Глава 2

Исчисление высказываний

В дальнейшем мы сосредоточимся на предметных теориях и аксиомах. Общелогические формулы и правила вывода будут использоваться во всей их полноте. Тем не менее, в этой главе рассматривается тот минимальный набор аксиом, из которого можно получить все остальные общезначимые формулы. Их вывод в терминах языков и исчислений будет максимально формален и отделён от смысловой нагрузки – интерпретации выводимых формул как тавтологий бинарной логики.

Исчисление высказываний позволяет определять различные способы аксиоматизации и достаточно эффективно изучать зависимости формул друг от друга в смысле их выводимости.

Логика, физика и искусственный разум

Сергей С. Степанов

Эта книга находится в процессе создания. Её последняя версия и другие материалы находятся на сайте: http://synset.com. Замеченные ошибки и вопросы просьба присылать по адресу: steps137, затем собачка и gmail.com.

2.1 Вывод в исчислении

В конце предыдущей главы было введено понятие *языка* с алфавитом Σ и *исчисления* в котором из аксиом, по заданным правилам вывода получаются одни слова из других.

Пусть алфавит состоит из следующих символов: $\Sigma = \{\neg, \to, (\ ,\ )\ , X\}$. Правильно построенная формула (слово языка) определяется индуктивным образом (стр. 43). При этом, для краткости, (X) обозначается как A, (XX) – как B и т.д. Такие слова являются *элементарными формулами*. В содержательной интерпретации им соответствуют конкретные неделимые высказывания. Связки $\neg$ и $\to$ будем считать первичными и через них *определять* дизъюнкцию, конъюнкцию и эквивалентность:

$$A \vee B:\ \bar{A} \to B, \quad A \,\&\, B:\ \neg(A \to \bar{B}), \quad A \equiv B:\ (A \to B) \,\&\, (B \to A),$$

где для символа $\neg A$ также используется черта сверху: $\bar{A}$.

Какими бы ни были формулы P, Q, R, следующие две формулы возьмём в качестве *аксиом исчисления*:

$$(\mathbf{F_1}): \qquad P \to (Q \to P),$$

$$(\mathbf{F_2}): \qquad \big(P \to (Q \to R)\big) \to \big((P \to Q) \to (P \to R)\big).$$

Единственным базовым *правилом вывода* будет *modus ponens* (стр. 19):

$$(\mathbf{MP}): \quad P, \quad P \to Q \quad \vdash \quad Q.$$

Оно позволяет из формул P и $P \to Q$ вывести третью формулу Q.

Вывод в исчислении – это последовательность формул, каждая из которых либо аксиома, либо получена из предыдущих формул по правилу modus ponens (**MP**).

Так как на месте символов P, Q, R могут стоять любые формулы, аксиомы ($\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$) на самом деле являются бесконечным множеством формул. Их ещё называют *схемами аксиом.* Буква **F** в нумерации связана с именем Фридриха Фреге (Frege), который записал их в 1879 г. Для описания свойств отрицания потребуются дополнительные аксиомы (стр. 58).

Деятельность по выводу новых формул является синтаксической и отделена от интерпретации (=семантики), т.е. от содержательного смысла слов языка. Тем не менее, мы часто будем обращаться к семантике бинарной логики, так как в дальнейшем покажем, что все формулы, выводимые в исчислении, оказываются тавтологиями и наоборот – любая тавтология выводима в исчислении (теорема о полноте).

• При применении правила (**MP**) необходимо взять уже выведенную формулу вида $P_1 \to Q$. Если в предыдущих формулах вывода есть формула P_1, то мы сразу получаем формулу Q. Однако, такое происходит редко. Чаще в выводе есть формула P_2, которую можно сделать совпадающей с P_1 при помощи замен. Рассмотрим подробнее эту процедуру.

Унификацией двух формул называются подстановки, после которых формулы совпадают. Пусть есть две формулы:

$$\underline{P_1} \to (Q_1 \to P_1), \qquad\qquad \underline{Q_2} \to \big((P_2 \to P_2) \to Q_2\big).$$

Буквы $P_i, Q_i, ...$ будем называть *переменными*. Начнём сравнивать формулы слева-направо. Чтобы они совпали, необходимо P_1 и Q_2 (подчёркнуты) сделать одинаковыми. Положим их равными букве P, которая отсутствует в формулах. Такие подстановки ("что/куда") будем обозначать следующим образом: $\{P/P_1,\ P/Q_2\}$. Их результат имеет вид:

$$P \to (\underline{Q_1} \to P), \qquad\qquad P \to \big((\underline{P_2 \to P_2}) \to P\big).$$

Теперь ищем следующее рассогласование (подчёркнутые части формул). Для его устранения, положим $\{\,(Q \to Q)/Q_1,\ Q/P_2\,\}$, что приводит в обоих случаях к одной и той же формуле $P \to \big((Q \to Q) \to P\big)$.

Естественно не все формулы унифицируемы. Например нельзя унифицировать:

$$\underline{P_1} \to (Q_1 \to P_1), \qquad\qquad (\underline{P_2 \to Q_2}) \to P_2.$$

Первое рассогласование приводит к $\{\,(P \to Q)/P_1,\ P/P_2,\ Q/Q_2\,\}$. Делая эту подстановку, получаем:

$$(P \to Q) \to \big(\underline{Q_1 \to (P \to Q)}\big), \qquad\qquad (P \to Q) \to \underline{P}.$$

Следующее рассогласование формул должно было бы привести к подстановке $\{\,(Q_1 \to (P \to Q))\,/\,P\,\}$. Однако, её нельзя сделать так как подставляемое выражение зависит от переменной P в которую его необходимо поставить.

Подчеркнём, что подстановка в формулу не является дополнительным к (**MP**) правилом вывода. Так как символы P, Q, R в схемах аксиом могут быть произвольными формулами, аксиомы можно сразу записать с подходящей для применения (**MP**) подстановкой. Мы так часто и будем делать, что может показаться проявлением изобретательности. Однако на самом деле, изобретательностью является выбор необходимой пары формул для применения правила (**MP**). Соответствующая замена затем однозначно находится при помощи унификации.

• Выведем из аксиом ($\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$) формулу (теорему), отражающую *принцип идентичности* высказывания:

$$(\,\mathbf{I}\,) \qquad \vdash\; P \to P.$$

$$\triangleleft\; \underbrace{P \to \underline{(Q \to P)}}_{1:\ \mathbf{F_1}},\quad \underbrace{\big(\underline{P \to (Q \to P)}\big) \to \big((P \to Q) \to (P \to P)\big)}_{2:\ \mathbf{F_2}\,\{\,P/R\,\}},$$

$$\underbrace{(\underline{P \to Q}) \to (P \to P)}_{3:\ \mathbf{MP}(1,2)},\quad \underbrace{\qquad P \to P \qquad}_{4:\ \mathbf{MP}(1,3)\,\{\,(Q\to P)/Q_3\,\}}. \quad \square$$

Поясним, что произошло выше. Первые две формулы вывода – это аксиомы ($\mathbf{F_1}$) и ($\mathbf{F_2}$). Номер формулы вывода ставится под ней, а после двоеточия поясняться, как эта формула была получена. Для упрощения дальнейшей унификации в аксиоме ($\mathbf{F_2}$) вместо R сразу подставлено P. Такая замена возникает в результате унификации подчёркнутых частей формул 1 и 2. Теперь можно по правилу ($\mathbf{MP}$) вывести 3-ю формулу. В подписи $\mathbf{MP}(i,j)$ всегда i – это номер формулы P_i, а j – номер формулы $P_j = P_i \to Q$, из которых выведена формула Q, стоящая над квадратной скобкой. Четвёртая формула также получена по ($\mathbf{MP}$) с аксиомой ($\mathbf{F_1}$) (1-я формула) и подчёркнутой частью формулы 3, где вместо Q подставлено $Q \to P$. Чтобы подчеркнуть, что Q находится в 3-й формуле, в подстановке она помечается индексом: Q_3.

В дальнейшем такого подробного разбора вывода делаться не будет, т.к. поясняющих подписей под формулами, обычно, вполне достаточно.

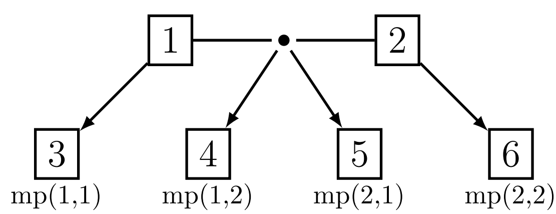
▷ Отметим один технический момент. Когда в списке {...} присутствует несколько подстановок: $\{\,F/P,\ H/Q\,\}$, то подразумевается их одновременное выполнение. Это означает, что при обходе дерева формулы (стр. 16), каждый финальный лист P заменяется на F, а финальный лист Q на H. Например, подстановки вида $\{Q/P,\ P/Q\}$, сделанные в аксиоме $P \to (Q \to P)$ превращают её в формулу: $Q \to (P \to Q)$. □

Доказанная теорема исчисления высказываний справедлива для любой формулы P. Поставим вместо неё $\bar{P}$. Учитывая *определение* дизъюнкции, теорему $\bar{P} \to \bar{P}$ можно также записать в виде $P \vee \bar{P}$, что в содержательной интерпретации является законом исключения третьего. Подчеркнём, что при работе с исчислением необходимо до поры, до времени забыть булеву алгебру. В частности из $P \vee \bar{P}$ пока не следует $\bar{P} \vee P$, т.к. коммутативность дизъюнкции ещё не установлена. Если в аксиомы ($\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}$) не подставлять формулы с отрицанием, то из них выводятся *импликативные формулы*, содержащие только связку $\to$.

• Вывод по (**MP**) при помощи унификации, является механическим и сравнительно легко реализуется на компьютере. В корне дерева формул ($\mathbf{F_1}$) и ($\mathbf{F_2}$) присутствует импликация, поэтому каждая из них может выступать как $P \to Q$ в правиле (**MP**). В частности, только из ($\mathbf{F_1}$) можно вывести новую формулу:

$$\lhd\ \underbrace{\underline{P \to (Q \to P)}}_{1:\ \mathbf{F_1}},\qquad \underbrace{\underline{P_2} \to (Q_2 \to P_2)}_{2:\ \mathbf{F_1}},\qquad \underbrace{Q_2 \to \bigl(P \to \bigl(Q \to P\bigr)\bigr)}_{3:\ \mathbf{MP}(1{,}2)\,\{\,(P\to(Q\to P))/P_2\,\}}\ . \qquad \Box$$

При этом из аксиомы ($\mathbf{F_1}$), имеющей две переменные P, Q, выводится формула с тремя переменными Q_2, P, Q. Аналогично можно (**MP**) применить к ($\mathbf{F_2}, \mathbf{F_2}$). В результате из двух аксиом на первом шаге можно вывести 4 формулы, используя пары ($\mathbf{F_1}, \mathbf{F_1}$), ($\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}$), ($\mathbf{F_2}, \mathbf{F_1}$) и ($\mathbf{F_2}, \mathbf{F_2}$). Это можно изобразить на диаграмме зависимостей (см. также стр. 39):



На следующем этапе вывод по (**MP**) попарно применяется между формулами $(1-6)$ и $(3-6)$, что приводит к 24 формулам. Впрочем, 7 из них повторяются и на втором этапе вывода мы имеем 17 различных формул. После третьего этапа формул уже 67, после четвёртого 803, а после пятого – 62536.

Количество выводимых формул в таком алгоритме стремительно растёт и требуются определённые эвристики для сдерживания комбинаторного взрыва. Простейший способ – игнорирование слишком длинных формул, например, по числу импликаций. При таком ограничении есть риск потерять формулу, лежащую на пути к выводимой теореме. Однако, предельную длину формул можно постепенно увеличивать. Отбрасываются также частные случаи. Например, формула $(P \to P) \to (P \to P)$ не сохраняется в базе, если уже выведена $P \to P$. Возможны и более изощрённые эвристики, анализирующие части формул на предмет “похожести” на целевую формулу.

Большинство приведенных в этой главе выводов не требуют особой изобретательности и могут быть получены достаточно быстро при помощи компьютера.

2.2 Посылки и правила вывода

Теоремы, подобные $P \to P$, в цепочке вывода содержат аксиомы и результаты применения правил вывода. Если хотят подчеркнуть, что формула является теоремой $\vdash P \to P$, то перед ней пишут значок $\vdash$. Хотя слева от $\vdash$ ни чего нет, там подразумевается наличие аксиом. Когда необходимо явным образом указать в каком исчислении выведена формула, то под знаком вывода приводят соответствующее множество аксиом: $\vdash_{\mathcal{F}_\to}\ P \to P$, где $\mathcal{F}_\to = \{\mathbf{F_1},\ \mathbf{F_2}\}$.

В исчислении можно получать не только теоремы, но и новые правила вывода. Вывод формулы P из *посылок* или *гипотез* $\Gamma = \{\Gamma_1, ..., \Gamma_n\}$ записывается как $\Gamma \vdash P$ или $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}_\to} P$.

> *Вывод* на основе гипотез Γ - это последовательность формул, каждая из которых является или аксиомой, или гипотезой, или получена из предыдущих формул при помощи правил вывода.

Гипотезы могут быть произвольными формулами (в бинарной логике не обязательно тавтологиями). Точно также в правиле (**MP**) посылки P, $P \to Q$ из которых выводится Q – это произвольные формулы.

