Оказывает ли свет давление на пробный заряд?

Степанов С.С.

Хорошо известно, что свет оказывает давление на объекты. С другой стороны, поведение пробного заряда в поле плоской электромагнитной волны таково, что его импульс не увеличивается со временем. Это вступает в кажущееся противоречие с фактом существования светового давления. В работе уточняются условия применимости совместных законов сохранения поля и зарядов. Показано, что световое давление является результатом самодействия заряда. Момент же импульса заряда в поле плоской волны с круговой поляризацией не растёт даже после учёта эффекта самодействия.

Содержание

Этот документ является приложением к книге:

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ МИР

Сергей С. Степанов

Последнюю версию документа и книги можно найти по адресу http://synset.com. Все найденные ошибки, замечания и предложения просьба присылать по почте phys@synset.com.

Версия v1, 2011-04-08: Закон сохранения, движение пробного заряда.

Версия v2, 2011-04-20: Самодействие заряда и световое давление.

Версия v3, 2011-04-28: Релятивистский случай.

Печать документа: 2011-04-28

---

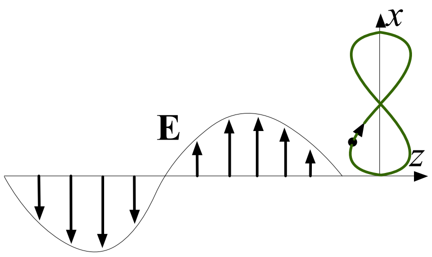
1 Введение

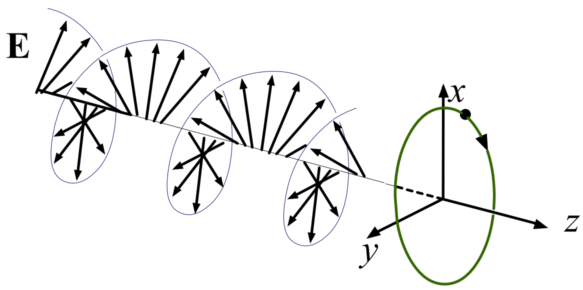
Хорошо известным теоретическим и экспериментальным фактом является наличие светового давления и момента импульса, переносимого поляризованной по кругу электромагнитной волной. Тем не менее, не смотря на более чем столетнюю историю этого вопроса, иногда, на основе законов сохранения, делаются неверные заключения и объяснения соответствующих эффектов.

Так, при обсуждении движения пробного заряда в поле электромагнитной волны, часто делается ссылка на совместные законы сохранения электромагнитного поля и зарядов. Например, утверждается, что смещение заряда в направлении волнового вектора связано со световым давлением, а закручивание траектории в направлении поляризации – с моментом импульса волны. Однако без некоторых важных оговорок подобные представления оказываются неверными.

То, что ситуация не столь однозначна, следует из известного характера поведения заряда в поле плоской электромагнитной волны. Например, если волна имеет линейную поляризацию, то существует инерциальная система отсчёта в которой заряд описывает восьмёрку, в среднем оставаясь на одном и том же месте ([1], [2], приложение C). Его траектория приведена ниже на левом рисунке. В любой другой системе отсчёта скорость заряда вдоль волнового вектора в среднем оказывается постоянной. Подобное "игнорирование" пробным зарядом светового давления, которое направлено по волновому вектору, выглядит несколько неожиданным.

Аналогично ведёт себя заряд в поле волны с круговой поляризацией. В этом случае он может двигаться по окружности в плоскости, перпендикулярной волновому вектору ([1], [2], приложение B). В такой системе отсчёта заряд вообще не изменяет своей скорости вдоль волнового вектора, по которому, собственно, и направлено световое давление (ниже правый рисунок). Не меняется также начальный момент импульса заряда (отсутствует "поглощение" момента импульса электромагнитной волны).





Возникает вопрос: почему подобные особенности поведения заряда в поле волны не согласуются с соответствующими законами сохранения?

2 Сохранение энергии поля и зарядов

Напомним вывод закона сохранения энергии-импульса [1]. При помощи следующих комбинаций напряжённостей поля ($c = 1$):

$$W = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi}, \qquad \mathbf{P} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi} \tag{1}$$

и уравнений Максвелла несложно получить теорему Пойнтинга:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \mathbf{P} + \mathbf{E}\mathbf{j} = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{j}$ – плотность тока, *стоящая в уравнениях* Максвелла. Физический смысл этого соотношения устанавливается в результате его интегрирования по некоторому объёму:

$$\frac{d}{dt}\int W\,dV + \oint \mathbf{P}\,d\mathbf{S} = -\int \mathbf{E}\mathbf{j}\,dV = -\sum_{k=1}^{n} q_k\,\mathbf{u}_k\mathbf{E}(\mathbf{r}_k),$$

где применена теорема Гаусса, а для тока записана сумма δ - функций (т.е. предполагается, что внутри объёма находятся n точечных зарядов).

