($c = 1$) через площадку S проходит вся энергия, находящаяся в объёме. Поэтому мощность потока равна:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{\Delta t S} = \frac{\mathcal{E}}{V} = \frac{E_0^2}{4\pi}.$$

Для восстановления скорости света, необходимо учесть, что I_0 (энергия в единицу времени) имеет размерность по времени пропорциональную t^{-3} . Поэтому $I_0 \mapsto I_0/c^3$ и, как обычно, для напряжённости поля $E_0 \mapsto E_0/c$.

- **H₆₃** *Условие действительности фурье-разложения* (стр. 194)

Возьмём комплексное сопряжение и сделаем замену $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{k}$:

$$\mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{E}^*(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{kr}} d^3\mathbf{k} = \int \mathbf{E}^*(-\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{kr}} d^3\mathbf{k}.$$

Это выражение должно совпасть с $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, поэтому $\mathbf{E}^*(-\mathbf{k}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{k}, t)$ или $\mathbf{E}^*(\mathbf{k}, t) = \mathbf{E}(-\mathbf{k}, t)$. При замене $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{k}$ появляется знак минус перед интегралом, который “уходит” после перестановки пределов интегрирования. Например, при однократном интегрировании

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(k) dk = - \int_{\infty}^{-\infty} f(-k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(-k) dk.$$

- **H₆₄** *Фурье-разложение и волновое уравнение* (стр. 194)

Подействуем оператором Д'Аламбера на фурье-разложение:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \int \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{kr}} d^3\mathbf{k} = \int \left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mathbf{k}^2 \mathbf{E} \right) e^{i\mathbf{kr}} d^3\mathbf{k} = 0,$$

откуда получаем равенство нулю выражения в круглых скобках.

Кватернионы

- **H₆₅** *Преобразование $\mathbb{S}\mathbb{A}\mathbb{S}^+$* (стр. 210)

Эрмитово сопряжение переставляет матрицы местами $(\mathbb{A}\mathbb{B})^+ = \mathbb{B}^+\mathbb{A}^+$, а двойное сопряжение возвращает исходную матрицу $(\mathbb{A}^+)^+ = \mathbb{A}$. Поэтому: $(\mathbb{S}\mathbb{A}\mathbb{S}^+)^+ = (\mathbb{S}^+)^+\mathbb{A}^+\mathbb{S}^+ = \mathbb{S}\mathbb{A}\mathbb{S}^+$.

- **H₆₆** *Алгебра матриц Паули* (стр. 211)

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_3.$$

В тоже время $\varepsilon_{12k}\sigma_k = \varepsilon_{123}\sigma_3 = \sigma_3$, т.к. антисимметричный тензор Леви-Чивиты отличен от нуля только для различных индексов и $\varepsilon_{123} = 1$.

- **H₆₇** *Тождество с матрицами Паули* (стр. 211)

Сворачивая (8.7) с a_i и b_j и учитывая определение векторного произведения $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_k = \varepsilon_{ijk}a_ib_j = \varepsilon_{kij}a_ib_j$, получаем требуемое тождество.

- **H₆₈** *Свойство сопряжения $\overline{\mathbb{A}\mathbb{B}} = \bar{\mathbb{B}}\bar{\mathbb{A}}$* (стр. 212)

Так как $\bar{\mathbb{B}} = \{b_0, -\mathbf{b}\}$, $\bar{\mathbb{A}} = \{a_0, -\mathbf{a}\}$, то:

$$\bar{\mathbb{B}}\bar{\mathbb{A}} = \{a_0b_0 + \mathbf{ab}, -a_0\mathbf{b} - b_0\mathbf{a} + i\mathbf{b} \times \mathbf{a}\}.$$

Переставляя местами множители в $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, имеем: $\bar{\mathbb{B}}\bar{\mathbb{A}} = \overline{\mathbb{A}\mathbb{B}}$, так как у векторной части по сравнению с $\mathbb{A}\mathbb{B}$ появляется знак минус.

- **H₆₉** *Произведение $\mathbb{A}\bar{\mathbb{B}}\mathbb{C}$* (стр. 214)

Рассмотрим три кватерниона

$$\mathbb{A} = a^\mu\sigma_\mu = a^0 + \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}, \quad \bar{\mathbb{B}} = b^\mu\bar{\sigma}_\mu = b^0 - \mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbb{C} = c^\mu\sigma_\mu = c^0 + \mathbf{c}\boldsymbol{\sigma}$$

и распишем их произведение:

$$\mathbb{A}\bar{\mathbb{B}}\mathbb{C} = \{a \cdot b + (b^0\mathbf{a} - a^0\mathbf{b})\boldsymbol{\sigma} - i[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]\boldsymbol{\sigma}\}(c^0 + \mathbf{c}\boldsymbol{\sigma}),$$

где $a \cdot b = a^0b^0 - \mathbf{ab}$. Перемножая скобки, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\bar{\mathbb{B}}\mathbb{C} &= (a \cdot b)\mathbb{C} + c^0b^0\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} - c^0a^0\mathbf{b}\boldsymbol{\sigma} + b^0(\mathbf{ac}) - a^0(\mathbf{bc}) + [[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{c}]\boldsymbol{\sigma} \\ &\quad - ic^0[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]\boldsymbol{\sigma} + ib^0[\mathbf{a} \times \mathbf{c}]\boldsymbol{\sigma} - ia^0[\mathbf{b} \times \mathbf{c}]\boldsymbol{\sigma} - i[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]\mathbf{c}. \end{aligned}$$

Раскрывая двойное векторное произведение $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{a}(\mathbf{bc})$ и добавляя $a^0b^0c^0 - a^0b^0c^0$, получаем:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\bar{\mathbb{B}}\mathbb{C} &= (a \cdot b)\mathbb{C} - (a \cdot c)\mathbb{B} + (b \cdot c)\mathbb{A} \\ &\quad - ic^0[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]\boldsymbol{\sigma} + ib^0[\mathbf{a} \times \mathbf{c}]\boldsymbol{\sigma} - ia^0[\mathbf{b} \times \mathbf{c}]\boldsymbol{\sigma} - i[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]\mathbf{c}. \end{aligned}$$

Последние четыре слагаемые можно ($\lessdot H_{70}$) свернуть в одно выражение при помощи символа Леви-Чевиты.

• **H₇₀** *Произведение АБС* (стр. 286)

Распишем сумму по первому индексу в следующей свёртке:

$$\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} a^\mu b^\nu c^\sigma d^\tau = \varepsilon_{0\nu\sigma\tau} a^0 b^\nu c^\sigma d^\tau + \varepsilon_{i\nu\sigma\tau} a^i b^\nu c^\sigma d^\tau.$$

Так как в 4-символе Леви-Чевиты все индексы должны быть различны, в первом члене индексы ν, σ, τ не равны 0 и их можно заменить латинскими индексами, принимающими значение 1,2,3. Аналогично, выделим последовательно нулевое значение в 4-индексах во втором члене:

$$\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} a^\mu b^\nu c^\sigma d^\tau = \varepsilon_{0ijk} a^0 b^i c^j d^k + \varepsilon_{i0jk} a^i b^0 c^j d^k + \varepsilon_{ij0k} a^i b^j c^0 d^k + \varepsilon_{ijk0} a^i b^j c^k d^0.$$

Так как $\varepsilon_{0123} = 1$ и по всем индексам этот символ является антисимметричным, очевидна следующая связь 4-мерного и 3-мерного символов Леви-Чевиты: $\varepsilon_{0ijk} = \varepsilon_{ijk}$. Поэтому:

$$\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} a^\mu b^\nu c^\sigma d^\tau = a^0 [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] \mathbf{d} - b^0 [\mathbf{a} \times \mathbf{c}] \mathbf{d} + c^0 [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \mathbf{d} - d^0 [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \mathbf{c}.$$

Заменяя d^μ на $\sigma^\mu = \{1, -\boldsymbol{\sigma}\}$ и сравнивая это выражение с последними четырьмя слагаемыми в произведении АБС, окончательно получаем:

$$\text{АБС} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{C} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{B} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{A} + i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} a^\alpha b^\beta c^\gamma \sigma^\mu.$$

Заметим, что такой ковариантный вид выражения получился благодаря наличию сопряжения у кватерниона \mathbb{B} в произведении трёх кватернионов в левой части, а в правой части у \mathbb{B} сопряжения уже нет.

• **H₇₁** *Элементы матрицы преобразований Лоренца* (стр. 223)

$$\Lambda^0_0 = |s^0|^2 + |\mathbf{s}|^2,$$

$$\Lambda^i_0 = (s^{*0} \mathbf{s} + s^0 \mathbf{s}^* + i \mathbf{s} \times \mathbf{s}^*)^i, \quad \Lambda^0_i = (s^{*0} \mathbf{s} + s^0 \mathbf{s}^* - i \mathbf{s} \times \mathbf{s}^*)^i,$$

$$\Lambda^i_j = s^{*i} s^j + s^{*j} s^i + \delta_j^i (|s^0|^2 - |\mathbf{s}|^2) + i \varepsilon_{ijk} (s^0 s^{*k} - s^{*0} s^k),$$

где переставлены индексы: $\Lambda_0^0 = \Lambda^0_0$, $\Lambda_0^i = -\Lambda^0_i$, $\Lambda_i^j = \Lambda^i_j$. Последнее соотношение можно переписать в более компактном виде:

$$\Lambda^i_j = 2\Re(s^{*i} s^j) + \delta_j^i \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^* + 2i \varepsilon_{ijk} \Im(s^0 s^{*k}).$$

Стоит записать матрицу Λ_α^β для вектора $s^\mu = \{\text{ch}(\alpha/2), -\mathbf{m} \text{sh}(\alpha/2)\}$, где $\text{ch}(\alpha) = \gamma$, $\mathbf{m} \text{sh}(\alpha) = \mathbf{v}\gamma$ и сравнить её с матрицей на стр. ??.

Элементы матрицы Λ^0_i будут симметричными $\Lambda^0_i = \Lambda^i_0$, если вектор \mathbf{s} является действительным, чисто мнимым или когда $\Im \mathbf{s}$ параллелен $\Re \mathbf{s}$. Элементы Λ^i_j симметричны, если $\Im(s^0 s^{*k}) = 0$.

- **H₇₂** Инвариантность $\bar{\mathbb{L}}\bar{\mathbb{L}}$ (стр. 215)

$$\bar{\mathbb{L}}'\bar{\mathbb{L}}' = \mathbb{S}\bar{\mathbb{L}}\bar{\mathbb{S}}\bar{\mathbb{S}}\bar{\mathbb{L}}\bar{\mathbb{S}} = \mathbb{S}\bar{\mathbb{L}}\bar{\mathbb{S}}\bar{\mathbb{S}}\bar{\mathbb{L}}\bar{\mathbb{S}} = \mathbb{S}\bar{\mathbb{L}}\bar{\mathbb{L}}\bar{\mathbb{S}} = \mathbb{S}\bar{\mathbb{I}}\bar{\mathbb{S}} = \det \mathbb{L}.$$

- **H₇₃** Результирующий буст произведения двух бустов (стр. 221)

Из того факта, что $\mathbf{n}\mathbf{m} = 0$ и соотношений

$$c_\alpha c_\phi = c_1 c_2 + (\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2) s_1 s_2, \quad \mathbf{n} c_\alpha s_\phi = -[\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2] s_1 s_2,$$

$$\mathbf{m} s_\alpha c_\phi + [\mathbf{m} \times \mathbf{n}] s_\alpha s_\phi = \mathbf{m}_1 s_1 c_2 + \mathbf{m}_2 c_1 s_2.$$

найдём α и \mathbf{m} . Так как \mathbf{n} и \mathbf{m} перпендикулярны, то $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ является единичным вектором. Возводя третье соотношение в квадрат, имеем:

$$s_\alpha^2 c_\phi^2 + s_\alpha^2 s_\phi^2 = s_\alpha^2 = s_1^2 c_2^2 + c_1^2 s_2^2 + 2\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 s_1 c_1 s_2 c_2.$$

Так как $s_\alpha = \operatorname{sh}(\alpha/2)$ – гиперболический синус, то $\operatorname{ch} \alpha = 1 + 2s_\alpha^2$:

$$\operatorname{ch} \alpha = 1 + 2s_1^2 c_2^2 + 2c_1^2 s_2^2 + 4(\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2) s_1 c_1 s_2 c_2 = \operatorname{ch} \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_2 + (\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2) \operatorname{sh} \alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_2,$$