Получим *правило транзитивности* импликации, в котором гипотезами Γ_1, Γ_2 выступают формулы $P \to Q$ и $Q \to R$:

$$(\mathbf{RT}) \qquad\qquad P \to Q, \quad Q \to R \quad \vdash \quad P \to R.$$

$$\lhd\ \underbrace{P \to Q}_{1:\ \Gamma_1},\quad \underbrace{Q \to R}_{2:\ \Gamma_2},\quad \underbrace{(Q \to R) \to \big(P \to (Q \to R)\big)}_{3:\ \mathbf{F_1}\{(Q\to R)/P,\ P/Q\}},\quad \underbrace{P \to (Q \to R)}_{4:\ \mathbf{MP}(2,3)},$$

$$\underbrace{\big(P \to (Q \to R)\big) \to \big((P \to Q) \to (P \to R)\big)}_{5:\ \mathbf{F_2}},\quad \underbrace{(P \to Q) \to (P \to R)}_{6:\ \mathbf{MP}(4,5)}.$$

$$\underbrace{P \to R}_{7:\ \mathbf{MP}(1,6)}.\square$$

Первые две формулы вывода – это гипотезы. Так как они не являются схемами аксиом, входящие в них буквы P, Q, R фиксированы и в них нельзя подставлять формулы (они не могут меняться в процессе вывода). На третьем шаге аксиома ($\mathbf{F_1}$) записана с подстановками (приведенными под формулой), которые на четвёртом шаге позволяют к ней и посылке $Q \to R$ применить правило вывода (**MP**). Если теперь в цепочке вывода отбросить все формулы кроме первых двух (гипотезы) и последней (следствие), то получится правило (**RT**).

Содержательный смысл транзитивности очевиден: если из P следует Q, а из Q следует R, то из P следует R. По сути, это вывод по *резолюции* (стр. 20). Впрочем, в исчислении (**RT**) является лишь правилом получения формулы $P \to R$ из двух других. Так как это правило выводится из аксиом ($\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$), его можно использовать наравне с правилом (**MP**), в любом исчислении, где есть эти аксиомы. Такие правила будем называть *производными правилами вывода*.

Благодаря правилу (**MP**), каждая аксиома автоматически порождает производное правило вывода. Например, из ($\mathbf{F_2}$) по (**MP**) сразу следует правило “перемножения” импликаций:

$$(\mathbf{RF_2}) \qquad P \to (Q \to R) \quad \vdash \quad (P \to Q) \to (P \to R).$$

Выведем с его помощью правило *перестановки посылок*:

$$(\mathbf{RC}) \qquad P \to (Q \to R) \quad \vdash \quad Q \to (P \to R).$$

$$\lhd\ \underbrace{P \to (Q \to R)}_{1:\ \Gamma},\ \underbrace{(P \to Q) \to (P \to R)}_{2:\ \mathbf{RF_2}(1)},\ \underbrace{Q \to (P \to Q)}_{3:\ \mathbf{F_1}\,\{Q/P,\,P/Q\}},\ \underbrace{Q \to (P \to R)}_{4:\ \mathbf{RT}(3,2)}.$$

На последнем шаге применено производное правило транзитивности (**RT**). Вместо него, за счёт удлинения вывода, всегда можно записать только формулы, получаемые при помощи (**MP**). $\square$

Подчеркнём ещё раз, что в гипотезы в выводе нельзя подставлять произвольные формулы, т.е. переменные гипотез в цепочке формул вывода должны быть неизменными. Впрочем, когда производное правило вывода доказано, в нём вместо $P, Q, R, \ldots$ можно использовать любые формулы. Точно также в правиле (**MP**) P и Q – это любые формулы.

Правила вывода тесно связаны с теоремами. Например, в исчислении выводима следующая формула (стр. 57):

$$(\mathbf{T}) \qquad \vdash \qquad (P \to Q) \to \big((Q \to R) \to (P \to R)\big).$$

Из неё, при помощи двойного применения правила modus ponens, получается правило транзитивности:

$$\lhd\ \underbrace{P \to Q}_{1:\ \Gamma_1},\ \underbrace{Q \to R}_{2:\ \Gamma_2},\ \underbrace{(P \to Q) \to \big((Q \to R) \to (P \to R)\big)}_{3:\ \mathbf{T}},$$
$$\underbrace{(Q \to R) \to (P \to R)}_{4:\ \mathbf{MP}(1,3)},\ \underbrace{P \to R}_{5:\ \mathbf{MP}(2,4)}.$$

Однако можно поступить наоборот и из (**TD**) вывести формулу (**T**). Точнее, доказать, что такой вывод *существует*. Для этого потребуется теорема дедукции.

2.3 Теорема дедукции

Пусть $\Gamma = \{\Gamma_1, ..., \Gamma_n\}$ – множество произвольных посылок (гипотез). И пусть из них выводится некоторая формула Q. Тогда из Γ можно вывести $P \to Q$, где P – любая формула:

> Если $\Gamma \vdash Q$, то $\Gamma \vdash P \to Q$.

$\lhd \underbrace{\Gamma}_{1:\ \Gamma}, \quad \underbrace{Q}_{2:\ \Gamma\vdash Q}, \quad \underbrace{Q \to (P \to Q)}_{3:\ \mathbf{F_1}\{Q/P,\ P/Q\}}, \quad \underbrace{P \to Q}_{4:\ \mathbf{MP}(2,3)}. \ \square$

Когда посылок нет, Q – это некоторая теорема или аксиома: $\vdash Q$. К ней, при помощи импликации, можно присоединить слева любую формулу P. Тогда $P \to Q$ также будет теоремой исчисления. У этого результата есть аналог для следования в бинарной логике. Тавтология $\Rightarrow Q$ при любой интерпретации (присвоении, входящим в формулу Q, элементарным высказываниям $\mathbb{0}$ или $\mathbb{1}$) всегда равна $\mathbb{1}$. По таблице импликации (стр. 18), $P \to \mathbb{1}$ истинно, при любом P, т.е. $P \to Q$ – тавтология.

Можно доказать более сильное утверждение: если формула P содержится в посылках, то её от туда можно *исключить*. Это и есть содержание *теоремы дедукции*. Будем считать, что $P \notin \Gamma$, тогда:

> (**TD**) Если $\Gamma, P \vdash Q$, то $\Gamma \vdash P \to Q$.

$\lhd$ Пусть $Q_1, ..., Q_k$, где $Q_k = Q$ – это вывод Q из Γ и P. По индукции:

(I) $k = 1$: Пусть $\Gamma, P \vdash Q_1$. Первая формула цепочки вывода может быть только: 1) аксиомой; 2) одной из гипотез Γ_i; 3) формулой P. В первых двух случаях по предыдущей теореме $\Gamma \vdash P \to Q_1$, так как формула P в выводе Q_1 не участвует. В третьем случае ($Q_1 = P$), в силу (**I**), стр.52, имеем теорему $\vdash P \to P$, которая для вывода не требует посылок. Однако, для единообразия, можно написать $\Gamma \vdash P \to Q_1$.

(II) Пусть, если $\Gamma, P \vdash Q_i$, то $\Gamma \vdash P \to Q_i$ для любого $i < k$. Докажем, что это так и для $i = k$. Случаи, когда Q_k – аксиома, гипотеза или формула P разобраны выше. Остался вариант, когда Q_k получается по правилу (**MP**) из Q_i и Q_j, где $Q_j = Q_i \to Q_k$ и $i, j < k$:

$$\Gamma, P \quad \vdash \quad ..., \quad Q_i, \quad ..., \quad Q_i \to Q_k, \quad ..., \quad Q_k.$$

Так как $\Gamma \vdash P \to Q_i$ и $\Gamma \vdash P \to (Q_i \to Q_k)$, то, используя правило ($\mathbf{RF_2}$) (аксиома $\mathbf{F_2}$) имеем:

$$\Gamma \vdash P \to (Q_i \to Q_k) \vdash (P \to Q_i) \to (P \to Q_k).$$

Применяя (**MP**) с $P \to Q_i$, получаем $\Gamma \vdash P \to Q_k$. $\square$

Выше был использован *метод индукции*, который фактически является методом математической индукции (стр. 28) по числу k формул вывода. При этом базой индукции (пункт I) служит значение $k = 1$.

Теорема дедукции, не является теоремой исчисления, т.к. она использует в своём доказательстве метод индукции, которого в исчислении нет. Это теорема *об* исчислении, утверждающая, что если вывод $\Gamma, P \vdash Q$ построен, то, в принципе, можно построить и вывод $\Gamma \vdash P \to Q$. Хотя такое утверждение верно, прямое построение вывода формулы $P \to Q$, в ряде случаев, может оказаться очень не простым делом.

Теорема дедукции (**TD**) часто упрощает вывод формул (теорем). Например, докажем аналог правила транзитивности (**RT**), стр. 54:

$$(\mathbf{T}) \qquad \vdash \ (P \to Q) \to \big((Q \to R) \to (P \to R)\big).$$

$$\lhd \ \underbrace{P \to Q}_{1:\ \Gamma_1}, \quad \underbrace{Q \to R}_{2:\ \Gamma_2}, \quad \underbrace{P}_{3:\ \Gamma_3}, \quad \underbrace{Q}_{4:\ \mathbf{MP}(3,1)}, \quad \underbrace{R}_{5:\ \mathbf{MP}(4,2)}.$$

Таким образом:

$$P \to Q, \quad Q \to R, \quad P \quad \vdash \quad R.$$

Исключая P из посылок, по (**TD**), получаем правило (**RT**):

$$P \to Q, \quad Q \to R \quad \vdash \quad P \to R.$$

Затем, по этой же теореме, “переносим” вправо $Q \to R$:

$$P \to Q \ \vdash \ (Q \to R) \to (P \to R).$$

Финальный перенос $P \to Q$ доказывает выводимость(**T**). Стоит попробовать ($\lessdot$H$_{57}$) вывести формулу (**T**) не применяя (**TD**). □

Теорема дедукции позволяет любое правило вывода записать в форме теоремы. Например, для (**MP**): $P, \ P \to Q \ \vdash \ Q$, перенося последовательно посылки, получаем теорему:

$$(\mathbf{T_1}) \qquad \vdash \ P \to \big((P \to Q) \to Q\big).$$

Аналогично, из правила перестановки посылок (**RC**), стр. 55, по теореме дедукции следует выводимость формулы:

$$(\mathbf{C}) \qquad \vdash \ \big(P \to (Q \to R)\big) \to \big(Q \to (P \to R)\big).$$

Её прямой вывод без (**TD**) сравнительно длинный ($\lessdot$H$_{58}$), поэтому Фреге в 1879 г. включил эту формулу на ряду с ($\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$) в свою систему аксиом (теорема дедукции была доказана лишь в 1930 г.).

2.4 Полная система аксиом

Запишем теперь полную систему аксиом, при помощи которых в исчислении можно вывести все тавтологии логики высказываний. Как и раньше, буквами P, Q, R обозначаются произвольные формулы. Первый набор аксиом будем называть системой $\mathcal{F}$, в честь Фреге (1897 г.):

$(\mathbf{F_1})$	$P \to (Q \to P)$,	$\mathcal{F}$
$(\mathbf{F_2})$	$\big(P \to (Q \to R)\big) \to \big((P \to Q) \to (P \to R)\big)$,	
$(\mathbf{F_3})$	$(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$,	
$(\mathbf{F_4})$	$\neg\neg P \to P$,	
$(\mathbf{F_5})$	$P \to \neg\neg P$.	

Ян Лукашевич показал, что, хотя последние три аксиомы $(\mathbf{F_3} - \mathbf{F_5})$ и независимы, их можно объединить в одну ("перевёрнутую" $\mathbf{F_3}$):

$(\mathbf{F_1})$	$P \to (Q \to P)$,	$\mathcal{L}$
$(\mathbf{F_2})$	$\big(P \to (Q \to R)\big) \to \big((P \to Q) \to (P \to R)\big)$,	
$(\mathbf{L})$	$(\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P)$.	

Аксиомы $\{\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \mathbf{L}\}$ будут называться системой $\mathcal{L}$. Она принята в базе математических формул Metamath (http://metamath.org). Лукашевич также использовал следующую систему аксиом $\mathcal{L}' = \{\mathbf{T}, \mathbf{L_2}, \mathbf{L_3}\}$:

$(\mathbf{T})$	$(P \to Q) \to \big((Q \to R) \to (P \to R)\big)$,	$\mathcal{L}'$
$(\mathbf{L_2})$	$P \to (\neg P \to Q)$,	
$(\mathbf{L_3})$	$(\neg P \to P) \to P$.	

Единственным базовым правилом вывода во всех трёх системах аксиом будет правило modus ponens:

$$(\mathbf{MP}) \qquad P, \quad P \to Q \quad \vdash \quad Q.$$

В $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ присутствуют формулы $(\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2})$, а в системе $\mathcal{L}'$ их можно вывести. Поэтому справедлива теорема дедукции (стр. 56):

$$(\mathbf{TD}) \qquad \text{Если} \quad \Gamma, P \ \vdash \ Q, \quad \text{то} \quad \Gamma \ \vdash \ P \to Q,$$

утверждающая, что существует вывод формулы $P \to Q$ из гипотез $\Gamma = \{\Gamma, ..., \Gamma_n\}$, если есть вывод Q из Γ и P.

Справедливы также производные правила вывода:

$$
\begin{array}{lll}
(\mathbf{RF_1}) & Q & \vdash \quad P \to Q, \\
(\mathbf{RF_2}) & P \to (Q \to R) & \vdash \quad (P \to Q) \to (P \to R), \\
(\mathbf{RT}) & P \to Q, \quad Q \to R & \vdash \quad P \to R, \\
(\mathbf{RC}) & P \to (Q \to R) & \vdash \quad Q \to (P \to R), \\
(\mathbf{RA}) & P \to Q, \quad \neg P \to Q & \vdash \quad Q,
\end{array}
$$

Правила ($\mathbf{RF_1}$, $\mathbf{RF_2}$) следуют из аксиом ($\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$), а ($\mathbf{RT}$, $\mathbf{RC}$) были выведены ранее. Правило ($\mathbf{RA}$) будет доказано на стр. 61.