Изменение энергии движения заряда $\mathcal{E} = m/\sqrt{1-\mathbf{u}^2}$ равно скалярному произведению скорости заряда $\mathbf{u}$ на силу $\mathbf{F}$:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{u}\mathbf{F} = \mathbf{u}\,(q\mathbf{E} + q\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = q\mathbf{u}\mathbf{E}.$$

Поэтому интегральная теорема Пойнтинга записывается таким образом:

$$\frac{d}{dt}\left\{\int W\,dV + \sum_{k=1}^{n}\mathcal{E}_k\right\} = -\oint \mathbf{P}\,d\mathbf{S}. \tag{3}$$

Левая часть этого соотношения интерпретируется как суммарная энергия поля и зарядов. Эта энергия изменяется при пересечении границы объёма потоком энергии (импульсом поля $\mathbf{P}$).

Обратим внимание, что в дифференциальном уравнении (2) находятся токи, стоящие в уравнениях Максвелла. Это те заряды, которые *создают* поле. При получении интегрального соотношения (3) уже предполагается, что на эти заряды исходное поле действует силой Лоренца. Это "изменение" типа зарядов и определяет условия применимости закона сохранения (3).

Чаще всего при решении электродинамических задач считают, что есть некоторые *заданные* заряды и токи, которые создают поле (это поле получается в результате решения уравнений Максвелла). Кроме этого, существуют *пробные* заряды, которые в этом поле движутся под воздействием силы Лоренца. Их движение не изменяет внешнего поля, а сами заряды не излучают.

Несмотря на искусственность подобного алгоритма, он позволяет точно решить многие задачи и оказывается неплохим первым приближением к реальности. В рамках такого приближения обычно и рассматривается движение пробного заряда в поле электромагнитной волны.

Плоская волна распространяется в пустом пространстве, в котором плотность тока $\mathbf{j}$ в уравнении (2) *равна нулю.* Поэтому совместного закона сохранения "поля + заряды" в модели пробного заряда просто не возникает. В области пространства, в которой движется *пробный* заряд, нет зарядов, создающих поле плоской электромагнитной волны.

Эту же мысль можно высказать по другому. Совместный закон сохранения для поля и зарядов предполагает, что часть энергии (импульса или момента импульса) поля передаётся зарядам. Само поле при этом должно терять энергию. Очевидно, что при решении задачи о поведении пробного заряда этого не происходит. Внешнее для него поле остаётся без изменения и, естественно, не может потерять энергию, которая "передаётся" заряду.

Абсолютно та же ситуация возникает при движении, например, в электростатическом поле. Если магнитного поля нет, то плотность импульса $\mathbf{P}$ и момента импульса $\mathbf{r} \times \mathbf{P}$ поля равны нулю. Однако это не мешает пробному заряду изменять свой импульс и момента импульса. Хотя он их "получает" при воздействии на него внешнего поля, никакого отношения к законам сохранения поля и зарядов это не имеет.

Когда же можно применять закон сохранения (3)? Очевидно тогда, когда заряды одновременно создают поле и подвергаются его воздействию. В этом случае нет разделения на пробные заряды и внешнее поле. Несмотря на математическую сложность подобной задачи, именно ей соответствует закон сохранения поля и зарядов.

Например, если электромагнитная волна поглощается пластинкой из некоторого материала, этой пластинке передаётся энергия, импульс и момент импульса волны. Как и "положено" для законов сохранения можно не рассматривать детали взаимодействия волны и пластинки, подсчитав величины, входящие в (3) до и после взаимодействия.

На микроуровне процесс поглощения электромагнитной волны связан с тем, что заряды пластинки испытывают воздействие со стороны волны и начинают излучать. Это излучение "гасит" исходную волну, в результате чего происходит её поглощение. В этом случае в законе сохранения (3) "после взаимодействия" должны стоять напряжённости не падающей волны, а суммарного поля, возникающего в результате сложения поля исходной волны и вторичных волн от зарядов пластины.

3 Световое давление

Интересно проследить как возникает световое давление, когда мы начинаем учитывать излучение пробного заряда. Будем считать, что его скорость невелика, и запишем уравнение движения с учётом лоренцевской силы торможения [1]:

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + e\,[\mathbf{v}\times\mathbf{B}] + \frac{2}{3}\,e^2\,\ddot{\mathbf{v}}, \tag{4}$$

где по-прежнему используется система единиц, в которой $c = 1$. Для восстановления скорости света необходимо все величины, имеющие размерность времени в некоторой степени, умножить на "c" в той же степени. Кроме этого заряд и напряженности поля делятся на "c".

Будем измерять время в обратных единицах частоты ω электромагнитной волны, а расстояния в единицах длин волн. Для этого сделаем следующие замены:

$$t \mapsto t/\omega, \qquad \mathbf{r}\mapsto \mathbf{r}/\omega.$$

Уравнение движения в этих единицах имеет вид:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\alpha}{E_0}\,(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) + \mu\,\ddot{\mathbf{v}}, \tag{5}$$

где E_0 – амплитуда волны и введены два безразмерных параметра α и μ. Первый параметр определяется мощностью падающей электромагнитной волны (восстанавливаем константу c):

$$\alpha = \frac{eE_0}{\omega m c} = \lambda\left(\frac{r_e I_0}{\pi m c^3}\right)^{1/2} \sim 3\cdot 10^{-12+n/2}, \tag{6}$$

где $r_e = e^2/mc^2 = 2.8\cdot 10^{-15}$ м – классический радиус электрона (m – масса электрона), $\lambda = 2\pi c/\omega = 500$ нм – длина волны света и мощность световой волны на единицу площади равна $I_0 = cE_0^2/4\pi = 10^n$ Вт/м^2. На поверхности Земли $I_0 \sim 10^3$ Вт/м^2 (т.е. $n = 3$). Для наиболее мощных лазерных установок интенсивность достигает 10^{24} Вт/м^2 ($n = 24$), правда, для очень коротких импульсов.