где учтено, что $1 + 2s_1^2 c_2^2 + 2c_1^2 s_2^2 = (c_1^2 + s_1^2)(c_2^2 + s_2^2)$. Умножая третье соотношение векторно на \mathbf{n} , учитывая, что $\mathbf{n} \times [\mathbf{m} \times \mathbf{n}] = \mathbf{m}$ для $\mathbf{n}\mathbf{m} = 0$ и исключая $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ (при помощи опять же третьего соотношения), находим:

$$\mathbf{m} s_\alpha = \mathbf{m}_1 s_1 c_2 c_\phi + \mathbf{m}_2 c_1 s_2 c_\phi + [\mathbf{n} \times \mathbf{m}_1] s_1 c_2 s_\phi + [\mathbf{n} \times \mathbf{m}_2] c_1 s_2 s_\phi.$$

Подставляя из первого соотношения c_ϕ , а из второго $\mathbf{n}s_\phi$, получаем:

$$\mathbf{m} \operatorname{sh} \alpha = \mathbf{m}_1 \operatorname{sh} \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_2 + \mathbf{m}_2 \operatorname{sh} \alpha_2 + \mathbf{m}_1 (\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2) \operatorname{sh} \alpha_2 (\operatorname{ch} \alpha_1 - 1).$$

- **H₇₄** Угол и ось поворота произведения двух бустов (стр. 221)

$$c_\alpha c_\phi = c_1 c_2 + (\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2) s_1 s_2, \quad \mathbf{n} c_\alpha s_\phi = -[\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2] s_1 s_2.$$

Из второго соотношения следует, что $\mathbf{n} \sim -\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$, а так как \mathbf{n} единичный вектор, то при $s_\phi > 0$ (c_α, s_1, s_2 всегда больше нуля) имеем:

$$\mathbf{n} = -[\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2] / |\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|.$$

Перемножая первое и второе соотношения, получаем:

$$\mathbf{n} c_\alpha^2 c_\phi s_\phi = -[\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2] (s_1 c_1 s_2 c_2 + \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 s_1^2 s_2^2).$$

Умножая это выражение на 4 и учитывая, что для $c_\alpha = \operatorname{ch}(\alpha/2)$ справедливы тождества $2c_\alpha^2 = \operatorname{ch} \alpha + 1$, $2s_\alpha^2 = \operatorname{ch} \alpha - 1$, находим:

$$\mathbf{n} \sin \phi (\operatorname{ch} \alpha + 1) = -[\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2] (\operatorname{sh} \alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_2 + \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 (\operatorname{ch} \alpha_1 - 1)(\operatorname{ch} \alpha_2 - 1)).$$

Подставляя скорости $\mathbf{m} \operatorname{sh} \alpha = \mathbf{v}\gamma$, $\operatorname{ch} \alpha = \gamma$ и исключая $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2$ при помощи формулы $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 (1 + \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2)$, получаем требуемый результат.

• **H₇₅** *Обратное произведение* $\mathbb{L}\mathbb{R} = (c_\alpha - s_\alpha \mathbf{m}\boldsymbol{\sigma}) (c_\phi + i s_\phi \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})$ (стр. 222)

Перемножая кватернионы, имеем:

$$\mathbb{L}\mathbb{R} = c_\alpha c_\phi - i \mathbf{m}\mathbf{n} s_\alpha s_\phi + (i \mathbf{n} c_\alpha s_\phi - \mathbf{m} s_\alpha c_\phi + [\mathbf{m} \times \mathbf{n}] s_\alpha s_\phi) \boldsymbol{\sigma}.$$

Сравнивая с $\mathbb{L}_2\mathbb{L}_1$ (стр. 221), получаем, что итоговая скорость и ось вращения *перпендикулярны* ($\mathbf{n}\mathbf{m} = 0$) и справедливы следующие уравнения:

$$c_\alpha c_\phi = c_1 c_2 + (\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2) s_1 s_2, \quad \mathbf{n} c_\alpha s_\phi = -[\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2] s_1 s_2,$$

$$\mathbf{m} s_\alpha c_\phi - [\mathbf{m} \times \mathbf{n}] s_\alpha s_\phi = \mathbf{m}_1 s_1 c_2 + \mathbf{m}_2 c_1 s_2.$$

Они совпадут с соотношениями из задачи (< H₇₃), если вектор \mathbf{n} обратить $\mathbf{n} \mapsto -\mathbf{n}$, а индексы 1, 2 у α_i , \mathbf{m}_i переставить местами. В результате выражения для оси \mathbf{n} , угла поворота ϕ и быстроты α (или γ) не поменяются. Однако в выражении для скорости итогового буста \mathbf{v} (или вектора \mathbf{m}) необходимо поменять местами скорости.

• **H₇₆** *Выполнение условия* $\mathbb{L}\bar{\mathbb{L}} = \mathbb{I}$ (стр. 222)

Вычислим произведение числителей, учитывая, что $\mathbb{S}\bar{\mathbb{S}} = \bar{\mathbb{S}}\mathbb{S} = \mathbb{I}$ и аналогично для эрмитового сопряжения:

$$(\mathbb{S} + \mathbb{S}^+)(\bar{\mathbb{S}} + \bar{\mathbb{S}}^+) = 2 \cdot \mathbb{I} + \mathbb{S}^+ \bar{\mathbb{S}} + \mathbb{S} \bar{\mathbb{S}}^+.$$

С другой стороны для знаменателя имеем:

$$(\mathbb{I} + \mathbb{S}\bar{\mathbb{S}}^+) \overline{(\mathbb{I} + \mathbb{S}\bar{\mathbb{S}}^+)} = (\mathbb{I} + \mathbb{S}\bar{\mathbb{S}}^+) (\mathbb{I} + \mathbb{S}^+ \bar{\mathbb{S}}) = 2\mathbb{I} + \mathbb{S}^+ \bar{\mathbb{S}} + \mathbb{S} \bar{\mathbb{S}}^+ = |\mathbb{I} + \mathbb{S}^+ \bar{\mathbb{S}}|^2 \mathbb{I},$$

что и требовалось доказать.

• **H₇₇** *Кватернион* $\mathbb{R} = \mathbb{S}\bar{\mathbb{L}}$ (стр. 222)

$$\mathbb{R} = \mathbb{S}\bar{\mathbb{L}} = \frac{\mathbb{S}(\bar{\mathbb{S}} + \bar{\mathbb{S}}^+)}{|\mathbb{I} + \mathbb{S}\bar{\mathbb{S}}^+|} = \frac{\mathbb{I} + \mathbb{S}\bar{\mathbb{S}}^+}{|\mathbb{I} + \mathbb{S}\bar{\mathbb{S}}^+|}.$$

То, что этот кватернион не имеет чисто мнимой векторной части проверяется прямым перемножением:

$$\mathbb{S}\bar{\mathbb{S}}^+ = (S_0 + \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma})(S_0^* - \mathbf{S}^*\boldsymbol{\sigma}) = |S_0|^2 - \mathbf{S}\mathbf{S}^* + (\mathbf{S}S_0^* - \mathbf{S}^*S_0)\boldsymbol{\sigma} - i[\mathbf{S} \times \mathbf{S}^*]\boldsymbol{\sigma}$$

(последний член в этом выражении действителен). Кроме этого, очевидно, что знаменатель в \mathbb{R} действителен (см. < H₇₆).

• **H₇₈** *Уравнение непрерывности* (стр. 225)

Перемножая кватернионы, имеем:

$$(\partial_0 - \boldsymbol{\sigma}\nabla)(\rho - \mathbf{j}\boldsymbol{\sigma}) = \partial_0\rho + \nabla\mathbf{j} - (\partial_0\mathbf{j} + \nabla\rho - i\nabla \times \mathbf{j})\boldsymbol{\sigma}.$$

След этого выражения выделяет скалярную часть, приводя к уравнению непрерывности:

$$\partial_0\rho + \nabla\mathbf{j} = 0.$$

- **H₇₉** Кватернионы \mathbb{F} и \mathbb{A} (стр. 225)

Вычислим матричные произведения:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\bar{\mathbb{A}} &= (\partial_0 - \boldsymbol{\sigma}\nabla)(\varphi - \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}) = \partial \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{E} + i\mathbf{B})\boldsymbol{\sigma}, \\ \mathbb{A}\overset{\leftarrow}{\bar{\mathbb{D}}} &= (\varphi + \mathbf{A}\boldsymbol{\sigma})(\overset{\leftarrow}{\partial_0} + \boldsymbol{\sigma}\overset{\leftarrow}{\nabla}) = \partial \cdot \mathbf{A} - (\mathbf{E} + i\mathbf{B})\boldsymbol{\sigma}.\end{aligned}$$

где $\partial \cdot \mathbf{A} = \partial_0\varphi + \nabla \cdot \mathbf{A}$ и учтено, что

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial_0\mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Вычитая эти соотношения и деля на 2, получаем \mathbb{F} .

- **H₈₀** Первое уравнение Максвелла (стр. 225)

Кватернионы \mathbb{D} и \mathbb{A} имеют действительные коэффициенты, поэтому они эрмитовы ($\mathbb{D}^+ = \mathbb{D}$ и $\mathbb{A}^+ = \mathbb{A}$). Следовательно при *любом* кватернионе \mathbb{A} :

$$\mathbb{D}\mathbb{F}^+ - \mathbb{F}\overset{\leftarrow}{\mathbb{D}} = \frac{1}{2}\mathbb{D}(\bar{\mathbb{A}}\overset{\leftarrow}{\mathbb{D}} - \overset{\leftarrow}{\mathbb{D}}\mathbb{A}) - \frac{1}{2}(\mathbb{D}\bar{\mathbb{A}} - \mathbb{A}\overset{\leftarrow}{\mathbb{D}})\overset{\leftarrow}{\mathbb{D}} = 0,$$

так как $\mathbb{D}\bar{\mathbb{D}} = \mathbb{I}\partial^2$ и единичная матрица \mathbb{I} перестановочна с \mathbb{A} .

- **H₈₁** Первое уравнение Максвелла (стр. 225)

Подставляя в (8.67) кватернионы

$$\mathbb{F} = \mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbb{D} = \partial_0 - \boldsymbol{\sigma}\nabla,$$

где $\mathbf{f} = \mathbf{E} + i\mathbf{B}$ и учитывая тождество (8.8), стр. 211, получаем:

$$\nabla(\mathbf{f} - \mathbf{f}^*) = \partial_0(\mathbf{f} - \mathbf{f}^*)\boldsymbol{\sigma} + i\nabla \times (\mathbf{f} + \mathbf{f}^*)\boldsymbol{\sigma}.$$

Скалярная часть этого уравнения даёт закон Гаусса для магнитного поля

$$\nabla(\mathbf{f} - \mathbf{f}^*) = 2i\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

а векторная – закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$\partial_0\mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

• **H₈₂** *Движение в постоянном электрическом поле* (стр. 227)

Пусть начальная скорость равна нулю и $\mathbb{U}(0) = \mathbb{I}$. Тогда $\mathbb{U}(s)$ равно (8.75) без множителя $1/2$. Скалярная и векторные части этого кватерниона дают компоненты 4-скорости

$$u_0(s) = \operatorname{ch}(\omega s), \quad \mathbf{u}(s) = \mathbf{e} \operatorname{sh}(\omega s).$$

Так как $u^\mu = \{u_0, \mathbf{u}\} = dx^\mu/ds$, интегрируя по s , получаем выражения для лабораторного времени и координат заряда:

$$t = \frac{1}{\omega} \operatorname{sh}(\omega s), \quad \mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + \frac{\mathbf{e}}{\omega} (\operatorname{ch}(\omega s) - 1).$$

В первом случае константа интегрирования выбрана равной нулю, так как при $s = 0$ имеем $t = 0$. При помощи тождеств для гиперболических функций несложно выразить гиперболический косинус через синус и перейти от параметрического представления решения к явной зависимости координат частицы от лабораторного времени (стр. V₁:144, ??).

• **H₈₃** *Движение в постоянном магнитном поле* (стр. 227)

Запишем решение (8.74):

$$\mathbb{U}(s) = \{\cos(\omega s/2) + i\mathbf{b}\boldsymbol{\sigma} \sin(\omega s/2)\} \mathbb{U}(0) \{\cos(\omega s/2) - i\mathbf{b}\boldsymbol{\sigma} \sin(\omega s/2)\},$$

Подставляя кватернион начальной скорости $\mathbb{U}(0) = u_0 + \mathbf{u}_0\boldsymbol{\sigma}$ и переменно-жая матрицы Паули, получаем:

$$\mathbb{U}(s) = u_0 + (\mathbf{u}_0\mathbf{b})(\mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}) + [\mathbf{b} \times [\mathbf{u}_0 \times \mathbf{b}]] \boldsymbol{\sigma} \cos(\omega s) + [\mathbf{u}_0 \times \mathbf{b}] \boldsymbol{\sigma} \sin(\omega s),$$

откуда

$$\mathbf{u}(s) = (\mathbf{u}_0\mathbf{b})\mathbf{b} + [\mathbf{b} \times [\mathbf{u}_0 \times \mathbf{b}]] \cos(\omega s) + [\mathbf{u}_0 \times \mathbf{b}] \sin(\omega s).$$

и

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + (\mathbf{u}_0\mathbf{b})\mathbf{b} s + \frac{1}{\omega} [\mathbf{b} \times [\mathbf{u}_0 \times \mathbf{b}]] \sin(\omega s) - \frac{1}{\omega} [\mathbf{u}_0 \times \mathbf{b}] (\cos(\omega s) - 1),$$

Обратим внимание, что на стр. V₁:145 вектор \mathbf{u} – это “обычная” скорость, а не компоненты 4-вектора скорости, как в этой главе. Так как модуль скорости постоянен интервал связан с лабораторным временем простым соотношением: $s = t/u_0$.