Соберём для справки некоторые теоремы, выводимые во всех системах аксиом. В правой колонке приведен код теоремы в базе Metamath. Первую формулу ($\mathbf{I}$) мы уже вывели, а для следующих трёх ($\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{C}$) доказали существование вывода при помощи теоремы дедукции:

$$
\begin{array}{lll}
(\mathbf{I}) & P \to P, & \text{id} \\
(\mathbf{T_1}) & P \to \big((P \to Q) \to Q\big), & \text{pm2.27} \\
(\mathbf{T}) & (P \to Q) \to \big((Q \to R) \to (P \to R)\big), & \\
(\mathbf{C}) & \big(P \to (Q \to R)\big) \to \big(Q \to (P \to R)\big), & \\
(\mathbf{T_2}) & \big((P \to Q) \to (P \to R)\big) \to \big(P \to (Q \to R)\big), & \text{pm2.86} \\
(\mathbf{P}) & \big((P \to Q) \to P\big) \to P, &
\end{array}
$$

Последние две формулы будут доказаны позднее. Некоторые теоремы с отрицанием продублируем в терминах дизъюнкции и конъюнкции:

$$
\begin{array}{llll}
(\mathbf{N_1}) & \bar{\bar{P}} \to (Q \to P), & & \\
(\mathbf{N_2}) & P \to \big(\bar{Q} \to \neg(P \to Q)\big), & & \\
(\mathbf{N_3}) & (\bar{P} \to Q) \to (\bar{Q} \to P), & P \vee Q \to Q \vee P, & \text{con1} \\
(\mathbf{N_4}) & \neg(P \to \bar{Q}) \to P, & P \,\&\, Q \to P, & \\
(\mathbf{N_5}) & P \to \big(Q \to \neg(P \to \bar{Q})\big), & P \to (Q \to P \,\&\, Q), & \text{pm3.2im} \\
(\mathbf{N_6}) & \neg(P \to \bar{Q}) \to \neg(Q \to \bar{P}), & P \,\&\, Q \to Q \,\&\, P & \text{pm3.2im}
\end{array}
$$

Формулы исчисления часто легко запомнить, записав их при помощи связок $\vee$ и $\&$. Так, ($\mathbf{L_2}$) означает, что из P следует $P \vee Q$.

Можно также пользоваться правилом ($\mathbf{MP}$), “разбивая” формулу на более простые. Так, та же ($\mathbf{L_2}$) связана с выводом: $P, \ \bar{P} \vdash Q$, что означает утверждение: “из противоречия (P и её отрицание) можно вывести что угодно (любую формулу Q)”.

• Продемонстрируем взаимосвязь схем аксиом $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$. Для этого сначала получим в системе Фреге $\mathcal{F}$ аксиому Лукашевича: $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{L}$. Примем гипотезу $\bar{P} \to \bar{Q}$ и построим следующий вывод:

$$\triangleleft\ \underbrace{\bar{P} \to \bar{Q}}_{1:\ \Gamma},\ \underbrace{(\bar{P} \to \bar{Q}) \to (\bar{\bar{Q}} \to \bar{\bar{P}})}_{2:\ \mathbf{F_3}\{\bar{P}/P,\ \bar{Q}/Q\}},\ \underbrace{\bar{\bar{Q}} \to \bar{\bar{P}}}_{3:\ \mathbf{MP}(1,2)},\ \underbrace{Q \to \bar{\bar{Q}}}_{4:\ \mathbf{F_5}\{P/Q\}},\ \underbrace{Q \to \bar{\bar{P}}}_{5:\ \mathbf{RT}(4,3)},\ \underbrace{Q \to P}_{6:\ \mathbf{RT}(5,\mathbf{F_4})}.$$

Таким образом $\bar{P} \to \bar{Q} \vdash Q \to P$, откуда по $(\mathbf{TD})$ выводима $(\mathbf{L})$. $\square$

В обратную сторону: $\vdash_{\mathcal{L}} \mathbf{F_3}$, $\vdash_{\mathcal{L}} \mathbf{F_4}$ и $\vdash_{\mathcal{L}} \mathbf{F_5}$ чуть сложнее. Сначала в схеме аксиом $\mathcal{L}$ выведем формулу:

$$(\mathbf{N_1}) \qquad \vdash_{\mathcal{L}} \qquad \bar{\bar{P}} \to (Q \to P).$$

$$\triangleleft\ \underbrace{\bar{\bar{P}} \to (\bar{\bar{Q}} \to \bar{\bar{P}})}_{1:\ \mathbf{F_1}\{\bar{\bar{P}}/P,\ \bar{\bar{Q}}/Q\}},\ \underbrace{(\bar{\bar{Q}} \to \bar{\bar{P}}) \to (\bar{P} \to \bar{Q})}_{2:\ \mathbf{L}\{\bar{Q}/P,\ \bar{P}/Q\}},\ \underbrace{\bar{\bar{P}} \to (\bar{P} \to \bar{Q})}_{3:\ \mathbf{RT}(1,2)},\ \underbrace{\bar{\bar{P}} \to (Q \to P)}_{6:\ \mathbf{RT}(3,\mathbf{L})}.$$

Теперь уже легко доказать выводимость $(\mathbf{F_4})$: $\bar{\bar{P}} \to P$ и $(\mathbf{F_5})$: $\bar{\bar{P}} \to P$:

$$\triangleleft\ \underbrace{\bar{\bar{P}}}_{1:\ \Gamma},\ \underbrace{\bar{\bar{P}} \to (\bar{\bar{P}} \to P)}_{2:\ \mathbf{N_1}\{\bar{\bar{P}}/P\}},\ \underbrace{\bar{\bar{P}} \to P}_{3:\ \mathbf{MP}(1,2)},\ \underbrace{P}_{4:\ \mathbf{MP}(1,3)}.\quad \text{Затем по } (\mathbf{TD}).\ \square$$

$$\triangleleft\ \underbrace{\bar{\bar{\bar{P}}} \to \bar{P}}_{1:\ \mathbf{F_4}\{\bar{P}/P\}},\ \underbrace{(\bar{\bar{\bar{P}}} \to \bar{P}) \to (P \to \bar{\bar{P}})}_{2:\ \mathbf{L}\{\bar{\bar{P}}/P,\ P/Q\}},\ \underbrace{P \to \bar{\bar{P}}}_{3:\ \mathbf{MP}(1,2)}.\quad \square$$

Обоснование формулы $\vdash_{\mathcal{L}} \mathbf{F_3}$ в системе аксиом $\mathcal{L}$ имеет следующий вид:

$$\triangleleft\ \underbrace{P \to Q}_{1:\ \Gamma},\ \underbrace{\bar{\bar{P}} \to Q}_{2:\ \mathbf{RT}(\mathbf{F_4},1)},\ \underbrace{\bar{\bar{P}} \to \bar{\bar{Q}}}_{3:\ \mathbf{RT}(2,\mathbf{F_5})},\ \underbrace{(\bar{\bar{P}} \to \bar{\bar{Q}}) \to (\bar{Q} \to \bar{P})}_{4:\ \mathbf{L}\{\bar{P}/P,\ \bar{Q}/Q\}},\ \underbrace{\bar{Q} \to \bar{P}}_{5:\ \mathbf{MP}(3,4)}.$$

Следовательно $P \to Q \vdash \bar{Q} \to \bar{P}$, откуда, по $(\mathbf{TD})$, получаем $(\mathbf{F_3})$. $\square$

Таким образом, системы аксиом Фреге $\mathcal{F} = \{\mathbf{F_1} - \mathbf{F_5}\}$ и Лукашевича $\mathcal{L} = \{\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \mathbf{L}\}$ полностью эквивалентны. Из $\mathcal{F}$ можно вывести формулу $(\mathbf{L})$, а из $\mathcal{L}$ – формулы $(\mathbf{F_3} - \mathbf{F_5})$.

Это довольно любопытное свойство формальных теорий, в которых некоторые аксиомы могут быть “расщеплены” на несколько других или, наоборот, объединены в одну. При этом множество выводимых формул не меняется. Существуют многочисленные взаимосвязи между формулами. Различные, пересекающиеся или нет множества формул могут выводится друг из друга. Вообще-то стоит удивляться тому, что бесконечное множество слов языка, имеют содержательный смысл, можно вывести из конечного числа схем аксиом.

• Выведем ещё аксиомы системы $\mathcal{L}'$, используя исчисление $\mathcal{L}$. Формула транзитивности (**T**) уже была получена ранее. Аксиома ($\mathbf{L_2}$) выводится легко:

> $(\mathbf{L_2}) \qquad \vdash_{\mathcal{L}} \qquad P \to (\bar P \to Q).$

$$\lhd\ \underbrace{\bar P \to (\bar Q \to \bar P)}_{1:\ \mathbf{F_1}\{\bar P/P,\ \bar Q/Q\}},\ \underbrace{\bar P \to (P \to Q)}_{2:\ \mathbf{RT}(1,\mathbf{L})},\ \underbrace{P \to (\bar P \to Q)}_{2:\ \mathbf{RC}(2)}.\ \square$$

Во второй формуле вывода использовано правило транзитивности с (**L**), записанной с подстановками $\{Q/P,\ P/Q\}$.

Чуть сложнее вывод ($\mathbf{L_3}$):

> $(\mathbf{L_3}) \qquad \vdash_{\mathcal{L}} \qquad (\bar P \to P) \to P.$

$$\lhd\ \underbrace{\bar P \to (P \to \bar Q)}_{1:\ \mathbf{L_2}\{\bar Q/Q\},\ \ \mathbf{RC}},\quad \underbrace{(\bar P \to P) \to \big(\bar P \to \bar Q\big)}_{2:\ \mathbf{RF_2}(1)},\quad \underbrace{(\bar P \to P) \to \big(Q \to P\big)}_{3:\ \mathbf{RT}(2,\mathbf{L})},$$

$$\underbrace{\big(\underline{(\bar P \to P) \to Q}\big) \to \big((\bar P \to P) \to P\big)}_{4:\ \mathbf{RF_2}(3)},\ \underbrace{P \to P}_{5:\ \mathbf{I}},\ \underbrace{(\bar P \to P) \to P}_{6:\ \mathbf{MP}(5,4)\{(\bar P \to P)/Q_4\}}.\ \square$$

В первой формуле к аксиоме ($\mathbf{L_2}$) сразу применено правило перестановки посылок (**RC**). В 6-й формуле правило (**MP**) применяется к 4-й формуле в которой положено $\{(\bar P \to P)/Q\}$, в результате чего подчёркнутая часть принимает вид 5-й формулы $P \to P$, где P – это $(\bar P \to P) \to Q$. Естественно, можно было с самого начала вывода вместо Q писать $P \to P$. Однако это бы не добавило бы ясности.

При помощи ($\mathbf{L_3}$) можно доказать, приведенное на стр. 59 правило:

> $(\,\mathbf{RA}\,) \qquad P \to Q, \quad \bar P \to Q \quad \vdash \qquad Q.$

$$\lhd\ \underbrace{P \to Q}_{1:\ \Gamma_1},\ \underbrace{\bar P \to Q}_{2:\ \Gamma_2},\ \underbrace{\bar Q \to \bar P}_{3:\ \mathbf{MP}(1,\mathbf{F_3})},\ \underbrace{\bar Q \to Q}_{4:\ \mathbf{RT}(3,2)},\ \underbrace{(\bar Q \to Q) \to Q}_{5:\ \mathbf{L_3}\{Q/P\}},\ \underbrace{Q}_{6:\ \mathbf{MP}(4,5)}.\ \square$$

Обратную выводимость аксиом $\mathcal{L}$ из системы $\mathcal{L}'$ можно проследить по базе Metamath или на сайте автора synset.com. Соответствующие выводы достаточно длинные. В этом смысле система аксиом $\mathcal{L}$ является наиболее предпочтительной, как по числу входящих в неё аксиом, так и по простоте вывода других формул. На сайте synset.com можно также найти большую коллекцию прямых выводов формул, без ссылки на теорему дедукции, а также множество различных систем аксиом, которые являются вполне взаимозаменяемыми. Все выводы представлены в различных форматах, включая стандартный язык Metamath, что позволяет проверять эти выводы внешними инструментами.

2.5 Непротиворечивость

До сих пор исчисление высказываний, основанное на правиле (**MP**) и схемах аксиом $\mathcal{F}$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$, было формальным выводом слов в языке с алфавитом $\Sigma = \{\neg,\ \rightarrow,\ (\ ,\ )\ ,\ X\}$. Ссылки на бинарную логику служили лишь для наглядности. Теперь же мы введём *семантику* исчисления, наделив элементарные высказывания $A, B, C, ...$, входящее в формулы $P, Q, R, ...$, значением $\mathbb{0}$ или $\mathbb{1}$, а импликацию $\rightarrow$ и отрицание $\neg$ стандартными таблицами истинности.

Покажем, что любая выводимая в исчислении формула, в бинарной логике общезначима (является тавтологией) :

> Если $\vdash P$, то $\Rightarrow P$ (выводимая формула P общезначима).

$\lhd$ При помощи таблиц истинности или методом опровержения (см. $\lessdot$ H$_7$) проверяем, что аксиомы, например, схемы $\mathcal{L}$ являются тавтологиями. Если Q, $Q \rightarrow P$ тавтологии, то P также тавтология ($\mathbb{1} \rightarrow \mathbb{1} \equiv \mathbb{1}$). Теорема P может быть либо аксиомой, либо получаться из других аксиом (или теорем) по правилу (**MP**), следовательно, P – тавтология. $\square$

Верно и более общее утверждение о связи выводимости и логического следствия. Пусть $\Gamma = \{\Gamma_1, ..., \Gamma_n\}$ – набор формул (гипотез). Тогда:

> Если $\Gamma \vdash P$, то $\Gamma \Rightarrow P$.

$\lhd$ Снова воспользуемся индукцией (стр. 57). Пусть $\Gamma \vdash P_1, ..., P_k$ – цепочка вывода формулы $P_k = P$ из гипотез Γ.

(I) $k = 1$: $\Gamma \vdash P_1$. Первая формула вывода может быть аксиомой или гипотезой. Рассмотрим оба этих случая:
1) Если P_1 – аксиома (или теорема), то $\Gamma \Rightarrow P_1$ (когда истинно Γ, истинно и P_1, так она, как аксиома, истинна всегда по предыдущей теореме).
2) Если $P_1 \in \Gamma$, т.е. является одной из гипотез, тогда $\Gamma_1 \& \Gamma_2 \& ... \Rightarrow \Gamma_i$ (всегда, когда истинны все Γ_i, истинна и любая из них).