Второй безразмерный параметр задачи связан с излучением заряда:

$$\mu = \frac{2}{3}\,\frac{e^2\omega}{mc^3} = \frac{4\pi}{3}\,\frac{r_e}{\lambda} \sim 2\cdot 10^{-8}. \tag{7}$$

Поэтому для большинства экспериментальных условий, позволяющих измерить световое давление, $\mu < \alpha \ll 1$. Кроме этого малым параметром мы будем считать скорость частицы ($v \ll 1$), измеряемую в единицах скорости света.

Как известно, уравнение (4) не является вполне удовлетворительным. В частности, для свободного заряда оно приводит к физически бессмысленному самоускоряющемуся решению. Чтобы избежать подобных трудностей будем считать реакцию излучения малой и решать уравнение (4) методом последовательных приближений [1]. Для этого сначала найдём движение заряда во внешнем поле без учёта излучения:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\alpha}{E_0}\,(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}). \tag{8}$$

Продифференцировав это уравнение по времени и выразив $\dot{\mathbf{v}}$ с его же помощью, получим следующее для силы самодействия:

$$\mu\ddot{\mathbf{v}} \approx \frac{\alpha\mu}{E_0}\left(\frac{d\mathbf{E}}{dt} + \mathbf{v}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right) + \frac{\alpha^2\mu}{E_0^2}\,[\mathbf{E}\times\mathbf{B}], \tag{9}$$

где опущено слагаемое порядка $\alpha^2\mu v$.

Рассмотрим поляризованную по кругу плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z ($E_z = B_z = 0$):

$$E_x = E_0\,\cos(t-z), \qquad E_y = E_0\,\sin(t-z), \qquad B_x = -E_y, \qquad B_y = E_x.$$

Уравнение движения (5) в компонентах имеет вид:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{v}_x &=& \alpha\,(1-v_z)\,\cos(t-z) + \mu\ddot{v}_x, \\ \dot{v}_y &=& \alpha\,(1-v_z)\,\sin(t-z) + \mu\ddot{v}_y, \\ \dot{v}_z &=& \alpha v_x\,\cos(t-z) + \alpha v_y\,\sin(t-z) + \mu\ddot{v}_z. \end{array}\right. \tag{10}$$

Интегрируя первые два уравнения и подставляя вместо $\mu\dot{\mathbf{v}}$ выражение (8), имеем:

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_x &=& \alpha\,\sin(t-z) + \alpha\mu\,(1-v_z)\,\cos(t-z) + \alpha\,(s_0 - \mu c_0), \\ v_y &=& -\alpha\,\cos(t-z) + \alpha\mu\,(1-v_z)\,\sin(t-z) + \alpha\,(c_0 + \mu s_0), \end{array}\right. \tag{11}$$

где предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в точке $z = z_0$ и имела нулевую скорость, а $s_0 = \sin z_0$, $c_0 = \cos z_0$. Третье уравнение системы (10) с учётом (9) имеет вид:

$$\dot{v}_z = \alpha^2\mu + \alpha\,(v_x + \mu v_y)\,\cos(t-z) + \alpha\,(v_y - \mu v_x)\,\sin(t-z), \tag{12}$$

где опущены слагаемые порядка $\alpha\mu v^2$. Первое слагаемое в правой части (12) приводит в среднем к линейному росту со временем скорости заряда вдоль волнового вектора. Естественно в отсутствии излучения заряда ($\mu = 0$) этого слагаемого нет. Его происхождение связано с последним членом в выражении для силы трения Лоренца (9), который пропорционален давлению поля $\mathbf{P} = [\mathbf{E}\times\mathbf{B}]/4\pi$.

4 Движение заряда

Решение записанных выше уравнений можно представить в параметрическом виде, также как это сделано в приложении A. Однако мы рассматриваем случай малых скоростей и малых значений параметра α. Поэтому имеет смысл сразу записать решение в ведущем приближении по α. Несложно видеть, что проекции скорости заряда в плоскости x, y (11) имеют порядок α. Поэтому из (12) следует, что v_z имеет порядок α^2. В нулевом приближении по α^2 имеем $\dot{v}_z = 0$ или $z = z_0$. Поэтому с точностью до α^2 в уравнениях (11) можно положить $z = z_0$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v_x & = & \alpha\,\sin(t-z_0) + \alpha\mu\,\cos(t-z_0) + \alpha\,(s_0 - \mu c_0), \\ v_y & = & -\alpha\,\cos(t-z_0) + \alpha\mu\,\sin(t-z_0) + \alpha\,(c_0 + \mu s_0), \end{array} \right. \tag{13}$$