Спиноры

- **H₈₄** Спинорный инвариант (стр. 232)

Подставим преобразования для спинора (9.5), стр. 232:

$$\psi'^1 \chi'^2 - \psi'^2 \chi'^1 = (A\psi^1 + B\psi^2)(C\chi^1 + D\chi^2) - (C\psi^1 + D\psi^2)(A\chi^1 + B\chi^2).$$

Перемножая скобки, получаем $(AD - BC)(\psi^1\chi^2 - \psi^2\chi^1)$.

- **H₈₅** $\psi^\alpha \chi_\alpha = -\psi_\alpha \chi^\alpha$ (стр. 233)

$$\psi^\alpha \chi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} \psi^\alpha \chi^\beta = -\varepsilon_{\beta\alpha} \psi^\alpha \chi^\beta = -\psi_\beta \chi^\beta.$$

- **H₈₆** Преобразование косспинора (стр. 233)

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= \psi'^2 = C\psi^1 + D\psi^2 = -C\psi_2 + D\psi_1, \\ \psi'_2 &= -\psi'^1 = -A\psi^1 - B\psi^2 = A\psi_2 - B\psi_1. \end{aligned}$$

- **H₈₇** Связь δ_β^α и $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (стр. 233)

Если инвариант спинорных преобразований обозначить следующим образом $[ab] = a^\alpha b_\alpha = a^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} b^\beta = a^1 b^2 - a^2 b^1$, то для четырех спиноров прямой подстановкой можно проверить справедливость тождества:

$$[ab][cd] + [ac][db] + [ad][bc] = 0.$$

Беря производную по a^α , имеем:

$$b^\alpha [cd] + c^\alpha [db] + d^\alpha [bc] = \varepsilon_{\beta\gamma} b^\alpha c^\beta d^\gamma + \varepsilon_{\beta\gamma} c^\alpha d^\beta b^\gamma + \varepsilon_{\beta\gamma} d^\alpha b^\beta c^\gamma = 0.$$

Аналогично берутся производные по b^σ , c^μ и d^ν , что приводит к требуемому тождеству.

- **H₈₈** Инвариант унитарного преобразования $\mathbb{S}^+ \mathbb{S} = \mathbf{1}$ (стр. 236)

$$\psi'^{\dot{\alpha}} \chi'^{\alpha} = \overset{\bullet}{\psi}'{}^T \chi' = \overset{\bullet}{\psi}{}^T \mathbb{S}^{*T} \mathbb{S} \chi = \overset{\bullet}{\psi}{}^T (\mathbb{S}^+ \mathbb{S}) \chi = \overset{\bullet}{\psi}{}^T \chi = \text{inv.}$$

- **H₈₉** Число компонент симметричного тензора (стр. 239)

В тензоре $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_m \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_n}$ первые m индексов симметричны. Каждый индекс принимает значения 1 или 2. В последовательности чисел $\alpha_1 \dots \alpha_m$ могут быть все двойки или одна единица (на любом месте), или две единицы, и т.д. Всего получается $m + 1$ возможных неэквивалентных (с учетом симметричности относительно перестановок) комбинаций. Аналогично, для каждой из таких $m + 1$ комбинаций возможно $n + 1$ комбинаций для симметричных индексов $\dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_n$. В результате, всего возможно $(m + 1)(n + 1)$ различных компонент симметричного тензора.

- **H₉₀** В калибровке Лоренца $\partial^{\mu\dot{\sigma}} a_{\dot{\sigma}}^{\nu} = \partial^{\nu\dot{\sigma}} a_{\dot{\sigma}}^{\mu}$ (стр. 241)

Для $\mu = \nu$ это соотношение очевидно. Если индексы различны, то:

$$\partial^{1\dot{\sigma}} a_{\dot{\sigma}}^2 - \partial^{2\dot{\sigma}} a_{\dot{\sigma}}^1 = -\partial^{1\dot{\sigma}} a_{1\dot{\sigma}} - \partial^{2\dot{\sigma}} a_{2\dot{\sigma}} = -\partial^{\nu\dot{\sigma}} a_{\nu\dot{\sigma}} = 0,$$

где мы воспользовались общим определением $\psi_1 = \psi^2$ и $\psi_2 = -\psi^1$.

- **H₉₁** Компоненты спинорного тензора энергии-импульса (стр. 246)

Распишем, например, $t^{12\ddot{1}\ddot{2}}/4\pi$. Используя компоненты тензоров, приведенных на стр. 238, выраженные через вектор $\mathbf{f} = \mathbf{E} + i\mathbf{B}$, имеем:

$$t^{12\ddot{1}\ddot{2}} = \frac{1}{4\pi} f_z f_z^* = \frac{1}{4\pi} |E_z + iB_z|^2 = \frac{1}{4\pi} (E_z^2 + B_z^2).$$

Аналогично:

$$t^{11\ddot{1}\ddot{1}} = \frac{1}{4\pi} (-f_x + if_y)(-f_x^* - if_y^*) = \frac{1}{4\pi} (E_x^2 + E_y^2 + B_x^2 + B_y^2 + 2(E_x B_y - E_y B_x)).$$

Проводя такие вычисления для остальных компонент, получаем:

$$\begin{aligned} t^{12\ddot{1}\ddot{2}} &= \frac{1}{4\pi} (E_z^2 + B_z^2) \\ t^{11\ddot{1}\ddot{1}} &= \frac{1}{4\pi} (E_x^2 + E_y^2 + B_x^2 + B_y^2 + 2[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_z) \\ t^{22\ddot{2}\ddot{2}} &= \frac{1}{4\pi} (E_x^2 + E_y^2 + B_x^2 + B_y^2 - 2[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_z) \\ t^{11\ddot{2}\ddot{2}} &= t^{*22\ddot{1}\ddot{1}} = \frac{1}{4\pi} (E_y^2 - E_x^2 + B_y^2 - B_x^2 + 2iE_x E_y + 2iB_x B_y) \\ t^{12\ddot{1}\ddot{1}} &= t^{*11\ddot{1}\ddot{2}} = \frac{1}{4\pi} (-E_x E_z - B_x B_z + [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_x + i[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_y - iE_y E_z - iB_y B_z) \\ t^{12\ddot{2}\ddot{2}} &= t^{*22\ddot{1}\ddot{2}} = \frac{1}{4\pi} (-E_x E_z + B_x B_z + [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_x - i[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_y - iE_y E_z - iB_y B_z). \end{aligned}$$

Связь с тензором $T^{\mu\nu}$ получится, если учесть, что:

$$T^{00} = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi}, \quad T^{0i} = T^{i0} = \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_i}{4\pi}, \quad T^{ij} = \delta_{ij} T^{00} - \frac{E_i E_j + B_i B_j}{4\pi}.$$

- **H₉₂** К симметризации тензора энергии-импульса (стр. 247)

Заметим, что следующая дивергенция приводит к лагранжиану:

$$\frac{1}{4} \partial_{\gamma\dot{\gamma}} (a_{\alpha}^{\dot{\gamma}} f^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\mu\nu} \varepsilon^{\dot{\mu}\dot{\nu}}) = \frac{1}{2} (\partial_{\gamma\dot{\gamma}} a_{\alpha}^{\dot{\gamma}} + \partial_{\alpha\dot{\gamma}} a_{\dot{\gamma}}^{\dot{\gamma}}) f^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\mu\nu} \varepsilon^{\dot{\mu}\dot{\nu}} = -f_{\alpha\gamma} f^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\mu\nu} \varepsilon^{\dot{\mu}\dot{\nu}},$$

а несвёрнутое произведение тензоров напряженности даёт выражение

$$\partial_{\gamma\dot{\gamma}} ((a^{\gamma\dot{\mu}} \varepsilon^{\dot{\nu}\dot{\nu}} + a^{\gamma\dot{\nu}} \varepsilon^{\dot{\mu}\dot{\nu}}) f^{\mu\nu}) = -2f^{\dot{\mu}\dot{\nu}} f^{\mu\nu} + a^{\gamma\dot{\mu}} \partial_{\gamma}^{\dot{\nu}} f^{\mu\nu} + a^{\gamma\dot{\nu}} \partial_{\gamma}^{\dot{\mu}} f^{\mu\nu}.$$

Отметим также тензор автоматически (без симметризаций) удовлетворяющий уравнению непрерывности по $\partial_{\mu\dot{\mu}}$:

$$\partial_{\gamma\dot{\gamma}} (f^{\gamma\mu} a^{\nu\dot{\nu}} \varepsilon^{\dot{\gamma}\dot{\mu}}).$$

Уравнение Дирака

- **H₉₃** Уравнение Дирака (стр. 249)

Распишем сумму по индексу μ в уравнении Дирака:

$$\gamma^\mu \hat{p}_\mu \psi = (\gamma^0 \hat{p}_0 + \gamma^i \hat{p}_i) \psi = (\gamma^0 \hat{p}_0 - \boldsymbol{\gamma} \hat{\mathbf{p}}) \psi = m\psi.$$

Подставляя матрицы, имеем:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \hat{p}_0 \\ \hat{p}_0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\hat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma} \\ \hat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix}.$$

- **H₉₄** Уравнение Дирака с выделенной производной по t (стр. 249)

Уравнение Дирака: $(\gamma^0 \hat{p}_0 - \boldsymbol{\gamma} \hat{\mathbf{p}}) \psi = m\psi$ умножим справа на γ^0 :

$$(\gamma^0 \gamma^0 \hat{p}_0 - \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \hat{\mathbf{p}}) \psi = m\gamma^0 \psi.$$

Прямыми умножением матриц убеждаемся, что

$$\gamma^0 \gamma^0 = 1.$$

Вводя три матрицы $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$, записанные аналогично матрицам Паули как вектор, получаем (9.55), стр. 249.

- **H₉₅** Представление Майораны (стр. ??)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma_z & 0 \\ 0 & i\sigma_z \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma_x & 0 \\ 0 & -i\sigma_x \end{pmatrix}.$$

Ненулевые элементы матриц чисто мнимые и $i\gamma^\mu \partial_\mu$ – действительно.

- **H₉₆** Переход к представлению Вейля (стр. 252)

Из $\tilde{\gamma}^\mu = U \gamma^\mu U^{-1}$ следует, что

$$\tilde{\gamma}^\mu U = U \gamma^\mu.$$

Поэтому, записывая U при помощи 4-х произвольных матричных блоков 2x2 и подставляя явный вид матриц γ^μ и $\tilde{\gamma}^\mu$, несложно найти значения этих блоков. В частности, при переходе от спинорного представления к представлению Вейля (и обратно) используется следующая матрица:

$$U = U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этим же способом можно доказать, что γ^0 ни в каком представлении не может быть равна единичной матрице.

- **H₉₇** Алгебра матриц Дирака (стр. 253)

$$\gamma^5 \boldsymbol{\alpha} = \gamma^5 \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} = -\gamma^0 \gamma^5 \boldsymbol{\gamma} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \gamma^5 = \boldsymbol{\alpha} \gamma^5,$$

$$\beta \boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} = -\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \gamma^0 = -\boldsymbol{\alpha} \beta,$$

где учтено антисимметрическое свойство матриц с различными индексами.