(II) Пусть теорема справедлива для всех $i < k$. Докажем её для $i = k$. Кроме разобранных выше случаев, возможен вывод P_k по (**MP**) из P_i, P_j, где $P_j = P_i \rightarrow P_k$ и $i, j < k$. Так как $\Gamma \Rightarrow P_i$ и $\Gamma \Rightarrow P_i \rightarrow P_k$, то когда истинны P_i и $P_i \rightarrow P_k$ должно быть истинным и P_k (определение импликации). Поэтому $\Gamma \Rightarrow P_k$. $\square$

В общем случае, если существует модель исчисления (отображение слов на множество $\mathcal{M}$, стр.37) при которой все выводимые формулы отображаются в один элемент $\mathcal{M}$, то говорят, что исчисление *корректно*. Выше таким элементом было значение $\mathbb{1}$.

На связь бинарной логики и исчисления высказываний, в разрезе непротиворечивости, можно посмотреть с другой стороны. Введём два понятия: совместность (в логике) и непротиворечивость (в исчислении).

В логике множество формул $\Gamma = \{\Gamma_1, ..., \Gamma_n\}$ называется *совместным*, если существует интерпретация (конкретные значения элементарных высказываний, входящих в Γ_i), при которой *все* Γ_i истинны. Отсутствие такой интерпретации означает несовместность формул.

◇ Например $\{A,\ A \vee B\}$ совместны (когда $A = \mathbb{1}$). Формулы $\{A,\ \neg A\}$ – несовместны. □

В исчислении высказываний множество формул $\Gamma = \{\Gamma_1, ..., \Gamma_n\}$ называется *непротиворечивым*, если из него нельзя одновременно вывести некоторую формулу P и её отрицание $\neg P$. Если же такие формулы выводимы, то исчисление называют *противоречивым*.

◇ Например множество формул $\{P,\ P \to \neg P\}$ противоречиво, так как из них следует формула P (как одна из посылок) и формула $\neg P$ по правилу modus ponens из P и $P \to \neg P$. Несложно проверить, что в логике это множество формул является несовместным. □

Из противоречивого множества Γ можно вывести любую формулу:

> Если $\quad \Gamma \vdash P \quad$ и $\quad \Gamma \vdash \neg P, \quad$ то $\quad \Gamma \vdash Q.$

◁ Это непосредственно следует из $(\mathbf{L_2})$: $P \to (\bar{P} \to Q)$. Действительно, если из Γ выводимы $\bar{P}$ и P (в любом порядке), то по $(\mathbf{MP})$ из $(\mathbf{L_2})$ получаем Q. □

Противоречивая система аксиом исчисления малоинтересна, т.к. из неё выводятся все слова языка. В дальнейшем мы всегда будем требовать непротиворечивости аксиом любой формальной теории, как общелогических, так и предметных.

Непротиворечивость исчисления можно также выразить при помощи *теоремы о корректности*:

> Если множество формул Γ совместно, то оно непротиворечиво.

◁ От противного (стр. 21). Если формулы Γ противоречивы, то из них выводится некоторая P и её отрицание $\neg P$. Выше мы показали, что если $\Gamma \vdash P$, то $\Gamma \Rightarrow P$. Это значит, что для противоречивого множества Γ мы имели бы $\Gamma \Rightarrow P$ и $\Gamma \Rightarrow \neg P$. Поэтому $\Gamma \;\Rightarrow\; P \,\&\, \neg P \;\Leftrightarrow\; \mathbb{0}$. Однако для совместных формул Γ существует интерпретация в которой они все истинны. Таким образом, мы приходим к противоречию. □

2.6 Полнота

Докажем, что любая тавтология выводима в исчислении высказываний. Этот нетривиальный факт называется *полнотой исчисления*.

Прежде рассмотрим одну, саму по себе, любопытную теорему. Пусть есть некоторая формула F, зависящая от других формул $F(\Gamma_1, \Gamma_2, ...)$. Рассматривая их как элементарные высказывания в бинарной логике, можно построить таблицу истинности формулы F. Будем считать, что Γ'_i равно Γ_i, если $\Gamma_i \equiv \mathbb{1}$ и $\Gamma'_i = \neg\Gamma_i$, если $\Gamma_i \equiv \mathbb{0}$. Аналогично и для всей формулы F. Тогда каждая строчка таблицы истинности приводит к правилу вывода: $\Gamma'_1, \Gamma'_2, ... \vdash F'$.

Рассмотрим в качестве примера формулу $F(P, Q) = \neg(P \to Q)$:

$\neg$	$(P$	$\to$	$Q)$
$\mathbb{0}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{0}$
$\mathbb{0}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{0}$
$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$

P	Q	F
$\mathbb{0}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{0}$
$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{0}$
$\mathbb{1}$	$\mathbb{0}$	$\mathbb{1}$
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{0}$

$$\bar{P},\ \bar{Q} \vdash \neg\neg(P \to Q),$$
$$\bar{P},\ Q \vdash \neg\neg(P \to Q),$$
$$P,\ \bar{Q} \vdash \neg(P \to Q),$$
$$P,\ Q \vdash \neg\neg(P \to Q).$$

Построим, например, вывод правила в первой строке. Посылка $\bar{Q}$ в нём лишняя и в гипотезах достаточно только формулы $\bar{P}$:

$$\lhd\ \underbrace{\bar{P}}_{1:\ \Gamma},\ \underbrace{\bar{P} \to (\bar{Q} \to \bar{P})}_{2:\ \mathbf{F_1}\{\,\bar{P}/P,\ \bar{Q}/Q\,\}},\ \underbrace{\bar{Q} \to \bar{P}}_{3:\ \mathbf{MP}(1,2)},\ \underbrace{(\bar{Q} \to \bar{P}) \to (P \to Q)}_{4:\ \mathbf{L}},\ \underbrace{P \to Q}_{5:\ \mathbf{MP}(3,4)},$$
$$\underbrace{(P \to Q) \to \neg\neg(P \to Q)}_{6:\ \mathbf{F_5}\{\,(P\to Q)/P\,\}},\ \underbrace{\neg\neg(P \to Q)}_{7:\ \mathbf{MP}(5,6)}.\quad \square$$

В правилах второй и четвёртой строк достаточно посылки Q. Из неё и $(\mathbf{F_1})$ выводится $P \to Q$, а затем по $(\mathbf{MP})$ с $(\mathbf{F_5})$ получается формула $\neg\neg(P \to Q)$.

Для вывода в третьей строке необходимо использовать формулу:

$$(\,\mathbf{N_2}\,) \qquad \vdash \qquad P \to \big(\bar{Q} \to \neg(P \to Q)\big).$$

$$\lhd\ \underbrace{P \to \big((P \to Q) \to Q\big)}_{1:\ \mathbf{T_1},\ \text{стр. } 57},\ \underbrace{\big((P \to Q) \to Q\big) \to \big(\bar{Q} \to \neg(P \to Q)\big)}_{2:\ \mathbf{F_3}\{\,(P\to Q)/P\,\},\ \text{затем } \mathbf{RT}(1,2)}.\quad \square$$

Из $(\,\mathbf{N_2}\,)$ дважды по $(\mathbf{MP})$ с гипотезами P и $\bar{Q}$ выводится $\neg(P \to Q)$.

Аналогично стоит поэкспериментировать с другими формулами.

Сформулируем продемонстрированный факт в виде теоремы:

> Пусть штрих у формулы: F' – это сама формула F, если $F \equiv \mathbb{1}$ и её отрицание $\neg F$, если $F \equiv \mathbb{O}$. И пусть F состоит из формул $\{\Gamma_1, ..., \Gamma_n\}$. Тогда в исчислении справедлив вывод $\Gamma'_1, ..., \Gamma'_n \vdash F'$.

$\lhd$ Доказательство ведём по индукции числа k логических связок $\neg$, $\to$, входящих в формулу. Если $k = 0$ – это просто буква F и теорема утверждает, что $F \vdash F$ или $\neg F \vdash \neg F$, что очевидно. Пусть теорема верна для любого $i < k$. Докажем её для $i = k$. Возможно 2 случая:

1. $\boxed{F = \neg G}$ и $\Gamma' \vdash G'$ (в G на одну связку меньше, чем в F).

$\circ$ Если $G \equiv \mathbb{1}$, то $F \equiv \mathbb{O}$ и из $\Gamma' \vdash G$ надо получить $\Gamma' \vdash \neg F$.
По аксиоме $(\mathbf{F_5})$ из $\Gamma' \vdash G$ имеем $\Gamma' \vdash \neg\neg G$ или $\Gamma' \vdash \neg F$ (т.е. F').

$\circ$ Если $G \equiv \mathbb{O}$, то $F \equiv \mathbb{1}$ и из $\Gamma' \vdash \neg G$ следует $\Gamma' \vdash F$, т.к. $F = \neg G$.

2. $\boxed{F = G \to H}$ и $\Gamma' \vdash G', H'$ (в G, H меньше связок чем в F).

$\circ$ Если $G \equiv \mathbb{O}$, то $F \equiv \mathbb{1}$ и из $\Gamma' \vdash \neg G$ надо получить $\Gamma' \vdash F$.
В силу $(\mathbf{L_2})$ и правила $(\mathbf{RC})$ имеем $\neg G \to (G \to H)$, откуда по $(\mathbf{MP})$.

$\circ$ Если $H \equiv \mathbb{1}$, то $F \equiv \mathbb{1}$ и из $\Gamma' \vdash H$ надо получить $\Gamma' \vdash F$.
По аксиоме $(\mathbf{F_1})$: $H \to (G \to H)$ и $(\mathbf{MP})$ с H имеем $\Gamma' \vdash G \to H$, т.е. F.

$\circ$ Если $G \equiv \mathbb{1}$, $H \equiv \mathbb{O}$, то $F \equiv \mathbb{O}$ и из $\Gamma' \vdash G, \neg H$ надо получить $\Gamma' \vdash \neg F$.
Это так по $(\mathbf{MP})$ из теоремы $(\mathbf{N_2})$: $G \to \big(\neg H \to \neg(G \to H)\big)$. $\square$

Теперь можно доказать теорему полноты:

> Если $\Rightarrow F$, то $\vdash F$ (тавтология выводима в исчислении).

$\lhd$ Для тавтологии $(F' = F)$, по доказанной теореме, $\Gamma'_1, ..., \Gamma'_n \vdash F$, где Γ_i – буквы (*высказывания*), входящие в F. Высказывание Γ_n (в отличие от произвольной формулы) принимает два значения: $\mathbb{O}$ и $\mathbb{1}$. Поэтому:

$$\Gamma'_1, ..., \Gamma'_{n-1}, \Gamma_n \quad \vdash \quad F \qquad \text{и} \qquad \Gamma'_1, ..., \Gamma'_{n-1}, \neg\Gamma_n \quad \vdash \quad F.$$

По теореме дедукции $(\mathbf{TD})$, это означает, что:

$$\Gamma'_1, ..., \Gamma'_{n-1} \quad \vdash \quad \Gamma_n \to F, \quad \neg\Gamma_n \to F.$$

По правилу $(\mathbf{RA})$, стр. 61 имеем вывод $\Gamma'_1, ..., \Gamma'_{n-1} \vdash F$. Аналогично исключаются все Γ'_i и получается утверждение о выводимости $\vdash F$. $\square$

Таким образом, “Игра в слова”, основанная на нескольких схемах аксиом и одном правиле вывода, способна породить все тавтологии логики высказываний.

2.7 Независимость аксиом

Докажем независимость друг от друга аксиом в системах $\mathcal{F}$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$. Напомним (стр. 37), что модель исчисления – это отображение слов языка на элементы заданного множества $\mathcal{M}$. При таком отображении все выводимые формулы разбиваются на классы соответствия тому или иному элементу, принадлежащему $\mathcal{M}$. Можно построить такую модель, чтобы правило вывода (**MP**), применённое к формулам данного класса, порождало формулы только из этого же класса.

Рассмотрим эту идею на примере системы $\mathcal{L}$ из трёх схем аксиом $\{\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \mathbf{L}\}$. Пусть множество модели $\mathcal{M} = \{0, 1\}$ состоит из двух элементов. Подчеркнём, что это не ложь и истина, а два произвольных элемента, пронумерованных для удобства натуральными числами. Чтобы отобразить каждое слово языка на $\mathcal{M}$, необходимо определить "значения" элементарных высказываний $A, B, ...$, которые являются словами (X), (XX), ... и задать правила отображения произвольных формул, определив $\neg P$ и $P \to Q$. Для импликации это сделаем также, как и в бинарной логике: $0 \to 0 = 1$, $1 \to 0 = 0$ и т.д. А вот отрицание $\neg P$ определим следующим образом: $\neg 0 = 0$, $\neg 1 = 1$ (т.е. связка $\neg P$ не меняет значения формулы P):

$\to$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\neg$	A
0	0
1	1

(слева по вертикали подписаны значения посылки импликации, а сверху по горизонтали – следствия; на пересечении – её значение). В результате этих определений, каждое слово языка принимает значение 0 или 1.

Выделенными назовём формулы, всегда равные 1. Так как $1 \to 1 = 1$, а $1 \to 0 = 0$, то из P и $P \to Q$, равных 1, по правилу (**MP**) может получиться только выделенная формула Q.

Аксиомы $(\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2})$, не содержащие отрицания, в бинарной логике являются тавтологиями, поэтому в модели $\mathcal{M}$ они будут выделенными. Следовательно, из них по (**MP**) выводятся только выделенные формулы. А вот аксиома $(\mathbf{L}): \ (\bar{P} \to \bar{Q}) \to (Q \to P)$ уже не выделена. Действительно, при $P = 0$, $Q = 1$ имеем:

$$((\bar{0} \to \bar{1}) \to (1 \to 0)) \ = \ ((0 \to 1) \to (1 \to 0)) \ = \ (1 \to 0) \ = \ 0.$$

Таким образом, в этой модели аксиома (**L**) не может быть выведена из формул $(\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2})$. А значит это нельзя сделать в принципе.