где опущен член $\alpha\mu v_z$, имеющий порядок $\alpha^3\mu$. Аналогично в (12):

$$\dot{v}_z = \alpha^2\mu + \alpha\,(v_x + \mu v_y)\,\cos(t-z_0) + \alpha\,(v_y - \mu v_x)\,\sin(t-z_0). \tag{14}$$

Подставляя в правую часть v_x и v_y из (13), получаем уравнение:

$$\dot{v}_z = \alpha^2\mu + \alpha^2 \sin t,$$

интегрируя которое, имеем:

$$v_z = \alpha^2\mu\, t + \alpha^2(1 - \cos t). \tag{15}$$

Таким образом, продольная скорость заряда в среднем линейно увеличивается со временем. Восстановим размерные константы в выражении для средней силы, действующей на заряд в направлении волнового вектора:

$$m\bar{\dot{v}}_z = m\alpha^2\mu = \frac{2}{3}\,\frac{e^4E_0^2}{m^2c^3} = \frac{8}{3}\,\pi r_e^2 \cdot \frac{cE_0^2}{4\pi} = S \cdot P. \tag{16}$$

Любопытно, что, с точностью до числового множителя сила, действующая на заряд равна стандартному световому давлению $P = cE_0^2/4\pi$ умноженному на “эффективную площадь поверхности” S электрона с классическим радиусом $r_e = e^2/mc^2$. Например, если обычный шарик радиуса r полностью поглощает, падающее на него излучение плоской волны то его эффективная площадь, обращённая в сторону светового потока будет равна $S = \pi r^2$. Правда в рассматриваемом случае длина волны света существенно больше, чем классический радиус электрона, поэтому модель поглощения света поверхностью без учёта дифракции не является корректной. Как впрочем и представление об электроне в виде шарика с радиусом r_e.

Пусть заряд при $t = 0$ покоился в точке $x = y = 0$, $z = z_0$. Тогда его координаты изменяются со временем следующим образом:

$$
\begin{aligned}
x &= \alpha(s_0 - \mu c_0)\, t - \alpha\, \cos(t - z_0) + \alpha\mu \sin(t - z_0) + \alpha(c_0 + \mu s_0), \\
y &= \alpha(c_0 + \mu s_0)\, t - \alpha\, \sin(t - z_0) - \alpha\mu \cos(t - z_0) - \alpha(s_0 - \mu c_0), \\
z &= z_0 + \alpha^2 \mu\, t^2/2 + \alpha^2\, (t - \sin t).
\end{aligned}
$$

Эта траектория имеет спиралеобразную форму. Эта спираль наклонена к оси z и ускорено вдоль неё растягивается. Представим совокупность зарядов с различными значениями z_0, и усредним по различным z_0. Тогда в среднем такое "облако" зарядов двигается вдоль оси z с ускорением $\alpha^2\mu$, находясь внутри расширяющегося конуса.

Найдём проекцию момента импульса заряда на волновой вектор. Прямое вычисление $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ приводит к знакопеременной функции времени с растущей амплитудой. Связано это с тем, что спираль траектории заряда постоянно удаляется от начала отсчёта. Чтобы учесть это, перейдём в систему отсчёта, начало которой движется следующим образом:

$$
\bar{\mathbf{r}}_0(t) = \{\alpha(s_0 - \mu c_0)\, t, \quad \alpha(c_0 + \mu s_0)\, t, \quad z_0 + \alpha^2 t + \alpha^2 \mu\, t^2/2\}.
$$

Проекция момента импульса $(\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}_0) \times m\, (\mathbf{v} - \dot{\bar{\mathbf{r}}}_0)$ в этой системе в среднем постоянна:

$$
M_z = m\alpha^2 (1 + \mu^2)(1 - \cos t). \tag{17}
$$

Проекции момента на оси x и y зависят от начального положения частицы z_0 (фазы электромагнитной волны):

$$
M_x = -\alpha\, (s_0 - \mu c_0)\, M_z, \qquad\qquad M_y = -\alpha\, (c_0 + \mu s_0).
$$

При усреднении их по различным z_0 они оказываются равным нулю.

Таким образом, даже при учёте самодействия, в рассмотренном выше приближении не происходит постоянного увеличения момента импульса частицы, которое обычно ожидают от поляризованной по кругу волны. Исходно неподвижная частица приобретает в среднем постоянный момент вдоль оси z, который в дальнейшем не увеличивается, испытывая колебания со временем. Выражение (17) отличается от аналогичного для пробного заряда без самодействия ($\mu = 0$) лишь постоянным множителем $1 + \mu^2$, который в рассматриваем приближении можно опустить.

В отличие от момента импульса, импульс частицы в направлении волнового вектора, после учёта эффекта самодействия, начинает увеличиваться со временем, что можно интерпретировать как световое давление.

5 Релятивистский случай

Релятивистское уравнение движения с учётом силы трения Лоренца имеет вид [1]:

$$
m\frac{dV^\nu}{d\tau} = eF^{\nu\beta}V_\beta + \frac{2e^2}{3}\left(\frac{d^2V^\nu}{d\tau^2} - V^\nu V^\beta \frac{d^2V_\beta}{d\tau^2}\right),
$$

где V^ν – 4-скорость, $F^{\nu\beta}$ – 4-тензор электромагнитного поля и $\tau = t/\gamma$ – собственное время частицы, где $\gamma = 1/\sqrt{1-\mathbf{v}^2}$. Релятивистское выражение для силы трения Лоренца при малых скоростях пропорционально $\ddot{\mathbf{v}}$ и является ортогональным к 4-скорости.