- **H₉₈** Определитель матриц Дирака (стр. 253)

Матрицы Дирака – это матрицы 4x4. Поэтому в спинорном представлении $\det \gamma^0 \neq 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1$, а

$$\det \gamma^0 = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (+1) \cdot (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = 1.$$

- **H₉₉** Унитарные представления (стр. 254)

$$(\tilde{\gamma}^\mu)^+ = (U \gamma^\mu U^+)^+ = U (\gamma^\mu)^+ U^+ = U \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 U^+ = U \gamma^0 U U \gamma^\mu U^+ U \gamma^0 U^+ = \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^0.$$

- **H₁₀₀** Сопряжение $\sigma^{\mu\nu}$ (стр. 254)

$$(\sigma^{\mu\nu})^+ = \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)^+ = \frac{1}{2} (\gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu)^+ = \frac{1}{2} \gamma^0 (\gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu) \gamma^0.$$

- **H₁₀₁** Коммутатор γ^α и $\gamma^\mu \gamma^\nu$ (стр. 254)

Пользуясь алгеброй (9.62) стр. 252, переставим γ^α и γ^μ :

$$\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu = (2g^{\alpha\mu} - \gamma^\mu \gamma^\alpha) \gamma^\nu = 2g^{\alpha\mu} \gamma^\nu - \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu.$$

Еще раз переставляя в последнем слагаемом γ^α и γ^ν , получаем:

$$\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha = 2(g^{\alpha\mu} \gamma^\nu - g^{\alpha\nu} \gamma^\mu).$$

- **H₁₀₂** След произведения нечетного числа матриц (стр. 255)

Рассмотрим след от 3-х матриц Дирака (индексы равны 0...3)

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda) = \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^5 \gamma^5) = -\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^5) = -\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda),$$

где во втором равенстве мы перенесли одну матрицу γ^5 , используя свойство $\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu$, а в третьем равенстве, оставшуюся матрицу циклическим образом переставили в начало (это всегда можно сделать под следом). Так как $(\gamma^5)^2 = 1$ получается исходное выражение со знаком минус, что возможно только, если оно равно нулю.

• **H₁₀₃** След γ^5 с чётным числом матриц Дирака (стр. 255)

Первое тождество проверяется перебором всех значений индексов μ и ν , с учетом определения $\gamma^5 = \imath \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$. Во втором тождестве вычислим

$$\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) = \imath \text{Tr}(\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) = -4\imath,$$

собирая вместе одинаковые матрицы. Затем проверяем, что тождество равно 0 при одинаковых индексах и антисимметрично при различных.

• **H₁₀₄** Транспонирование γ^5 , $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$ (стр. 256)

Во всех представлениях на странице 252 матрица γ^5 симметрична, поэтому $(\gamma^5)^T = \gamma^5 = \gamma^2 \gamma^5 \gamma^2 = -\gamma^2 \gamma^2 \gamma^5 = \gamma^5$. Транспонирование $\boldsymbol{\alpha}$ вычисляем по её определению:

$$\boldsymbol{\alpha}^T = (\gamma^0 \boldsymbol{\gamma})^T = \boldsymbol{\gamma}^T \gamma^0 = -\gamma^2 \boldsymbol{\gamma} \gamma^2 \gamma^0 = \gamma^2 \boldsymbol{\gamma} \gamma^0 \gamma^2 = -\gamma^2 \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \gamma^2 = -\gamma^2 \boldsymbol{\alpha} \gamma^2.$$

Аналогично вычисляем транспонирование для $\boldsymbol{\Sigma}$. Например, для x и y составляющих матрицы имеем:

$$-\imath \Sigma_x^T = (\gamma^2 \gamma^3)^T = (\gamma^3)^T (\gamma^2)^T = (\gamma^2 \gamma^3 \gamma^2) (\gamma^2 \gamma^2 \gamma^2) = \gamma^2 (\gamma^2 \gamma^3) \gamma^2,$$

$$-\imath \Sigma_y^T = (\gamma^3 \gamma^1)^T = (\gamma^1)^T (\gamma^3)^T = (\gamma^2 \gamma^1 \gamma^2) (\gamma^2 \gamma^3 \gamma^2) = \gamma^2 (\gamma^3 \gamma^1) \gamma^2.$$

• **H₁₀₅** Тензор бесконечно малых преобразований Лоренца (стр. 259)

Запишем в первом порядке малости преобразования Лоренца (4.3), стр. 92:

$$t' \approx t - \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}' \approx \mathbf{r} - \delta \mathbf{v} t$$

и малые вращения на угол ϕ вокруг единичной оси \mathbf{n} (8.40), стр. 217:

$$t' = t, \quad \mathbf{r}' \approx \mathbf{r} + [\mathbf{r} \times \mathbf{n}] \phi.$$

Им соответствуют матрицы ($\delta \boldsymbol{\phi} = \{n_x \phi, n_y \phi, n_z \phi\}$):

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta v_x & -\delta v_y & -\delta v_z \\ -\delta v_x & 1 & 0 & 0 \\ -\delta v_y & 0 & 1 & 0 \\ -\delta v_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \phi_z & -\delta \phi_y \\ 0 & -\delta \phi_z & 0 & \delta \phi_x \\ 0 & \delta \phi_y & -\delta \phi_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Их произведение в любом порядке равно $\delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu$ или, опуская индекс вниз: $\omega_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} \omega_\nu^\alpha$, приходим к матрице:

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta v_x & -\delta v_y & -\delta v_z \\ \delta v_x & 0 & -\delta \phi_z & \delta \phi_y \\ \delta v_y & \delta \phi_z & 0 & -\delta \phi_x \\ \delta v_z & -\delta \phi_y & \delta \phi_x & 0 \end{pmatrix} = (\delta \mathbf{v}, -\delta \boldsymbol{\phi}).$$

• **H₁₀₆** *Бесконечно малое преобразование для биспинора* (стр. 260)

Подставим $S \approx 1 + \Omega$ и $\Lambda^\mu{}_\nu \approx \delta_\nu^\mu + \omega^\mu{}_\nu$ в соотношение (9.95):

$$S^{-1} \gamma^\mu S = (1 - \Omega) \gamma^\mu (1 + \Omega) = \Lambda^\mu{}_\lambda \gamma^\lambda = \gamma^\mu + \omega^\mu{}_\nu \gamma^\nu,$$

где учтено, что с точностью до первого порядка малости $S^{-1} \approx 1 - \Omega$, что проверяется прямым перемножением с $S \approx 1 + \Omega$. Раскроем скобки:

$$\gamma_\mu \Omega - \Omega \gamma_\mu = \omega_{\mu\nu} \gamma^\nu.$$

Умножим это уравнение слева на γ^μ , просуммировав по μ :

$$4\Omega - \gamma^\mu \Omega \gamma_\mu = \omega_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu},$$

где учтено тождество $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4$ (стр. 254) и антисимметричность $\omega_{\mu\nu}$. Матрица Ω может быть разложена по базису 16 матриц Γ_a (стр. 257): $\Omega = a_5 \gamma^5 + a_\lambda \gamma^\lambda + b_\lambda \gamma^\lambda \gamma^5 + c_{\lambda\tau} \sigma^{\lambda\tau}$ (единичная матрица выделена в S). Подставим это разложение и проведём свертки $\gamma^\mu \dots \gamma_\mu$ (стр. 255):

$$8a_5 \gamma^5 + 6a_\lambda \gamma^\lambda + 2b_\lambda \gamma^\lambda \gamma^5 + (4c_{\lambda\tau} - \omega_{\lambda\tau}) \sigma^{\lambda\tau} = 0.$$

Поэтому $a_5 = 0$, $a_\lambda = b_\lambda = 0$ и $c_{\lambda\tau} = (1/4)\omega_{\lambda\tau}$.

• **H₁₀₇** *Лагранжиан для спиноров* (стр. ??)

$$\mathcal{L} = \chi^+ (\hat{p}_0 - \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}}) \chi + \xi^+ (\hat{p}_0 + \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}}) \xi - m (\chi^+ \xi + \xi^+ \chi).$$

• **H₁₀₈** *Получение уравнение Дирака из уравнений Лагранжа* (стр. ??)

Производные лагранжиана имеют вид (порядок символов важен, так как это матрицы):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -m \bar{\psi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = (\imath \gamma^\nu \partial_\nu - m) \psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \psi)} = \bar{\psi} \imath \gamma^\nu, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \bar{\psi})} = 0.$$

Имеет смысл восстановить индексы у ψ , $\bar{\psi}$ и γ^μ в лагранжиане и взять эти производные не в матричном, а индексном виде.

• **H₁₀₉** *Разность двух лагранжианов* (стр. ??)

$$\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) = \bar{\psi} \gamma^\mu (\overleftarrow{\partial}_\mu + \partial_\mu) \psi.$$

• **H₁₁₀** *Производная $\sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}$ по $\omega_{\mu\nu}$* (стр. ??)

$$\sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} = 2(\sigma^{01} \omega_{01} + \sigma^{02} \omega_{02} + \sigma^{03} \omega_{03}) + 2(\sigma^{12} \omega_{12} + \sigma^{13} \omega_{13} + \sigma^{23} \omega_{23}),$$

где 2-ки появились от остальных комбинаций произведений двух антисимметричных тензоров. Поэтому при взятии производной появится 2-ка. Следовательно, например $\partial(\sigma^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}) / \partial \omega_{01} = 2\sigma^{01}$.

• **H₁₁₁** Собственные векторы и значения матрицы $\xi\sigma$ (стр. ??)

Введём единичный вектор с компонентами, зависящими от углов сферической системы координат:

$$\xi = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

Учитывая явный вид матриц Паули (стр. 211), запишем матрицу $\xi\sigma$ и найдём её собственные вектора и значения:

$$\xi\sigma = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \quad \xi\sigma w^{(s)} = s w^{(s)}. \quad (101)$$

Так как $(\xi\sigma)^2 = \xi^2 = 1$, собственные значения равны $s \pm 1$. Собственные векторы $w^{(\pm)}$ эрмитовой матрицы ортогональны и могут быть нормированы на единицу:

$$w^{(s)} w^{(\lambda)} = \delta_{s\lambda}. \quad (102)$$

Записывая их в виде $w^{(s)} = (\alpha \ \beta)^T$, подставляя в уравнение на собственные значения (101), получаем:

$$\alpha = \frac{s e^{-i\phi} \sin \theta}{1 - s \cos \theta} \beta, \quad \beta = \left(\frac{1 - s \cos \theta}{2} \right)^{1/2} e^{i\mu_s},$$

где β находится из нормировочного условия $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ и μ_s – произвольные фазы (вообще говоря различные для $s = 1$ и $s = -1$). Положив $\mu_{\pm} = (\varphi \pm \alpha)/2$, где α – некоторое действительное число, получаем:

$$w^{(+)} = e^{\frac{i\alpha}{2}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{+\frac{i\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad w^{(-)} = e^{-\frac{i\alpha}{2}} \begin{pmatrix} -e^{-\frac{i\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{+\frac{i\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (103)$$

При $\theta = \phi = \alpha = 0$ получаем два столбика $(1 \ 0)^T$ и $(0 \ 1)^T$.

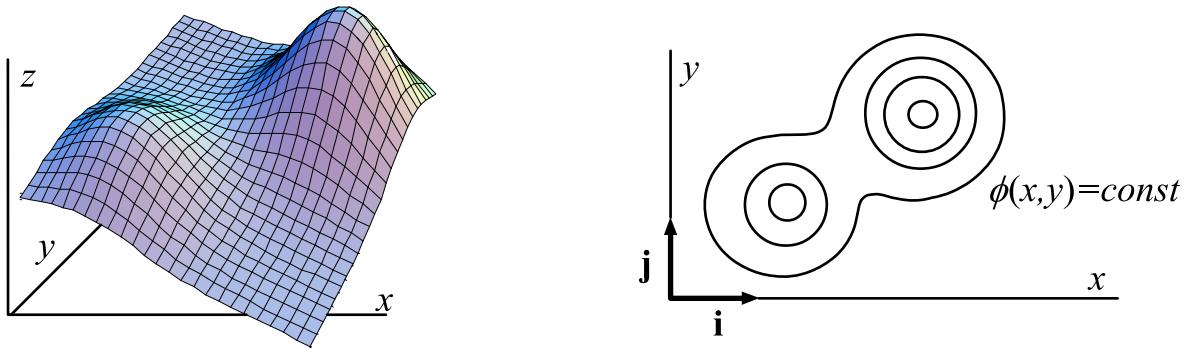
• **H₁₁₂** Количество коэффициентов у гравссмановой функции (стр. ??)

Если функция зависит от n гравссмановых величин ψ_1, \dots, ψ_n , то в разложении в ряд Тейлора один коэффициент (f_0) соответствует отсутствию величин, n коэффициентов, если есть одна величина: $f_1\psi_1 + \dots + f_n\psi_n$, затем $(n^2 - n)/2$ штук по 2 величины: $f_{12}\psi_1\psi_2, f_{13}\psi_1\psi_3, \dots, f_{n-1,n}\psi_{n-1}\psi_n$, и т.д. Перечислить все варианты можно при помощи бинарного числа, состоящего из последовательности n нулей и единиц (если на i -ом месте стоит 0, то ψ_i отсутствует, а если 1, то она есть). Количество таких чисел равно 2^n (2 варианта: 0 или 1 на первом месте; для каждого из них 2 варианта на втором месте, и т.д.: $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$).