Для доказательства независимости ($\mathbf{F_1}$) от ($\mathbf{F_2}$, $\mathbf{L}$) необходима уже модель с трёхэлементным множеством $\mathcal{M} = \{0, 1, 2\}$. Определим отображение для отрицания по формуле $\neg A = 2 - A$. Для импликации построим соответствие, вычисляемое по первой таблице, приведенной ниже:

$\mathbf{F_1}$:

$\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	0	2

$\mathbf{F_2}$:

$\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	1	2	2
2	1	1	2

$\neg$	A
2	0
1	1
0	2

Будем называть *выделенной* формулу, равную 2 при любых значениях входящих в неё высказываний. Правило (**MP**) сохраняет выделенность, так как $2 \to 2 = 2$, а $2 \to 0$ и $2 \to 1$ не равны 2. Последнее важно, так как если бы, например, $2 \to 0 = 2$, то по правилу (**MP**) из выделенных формул $P = 2$ и $P \to Q = 2$ выводилась бы невыделенная формула $Q = 0$. Таким образом, выделенность при (**MP**) сохраняется, если в нижней строке таблицы ($\mathbf{F_1}$) двойка стоит только в последней ячейке.

Покажем, что в этой модели ($\mathbf{F_2}$, $\mathbf{L}$) выделены, а ($\mathbf{F_1}$) – нет. Для ($\mathbf{F_1}$) приведём пример, когда она равна 0:

$$\begin{array}{cccccc} P & \to & (& Q & \to & P &). \\ 1 & 0 & & 2 & 0 & 1 & \end{array}$$

Выделенность остальных аксиом проверяется методом опровержения (см. $\lessdot$ H$_7$). Так, для (**L**) ставим в корень 0. Посылка импликации по таблице $\mathbf{F_1}$ может быть равна 1 или 2. Однако, посылкой является результат импликации, который не может быть равным 1. Поэтому вариант один, помеченный жирным шрифтом под связками формулы:

$$\begin{array}{lcccccccccc} & (& \bar{P} & \to & \bar{Q} &) & \to & (& Q & \to & P &). \\ & & \left[{}^{2}_{\substack{2\\1}}\right. & \mathbf{2}^{?} & \left[{}^{1}_{0}\right. & & \underline{\mathbf{0}} & & \left[{}^{1}_{2}\right. & \mathbf{0} & \left[{}^{0}_{\substack{0\\1}}\right. & \\ \hline \text{шаг:} & & 3 & 1 & 3 & & 1 & & 2 & 1 & 2 & \end{array}$$

На втором шаге (их номера стоят под чертой), записываем возможные варианты для посылки и следствия импликации, равной 0. На третьем шаге дублируем уже известные значения Q и P, беря сразу их отрицания ($\bar{0} = 2$, $\bar{1} = 1$ и т.д.). Первая строка (под $\bar{P}$ и $\bar{Q}$) приводит к противоречию, так как $2 \to 1$ должно равняться 0, а не 2, как было заключено ранее (жирная **2**). Таким образом, нам не удалось подобрать значения высказываний при которых формула равна 0. Так как импликация по таблице $\mathbf{F_1}$ равна или 0 или 2, значит она всегда равна 2, т.е. является выделенной. В качестве упражнения ($\lessdot$ H$_{51}$) предлагается так же проверить выделенность формулы ($\mathbf{F_2}$).

Аналогичным образом строятся модели для доказательства независимости аксиом Фреге $\mathcal{F} = \{\mathbf{F_1} - \mathbf{F_5}\}$. Независимость $(\mathbf{F_1})$ и $(\mathbf{F_2})$ проверяется в модели с тремя значениями и таблицами, приведенными на предыдущей странице.

Для остальных аксиом достаточно бинарной модели с обычной импликацией, но по различному определённым отрицанием. Так, для $(\mathbf{F_3})$ необходимо взять отрицание не меняющее высказывания: $\neg 0 = 0$, $\neg 1 = 1$. Аксиома $(\mathbf{F_4})$ будет независимой от остальных четырёх аксиом, если $\neg 0 = \neg 1 = 1$. Наконец независимость $(\mathbf{F_5})$ будет доказана, если положить $\neg 0 = \neg 1 = 0$.

Метод построения моделей в некотором смысле аналогичен построению интерпретаций для предметных аксиом. Однако, в различных интерпретациях всегда предполагается справедливость бинарной логики. При построении же моделей исчисления, мы отходим от стандартных таблиц истинности. Тем не менее, нахождение модели в которой некоторые формулы выделены, а некоторые нет, позволяет доказать невозможность вывода формул второй группы из формул первой.

Аналогично, если всегда (в любой модели), когда формулы A_1, A_2 выделены, выделена и формула T, то можно *предположить*, что существует вывод $A_1, A_2 \vdash T$. В этом выводе формулы A_1, A_2 выступают аксиомами для T и других аксиом не требуется. Впрочем, так как перебрать все модели невозможно, подобные *зависимости* являются лишь возможными и при их обнаружении всё равно необходимо строить соответствующий вывод. В отличии от этого, метод установления *независимости* является доказательством невозможности вывода.

Различные формулы оказываются выделенными в различных моделях. Приведём число моделей в которых выполнима та или иная формула для двух $(N = 2)$ и трёх $(N = 3)$ элементов множества $\mathcal{M}$:

	$N=2$	$N=3$
$\mathbf{F_1}$	4	540
$\mathbf{F_2}$	4	513
$\mathbf{F_3}$	6	1250
$\mathbf{F_4}$	5	3672
$\mathbf{F_5}$	6	4860

	$N=2$	$N=3$
$\mathbf{L}$	3	416
$\mathbf{T}$	8	1296
$\mathbf{L_2}$	2	336
$\mathbf{L_3}$	3	1700
$\mathbf{I}$	8	8748

Простые формулы $(\mathbf{I}) : P \to P$, $(\mathbf{F_4}) : \neg\neg P \to P$ и $(\mathbf{F_5}) : P \to \neg\neg P$, зависящие от одного высказывания, имеют наибольшее число моделей, где они равны 2. Обратим внимание также на формулу транзитивности $(\mathbf{T})$, которая, не смотря на наличие в ней трёх произвольных высказываний (формул), выделена на достаточно большом числе моделей.

• Среди всех моделей с тремя элементами: $\mathcal{M} = \{0, 1, 2\}$, существует одна, играющая особую роль в компьютерных науках. В ней отрицание, дизъюнкция и конъюнкция определятся следующими формулами:

$$\neg A = 2 - A, \qquad A \vee B = \max(A, B), \qquad A \,\&\, B = \min(A, B).$$

Импликация, как обычно, равна $A \to B = \neg A \vee B$, а эквивалентность $A \equiv B : (A \to B) \,\&\, (B \to A)$ равна 2, если значения высказываний совпадают и 0 – в противном случае. Соответствующие таблицы имеют вид:

$\neg$	A
2	0
1	1
0	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\&$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	1	1	2
2	0	1	2

.

Эта модель является частным случаем семейства *нечётких логик*. В ней значение 0 интерпретируется как ложь, 2 – как истина, а 1 занимает промежуточное значение, отражающее степень неуверенности или незнания. Другими словами в этой логике есть “да”, “нет” и “возможно”.

Несложно видеть, что определения для базовых связок через разность и функции min, max, справедливы и в бинарной логике по основанию 1 ($\neg A = 1 - A$), а также могут быть обобщены на логику с произвольным основанием и даже на непрерывный случай. В последнем, моделью выступает отрезок вещественных чисел [0...1] на котором степень истинности непрерывно меняется от “абсолютной лжи” (для 0) до “абсолютной истины” (для 1).

Нечёткую логику мы будем рассматривать позднее, а сейчас отметим, что ни одна из аксиом систем $\mathcal{F}$, $\mathcal{L}$ или $\mathcal{L}'$ в такой модели не является выделенной (всегда равной 2). Однако выделенными являются тождества булевой алгебры, кроме закона исключения третьего и связанных с ним формул. Так, несложно видеть, что таблицы для дизъюнкции и конъюнкции симметричны, поэтому, например, $A \vee B \equiv B \vee A$. Построением “таблиц истинности”, можно проверить выполнимость ассоциативного и дистрибутивного законов, а также правил де-Моргана и поглощения (стр. 17).

В отличии от этих тождеств, формула $A \,\&\, \neg A$ не равна всегда 0, а формула $A \vee \neg A$ не равна 2. Также, в отличие от булевой алгебры, не являются теперь тождествами формулы:

$$A \,\&\, (\neg A \vee B) \equiv A \,\&\, B, \qquad A \vee (\neg A \,\&\, B) \equiv A \vee B,$$

которые непосредственно связаны с законом исключения третьего.

2.8 Импликативное исчисление

Определённый интерес представляет исчисление, использующее только импликацию. Так как отрицания нет, вывести в нём все тавтологии нельзя. Однако, можно поставить задачу поиска аксиом из которых следуют все тождественно истинные (в бинарной логике) импликативные формулы (содержащие только связку $\to$).

В системах $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$, стр. 58 были две импликативные аксиомы ($\mathbf{F_1}$) и ($\mathbf{F_2}$). Любопытно, что их не достаточно для вывода всех импликативных тавтологий и полная система импликативных аксиом выглядит следующим образом:

$$
\begin{array}{ll}
(\mathbf{F_1}): & P \to (Q \to P),\\
(\mathbf{F_2}): & \big(P \to (Q \to R)\big) \to \big((P \to Q) \to (P \to R)\big)\\
(\,\mathbf{P}\,): & \big((P \to Q) \to P\big) \to P.
\end{array}
$$

Докажем независимость “закона Пирса” ($\mathbf{P}$) от аксиом ($\mathbf{F_1}$) и ($\mathbf{F_2}$), рассмотрев следующую модель:

$\to$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$$
\begin{array}{cccccccccc}
((& P & \to & Q &) & \to & P &) & \to & P.\\
 & 1 & 0 & 0 & & 2 & 1 & & 1 & 1
\end{array}
$$

При помощи метода опровержения, стоит проверить, что при таком определении импликации, формулы ($\mathbf{F_1}$), ($\mathbf{F_2}$) являются выделенными, а пример не выделенности формулы ($\mathbf{P}$) приведен справа от таблицы.

Хотя формула ($\mathbf{P}$) не содержит отрицания, вывод, например в системе $\mathcal{L}$, требует третей аксиомы ($\mathbf{L}$). Для демонстрации этого потребуется правило, устраняющее отрицание в посылке импликации: ($\mathbf{RN}$) : $\neg P \to Q \;\vdash\; (P \to Q) \to Q$. Оно легко доказывается по теореме дедукции и правилу ($\mathbf{RA}$), стр. 61:

$$
\lhd\ \underbrace{\neg P \to (P \to Q)}_{1:\ \mathbf{L_2},\ \mathbf{RC}},\quad \underbrace{\big(\neg P \to (P \to Q)\big) \to \big(\neg(P \to Q) \to P\big)}_{2:\ \mathbf{N_3}\{(\mathbf{P}\to\mathbf{Q})/\mathbf{Q}\},\ \ <\mathrm{H}_{63}},
$$

$$
\underbrace{\neg(P \to Q) \to P}_{3:\ \mathbf{MP}(1,2)},\quad \underbrace{\big((P \to Q) \to P\big) \to P}_{4:\ \mathbf{RN}(3)}. \qquad \Box
$$

То, что в выводе импликативной формулы ($\mathbf{P}$) участвуют формулы, содержащие отрицание, не является исключением. Например, в системе Лукашевича $\mathcal{L}'$ для вывода импликативной формулы $P \to P$ необходимы все три аксиомы (($\mathbf{I}$) следует из ($\mathbf{L_2}$) и ($\mathbf{L_3}$) по транзитивности).

Формула $(\mathbf{F_2})$ выводится из $(\mathbf{T})$ и $(\mathbf{P})$, поэтому в качестве аксиом можно также выбрать *систему Бернайса-Тарского*:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{F_1}): &\quad P \to (Q \to P),\\
(\mathbf{T}): &\quad (P \to Q) \to \big((Q \to R) \to (P \to R)\big),\\
(\mathbf{P}): &\quad \big((P \to Q) \to P\big) \to P.
\end{aligned}
$$

Транзитивность и удлинённая версия закона Пирса образуют полную систему из двух аксиом:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{T}): &\quad (P \to Q) \to \big((Q \to R) \to (P \to R)\big),\\
(\mathbf{PP}): &\quad P \to \big((Q \to R) \to Q\big) \to Q.
\end{aligned}
$$

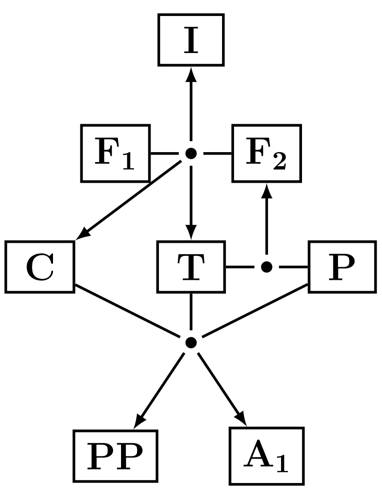
Из неё все остальные формулы систем аксиом импликативного исчисления получаются достаточно быстро (см. synset.com). Как показал в 1948 г. Лукашевич, возможна также система из одной формулы:

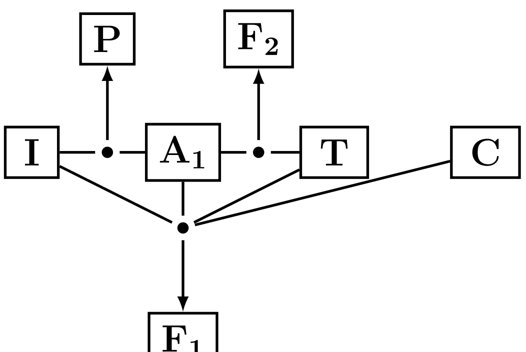
$$
(\mathbf{L_1}): \quad \big((P \to Q) \to R\big) \to \big((R \to P) \to (S \to P)\big),
$$

правда вывод с её помощью становится достаточно нетривиальной задачей. Приведём ещё систему из четырёх независимых аксиом:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{I}): &\quad P \to P,\\
(\mathbf{T}): &\quad (P \to Q) \to \big((Q \to R) \to (P \to R)\big),\\
(\mathbf{C}): &\quad \big(P \to (Q \to R)\big) \to \big(Q \to (P \to R)\big),\\
(\mathbf{A_1}): &\quad (P \to Q) \to \big(((P \to R) \to Q) \to Q\big).
\end{aligned}
$$

Ниже нарисованы графы выводимости аксиом импликативного исчисления:





Другие системы импликативных аксиом можно найти на synset.com.