Переходя к безразмерным координатам и времени $t \mapsto t/\omega$, $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}/\omega$, имеем:

$$
\frac{dV^\nu}{d\tau} = \frac{\alpha}{E_0}F^{\nu\beta}V_\beta + \mu\left(\frac{d^2V^\nu}{d\tau^2} - V^\nu V^\beta \frac{d^2V_\beta}{d\tau^2}\right),
$$

где как и раньше E_0 – постоянная, равная характерной напряжённости поля, а константы α и μ определены в (6) и (7).

Воспользуемся методом итераций по параметру μ. Для этого, в выражение для силы трения подставим силу Лоренца без учёта излучения. В результате имеем [1]:

$$
\frac{dV^\nu}{d\tau} = \frac{\alpha}{E_0}F^{\nu\beta}V_\beta + \frac{\alpha\mu}{E_0}\frac{dF^{\nu\beta}}{d\tau}V_\beta + \frac{\alpha^2\mu}{E_0^2}F^{\nu\beta}F_{\beta\sigma}V^\sigma + \frac{\alpha^2\mu}{E_0^2}(F_{\beta\sigma}V^\sigma)(F^{\beta\gamma}V_\gamma)V^\nu.
$$

Учитывая, что свёртка произвольного 4-вектора A_β с 4-тензором поля имеет следующие компоненты:

$$
F^{\nu\beta}A_\beta = \{\mathbf{E}\mathbf{A},\ \mathbf{E}A^0 + \mathbf{A}\times\mathbf{B}\},
$$

а компоненты 4-скорости равны $V^\nu = \gamma\{1, \mathbf{v}\}$, перепишем уравнение движения в 3-мерном виде:

$$
\begin{aligned}
\frac{d(\gamma\mathbf{v})}{dt} = {} & \frac{\alpha}{E_0}(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) + \gamma\frac{\alpha\mu}{E_0}\left(\frac{d\mathbf{E}}{dt} + \mathbf{v}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right) + \frac{\alpha^2\mu}{E_0^2}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \\
& + \frac{\alpha^2\mu}{E_0^2}\left[(\mathbf{v}\mathbf{E})\mathbf{E} + (\mathbf{v}\mathbf{B})\mathbf{B} - \mathbf{B}^2\mathbf{v} + (\mathbf{v}\mathbf{E})^2\gamma^2\mathbf{v} - (\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})^2\gamma^2\mathbf{v}\right].
\end{aligned}
$$

Первая строка в этом уравнении за исключением лоренцевского фактора γ соответствует рассмотренной ранее нерелятивистской динамике.

Подставляя напряжённости поляризованной по кругу плоской волны $\mathbf{E} = E_0 \{C, S, 0\}$, $\mathbf{B} = E_0 \{-S, C, 0\}$, где $C = \cos(t - z)$, $S = \sin(t - z)$, для проекций скорости, перпендикулярных волновому вектору имеем:

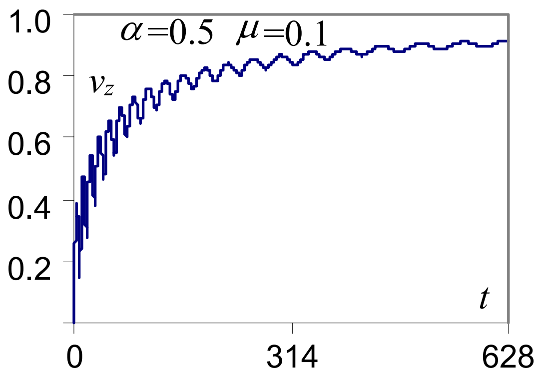
$$\frac{d(\gamma v_x)}{dt} = \alpha\,(1 - v_z)C - \alpha\mu\,\gamma\,(1 - v_z)^2 S - \alpha^2\mu v_x\gamma^2\,(1 - v_z)^2,$$

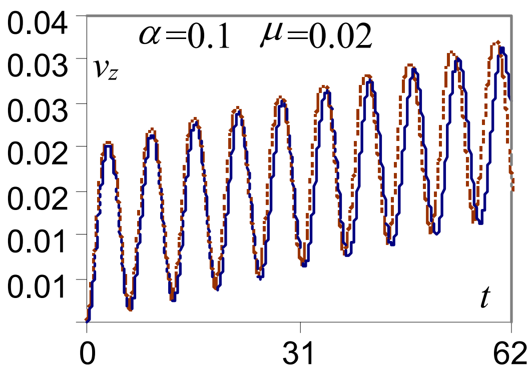
$$\frac{d(\gamma v_y)}{dt} = \alpha\,(1 - v_z)S + \alpha\mu\,\gamma\,(1 - v_z)^2 C - \alpha^2\mu v_y\gamma^2\,(1 - v_z)^2.$$

Уравнение для продольной проекции скорости имеет вид:

$$\frac{d(\gamma v_z)}{dt} = \alpha\,[v_x C + v_y S] - \alpha\mu\gamma(1 - v_z)\,[v_x S - v_y C] + \alpha^2\mu\,(1 - v_z)\big[1 - \gamma^2(v_z - v_z^2)\big].$$

Решим эту систему численно и сравним с выражением для силы, полученной в нерелятивистском приближении. Чтобы эффект светового давления был заметен выберем константы α и μ достаточно большими. Как и раньше, считаем, что в начальный момент времени заряд был неподвижен. Ниже на левом графике приведена функция $v_z(t)$ при $\alpha = 0.5$, $\mu = 0.1$. Время равное $t = 2\pi \approx 6.28$ соответствует одному периоду колебания электромагнитной волны. На правом графике параметры уменьшены в 5 раз и пунктиром изображено приближенное решение (15), полученное в рамках нерелятивистского уравнения.