M: Математическое приложение

I Векторный анализ

- Рассмотрим 2-мерную поверхность, заданную при помощи функции $\varphi(x, y)$. Графически её можно изобразить в виде 3-мерного рисунка (слева) или при помощи линий постоянной высоты, аналогично географическим картам (справа):



Дифференциал функции (бесконечно малое изменение) равен:

$$d\varphi = \varphi(x + dx, y + dy) - \varphi(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy.$$

Его значение зависит от того, в каком направлении происходит сдвиг (dx, dy) от начальной точки (x, y) . Удобно ввести бесконечно малое изменение радиус-вектора $d\mathbf{r}$ и вектор градиента функции $\nabla\varphi$:

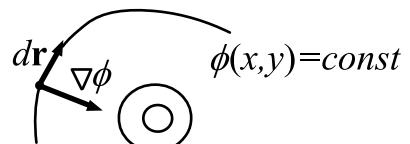
$$d\mathbf{r} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy, \quad \nabla\varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

где \mathbf{i} и \mathbf{j} единичные перпендикулярные векторы, направленные вдоль осей x и y . Так как $\mathbf{i}\mathbf{j} = 0$, дифференциал функции равен скалярному произведению:

$$d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}.$$

Рассмотрим линию постоянной высоты (значение $\varphi(x, y) = \text{const}$). Если смещение $d\mathbf{r}$ происходит вдоль этой линии, то $d\varphi = 0$, и

$$\nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = 0$$



Равенство нулю скалярного произведения означает перпендикулярность векторов. Следовательно, градиент функции всегда направлен перпендикулярно к линии $\varphi(x, y) = \text{const}$. Так как производная растущей функции положительна, градиент указывает направление возрастания функции (двигаясь вдоль градиента, можно забраться на ближайший локальный максимум поверхности).

▷ Перейдём теперь к 3-мерному пространству. Пусть в каждой точке задано некоторое число $\varphi = \varphi(x, y, z)$. В этом случае говорят о скалярной функции или *скалярном поле*. Физические примеры: поле температуры (изменяющаяся в пространстве температура), распределение плотности массы или заряда, и т.д. Естественно, изобразить 3-мерное поле в виде поверхности нельзя. Для этого потребовалось бы 4-мерное пространство. Однако рассуждения остаются теми же, что и для 2-мерных поверхностей. Дифференциал функции выражается через скалярное произведение $d\mathbf{r}$ и градиента $\nabla\varphi$:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz = \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}, \quad (1)$$

где

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz, \quad \nabla\varphi = \mathbf{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

а $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – единичные взаимно перпендикулярные базисные векторы направленные вдоль осей x, y и z .

Вектор градиента перпендикулярен к *поверхностям* постоянного значения поля $\varphi(x, y, z) = const$ и направлен в сторону локального увеличения φ .

Градиент $\nabla\varphi$ обозначается также следующим образом: $\text{grad}\varphi$. Однако использование значка ∇ оказывается очень удобным для запоминания многих формул векторного анализа.

Чтобы продвинуться дальше, “оторвём” ∇ от поля φ и введём *оператор наблы*:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2)$$

Это выражение выглядит “незаконченным”, так как под знаками частных производных обычно находится функция. Поэтому ∇ и называют оператором. Он должен “подействовать” на функцию, чтобы получилось “обычное” выражение. Ситуация аналогична значкам частной или полной производных, дифференциальному и т.п.:

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{d}{dx}, \quad d.$$

Для завершения выражения справа подставляется некоторая функция. Набла – это векторный дифференциальный оператор (в его определении кроме частных производных находятся базисные векторы \mathbf{i}, \mathbf{j} и \mathbf{k}).

- Кроме скалярных функций, в физике часто встречаются векторные функции, компоненты которых являются функциями координат:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{i} A_x(x, y, z) + \mathbf{j} A_y(x, y, z) + \mathbf{k} A_z(x, y, z).$$

Представим, например, поток воды. Каждая точка имеет определённую скорость, поэтому можно говорить о векторном поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Аналогично, в окрестности заряда или массивного тела на другие тела действует сила, меняющаяся от точки к точке. Следовательно, можно говорить о векторном поле сил.

▷ Оператор набла является вектором. Поэтому он может подействовать на векторную функцию при помощи скалярного произведения. В этом случае говорят о *дивергенции* поля ($\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \operatorname{div} \mathbf{A}$):

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (3)$$

Дивергенция (скалярное произведение) – это скаляр, точнее скалярное поле.

Из определения следует, что дивергенция радиус-вектора $\mathbf{r} = (x, y, z)$ равна 3:

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3. \quad (4)$$

▷ Второе действие с векторным оператором набла основано на векторном произведении и называется *ротором*: $\nabla \times \mathbf{A} \equiv \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Компоненты ротора можно записать при помощи определителя:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}, \quad (5)$$

или раскрывая его в явном виде:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).$$

Ротор – это вектор, а точнее векторное поле. Ротор радиус-вектора равен нулю:

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0. \quad (6)$$

Для доказательства достаточно подставить в определение ротора компоненты радиус-вектора $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

▷ Оператор набла, прежде чем подействовать на скалярное или векторное поле, может предварительно свернуться с некоторым вектором \mathbf{a} . В результате получится скалярный оператор вида $(\mathbf{a}\nabla)$. Его называют *производной по направлению* вектора \mathbf{a} . Вычислим, например:

$$(\mathbf{a}\nabla) \mathbf{r} = \left(a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z = \mathbf{a}.$$

Термин “производная по направлению” возникает по следующей причине. Рассмотрим скалярную функцию $f(\mathbf{r})$. Через данную точку \mathbf{r} можно провести прямую в направлении, определяемом вектором \mathbf{a} . Её уравнение в параметрическом виде имеет вид: $\mathbf{r} + \mathbf{a}t$. Найдём производную f *вдоль этой прямой* в точке \mathbf{r} . Её можно определить как дифференцирование по параметру t , при помощи которого пробегаются точки на прямой вдоль вектора \mathbf{a} . Производная вычисляется как производная сложной функции:

$$\frac{d}{dt} f(x + a_xt, y + a_yt, z + a_zt) = \frac{\partial f}{\partial x} a_x + \frac{\partial f}{\partial y} a_y + \frac{\partial f}{\partial z} a_z.$$

Поэтому производная по направлению \mathbf{a} в данной точке пространства \mathbf{r} равна:

$$\frac{df(\mathbf{r} + \mathbf{a}t)}{dt} \Big|_{t=0} = (\mathbf{a}\nabla)f(\mathbf{r}). \quad (7)$$

▷ Квадрат оператора набла равен *оператору Лапласа*:

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (8)$$

Так как компоненты вектора ∇ – частные производные, то его квадрат равен сумме квадратов компонент, т.е. вторых производных.

Оператор Лапласа может действовать как на скалярную, так и на векторную функцию. Неоднородное уравнение с оператором Лапласа часто называют *уравнением Пуассона*. Например, потенциал электростатического поля φ удовлетворяет уравнению:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad (9)$$

где $\rho = \rho(x, y, z)$ – распределение плотности заряда.

- При работе с оператором набла требуются определённые навыки. Любое выражение с его участием можно вычислить в явном компонентном виде. Найдём, например, градиент длины радиус-вектора. Вычислим сначала частную производную по x :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{x}{r}.$$

Для производной по y в числителе появится y , и аналогично для z . Учитывая определение векторного оператора набла (2), получаем:

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{n}, \quad (10)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ – радиус вектор, r – его длина, а \mathbf{n} , соответственно, единичный вектор $\mathbf{n}^2 = 1$ в направлении \mathbf{r} . Аналогично:

$$\nabla f(r) = f'(r) \mathbf{n}, \quad \nabla(\mathbf{ra}) = \mathbf{a}. \quad (11)$$

где \mathbf{a} – постоянный вектор. В последнем уравнении скобки обязательны. Оператор набла является вектором, поэтому должно быть указано, какие векторы участвуют в скалярном произведении.

▷ Пусть скалярная функция f зависит от координат и постоянного вектора \mathbf{a} . Скалярность означает, что значения функции не зависят от поворота системы координат. Поэтому функция может зависеть только от двух скалярных величин – длины вектора r и скалярного произведения \mathbf{ra} . Градиент такой функции равен:

$$\nabla f(r, \mathbf{ra}) = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{n} + \frac{\partial f}{\partial (\mathbf{ra})} \mathbf{a}. \quad (12)$$

Аналогично вычисляется градиент и в более сложных случаях.

▷ При действии наблы необходимо учитывать, что производная произведения равна сумме производных каждого сомножителя. Для преобразования подобных выражений удобно в промежуточных вычислениях ставить у оператора индекс, помечающий функцию, на которую он действует. Затем переставить сомножители так, что справа от ∇ окажутся только величины на которые оператор действует. После этого индексы убираются. Например:

$$\nabla(f\mathbf{A}) = \nabla_f(f\mathbf{A}) + \nabla_{\mathbf{A}}(f\mathbf{A}) = (\mathbf{A}\nabla_f)f + f\nabla_{\mathbf{A}}\mathbf{A} = (\mathbf{A}\nabla)f + f\nabla\mathbf{A}.$$

Это дивергенция произведения скалярного f и векторного \mathbf{A} полей.

▷ Аналогично вычисляется дивергенция векторного произведения двух векторных полей:

$$\nabla[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \nabla_{\mathbf{A}}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] + \nabla_{\mathbf{B}}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = [\nabla_{\mathbf{A}} \times \mathbf{A}] \mathbf{B} - [\nabla_{\mathbf{B}} \times \mathbf{B}] \mathbf{A}.$$

После записи индексов, с наблой можно работать как с обычным вектором. Поэтому во втором равенстве применено правило выталкивания (??) для первого слагаемого, а во втором сначала переставлены со знаком минус сомножители в векторном произведении (??), а затем применено правило выталкивания. Теперь необходимо изменить порядок в скалярном произведении, после чего индекс у наблы можно опустить:

$$\nabla[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} [\nabla \times \mathbf{A}] - \mathbf{A} [\nabla \times \mathbf{B}]. \quad (13)$$

Точно так же, при помощи формулы “бац минус цаб” (??) можно доказать тождество:

$$\nabla \times [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{B} (\nabla \mathbf{A}) + \mathbf{A} (\nabla \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B}. \quad (14)$$

Таким образом, если понятно, на что действует оператор набла, то с ним можно обращаться как с обычным вектором. Вычислим ещё ротор от векторного произведения постоянного вектора \mathbf{a} на радиус-вектор \mathbf{r} :

$$\nabla \times [\mathbf{a} \times \mathbf{r}] = \mathbf{a} (\nabla \mathbf{r}) - (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{r} = 3 \mathbf{a} - \mathbf{a} = 2 \mathbf{a}.$$

В первом равенстве применено тождество “бац минус цаб”, затем учтены соотношения $\nabla \mathbf{r} = 3$ и $(\mathbf{a} \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{a}$, которые были получены выше.

▷ Иногда удобно умножить векторное выражение на произвольный вектор. После проведения преобразований он опускается. Вычислим, к примеру $[\mathbf{a} \times \nabla] (\mathbf{rb})$, где \mathbf{a} и \mathbf{b} постоянные векторы. Умножив слева на постоянный вектор \mathbf{c} , получаем:

$$\mathbf{c} [\mathbf{a} \times \nabla] (\mathbf{rb}) = [\mathbf{c} \times \mathbf{a}] \nabla(\mathbf{rb}) = [\mathbf{c} \times \mathbf{a}] \mathbf{b} = \mathbf{c} [\mathbf{a} \times \mathbf{b}].$$

В первом равенстве применено правило выталкивания, во втором – вычислена дивергенция. В конце, после применения правила выталкивания справа-налево, получено третье равенство. Теперь, в силу произвольности вектора \mathbf{c} , его можно опустить, что даёт следующее тождество:

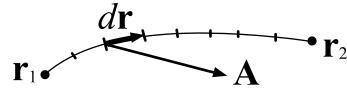
$$[\mathbf{a} \times \nabla] (\mathbf{rb}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

В качестве упражнения, так предлагается доказать следующее тождество: $(\mathbf{a} \nabla) [\mathbf{r} \times \mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

II Интегральные теоремы

▷ Интеграл вдоль контура от векторного поля определяется следующим образом. Контур разбивается на маленькие отрезки, касательные к которым обозначаются как $d\mathbf{r}$. Далее берётся скалярное произведение векторного поля \mathbf{A} в данной точке и малого сдвига вдоль контура $d\mathbf{r}$. Все эти произведения суммируются:

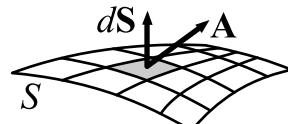
$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \sum_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) d\mathbf{r}$$



Контур интегрирования можно задать, например, в параметрическом виде: $\mathbf{r}(t)$. Если начальная и конечная точка контура совпадают: $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, то он замкнут. В этом случае значок интеграла пересекается кружочком.