• Система аксиом $\{\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \mathbf{P}\}$ (как и остальные) является полной, т.е. из неё можно вывести все импликативные тавтологии. Для доказательства нам потребуется следующее правило вывода:

$$(\mathbf{RQ}) \qquad P \to Q \quad \vdash \quad ((P \to R) \to Q) \to Q.$$

$$\lhd \underbrace{P \to Q}_{1:\ \Gamma_1}, \quad \underbrace{Q \to R}_{2:\ \Gamma_2}, \quad \underbrace{(P \to R) \to Q}_{3:\ \Gamma_3}, \quad \underbrace{P \to R}_{4:\ \mathbf{RT}(1,2)}, \quad \underbrace{Q.}_{5:\ \mathbf{MP}(4,3)}$$

Таким образом по $(\mathbf{TD})$ имеем $P \to Q,\ (P \to R) \to Q \ \vdash\ (Q \to R) \to Q$. С учётом $(\mathbf{P})$ это даёт $P \to Q,\ (P \to R) \to Q \ \vdash\ Q$, откуда снова по $(\mathbf{TD})$ следует правило $(\mathbf{RQ})$. $\square$

Дальнейшие рассуждения похожи на доказательство теоремы полноты исчисления со связками $\{\to, \neg\}$. Сначала докажем теорему, справедливую для любой формулы F и любой, но фиксированной Q:

Пусть штрих у формулы: F' – это $(F \to Q) \to Q$, если $F \equiv \mathbb{1}$ и $F \to Q$, если $F \equiv \mathbb{O}$. И пусть F состоит из формул $\{\Gamma_1, ..., \Gamma_n\}$. Тогда в исчислении справедлив вывод $\Gamma'_1, ..., \Gamma'_n \ \vdash\ F'$.

$\lhd$ Доказательство ведём по индукции числа k импликаций в формуле. Случай $k = 0:\ F' \vdash F'$ тривиален. Пусть теорема верна для всех $i < k$. Докажем её для $i = k$, когда $\boxed{F = G \to H}$ и в G, H импликаций меньше.

◦ Если $G \equiv \mathbb{O}$, то $F \equiv \mathbb{1}$ и из $\Gamma' \vdash G \to Q$ выведем $\Gamma' \vdash (F \to Q) \to Q$. Так как $F = G \to H$, то формула $((G \to H) \to Q) \to Q$ выводится из $G \to Q$ по правилу $(\mathbf{RQ})$.

◦ Если $G \equiv \mathbb{1}$, $H \equiv \mathbb{O}$, то $F \equiv \mathbb{O}$ и из $\Gamma' \ \vdash\ (G \to Q) \to Q,\ H \to Q$ выведем $\Gamma' \ \vdash\ (G \to H) \to Q$, сначала по $(\mathbf{RT})$, а затем по $(\mathbf{MP})$:

$$G \to H,\ H \to Q,\ (G \to Q) \to Q \ \vdash\ G \to Q,\ (G \to Q) \to Q \ \vdash\ Q.$$

Поэтому перенося по теореме дедукции $(\mathbf{TD})$ первую посылку $G \to H$, получаем: $H \to Q,\ (G \to Q) \to Q \ \vdash\ (G \to H) \to Q$.

◦ Если $H \equiv \mathbb{1}$, то $F \equiv \mathbb{1}$ и из $\Gamma' \vdash (H \to Q) \to Q$ необходимо вывести $\Gamma' \ \vdash\ ((G \to H) \to Q) \to Q$. Запишем по $(\mathbf{TD})$ правило транзитивности $(\mathbf{TR})$ как $P \to R \ \vdash\ (R \to Q) \to (P \to Q)$ и дважды применим его к аксиоме $(\mathbf{F_1})$ в виде $H \to (G \to H)$:

$$\begin{aligned} H \to (G \to H) \ \vdash\ & ((G \to H) \to Q) \to (H \to Q), \\ & ((H \to Q) \to Q) \to (((G \to H) \to Q) \to Q). \end{aligned}$$

Из последней формулы по $(\mathbf{MP})$ следует искомая формула. $\square$

При помощи этой теоремы, легко получать самые разнообразные правила вывода. Например, из $P \to Q$ следуют такие правила:

$$
\begin{array}{lll}
P \to R, & Q \to R \ \vdash & \big((P \to Q) \to R\big) \to R, \\
(P \to R) \to R, & Q \to R \ \vdash & (P \to Q) \to R.
\end{array}
$$

Отметим несколько моментов. При доказательстве полноты исчисления с $\{\neg, \to\}$, штрих F' соответствовал $\neg F$ (при $F \equiv \mathbb{O}$) и F (при $F \equiv \mathbb{1}$). В импликативных формулах символа отрицания нет. Однако, несложно видеть, что для любой формулы Q, если $F \equiv \mathbb{O}$, то $(F \to Q) \equiv \mathbb{1}$ и если $F \equiv \mathbb{1}$, то $((F \to Q) \to Q) \equiv \mathbb{1}$. При этом вариант теоремы с $F' = F$, когда $F \equiv \mathbb{1}$ будет ошибочным. Например, для формулы $G \to H$ при значениях $\mathbb{O} \to \mathbb{O} \equiv \mathbb{1}$, при таком определении штриха, следовал бы ложный вывод $G \to Q,\ H \to Q\ \vdash G \to H$. Поэтому приходится использовать более затейливое преобразование формулы, в случае, когда она равна $\mathbb{1}$.

Теперь всё готово для доказательства *теоремы полноты импликативного исчисления*:

> Из $(\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \mathbf{P})$ выводимы все импликативные тавтологии.

$\triangleleft$ Пусть тавтология F зависит от высказываний $\Gamma = \{\Gamma_1, ..., \Gamma_n\}$. По предыдущей теореме $\Gamma' \ \vdash \ (F \to Q) \to Q$. Высказывание Γ_n может иметь два значения, поэтому справедливы два вывода:

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma'_1, ..., \Gamma'_{n-1}, \Gamma_n \to Q & \vdash & (F \to Q) \to Q, \\
\Gamma'_1, ..., \Gamma'_{n-1}, (\Gamma_n \to Q) \to Q & \vdash & (F \to Q) \to Q.
\end{array}
$$

Перенесём по теореме дедукции $(\mathbf{TD})$ последние посылки в обоих выводах вправо:

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma'_1, ..., \Gamma'_{n-1} & \vdash & (\Gamma_n \to Q) \to ((F \to Q) \to Q), \\
\Gamma'_1, ..., \Gamma'_{n-1} & \vdash & ((\Gamma_n \to Q) \to Q) \to ((F \to Q) \to Q).
\end{array}
$$

Используя правило $(\mathbf{RQ})$, стр. 72 в форме $P \to Q,\ (P \to R) \to Q\ \vdash\ Q$, получаем $\Gamma'_1, ..., \Gamma'_{n-1}\ \vdash\ F'$. Аналогично, исключая остальные посылки, получаем выводимость $\vdash\ F'$. Так как F – тавтология, это означает, что выводима формула $\vdash\ (F \to Q) \to Q$. Формула Q произвольна, поэтому положим $Q = F$. В силу теоремы $F \to F$ из выведенной формулы получаем F. $\square$

При доказательстве теоремы о полноте использовались только формулы, следующие из аксиом $(\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \mathbf{P})$. Поэтому любая независимая система аксиом из которых можно вывести $(\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \mathbf{P})$ также будет полной.

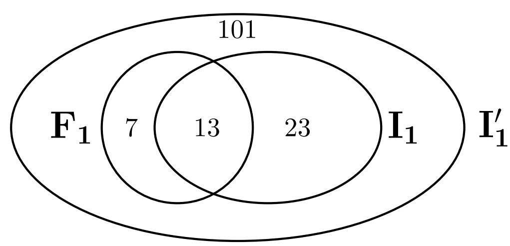
2.9 Модели исчисления и взаимосвязи формул

При помощи множества моделей исчисления, можно изучать различные взаимосвязи между формулами. В этом разделе аксиом не будет. Мы будем по правилу (**MP**) просто из одних формул получать другие. Рассмотрим сначала следующий набор формул:

$$(\mathbf{F_1}): \quad P \to (Q \to P), \quad (\mathbf{I_1}): \quad Q \to (P \to P), \qquad (\mathbf{I_1'}): \quad P \to (P \to P).$$

Переберём все сочетающиеся с правилом (**MP**) таблицы импликации для моделей с трёхэлементным множеством $\mathcal{M} = \{0, 1, 2\}$, стр. 67. Будем подсчитывать число комбинаций выделенных формул (всегда равных 2). Результат представлен ниже в таблице и в виде множеств выделенности на рисунке справа:

$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{I_1}$	$\mathbf{I_1'}$	13
	$\mathbf{I_1}$	$\mathbf{I_1'}$	23
$\mathbf{F_1}$		$\mathbf{I_1'}$	7
		$\mathbf{I_1'}$	101



Так, для 101 модели выделенной была только формула $\mathbf{I_1'}$, остальные две – нет. В 23 моделях выделенными были $\mathbf{I_1}$ и $\mathbf{I_1'}$, а $\mathbf{F_1}$ – была не выделена и т.д. Эти результаты свидетельствуют, что *могут* существовать выводы $\mathbf{I_1} \vdash \mathbf{I_1'}$ и $\mathbf{F_1} \vdash \mathbf{I_1'}$. Наглядно такая возможность видна на рисунке, где области выделенности ($\mathbf{F_1}$) и ($\mathbf{I_1}$) являются подмножеством области выделенности ($\mathbf{I_1'}$).

Подобные наблюдения аналогичны множеству интерпретаций (стр.38) для логического следования. В общем случае, в исчислении из формул P_1, P_2, ... можно вывести формулу Q, если пересечение множеств выделенности P_1, P_2, ... является подмножеством множества выделенности Q в множестве *всех* возможных моделей.

Приведенные выше области выделенности построены для моделей с тремя элементами и полученные взаимосвязи могут нарушаться для моделей с большим числом элементов. Например, может оказаться, что области выделенности ($\mathbf{F_1}$) и ($\mathbf{I_1}$) перестанут быть подмножествами ($\mathbf{I_1'}$). Впрочем, в данном примере этого не произойдёт, так как формула ($\mathbf{I_1'}$) выводится из ($\mathbf{F_1}$) и ($\mathbf{I_1}$) в результате подстановки $\{\, P/Q \,\}$.

Только из формулы ($\mathbf{F_1}$) вывести ($\mathbf{I_1}$) нельзя (как и в обратную сторону). В отличии от предыдущих взаимосвязей, модели $\{0, 1, 2\}$ строго доказывают невозможность вывода, т.к. предоставляют примеры моделей независимости ($\mathbf{F_1}$) и ($\mathbf{I_1}$) в областях, помеченных цифрами 7 и 23.

Рассмотрим чуть менее тривиальный пример с формулами, входящими в системы аксиом импликативного исчисления для моделей с тремя ($N = 3$) и четырьмя ($N = 4$) элементами:

					$N=3$	$N=4$
$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$	$\mathbf{P}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{PP}$	5	79
$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$		$\mathbf{T}$		2	78
$\mathbf{F_1}$		$\mathbf{P}$		$\mathbf{PP}$	-	72
	$\mathbf{F_2}$	$\mathbf{P}$	$\mathbf{T}$		-	12
	$\mathbf{F_2}$	$\mathbf{P}$		$\mathbf{PP}$	-	18
	$\mathbf{F_2}$	$\mathbf{P}$			-	24
$\mathbf{F_1}$			$\mathbf{T}$		6	618
	$\mathbf{F_2}$		$\mathbf{T}$		8	1212
		$\mathbf{P}$		$\mathbf{PP}$	-	177
$\mathbf{F_1}$					7	9353
	$\mathbf{F_2}$				4	1886
		$\mathbf{P}$			2	1359
			$\mathbf{T}$		27	8695

Первая строка доказывает непротиворечивость формул (впрочем для этого достаточно бинарной интерпретации). Вторая строка предоставляет примеры независимости ($\mathbf{P}$) и ($\mathbf{PP}$) от ($\mathbf{F_1}$), ($\mathbf{F_2}$) и ($\mathbf{T}$).

Таблицы сочетания выделенности формул позволяют искать *возможные* системы полных и независимых систем аксиом. Такими системами являются наборы формул ($\mathbf{T}, \mathbf{PP}$), ($\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \mathbf{P}$), ($\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \mathbf{PP}$) и ($\mathbf{F_1}, \mathbf{P}, \mathbf{T}$). Например, пересечение ($\mathbf{T}, \mathbf{PP}$), когда они обе одновременно выделены, встречается только в первой строке, где есть и все остальные формулы. Если бы была строка, где присутствуют ($\mathbf{T}$) и ($\mathbf{PP}$), но нет какой либо другой формулы, доказывало бы независимость такой формулы от ($\mathbf{T}$) и ($\mathbf{PP}$). Должны быть также строки, где есть ($\mathbf{T}$), а ($\mathbf{PP}$) – нет и наоборот. Такие строки доказывают независимость аксиом ($\mathbf{T}$) и ($\mathbf{PP}$).

Подчеркнём еще раз, что подобные наблюдения лишь свидетельствуют о *возможности* того, что данный набор формул может быть системой аксиом. То, что это так, требует построения соответствующих выводов. Для импликативного исчисления при этом достаточно вывести ($\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \mathbf{P}$) из которых следует полнота импликативного исчисления (стр. 72). На сайте synset.com можно найти выводы из всех этих систем аксиом и множество других примеров.