Скорость заряда v_z в направлении волнового вектора растёт, постепенно приближаясь к единице (скорости света). Наличие в уравнении фактора $1 - v_z$ "замораживает" динамику при $v_z \to 1$. В ультрарелятивистском случае амплитуда колебаний скорости уменьшается, а период этих колебаний растёт. Поперечные компоненты скорости ведут себя аналогично динамике без учёта силы трения излучением (приложение B). Если в начальный момент времени $z_0 = 0$, то скорость заряда вдоль оси x испытывает периодические колебания и в среднем остаётся равной нулю. Компонента вдоль оси y также периодически изменяется. Однако она приобретает в среднем отличное от нуля значение $\gamma v_y \approx \alpha$.

6 Заключение

Закон сохранения энергии и импульса поля + зарядов не применим к пробному, неизлучающему заряду. Только учёт трения излучением приводит к появлению ускорения заряда вдоль волнового вектора электромагнитной волны. Другими словами световое давление возникает в результате взаимодействия заряда с собственным излучением, возникающим в результате воздействия на него внешнего поля электромагнитной волны. Сама по себе электромагнитная волна не оказывает на заряд давления (по крайней мере до тех пор, пока заряд рассматривается как пробный и игнорируются эффекты, связанные с его излучением).

Отметим также, что в рассмотренном приближении не возникает эффекта увеличения момента импульса заряда, который обычно приписывается поляризованной по кругу плоской волне.

Материалы этих заметок возникли в результате обсуждения вопроса о спине электромагнитной волны на форуме dxdy.ru. Автор благодарит участников форума с никами **Munin**, **Pulse** и **Obar** за многочисленные стимулирующие дискуссии и нетривиальные мысли.

Список литературы

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — “*Теоретическая физика. Теория поля*”, Т.2, М.: Наука (1988)

[2] Болотовский Б.М., Серов А.В. — ”*Особенности движения частиц в электромагнитной волне*”, УФН, **173**, N6 с.667-678, (2003)

Приложения

A Движение заряда в поле плоской волны

Рассмотрим плоскую монохроматическую электромагнитную волну с эллиптической поляризацией, распространяющуюся вдоль оси z:

$$E_x = E_0\cos(\omega t - kz),\quad E_y = \sigma E_0 \sin(\omega t - kz),\quad B_x = -E_y,\quad B_y = E_x.$$

Если волна имеет линейную поляризацию, то $\sigma = 0$, а для круговой поляризации $\sigma = \pm 1$. Частота волны равна ω, волновой вектор $k = \omega$ и выбрана система единиц в которой $c = 1$.

Уравнения движения для частицы с массой m и зарядом e имеют вид:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + e\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}.$$

Будем измерять время в обратных единицах частоты, а расстояния в единицах длин волн. Для этого сделаем следующие замены:

$$t \mapsto t/\omega,\qquad \mathbf{r}\mapsto \mathbf{r}/\omega.$$

Уравнение движения в этих единицах имеет вид:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{m}{E_0}\,\alpha\,(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}),\qquad \alpha = \frac{eE_0}{\omega m}.$$

Запишем уравнения движения в компонентах:

$$\begin{cases} \dot{p}_x &= a\,(1 - v_z)\cos(t - z),\\ \dot{p}_y &= b\,(1 - v_z)\sin(t - z),\\ \dot{p}_z &= av_x\cos(t - z) + bv_y\sin(t - z), \end{cases} \tag{18}$$

где для сокращения введены константы $a = \alpha m$, $b = \sigma\alpha m$. Изменение энергии движения $\mathcal{E} = m/\sqrt{1-\mathbf{v}^2}$, с учётом (18) равно:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{v}\dot{\mathbf{p}} = v_x\dot{p}_x + v_y\dot{p}_y + v_z\dot{p}_z = \frac{dp_z}{dt}.$$

Поэтому справедлив закон сохранения:

$$\mathcal{E} - p_z = \pi_0 = \mathcal{E}_0 - p_{z0} = const, \tag{19}$$

где $\mathcal{E}_0$, p_{z0} – энергия частицы и проекция импульса на ось z в начальный момент времени $t = 0$. Первые два уравнения (18) легко интегрируются:

$$\begin{aligned} p_x &= p_{x0} + a\,[\sin(t - z) + s_0],\\ p_y &= p_{y0} - b\,[\cos(t - z) - c_0], \end{aligned} \tag{20}$$

где $c_0 = \cos(z_0)$, $s_0 = \sin(z_0)$ и начальные значения координаты z_0 и проекций импульса p_{x0}, p_{y0} соответствуют моменту времени $t = 0$.