▷ Похожим образом определяется интеграл по поверхности. Для этого поверхность разбивается на небольшие участки, в каждом из которых вводится вектор $d\mathbf{S}$, равный по модулю площади участка и направленный перпендикулярно участку. Затем вычисляется скалярное произведение векторного поля на элемент площади в каждой точке, и эти произведения суммируются.

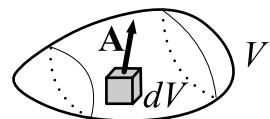
$$\int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{S} = \sum_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) d\mathbf{S}.$$



Поверхность, по которой производится интегрирование, может быть замкнутой или открытой. Например, поверхность сферы замкнута (у неё нет границ). Любая конечная область на плоскости открыта, так как имеет границы. Интегрирование по замкнутой поверхности обозначается кружком вокруг интеграла.

▷ Наконец, интегрирование по объёму dV проводится разбиением области интегрирования на множество элементарных объёмов и суммированием значения подынтегральной функции в каждом таком объёме.

$$\int_V \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV = \sum_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) dV.$$

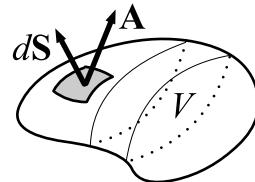


В декартовых координатах объём dV равен $dx dy dz$.

Смысл операций дивергенции и ротора лучше всего демонстрируют две важные интегральные теоремы. Сначала мы их сформулируем, а затем приведём неформальные доказательства.

▷ Пусть замкнутая поверхность S окружает объём V и в пространстве задано векторное поле \mathbf{A} . Тогда справедлива *теорема Гаусса*:

$$\oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV.$$

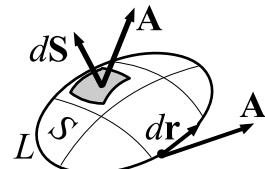


При интегрировании по замкнутой поверхности (кружок вокруг интеграла) используется следующее соглашение. Вектор элементарной площадки поверхности $d\mathbf{S}$ направлен *перпендикулярно* поверхности и *наружу* из объёма. Сумма скалярных произведений элементов поверхности $d\mathbf{S}$ и векторного поля в каждой точке поверхности называется *потоком*. Он стоит в левой части теоремы Гаусса.

Пусть объём интегрирования, окружающий некоторую точку мал. Тогда можно считать, что дивергенция $\nabla \cdot \mathbf{A}$ примерно постоянна. В силу теоремы Гаусса, она будет равна отношению потока векторного поля через поверхность, окружающую эту точку, делённую на объём внутри поверхности.

▷ *Теорема Стокса* связывает поверхностный и контурный интегралы:

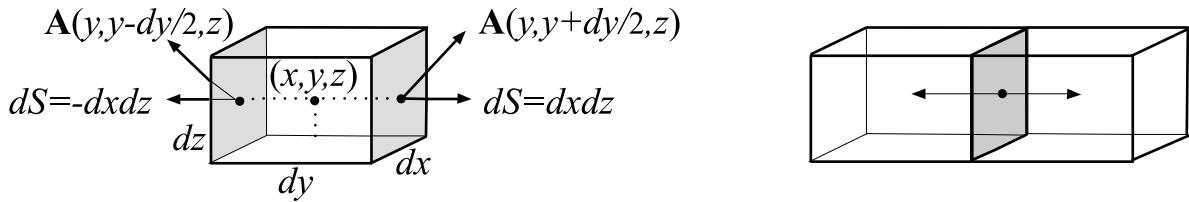
$$\int_S [\nabla \times \mathbf{A}] d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} dr.$$



Поверхность S является незамкнутой. Её граница – это контур L , интегрирование по которому проводится в правой части теоремы. Подобный контурный интеграл называется *циркуляцией* векторного поля. Поверхность S в теореме Стокса может быть как плоской, так и выгнутой. Направление вектора $d\mathbf{S}$ показано на рисунке. Если ввинчивать штопор так, что его ручка повторяет направление интегрирования по контуру, то винт будет указывать в направлении внешней стороны поверхности. Обратим внимание, что какова бы ни была степень выгнутости поверхности, поверхностный интеграл определяется только циркуляцией поля по границе поверхности.

Если площадь $d\mathbf{S}$ мала, то ротор $\nabla \times \mathbf{A}$ в её пределах постоянен. Поэтому скалярное произведение ротора на $d\mathbf{S}$ равно циркуляции векторного поля *вокруг* этой точки.

- Для доказательства теоремы Гаусса вычислим сначала поток через поверхность маленького параллелепипеда с рёбрами dx, dy, dz . Будем считать, что точка (x, y, z) находится в центре параллелепипеда (левый рисунок):



Поток через боковые грани, перпендикулярные оси y , равен:

$$A_y\left(x, y + \frac{dy}{2}, z\right) dx dz - A_y\left(x, y - \frac{dy}{2}, z\right) dx dz \approx \frac{\partial A_y}{\partial y} dy dx dz.$$

Произведение $dxdz$ – это площадь боковой грани. Компонента A_y появляется из скалярного произведения $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$, так как вектор $d\mathbf{S}$ перпендикулярен к поверхности и направлен из объёма. На правой грани он имеет компоненты $d\mathbf{S} = \{0, dx dz, 0\}$, а на левой грани $d\mathbf{S} = \{0, -dx dz, 0\}$. Кроме этого, каждая функция $A_y(x, y \pm dy/2, z) \approx A_y \pm (\partial A_y / \partial y) dy/2$ разложена в ряд Тейлора по $dy/2$.

Аналогично вычисляется поток через оставшиеся две пары граней. В результате:

$$\int_S \mathbf{A} d\mathbf{S} \approx \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz = (\nabla \mathbf{A}) dV.$$

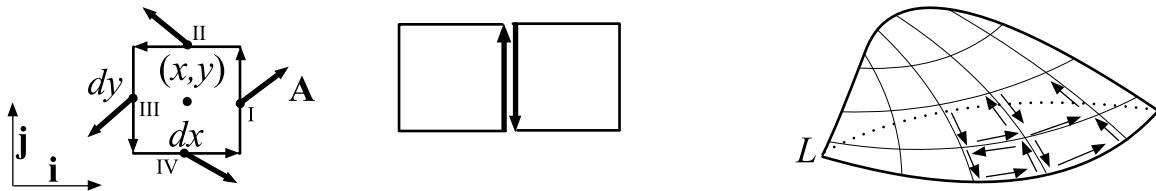
Произвольный объём можно разбить на множество подобных блоков. Так как вектор $d\mathbf{S}$ направлен наружу из объёма, то потоки на прилегающих гранях двух соседних блоков имеют разный знак, и их сумма равна нулю (правый рисунок выше). Поэтому не компенсируются только потоки на внешних гранях, прилегающих к поверхности объёма. В результате поток через поверхность объёма равен сумме дивергенций в каждом элементарном объёме.

При выводе теоремы Гаусса предполагается дифференцируемость векторного поля во всех точках объёма. В физически интересных задачах обычно существуют *источники* или *стоки* поля. Это такие точки, из которых векторы “выходят” в разные стороны (исток) или “входят” в точку (сток). Примером служит напряжённость электрического поля точечного заряда. В таких точках производная может не существовать, и при вычислении дивергенции необходима процедура регуляризации (см., например, стр. 12).

• Идея доказательства теоремы Стокса аналогична теореме Гаусса. Введём в некоторой точке поверхности систему координат, так что ось z будет перпендикулярна поверхности. Тогда циркуляция $\mathbf{A} d\mathbf{r}$ по маленькому контуру, ограничивающему элемент поверхности, равна:

$$\underbrace{A_y(x + \frac{dx}{2}, y) dy - A_x(x, y + \frac{dy}{2}) dx}_{I} - \underbrace{A_y(x - \frac{dx}{2}, y) dy + A_x(x, y - \frac{dy}{2}) dx}_{II} - \underbrace{A_y(x + \frac{dx}{2}, y) dy - A_x(x, y + \frac{dy}{2}) dx}_{III} + \underbrace{A_y(x - \frac{dx}{2}, y) dy + A_x(x, y - \frac{dy}{2}) dx}_{IV},$$

где опущен аргумент z у проекций векторной функции на контур. Скалярное произведение $\mathbf{A} d\mathbf{r}$ вычисляется в середине отрезков контура, и знаки минус соответствуют движению против осей (первый рисунок):



Раскладывая функции в ряд Тейлора по $dx/2, dy/2$, получаем:

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{r} \approx \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy = [\nabla \times \mathbf{A}]_z dx dy.$$

Произведение $dx dy$ равно площади прямоугольного контура, а выражение в круглых скобках – z -компоненте ротора $[\nabla \times \mathbf{A}]_z$. По принятому соглашению, вектор элементарной площади направлен перпендикулярно к ней (в нашем случае, вдоль оси z в сторону Читателя), поэтому $d\mathbf{S} = (0, 0, dx dy)$. Естественно, поверхность в пространстве ориентирована произвольным образом. Однако запись при помощи векторов не зависит от выбора системы координат и это соотношение будет справедливо и в общем случае. Следовательно, значение контурного интеграла можно записать в векторном виде:

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{r} = [\nabla \times \mathbf{A}] d\mathbf{S}.$$

Большую поверхность можно разбить на множество таких прямоугольников. Если обходы по контуру в каждом из них проводятся в одном направлении, то контурные интегралы на прилегающих гранях будут сокращаться (выше второй рисунок), и ненулевым окажется только интеграл по контуру, ограничивающему поверхность. В результате доказывается теорема Стокса.

III Комплексные числа

В окружающем нас мире нельзя увидеть отрицательного числа. Минус одно яблоко является абстракцией, придуманной человеком. Уравнение $x + 2 = 3$ имеет решение $x = 1$, однако, уже для $x + 3 = 2$ в натуральных числах решения нет. Если же к натуральным добавить ноль и *отрицательные числа* ($-1, -2, -3\dots$), то такие уравнения будут иметь решения, правда, в “ненастоящих”, выдуманных отрицательных числах.

Точно так же не все квадратные уравнения имеют решения. Поэтому было придумано число i , являющееся решением уравнения $x^2 = -1$. Оно получило название *мнимой единицы*:

$$i^2 = -1. \quad (15)$$

Термин “мнимая” не должен вводить в заблуждение и i не более “мима”, чем число -1 . Любое комплексное число z записывается при помощи двух действительных чисел и мнимой единицы:

$$z = x + iy. \quad (16)$$

При этом x называют *действительной*, а y - *мнимой* частью комплексного числа z . Фактически комплексное число это упорядоченная пара двух вещественных чисел $z = (x, y)$. Для такой пары определены операции сложения, умножения и деления с такими же свойствами как и у действительных чисел. Введение символа i позволяет легко осуществлять различные операции между комплексными числами, пользуясь обычными правилами алгебры. Например, для $z_1 = 1 + 2i$ и $z_2 = 3 + 4i$, имеем:

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (3 + 4i) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4i + 2 \cdot 3i + 2 \cdot 4i^2 = -5 + 10i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{3 + 4i} = \frac{(1 + 2i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{11 + 2i}{3^2 - (4i)^2} = \frac{11 + 2i}{9 + 16} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i.$$

При вычислении частного двух комплексных чисел, числитель и знаменатель домножены на число, равное z_2 , но с минусом при мнимой части. Такое число называют *комплексным сопряжением* числа z и обозначают звёздочкой:

$$z^* = x - iy. \quad (17)$$

Произведение числа z на его комплексное сопряжение z^* всегда даёт положительное действительное число:

$$|z|^2 = z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2, \quad (18)$$

корень которого $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называют *модулем комплексного числа*.

▷ В 1748 Леонард Эйлер получил замечательную формулу:

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi, \quad (19)$$

которая заменяет собой всю тригонометрию, позволяя легко вывести любое соотношение с \sin и \cos . Например, при возведении формулы Эйлера в n -ю степень следует *формула Муавра*:

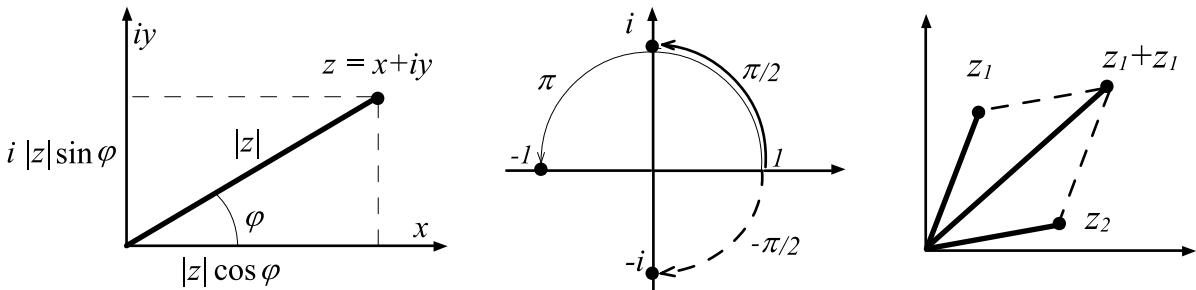
$$\cos(n\phi) + i \sin(n\phi) = (\cos \phi + i \sin \phi)^n, \quad (20)$$

дающая тригонометрические функции кратных углов. Доказать (19) можно, например, раскладывая левую и правую часть в ряд Тейлора.