Отметим также, следующие из таблицы возможные выводы ($\mathbf{PP} \vdash \mathbf{P}$), ($\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2} \vdash \mathbf{T}$), ($\mathbf{F_1}, \mathbf{P} \vdash \mathbf{PP}$), ($\mathbf{P}, \mathbf{T} \vdash \mathbf{F_2}$), ($\mathbf{T}, \mathbf{PP} \vdash \mathbf{F_2}$) ($\mathbf{T}, \mathbf{PP} \vdash \mathbf{F_1}$). Они также являются верными, что проверяется прямым их построением.

2.10 Другие системы аксиом

Веденные системы аксиомы $\mathcal{F}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ и правило вывода (**MP**) не единственные способы построения исчисления высказываний. Можно изменять как число аксиом и правил вывода, так и базовые логические связки, которые кладутся в основу языка. Рассмотрим несколько примеров.

• В *аксиоматике Гильберта-Аккермана* [1] (и ранее Уайтхеда и Рассела) исходными логическими связками служат отрицание $\neg P$ и дизъюнкция $P \vee Q$. Остальные связки выражаются через них $P \,\&\, Q:\ \neg(\neg P \vee \neg Q)$, $P \to Q:\ \neg P \vee Q$, и т.д. В системе $\mathcal{A}$ четыре аксиомы:

$$\boxed{\begin{aligned} &(\mathbf{A_1}):\ (P \vee P) \to P, && (\mathbf{A_3}):\ (P \vee Q) \to (Q \vee P),\\ &(\mathbf{A_2}):\ P \to (P \vee Q), && (\mathbf{A_4}):\ (P \to Q) \to \big((R \vee P) \to (R \vee Q)\big), \end{aligned}}$$

где P, Q, R – произвольные формулы. Импликация – это сокращение, поэтому, например, аксиома ($\mathbf{A_1}$), отражающая правило поглощения, на самом деле имеет вид $\neg(P \vee P) \vee P$ и т.д. Как и раньше, единственным правилом вывода является *modus ponens* (**MP**): $P,\ \neg P \vee Q\ \vdash\ Q$.

В этой системе справедливо производное правило транзитивности импликации, которое выводится из аксиомы ($\mathbf{A_4}$) (с учётом определения импликации), после двойного применения правила (**MP**):

$$(\mathbf{R_T}):\qquad P \to Q,\quad Q \to R \qquad \vdash \qquad P \to R.$$

$$\lhd\ \underbrace{P \to Q}_{1:\ \Gamma_1},\ \underbrace{Q \to R}_{2:\ \Gamma_2},\ \underbrace{(Q \to R) \to \big((P \to Q) \to (P \to R)\big)}_{3:\ \mathbf{A_4}\{Q/P,\ R/Q,\ \bar{P}/R\}},\ \underbrace{P \to R}_{4:\ 2\times\mathbf{MP}}.\ \square$$

Построим ещё вывод закона “исключения третьего”:

$$(\ \mathbf{I}\ ):\qquad \neg P \vee P \qquad \text{или} \qquad P \to P.$$

$$\lhd\ \underbrace{P \to (P \vee P)}_{1:\ \mathbf{A_2}\{P/Q\}},\quad \underbrace{(P \vee P) \to P}_{2:\ \mathbf{A_1}},\quad \underbrace{P \to P}_{3:\ \mathbf{RT}(1,2)}.\quad \square$$

В качестве упражнений ($\lessdot$H$_{68}$), ($\lessdot$H$_{69}$), предлагается в системе $\mathcal{A}$ вывести законы двойного отрицания $P\ \to\ \neg\neg P$ и $\neg\neg P\ \to\ P$. В первом случае, сначала из ($\mathbf{A_3}$) необходимо получить правило коммутирования дизъюнкции, и затем два раза учесть доказанную формулу $\neg P \vee P$. Во втором, аксиома ($\mathbf{A_4}$) записывается подстановками $\{\bar{P}/P,\ \bar{\bar{\bar{P}}}/Q,\ P/R\}$ и учитывается формула $\neg P \to \neg\neg\neg P$.

• Можно расширить число логических связок, считая их независимыми. Тогда для каждой связки потребуется своя группа аксиом. Примером является *аксиоматика Клини* [4] и похожая аксиоматика Гильберта-Бернайса [2] для исчисления с алфавитом $\Sigma = \{\neg,\ \to,\ \&,\ \vee,\ (,\ ),\ X\}$:

$$
\begin{array}{ll}
(\mathbf{F_1}): & P \to (Q \to P),\\
(\mathbf{F_2}): & \big(P \to (Q \to R)\big) \to \big((P \to Q) \to (P \to R)\big),\\
(\mathbf{K_1^{\&}}): & (P \,\&\, Q) \to P,\\
(\mathbf{K_2^{\&}}): & (P \,\&\, Q) \to Q,\\
(\mathbf{K_3^{\&}}): & P \to \big(Q \to (P \,\&\, Q)\big),\\
(\mathbf{K_1^{\vee}}): & P \to (P \vee Q),\\
(\mathbf{K_2^{\vee}}): & Q \to (P \vee Q),\\
(\mathbf{K_3^{\vee}}): & (P \to R) \to \big((Q \to R) \to ((P \vee Q) \to R\big),\\
(\mathbf{K_1^{\neg}}): & (P \to Q) \to \big((P \to \neg Q) \to \neg P\big),\\
(\mathbf{F_4}): & \neg\neg P \to P.
\end{array}
$$

Кроме связок и элементарных высказываний, в алфавит языка можно добавлять константные символы. Например $\mathbb{0}$, $\mathbb{1}$. Для задания их свойств необходимы аксиомы: $\mathbb{1} \to P$, $P \to \mathbb{0}$.

• Возможны и системы, состоящие из одной аксиомы. Так, Мередит [5] показал, что в языке со связками $\neg, \to$ и правилом $(\mathbf{MP})$, для вывода всех тавтологий достаточно только одной аксиомы:

$$\Big[\Big(\big((P \to Q) \to (\bar{R} \to \bar{S})\big) \ \to R\Big) \to T\Big] \ \to \ \Big[(T \to P) \to (S \to P)\Big]$$

Впрочем, вывод в такой схеме аксиом становится достаточно нетривиальной задачей (см. Metamath).

Вообще, уменьшение числа аксиом оправдано, только когда выясняется, что какая-то аксиома выводима из остальных. Хорошая система аксиом должна быть, конечно, независимой. А вот минимизация числа независимых аксиом не всегда полезна. Скорее наоборот, представляет интерес поиск такого максимального числа формул, которые независимы друг от друга и образуют полную систему. Такая система может оказаться более удобной при выводе формул и для обобщения на другие теории, путём модификации той или иной аксиомы. Мы будем ещё не раз возвращаться к этому тезису.

S

2.11 Задачи

- Вывести правила "внедрения" произвольной формулы:
  - $\lessdot$H$_{49}$ $P \to Q \quad \vdash \quad P \to (R \to Q)$.
  - $\lessdot$H$_{50}$ $P \to Q \quad \vdash \quad (R \to P) \to (R \to Q)$.

- ($\lessdot$H$_{52}$) Вывести в $\mathcal{L}$ формулу ((**I**), стр. 52 и **Rev**):

$\vdash_{\mathcal{L}} \quad P \to \big((P \to Q) \to Q\big)$.

- ($\lessdot$H$_{53}$) Вывести правило **RC** по теореме дедукции **TD**:

$P \to (Q \to R) \quad \vdash_{\mathcal{L}} \quad Q \to (P \to R)$.

- ($\lessdot$H$_{54}$) Вывести правило (применить теорему дедукции **TD**):

$P \to (Q \to (R \to S)) \quad \vdash \quad P \to (R \to (Q \to S))$.

- ($\lessdot$H$_{55}$) Вывести правило (по (**RC**) и (**RT**)):

$P \to Q, \;\; R \to (Q \to S) \quad \vdash \quad R \to (P \to S)$.

- ($\lessdot$H$_{56}$) Не используя (**TD**), доказать ($\mathbf{F_2}$, **I**, стр. 52):

$P \to (P \to Q) \quad \vdash_{\mathcal{L}} \quad P \to Q$.

- ($\lessdot$H$_{57}$) Не используя (**TD**), вывести (**T**) из ($\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$):

$\vdash_{\mathcal{F}_\to} \quad (P \to Q) \to \big((Q \to R)) \to (P \to R)\big)$.

- ($\lessdot$H$_{58}$) Не используя (**TD**), вывести (**C**) из ($\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$):

$\vdash_{\mathcal{F}_\to} \quad (P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R))$.

- ($\lessdot$H$_{59}$) Вывести в $\mathcal{L}$ правило (по **MP** со второй посылкой и ($\mathbf{F_2}$)):

$P \to Q, \; P \to (Q \to R) \quad \vdash_{\mathcal{L}} \quad P \to R$.

- ($\lessdot$H$_{60}$) Вывести правило ($\mathbf{F_1}$)$\{R/P\}$ и применить правило из $\lessdot$H$_{55}$):

$P \to \big((Q \to R) \to (Q \to S)\big) \quad \vdash \quad P \to \big(Q \to (R \to S)\big)$.

- ($\lessdot$H$_{61}$) Вывести из ($\mathbf{F_1}$), ($\mathbf{F_2}$) ((**I**) с $((P \to Q) \to (P \to R))/P$ и правило из $\lessdot$H$_{60}$):

$\vdash \quad \big((P \to Q) \to (P \to R)\big) \to (P \to (Q \to R))$.

○ ($\lessdot$H$_{62}$) Доказать правило (**I**), стр. 52, затем по **MP** с $\mathbf{F_2}$):

$$(P \to Q) \to P \quad \vdash \quad (P \to Q) \to Q.$$

○ ($\lessdot$H$_{63}$) Вывести формулу ($\mathbf{N_3}$) (теорема дедукции):

$$\vdash_{\mathcal{L}} \quad (\bar{P} \to Q) \to (\bar{Q} \to P).$$

○ ($\lessdot$H$_{64}$) Вывести формулу (теорема дедукции):

$$\vdash_{\mathcal{F},\mathcal{L}} \ (\bar{P} \to \bar{Q}) \to \big((\bar{P} \to Q) \to P\big).$$

○ ($\lessdot$H$_{65}$) Аксиому (**L**) в системе $\mathcal{L}$ можно заменить на формулу из предыдущей задачи. Доказать это, добавив к ней аксиомы ($\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$) и вывести (**L**).

○ Вывести из аксиом Гильберта-Аккермана (стр. 76) следующие формулы:

- ○ $\lessdot$H$_{66}$ $(P \to Q) \to \big((R \to P) \to (R \to Q)\big)$.
- ○ $\lessdot$H$_{67}$ $\neg P \vee P$.
- ○ $\lessdot$H$_{68}$ $P \to \neg\neg P$.
- ○ $\lessdot$H$_{69}$ $\neg\neg P \to P$.
- ○ $\lessdot$H$_{70}$ $\neg(P \,\&\, Q) \ \to \ \neg P \vee \neg Q$

○ $\lessdot$H$_{71}$ Методом опровержения доказать выделенность формул ($\mathbf{F_1}$), ($\mathbf{F_2}$) в модели на стр. 70

Исчисление высказываний

- $\mathbf{H}_{49}$ $P \to Q \quad \vdash \quad P \to (R \to Q)$. (стр. 78)

$$\underbrace{P \to Q}_{1:\ \Gamma},\quad \underbrace{Q \to (R \to Q)}_{2:\ \mathbf{F_1}\{Q/P,\ R/Q\}},\quad \underbrace{P \to (R \to Q)}_{3:\ \mathbf{RT}(1,2)}.\quad \square$$

- $\mathbf{H}_{50}$ $P \to Q \quad \vdash \quad (R \to P) \to (R \to Q)$. (стр. 78)

$$\underbrace{P \to Q}_{1:\ \Gamma},\quad \underbrace{P \to (R \to Q)}_{2:\ \lessdot\mathbf{H_{49}}(1)},\quad \underbrace{R \to (P \to Q)}_{3:\ \mathbf{RC}(2)},\quad \underbrace{(R \to P) \to (R \to Q)}_{4:\ \mathbf{MP}(2,\ \mathbf{F_2}\{R/P,\ P/Q,\ P/R\})}.$$

- $\mathbf{H}_{51}$ $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ (стр. 67)

Выделенность доказываем методом опровержения, поставив под корневой импликацией 1:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
(& P & \to & (& Q & \to & R &)) & \to & ((& P & \to & Q &) & \to & (& P & \to & R &)) \\
 & \left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right. & \mathbf{2}^{?} & & \left[\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}\right. & 0 & \left[\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right. & & \underline{\mathbf{0}} & & \left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right. & 2 & \left[\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}\right. & & \mathbf{0} & & \left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right. & 0 & \left[\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right. & \\
\hline
\text{шаг:} & 4 & 1 & & 6 & 7 & 4 & & 1 & & 4 & 2 & 5 & & 1 & & 3 & 2 & 3 &
\end{array}$$

После 9-го шага приходим к противоречию (вопросительный знак над значением 2), так как $1 \to 0$, $2 \to 0$ не равны 2.

- $\mathbf{H}_{52}$ $\vdash_{\mathcal{L}} \quad P \to \big((P \to Q) \to Q\big)$ (стр. 78)

$$\underbrace{(P \to Q) \to (P \to Q)}_{1:\ \mathbf{T_1}\{(P\to Q)/P\}},\quad \underbrace{P \to ((P \to Q) \to Q)}_{2:\ \mathbf{RC}(1)}.$$

- $\mathbf{H}_{53}$ $P \to (Q \to R) \quad \vdash \quad Q \to (P \to R)$ (стр. 78)

$$\underbrace{P}_{1:\ \Gamma_1},\quad \underbrace{P \to (Q \to R)}_{2:\ \Gamma_2},\quad \underbrace{Q}_{3:\ \Gamma_3},\quad \underbrace{Q \to R}_{4:\ \mathbf{MP}(1,2)},\quad \underbrace{R}_{5:\ \mathbf{MP}(3,4)}.$$

Теперь дважды по (**TD**) переносим сначала P, затем Q.