Решение будем искать в параметрическом виде, используя вместо времени t параметр

$$\tau = t - z(t) + z_0.$$

Для него $\dot{\tau} = 1 - \dot{z} = 1 - v_z$. Из закона сохранения (19) и связи энергии импульса и скорости $p_z = \mathcal{E} v_z$ имеем:

$$\mathcal{E}\dot{\tau} = \pi_0 \tag{21}$$

или учитывая зависимость энергии от скорости

$$d\tau = \frac{\pi_0}{\mathcal{E}(t)}\, dt = \frac{\pi_0}{m}\sqrt{1 - \mathbf{v}^2(t)}\, dt.$$

Таким образом, с точностью до постоянного множителя π_0/m, параметр τ является собственным временем заряда. Производная $\dot{\tau} > 0$ всегда положительна, поэтому собственное время τ и время лабораторной (неподвижной) системы отсчёта t связаны монотонно растущей зависимостью.

Используя введенный параметр τ и соотношение $\mathbf{p} = \mathcal{E}\mathbf{v}$, систему (20) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\dot{x} &= p_{x0} + a\,[\sin(\tau - z_0) + s_0], \\ \mathcal{E}\dot{y} &= p_{y0} - b\,[\cos(\tau - z_0) - c_0]. \end{aligned} \tag{22}$$

Кроме этого из (21), (19) и третьего уравнения (18) следует уравнение для энергии:

$$\dot{\mathcal{E}} = \dot{x}a\,\cos(\tau - z_0) + \dot{y}b\,\sin(\tau - z_0). \tag{23}$$

Уравнения системы (22) позволяют выразить координаты частицы через параметр τ. Так как $\mathcal{E}\dot{x} = \mathcal{E}\dot{\tau}\, dx/d\tau = \pi_0\, dx/d\tau$ и аналогично для $\dot{y}$, после интегрирования имеем:

$$x = x_0 + \frac{p_{x0} + as_0}{\pi_0}\tau - \frac{a}{\pi_0}[\cos(\tau - z_0) - c_0],$$

$$y = y_0 + \frac{p_{y0} + bc_0}{\pi_0}\tau - \frac{b}{\pi_0}[\sin(\tau - z_0) + s_0].$$

Третья координата равна $z = z_0 + t - \tau$.

Умножая (23) на $\mathcal{E}$, подставляя в правую часть уравнения (22) и деля обе части на $\mathcal{E}\dot{\tau} = \pi_0$, получаем:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = \frac{ap_{x0} + a^2 s_0}{\pi_0}\,\cos(\tau - z_0) + \frac{bp_{y0} + b^2 c_0}{\pi_0}\,\sin(\tau - z_0) + \frac{a^2 - b^2}{2\pi_0}\,\sin(2\tau - 2z_0).$$

Интегрируя, находим зависимость энергии от параметра τ:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 &+ \frac{ap_{x0} + a^2 s_0}{\pi_0}\,[\sin(\tau - z_0) + s_0] - \frac{bp_{y0} + b^2 c_0}{\pi_0}\,[\cos(\tau - z_0) - c_0] \\ &- \frac{a^2 - b^2}{2\pi_0}\,[\cos^2(\tau - z_0) - c_0^2]. \end{aligned}$$

Осталось найти связь времени и параметра τ. Проинтегрировав уравнение (22): $\mathcal{E} d\tau = \pi_0 dt$, получаем:

$$
\begin{aligned}
t = \frac{\mathcal{E}_0}{\pi_0}\tau - \frac{ap_{x0} + a^2 s_0}{\pi_0^2}\,[\cos(\tau - z_0) - c_0 - s_0\tau] \\
- \frac{bp_{y0} + b^2 c_0}{\pi_0^2}\,[\sin(\tau - z_0) + s_0 - c_0\tau\,] \\
- \frac{a^2 - b^2}{4\pi_0^2}\,[\cos(\tau - z_0)\sin(\tau - z_0) + c_0 s_0 + (1 - 2c_0^2)\tau].
\end{aligned}
$$

Эти соотношения дают общее решение задачи движения заряда в поле электромагнитной волны.

Иногда необходимо усреднять те или иные физические величины. Усреднение по *физическому* времени t, осуществляется следующим образом:

$$
\langle f(\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(\tau)\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^{\tau(T)}\frac{f(\tau)}{\dot\tau}\,d\tau.
$$

Введём параметр наклона между физическим временем t и параметром τ в асимптотическом режиме:

$$
\frac{\tau_0}{\pi_0} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{t}{\tau}.
$$

Так как при усреднении необходимо вычислить предел, то функцию $\tau(T)$ на верхней границе интегрирования можно заменить на $T\pi_0/\tau_0$. Переобозначая переменную, по которой берётся предел $T \mapsto T\tau_0/\pi_0$ и учитывая, что $\mathcal{E}\dot\tau = \pi_0$, окончательно получаем:

$$
\langle f(\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \frac{f(\tau)\,\mathcal{E}(\tau)}{\tau_0}\,d\tau. \tag{24}
$$

Как мы увидим далее, если $\alpha \ll 1$, то $t \approx \tau$ и при усреднении можно интегрировать исходную функцию просто по τ. В противном случае необходимо пользоваться более точной формулой (24).