▷ Произвольное комплексное число:

$$z = x + iy = |z| e^{i\phi} = |z| (\cos \phi + i \sin \phi)$$

определяется действительной x и мнимой y частями или модулем $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и аргументом (углом) $\phi = \arctg(y/x)$. Рассмотрим декартовую плоскость. По оси x отложим действительную часть, а по оси y - комплексную вместе с мнимой единицей. Тогда любое комплексное число представляет собой точку на этой плоскости, а действительная и мнимая части являются проекциями на координатные оси:



Мнимая единица имеет единичный модуль и аргумент, равный $\pi/2$, а аргумент “−1” равен π . Сложение двух комплексных чисел геометрически эквивалентно сложению векторов (выше третий рисунок).

▷ Аргумент комплексного числа определён с точностью до целого числа полных оборотов. Это означает, что $|z| e^{i\phi}$ и $|z| e^{i(\phi+2\pi k)}$ – одно и тоже число ($k = 1, 2, \dots$). Поэтому при извлечении корня n -той степени:

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n} \exp \left\{ i \frac{\phi + 2\pi k}{n} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (21)$$

при $k = 0, 1, \dots, n-1$ получаются различные комплексные числа. Любое алгебраическое уравнение n -й степени всегда имеет n решений, часть из которых может оказаться комплексными. Этот нетривиальный факт явился результатом введения объекта i , являющегося решением только одного квадратного уравнения (15).

IV Функция Дирака

Введём следующую разрывную функцию, являющуюся непрерывным аналогом символа Кронекера:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x \neq 0. \end{cases} \quad (22)$$

Доопределим бесконечность так, чтобы интеграл по произвольному интервалу $[a, b]$, включающему точку $x = 0$, был равен единице:

$$\int_a^b \delta(x) dx = 1. \quad (23)$$

Конкретное значение границ a и b не играет роли, так как дельта-функция равна нулю при $x \neq 0$ и вне этой точки, равна нулю подынтегральная функция. При интегрировании с гладкой функцией справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{при } x_0 \in [a, b] \\ 0 & \text{при } x_0 \notin [a, b] \end{cases}. \quad (24)$$

(в окрестности $x = x_0$, где подынтегральная функция отлична от нуля, можно положить $f(x) = f(x_0)$ и вынести эту константу за интеграл). Отметим также очевидное свойство симметричности: $\delta(-x) = \delta(x)$.

▷ Существует множество гладких функций зависящих от некоторого параметра, которые имеют своим пределом δ -функцию при стремлении этого параметра к нулю. Например, функция Гаусса:

$$\frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2a^2}\right] \rightarrow \delta(x), \quad \text{при } a \rightarrow 0.$$

При $x = 0$ она имеет значение $1/a\sqrt{2\pi}$. Поэтому при малых a функция Гаусса превращается в очень высокий и узкий "колокол", стремясь при $a \rightarrow 0$ к функции Дирака. Интеграл от функции Гаусса равен единице.

Аналогичными свойствами обладает функция Коши:

$$\frac{a/\pi}{x^2 + a^2} \rightarrow \delta(x), \quad \text{при } a \rightarrow 0.$$

Гладкие представления δ -функции позволяют регуляризовывать, возникающие при вычислениях бесконечности.

▷ Определим разрывную θ -функцию Хевисайда (функция ступеньки):

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (25)$$

Производная от неё равна δ -функции:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \theta'(x) = \delta(x). \quad (26)$$

Действительно, вычислим по частям интеграл от произвольной функции по интервалу $[a, b]$, содержащему точку $x = 0$:

$$\int_a^b f(x)\theta'(x)dx = f(x)\theta(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\theta(x)dx = f(b) - \int_0^b f'(x)dx = f(0).$$

▷ Трёхмерная функция Дирака определяется аналогично одномерной. Если её аргумент равен нулю, то она равна бесконечности, иначе нулю. При этом интеграл по произвольному объёму, окружающему точку сингулярности, равен единице. В декартовых координатах 3-мерную функцию Дирака можно записать через произведение одномерных:

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z), \quad \int \delta^{(3)}(\mathbf{r}) dV = 1. \quad (27)$$

В сферических координатах r, θ, ϕ , с сингулярностью при $r = 0$, необходимо учесть, что $dV = 4\pi r^2 dr$. Поэтому 3-мерная функция Дирака выражается через одномерную:

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r}) = \frac{\delta(r)}{2\pi r^2}, \quad \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi s_\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \delta^{(3)}(\mathbf{r}) = 2 \int_0^R \delta(r) = 1.$$

В данном случае интегрирование идёт внутри сферы радиуса R по r от точки сингулярности, а не окружает её. Так как функция Дирака симметричная, такой интеграл равен $1/2$.

▷ Сингулярность может соответствовать не точке, а линии. В этом случае определяется “линейная” функция Дирака, интеграл от которой равен длине линии сингулярности, попадающей в объём интегрирования. Например, в цилиндрических координатах r, ϕ, z такой сингулярностью обладает плотность заряда бесконечно тонкой заряженной линии при $r = 0$.

$$\delta^{(L)}(\mathbf{r}) = \frac{\delta(r)}{\pi r}, \quad \int_0^R r dr \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\phi \delta^{(L)}(\mathbf{r}) = L,$$

где снова использована симметричность 1-мерной функции Дирака.

V Фурье преобразования

- Несложно проверить, что для целых чисел n и m справедлива следующая формула:

$$\int_a^b \exp \left[i \frac{2\pi(n-m)}{b-a} t \right] dt = (b-a) \delta_{nm}, \quad (28)$$

где δ_{nm} – символ Кронекера (стр. ??), а $a < b$.

Рассмотрим периодическую функцию с периодом T : $f(t+T) = f(t)$, где $T = b - a$. Представим её на отрезке $t = [a...b]$ в виде следующего ряда:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i 2\pi k t / T} = c_0 + c_1 e^{i 2\pi t / T} + c_{-1} e^{-i 2\pi t / T} + \dots \quad (29)$$

Чтобы $f(t)$ была действительной: $f^*(t) = f(t)$, коэффициенты c_k должны удовлетворять условиям: $c_k^* = c_{-k}$.

При помощи (28), для произвольной функции $f(t)$, можно найти коэффициенты c_k и тем самым определить *Фурье - разложение*:

$$\int_a^b f(t) e^{-i 2\pi n t / T} \frac{dt}{T} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_a^b e^{i 2\pi(m-n)t / T} \frac{dt}{T} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \delta_{mn} = c_n.$$

Если записать $c_k = (a_k - ib_k)/2$, то для действительной функции её разложение представимо в виде бесконечной суммы синусов и косинусов:

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)], \quad (30)$$

где частоты $\omega_k = 2\pi k / T$ называют *гармониками*.

Раскладывать в ряд Фурье можно и непериодические функции. Однако, такое разложение имеет смысл только внутри интервала $[a...b]$, так как оно *автоматически* обладает свойством периодичности. При этом на границах интервала могут возникать определённые артефакты в виде скачков значений функции (эффект Гиббса).

- Возьмём симметричные пределы разложения $[a, b] = [-T/2, T/2]$ и введём новые коэффициенты $\phi_k = T \cdot c_k$. Обозначив $t_k = 2\pi k/T$, запишем ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_k e^{\imath t_k x} \frac{1}{T}, \quad \phi_k = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-\imath t_k x} dx. \quad (31)$$

Устремим T к бесконечности. Величины t_k можно рассматривать как новую переменную, изменение которой равно $\Delta t = t_k - t_{k-1} = 2\pi/T$. По определению интеграла, выражение для $f(x)$ можно записать в виде:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{\imath tx} dt, \quad \phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\imath tx} dx, \quad (32)$$

где $\phi(t)$ становится непрерывной функцией параметра $t = t_k$. Преобразования (32) называются *интегральным фурье-преобразованием*.

▷ Подстановка одного уравнения (32) в другое должно приводить к тождественному результату. Подставим в интегральное представление $\phi(t)$ функцию $f(x)$ записав её как интеграл по s от $\phi(s)$:

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s) e^{\imath sx} ds \right] e^{-\imath tx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath x(s-t)} dx \right] \phi(s) ds.$$

Обозначим выражение в квадратных скобках во втором равенстве в виде следующей функции:

$$\delta(s-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath x(s-t)} dx. \quad (33)$$

Тогда тождественное преобразование принимает форму:

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s) \delta(s-t) ds. \quad (34)$$

Функция (33) со свойством (34) называется *δ -функцией Дирака* (стр. 314). Соответственно, (33) является её представлением в виде интеграла Фурье.

VI Экстремум и множители Лагранжа

- *Экстремум* (минимум или максимум) функции многих переменных $F(x_1, \dots, x_n)$ находится так же, как и в одномерном случае. Для этого необходимо взять частные производные по каждой переменной и приравнять их к нулю. Решение получившейся системы n уравнений и будет соответствовать экстремуму функции.

Чтобы понять, как ведёт себя функция в точке экстремума $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$, можно записать ряд Тейлора в её окрестности:

$$F(x_1, \dots, x_n) = F(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) + \dots$$

Первые производные F равны нулю (условие экстремума), поэтому разложение представляет собой квадратичную форму. Знаки собственных значений матрицы a_{ij} определяют характер экстремума. Так как a_{ij} является симметричной матрицей, то с помощью линейного преобразования её всегда можно сделать диагональной (стр. ??) и проанализировать по каждой координате, минимум это или максимум.

Например, если $F(x, y) = x^2 + y^2$, то это *минимум*, $F(x, y) = -x^2 - y^2$ – *максимум*, а $F(x, y) = x^2 - y^2$ – это поверхность, похожая на *седло* (вдоль оси x функция возрастает, а вдоль y – уменьшается).

- Иногда возникают задачи, в которых необходимо найти максимум или минимум при наличии ограничений. Например, нас интересует точка (x_1, \dots, x_n) , максимизирующая функцию $F(x_1, \dots, x_n)$ и одновременно находящаяся на поверхности $G(x_1, \dots, x_n) = 0$. Условия ограничений называют *связями*.

Рассмотрим сначала случай двух переменных $F(x, y)$ при ограничении $G(x, y) = 0$. Предположим, что уравнение связи $G(x, y) = 0$ позволяет выразить y через x : $y = g(x)$. Тогда мы получим обычную одномерную задачу оптимизации, для решения которой необходимо взять производную функции $F(x, g(x))$ по x и приравнять её к нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} g'(x) = 0. \quad (35)$$

Решив это уравнение, мы получим точку экстремума $\{x_0, y_0 = g(x_0)\}$.

- На практике не всегда удаётся решить уравнение $G(x, y) = 0$. В этом случае можно взять дифференциал его левой и правой части и выразить производную $g(x)$:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy = 0 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial G / \partial x}{\partial G / \partial y}.$$

Подставляя её в (35), получаем уравнение только для функций F и G :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x}. \quad (36)$$

Это же уравнение можно получить, минимизируя следующую функцию *трех* переменных:

$$L(x, y, \lambda) = F(x, y) + \lambda G(x, y). \quad (37)$$

Действительно, взяв производные по x и y и приравняв их к нулю, получим уравнения:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y} = 0.$$

Исключая из них λ , мы приходим к уравнению (36). Если же взять производную L по λ и приравнять её к нулю, то получится связь $G(x, y) = 0$.

Таким образом, в случае двух переменных имеется *три способа* поиска экстремума при наличии ограничения. Если одна переменная выражается через другую при помощи уравнения связи, то решается уравнение (35). Иначе – (36) или оптимизируется *функция Лагранжа* (37).

- В многомерном случае оказывается более удобным третий способ. Если нам необходимо найти экстремум функции $F(x_1, \dots, x_n)$ при наличии m -ограничений $G_k(x_1, \dots, x_n) = 0$, то вычисляется экстремум функции Лагранжа от $n + m$ переменных:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = F(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k G_k(x_1, \dots, x_n).$$

Производные по λ_i приводят к связям $G_k(x_1, \dots, x_n) = 0$, а производные по x_i можно записать в виде векторных уравнений при помощи градиента $\nabla = \{\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n\}$:

$$\nabla F + \sum_{k=1}^m \lambda_k \nabla G_k = 0.$$

Порядок действий обычно следующий. Сначала решают эти n уравнений и находят положение экстремума, как функцию $\lambda_k: x_i = f_i(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $i = 1, \dots, n$. Затем подставляют их в уравнения связи и получают m уравнений, из которых определяются λ_k .