- $\mathbf{H}_{54}$ $P \to (Q \to (R \to S)) \quad \vdash \quad P \to (R \to (Q \to S))$ (стр. 78)

$$\underbrace{P \to (Q \to (R \to S))}_{1:\ \Gamma_1},\quad \underbrace{P}_{2:\ \Gamma_2},\quad \underbrace{Q}_{3:\ \Gamma_3},\quad \underbrace{R}_{4:\ \Gamma_4},\quad \underbrace{Q \to (R \to S)}_{5:\ \mathbf{MP}(2,1)},$$

$$\underbrace{R \to S}_{6:\ \mathbf{MP}(3,5)},\quad \underbrace{S}_{7:\ \mathbf{MP}(4,6)}.$$ Таким образом $\Gamma_1, P, Q, R \vdash S$. Далее по (**TD**).

- $\mathbf{H}_{55}$ $P \to Q, \quad R \to (Q \to S) \quad \vdash \quad R \to (P \to S)$ (стр. 78)

$$\underbrace{Q \to (R \to R)}_{3:\ \mathbf{RC}(\Gamma_2)},\quad \underbrace{P \to (R \to R)}_{4:\ \mathbf{RT}(\Gamma_1,3)},\quad \underbrace{R \to (P \to R)}_{4:\ \mathbf{RC}(4)}.$$

• $\mathbf{H}_{56}$ $P \to (P \to Q) \vdash_{\mathcal{L}} P \to Q$ (стр. 78)

$$\underbrace{P \to (P \to Q)}_{1:\ \Gamma_1},\quad \underbrace{P \to (P \to Q) \to ((P \to P) \to (P \to Q))}_{2:\ \mathbf{F_2}},$$

$$\underbrace{(P \to P) \to (P \to Q)}_{3:\ \mathbf{MP}(1,2)},\quad \underbrace{P \to P}_{4:\ \mathbf{T_1}},\quad \underbrace{P \to Q}_{5:\ \mathbf{MP}(4,3)}.$$

• $\mathbf{H}_{57}$ $(P \to Q) \to \big((Q \to R)) \to (P \to R)\big)$ (стр. 78)

Вывод этой формулы, который сделал компьютер:

```
0  ax-1  P->(Q->P)
1  ax-2  (P->(Q->R))->((P->Q)->(P->R))
2  mp(0,0)  P->(Q->(R->Q))
3  mp(1,0)  P->((Q->(R->S))->((Q->R)->(Q->S)))
4  mp(1,1)  ((P->(Q->R))->(P->Q))->((P->(Q->R))->(P->R))
5  mp(2,1)  (P->Q)->(P->(R->Q))
6  mp(3,1)  (P->(Q->(R->S)))->(P->((Q->R)->(Q->S)))
7  mp(2,4)  (P->((Q->P)->R))->(P->R)
8  mp(0,6)  (P->Q)->((R->P)->(R->Q))
9  mp(1,5)  (P->(Q->R))->(S->((P->Q)->(P->R)))
10  mp(8,9)  P->(((Q->R)->(S->Q))->((Q->R)->(S->R)))
11 mp(10,7)  (P->Q)->((Q->R)->(P->R))
```

Укороченная запись вывода с пояснениями:

$$\underbrace{(Q \to R) \to \big((P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))\big)}_{1:\ \mathbf{F_2}\ \vdash\ (Q\to R)\to\mathbf{F_2}},$$

$$\underbrace{((Q\to R)\to(P\to(Q\to R)))\to((Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R)))}_{2:\ \mathbf{RF_2(1)}},$$

$$\underbrace{(Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))}_{3:\ \mathbf{MP}(\mathbf{F_1},2),\ 4:\ \mathbf{RC}(3)},$$

• $\mathbf{H}_{58}$ $(P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R))$ (стр. 78)

Вывод этой формулы, который сделал компьютер:

```
0  ax-1     P->(Q->P)
1  ax-2    (P->(Q->R))->((P->Q)->(P->R))
2  mp(0,0)  P->(Q->(R->Q))
3  mp(1,0)  P->((Q->(R->S))->((Q->R)->(Q->S)))
4  mp(2,1)  (P->Q)->(P->(R->Q))
5  mp(3,1)  (P->(Q->(R->S)))->(P->((Q->R)->(Q->S)))
6  mp(1,4)  (P->(Q->R))->(S->((P->Q)->(P->R)))
7  mp(5,5)  (P->(Q->(R->S)))->((P->(Q->R))->(P->(Q->S)))
8  mp(6,7)  ((P->(Q->R))->(S->(P->Q)))->((P->(Q->R))->(S->(P->R)))
9 mp(2,8)   (P->(Q->R))->(Q->(P->R))
```

• $\mathbf{H}_{59}$ $P \to Q,\quad P \to (Q \to R) \quad \vdash_{\mathcal{L}} \quad P \to R$ (стр. 78)

$$\underbrace{P \to Q}_{1:\ \Gamma_1},\quad \underbrace{P \to (Q \to R)}_{2:\ \Gamma_2},\quad \underbrace{(P \to Q) \to (P \to R)}_{3:\ \mathbf{MP}(2,\mathbf{F_2})},\quad \underbrace{P \to R}_{4:\ \mathbf{MP}(1,3)}.$$

- $\mathbf{H}_{60}$ $P \to \big((Q \to R) \to (Q \to S)\big) \quad \vdash \quad P \to \big(Q \to (R \to S)\big)$ (стр. 78)

$$\underbrace{P \to \big((Q \to R) \to (Q \to S)\big)}_{1:\ \Gamma_1}, \quad \underbrace{R \to \big(Q \to R\big)}_{2:\ \mathbf{F_1}},$$

$$\underbrace{P \to \big(R \to (Q \to S)\big)}_{3:\ (\lessdot \mathrm{H}_{55})(2,1)}, \quad \underbrace{P \to \big(Q \to (R \to S)\big)}_{3:\ (\lessdot \mathrm{H}_{54})(2,1)}.$$

- $\mathbf{H}_{61}$ $\big((P \to Q) \to (P \to R)\big) \to \big(P \to (Q \to R)\big)$ (стр. 78)

$$\underbrace{\big((P \to Q) \to (P \to R)\big) \to \big((P \to Q) \to (P \to R)\big)}_{1:\ \mathbf{I}},$$

$$\underbrace{\big((P \to Q) \to (P \to R)\big) \to \big(P \to (Q \to R)\big)}_{1:\ (\lessdot \mathrm{H}_{60})}.$$

- $\mathbf{H}_{62}$ $(P \to Q) \to P \quad \vdash \quad (P \to Q) \to Q$ (стр. 79)

$$\underbrace{(P \to Q) \to P}_{1:\ \Gamma}, \quad \underbrace{(P \to Q) \to (P \to Q)}_{2:\ \mathbf{I}\{(P \to Q)/P\}},$$

$$\underbrace{((P \to Q) \to (P \to Q)) \to ((P \to Q) \to P) \to ((P \to Q) \to Q)}_{3:\ \mathbf{F_2}\{(P \to Q)/P,\ Q \to P,\ Q/R\}},$$

$$\underbrace{((P \to Q) \to P) \to ((P \to Q) \to Q)}_{4:\ \mathbf{MP}(2,3)}, \quad \underbrace{(P \to Q) \to Q}_{5:\ \mathbf{MP}(1,4)}.$$

- $\mathbf{H}_{63}$ $\vdash_{\mathcal{L}} \quad (\bar{P} \to Q) \to (\bar{Q} \to P)$ (стр. 79)

```
0. ax        F1    P->(Q->P)
1. ax        F2    (P->(Q->R))->((P->Q)->(P->R))
2. ax        L     (!P->!Q)->(Q->P)
3. mp 0,0    S2    P->(Q->(R->Q))
4. mp 1,0          P->((Q->(R->S))->((Q->R)->(Q->S)))
5. mp 2,0          P->((!Q->!R)->(R->Q))
6. mp 3,1    I2    (P->Q)->(P->(R->Q))
7. mp 4,1          (P->(Q->(R->S)))->(P->((Q->R)->(Q->S)))
8. mp 5,1          (P->(!Q->!R))->(P->(R->Q))
9. mp 0,8    L2C   !P->(P->Q)
10.mp 6,1          ((P->Q)->P)->((P->Q)->(R->Q))
11.mp 8,7          (P->(!Q->!R))->((P->R)->(P->Q))
12.mp 3,10         ((P->(Q->P))->R)->(S->R)
13.mp 9,11         (!!P->Q)->(!!P->P)
14.mp 13,12        P->(!!Q->Q)
15.mp 14,11        (P->Q)->(P->!!Q)
16.mp 15,8   N3    (!P->Q)->(!Q->P)
```

- $\mathbf{H}_{64}$ $(\bar{P} \to \bar{Q}) \to \big((\bar{P} \to Q) \to P\big)$ (стр. 79)

$$\underbrace{\bar{P} \to \bar{Q}}_{1:\ \Gamma_1}, \quad \underbrace{\bar{P} \to Q}_{2:\ \Gamma_2}, \quad \underbrace{Q \to P}_{3:\ \mathbf{MP}(1,\mathbf{L})}, \quad \underbrace{\bar{P} \to P}_{4:\ \mathbf{RT}(2,3)}, \quad \underbrace{P}_{4:\ \mathbf{MP}(4,\mathbf{L_3})}.$$

Таким образом $\bar{P} \to \bar{Q},\ \bar{P} \to Q \ \vdash P$, откуда по $(\mathbf{TD})$ получаем $(\mathbf{M})$.

• $\mathbf{H}_{65}$ $(\bar{P} \to \bar{Q}) \to (Q \to P)$ (стр. 79)

$$\underbrace{\bar{P} \to \bar{Q}}_{1:\ \Gamma_1},\quad \underbrace{Q}_{2:\ \Gamma_2},\quad \underbrace{(\bar{P} \to Q) \to P}_{3:\ \mathbf{MP}(1,\mathbf{M})},\quad \underbrace{Q \to (\bar{P} \to Q)}_{4:\ \mathbf{F_1}\{Q/P,\ \bar{P}/Q\}},\quad \underbrace{\bar{P} \to Q}_{5:\ \mathbf{MP}(2,4)}.$$

Применяя ещё раз $\mathbf{MP}(2,5)$, получаем P.
Таким образом, $\bar{P} \to \bar{Q},\ Q \vdash P$, откуда по $(\mathbf{TD})$ приходим к $(\mathbf{L})$.

• $\mathbf{H}_{66}$ $\vdash_{\mathcal{A}} \quad (P \to Q) \to \big((R \to P) \to (R \to Q)\big)$ (стр. 79)
Следует по $(\mathbf{MP})$ из аксиомы $(\mathbf{A_4})$, если заменить $\{\neg R/R\}$

• $\mathbf{H}_{67}$ $\vdash_{\mathcal{A}} \quad \neg P \vee P$ (стр. 79)
$(\mathbf{A_2})$: $P \to (P \vee P)$, $(\mathbf{A_1})$: $(P \vee P) \to P$, затем по правилу $(\mathbf{RT})$, следующему из предыдущей задачи.

• $\mathbf{H}_{68}$ $\vdash_{\mathcal{A}} \quad P \to \neg\neg P$ (стр. 79)
Это сокращении для формулы $\neg P \vee \neg\neg P$. По предыдущей задаче $Q \vee \neg Q$, откуда по $(\mathbf{A_3})$ $\neg Q \vee Q$ и подставляем $\{\neg P/Q\}$.

• $\mathbf{H}_{69}$ $\vdash_{\mathcal{A}} \quad \neg\neg P \to P$ (стр. 79)
Из предыдущей задачи $\neg P \to \neg\neg\neg P$. Откуда по $(\mathbf{A_4})$: $(P \vee \neg P) \to (P \vee \neg\neg\neg P)$. Затем по $(\mathbf{MP})$ $P \vee \neg\neg\neg P$. Аксиома $(\mathbf{A_3})$ даёт $\neg\neg\neg P \vee P$.

• $\mathbf{H}_{70}$ $\vdash_{\mathcal{A}} \quad \neg(P \,\&\, Q) \ \to\ \neg P \vee \neg Q$ (стр. 79)
Сделаем подстановку в $\neg\neg P \to P$, получив $\neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$.
Определение конъюнкции $P \,\&\, Q:\ \neg(\neg P \vee \neg Q)$ даёт искомое.

• $\mathbf{H}_{71}$ *Выделенность* $(\mathbf{F1})$, $(\mathbf{F2})$ (стр. 79)
Выделенность $(\mathbf{F1})$ оказываем методом опровержения, поставив под корневой импликацией 1:

$$\begin{array}{l|ccccccccccc}
 & (& \bar{P} & \to & \bar{Q} &) & \to & (& Q & \to & P &) \\
 & & \begin{bmatrix}2\\ 2\\ 1\end{bmatrix} & \mathbf{2}^{?} & \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} & & \underline{\mathbf{0}} & & \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} & \mathbf{0} & \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} & \\
\hline
\text{шаг:} & & 3 & 1 & 3 & & 1 & & 2 & 1 & 2 &
\end{array}$$

Выделенность $(\mathbf{F2})$ доказываем методом опровержения, поставив под корневой импликацией 1:

$$\begin{array}{l|ccccccccccccccccc}
 & (& P & \to & (& Q & \to & R &)) & \to & ((& P & \to & Q &) & \to & (& P & \to & R &)) \\
 & & \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} & \mathbf{2}^{?} & & \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} & & \underline{\mathbf{0}} & & \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} & 2 & \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix} & & \mathbf{0} & & \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} & \\
\hline
\text{шаг:} & & 4 & 1 & & 6 & 7 & 4 & & 1 & & 4 & 2 & 5 & & 1 & & 3 & 2 & 3 &
\end{array}$$

После 9-го шага приходим к противоречию (вопросительный знак над значением 2), так как $1 \to 0$, $2 \to 0$ не равны 2.