Литература

- [1] Степанов С.С. – “*Векторы, тензоры и формы. Инструкция к использованию*” (2010)
- [2] Girard R.P. – “*Quaternions, Clifford Algebras and Relativistic Physics*” (2007)

История теории относительности

- [3] Галилео Галилей – ”*Диалог о двух главнейших системах мира - птоломеевой и коперниковой*”, перевод Долгова А.И., Москва, (1948)
- [4] Исаак Ньютон – ”*Математические Начала Натуральной Философии*”, перевод Крылова А.Н., М., ”Наука”, (1989)
- [5] Гинзбург В.Л. – ”*Как и кто создал специальную теорию относительности*”, Эйнштейновский сборник - 1974, М., ”Наука”, (1976)
- [6] Тяпкин А.А. – ”*Об истории формирования идей специальной теории относительности*”, в сборнике ”*Принцип относительности*”, ”Атомиздат” (1973)
- [7] ”*Принцип относительности*”, Сб. работ по специальной теории относительности, М., ”Атомиздат” (1973)
- [8] Эйнштейн А. – ”*Собрание научных трудов в четырёх томах*”, М., ”Наука”, (1965)
- [9] Пуанкаре А. – ”*О науке*”, М.: Наука (1990)

Учебники

- [10] Логунов А.А. – ”*Лекции по теории относительности и гравитации: Современный анализ проблемы*” М.: ”Наука”, 1987.
- [11] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. – ”*Теоретическая физика: Теория поля*”, Т.II, М.: ”Физматлит”, 2003.
- [12] Петров А.З. – ”*Новые методы в общей теории относительности*”, М.: ”Наука”, 1966.

- [13] Вейнберг С. — “*Гравитация и космология*”, М.: Мир (1975)
- [14] Мёллер К. – “*Теория относительности*” М.: ”Атомиздат”, 1975.
- [15] Паули В. – “*Теория Относительности*” М.: Наука, 1991.
- [16] Терлецкий Я. П. – “*Парадоксы теории относительности*”, М.: Наука (1965)
- [17] Угаров В.А. – “*Специальная теория относительности*” М.: ”Наука”, (1977)
- [18] Фок В.А. – “*Теория Пространства, Времени и Тяготения*” М.: Гос.изд.тех.-теор.лит., (1955)
- [19] Иваненко Д., Соколов А. – “*Классическая теория поля (новые проблемы)*” (1951)
- [20] Рубаков В.А. – “*Классические калибровочные теории: Бозонные теории*” (2010), Изд.3, М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ” – 296 с.
- [21] Войтик В. В. “*O преобразовании Лоренца-Мёллера-Нэлсона в жёсткую неинерциальную систему отсчёта*” (2012), arXiv:1203.0754v2.
- [22] Born M. – *Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips*, Annalen der Physik 335 (11), 1-56 (1909)
- [23] Маханьков В.Г. – “*Солитоны и численный эксперимент*” (1983), ЭЧАЯ, т.14, в.1 – с.123.
- [24] Perring J.K., Skyrme T.H.R. “*A Model Unified Field Equation*”, Nucl. Phys. 31, 550-555 (1962).
- [25] Джексон Д. — ”*Классическая электродинамика* ”, М.: Мир, с.702, (1965)
- [26] Тамм И. Е. — ”*Основы электричества*”, М.: Наука, 10-е издание, с.504, (1989)
- [27] Bargmann V., Michel L. Telegdi V. L. – “*Precession of the Polarization of Particles Moving in a Homogeneous Electromagnetic Field*”, Phys.Rev.Lett. **2**, 435-436 (1959)
- [28] Филд Дж., Пикассо Э., Комбли Ф. — “*Проверка фундаментальных физических теорий в опытах со свободными заряженными лептонами*”, УФН **127**, 4, с.553-598 (1979).

Групповой вывод преобразований Лоренца

- [29] W. A. von Ignatowsky – "Einige allgemeine Bemerkungen zum Relativitätsprinzip" Berichte der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, p. 788 ff. (1910), Archiv der Mathematik und Physik, 17. p. 1 ff. (1910). Перевод: <http://synset.com>
- [30] W. A. von Ignatowsky – "Einige allgemeine Bemerkungen über das Relativitätsprinzip", Physikalische Zeitschrift (Phys.Z.) 11, (1910), S. 972-976,
- [31] P. Frank and H. Rothe – "Über die Transformation der Raumzeitkoordinaten von ruhenden auf bewegte Systeme", Ann. Phys. 34, 825-853 (1911). Перевод: <http://synset.com>

Теория относительности без 2-го постулата Эйнштейна

- [32] Berzi V. Gorini V. – "Reciprocity Principle and the Lorentz Transformations" J.Math.Phys., Vol. 10, No. 8, (1969) p. 1518 – 1524.
- [33] Lee A.R. Kalotas T.M. – "Lorentz transformations from the first postulate" Am.J.Phys., Vol. 43, No. 5, (1975) p. 434 – 437.
- [34] Srivastava A.M.– "Invariant speed in special relativity" Am.J.Phys., Vol. 49, No. 5, (1981) p. 504 – 505.
- [35] Мермин Н.Д. – "Теория относительности без постулата о постоянстве скорости света" Физика за рубежем. Серия Б. (1986) Mermin N.D. - "Relativity without light" Am.J.Phys., Vol. 52, No. 2 (1984) p. 119-124.
- [36] Schwartz H.M. – "Deduction of the general Lorentz transformations from a set of necessary assumptions" Am.J.Phys., Vol. 52, No. 4, (1984) p. 346 – 350.
- [37] Achin Sen – "How Galileo could have derived the special theory of relativity" Am.J.Phys., Vol. 62, No. 2 (1994) p. 157-162.
- [38] Sartori L. – "Elementary derivation of the relativistic velocity addition law" Am.J.Phys., Vol. 63, No. 1 (1995) p. 81-82.
- [39] Nishikawa S. – "Lorentz transformation without the direct use of Einstein's postulates" Nuovo Cimento, Vol. 112B, No. 8 (1997) p. 1175-1187.
- [40] Ungar A. – "Axiomatic approach to the nonassociative group of relativistic velocities" Foundations of Physics Letters, Vol. 2, No. 2 (1989) p. 199-203.

Неизотропность, выделенные системы

- [41] Mansouri R., Sexl R.U. – “*A Test Theory of Special Relativity: I. Simultaneity and Clock Synchronization*” General Relativity and Gravitation, Vol. 8, No.7 (1977) p. 497-513
- [42] Selleri F. – “*Noninvariant One-Way Velocity of Light*” Foundations of Physics, Vol. 26, No.5 (1996) p. 641-664
- [43] Selleri F. – “*Noninvariant One-Way Velocity of Light and Locally Equivalent Reference Frame*” Foundations of Physics Letters, Vol. 10, No.1 (1997) p. 73-83

Независимость массы от скорости

- [44] Окунь Л.Б. – ”Понятие массы (Масса, энергия, относительность)”, Успехи физических наук, т.158, в.3, с.511-530, (1989)

Бусты, вращения, прецессия Томаса

- [45] Thomas L.H. ”*Motion of the spinning electron*”, Nature, **117**, 514 (1926)
- [46] Stapp H.P. – “*Relativistic Theory of Polarization Phenomena*”, Phys. Rev. **103**, 2, pp.425-434, (1956)
- [47] Wigner E.P. – Rev.Mod.Phys., **29**, p.255, (1957)
- [48] Малыкин Г.Б. – “*Прецессия Томаса: корректные и некорректные решения*” УФН, **176**, 8, с.865-882. (2006)
- [49] Ритус В.И. – “*O различии подходов Вигнера и Мёллера к описанию прецессии Томаса*”, УФН, **177**, 1, с.105-112. (2007)
- [50] Степанов С.С. – “*Прецессия Томаса. Как это выглядит на самом деле.*”

Кватернионы и спиноры

- [51] Kruglov S.I. – “Maxwell’s theory on non-commutative spaces and quaternions”, Annales de la Fondation Louis de Broglie, V.27, N.2 (2002)

Электромагнитная масса электрона

- [52] Фейнман,.. – “*Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика*”
- [53] Cushing J.T. – “*Electromagnetic mass, relativity, and the Kaufmann experiments*” Am.J.Phys., **49** 12, pp.1133-1149, 1981
- [54] Schwinger J. – “*Electromagnetic mass revisited*”, Found.Phys. **13**, 3, pp.373-383, 1982.

Теория гравитации

- [55] Богородский А.Ф. – “Всемирное тяготение” К.: ”Наукова думка”, (1971).
- [56] Дирак П.А.М. – “Общая теория относительности” М.: ”Атомиздат”, (1978).
- [57] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. – “Гравитация” М.: ”Мир” (1977)
Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. ”Gravitation”, (1973)

Эксперименты

- [58] Bailey J. et al. – ”Measurements of relativistic time dilatation for positive and negative muons in circular orbit”, Nature, v.268, p.301-305 (1977)
- [59] Webb J.K., Flambaum V.V., Churchill C.W., Drinkwater M.J. Barrow J.D – ”A Search for Time Variation of the Fine Structure Constant” astro-ph/9803165 (1998)
- [60] Ivanchik A.V., Potekhin A.Y., Varshalovich D.A. – ”The fine-structure constant: a new observational limit on its cosmological variation and some theoretical consequences” astro-ph/9810166 (1998)
- [61] Wright E.L. – ”Astronomy 275 Lecture Notes”, Spring (1999),
<http://www.astro.ucla.edu/~wright/cosmolog.htm>
- [62] Riess A.G. et al. – ”Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant”, astro-ph/9805201 (1998),

Космология

- [63] Фарли –

Проективная теория относительности

- [64] Manida S.N. – ”Fock-Lorentz transformation and time-varying speed of light.” arXiv:: gr-qc/9905046 (1999)
- [65] Stepanov S.S. – ”Fundamental physical constants and the principle of parametric incompleteness” arXiv: physics/9909009, (1999)
- [66] Stepanov S.S. – ”A time-space varying speed of light and the Hubble Law in static Universe”, Phys. Rev. D 62 (2000) 023507, arXiv: astro-ph/9909311 (1999).

Переменная скорость света

- [67] Moffat J.W. – “*Superluminary Universe: A Possible Solution to the Initial Value Problem in Cosmology*” Int.J.Mod.Phys., Vol. 2D, No.3 (1993) p. 351-365, gr-qc/9211020 (1992)
- [68] Albrecht A., Magueijo J. – “A time varying speed of light as a solution to cosmological puzzles” Phys.Rev., Vol. 59D, **1999**. p. 43516, astro-ph/9811018 (1998)
- [69] Barrow J.D., Magueijo J. – “*Varying - α Theories and Solutions to the Cosmological Problems*” astro-ph/9811072 (1998)
- [70] Barrow J.D., Magueijo J. – “*Solving the Flatness and Quasi-flatness Problems in Brans-Dicke Cosmologies with a Varying Light Speed*” astro-ph/9901049 (1999)
- [71] Barrow J.D., O'Toole C. – “*Spatial Variations of Fundamental Constants*” astro-ph/9904116 (1999)
- [72] Albrecht A. – “*Cosmology with a time-varyng speed of light*” astro-ph/9904185 (1999)

Разное

- [73] ”Время и современная физика”, сб. статей, М.: ”Мир” (1977)
- [74] Смородинский Я.А., Сурков Е.Л. – “Геометрия Лобачевского и теория относительности” М.: Знание (1971)
- [75] Фаддеев Л.Д. – “*Математический взгляд на эволюцию физики*” Природа. (1989) N 5. С.11.
- [76] Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В. – “*Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику*” М.: Архимед (1992)
- [77] Клейн Ф. – “*Нееевклидова геометрия*” М.: **1936 Klein F.** ”Vorlesungen über nicht-euklidische geometrie”
- [78] Гильберт Д., Бернайс П. – ”*Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики*” М.: Наука **1982.**

Предметный указатель

- θ -функция Хевисайда, 249
аргумент комплексного числа, 247
число
 отрицательное, 246
экстремум, 252
формула
 Эйлера, 247
 Муавра, 247
функционал, 104
функция
 Дирака, 251
 Лагранжа, 105, 253
функция ступеньки, 249
гармоника, 250
источник, 234
ковариантность, 94
максимум, 252
минимум, 252
мнимая часть, 246
модуль комплексного числа, 246
оператор
 Лапласа, 14
отрицательное число, 246
потенциал, 14
ряд
 Фурье, 250
седло, 252
собственные значения, 252
сток, 234
связь, 252
уравнение
 Пуассона, 14
уравнения
 Лагранжа, 105
вещественная часть, 246