B Круговая поляризация

Пусть $\sigma = \pm 1$, $a = m\alpha$, $b = \pm m\alpha$. Решение достаточно просто выглядит, если частица в начальный момент времени покоится $p_{0x} = p_{0y} = p_{0z} = 0$, $\pi_0 = \mathcal{E}_0 = m$. Время и энергия в параметрической записи равны:

$$t = \tau + \alpha^2 (\tau - \sin\tau), \qquad \mathcal{E}/m = 1 + \alpha^2 (1 - \cos\tau). \tag{25}$$

Координаты частицы

$$x = x_0 + \alpha[\tau s_0 + c_0 - \cos(\tau - z_0)],$$

$$y = y_0 \pm \alpha[\tau c_0 - s_0 - \sin(\tau - z_0)],$$

$$z = z_0 + \alpha^2 (\tau - \sin\tau).$$

Компоненты импульса:

$$\begin{aligned} p_x/m &= \alpha\,[s_0 + \sin(\tau - z_0)], \\ p_y/m &= \pm\alpha\,[c_0 - \cos(\tau - z_0)], \\ p_z/m &= \alpha^2\,[1 - \cos\tau]. \end{aligned} \tag{26}$$

Напомним, что $c_0 = \cos z_0$, $s_0 = \sin z_0$.

Так как частица в среднем с постоянной скоростью удаляется от начального положения, момент импульса относительно точки $\mathbf{r} = \{x_0, y_0, z_0\}$ будет испытывать осцилляторные колебаний с возрастающей амплитудой. Чтобы учесть это удаление будем вычислять момент относительно среднего положения заряда $\bar{\mathbf{r}} = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ (усреднение по τ):

$$\bar{x} = x_0 + \alpha[\tau s_0 + c_0], \qquad \bar{y} = y_0 \pm \alpha[\tau c_0 - s_0], \qquad z = z_0 + \alpha^2\,\tau.$$

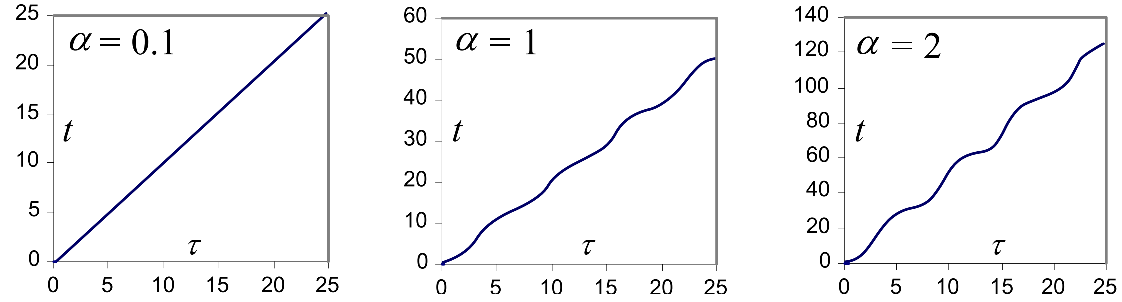
Тогда проекции момента импульса $\mathbf{M} = (\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}) \times \mathbf{p}$ равны:

$$M_z = \pm m\alpha^2 (1 - \cos\tau),$$

$$M_x = -\alpha\sin(z_0)\,M_z, \qquad M_y = \mp\alpha\cos(z_0)\,M_z.$$

Таким образом, энергия и момент импульса испытывают периодические колебания. К начальной энергии $\mathcal{E}_0 = m$ периодически добавляется величина $2m\alpha^2$, затем энергия падает к исходному значению, и т.д. Средний прирост энергии положителен. В поле волны частица сносится не только в направлении распространения волны, но и в перпендикулярном направлении, зависящем от значения фазы волны (координаты z_0 частицы в начальный момент времени).

Ниже на рисунках приведена зависимость t от τ для покоящейся в начальный момент времени $t = 0$ частицы. При малых значениях α справедливо равенство $t \approx \tau$:

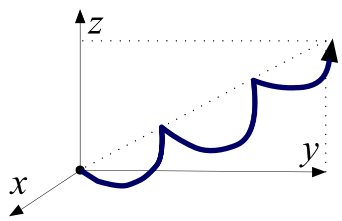


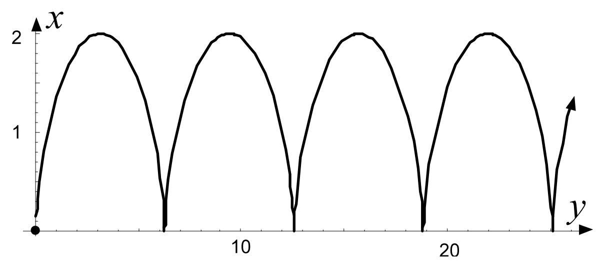
Совпадение собственного времени τ и времени лабораторной системы t свидетельствует, что малому параметру α соответствует нерелятивистское движение частицы. В частности, в ведущем по α приближении, деля (26) на энергию (25) получаем следующие значения для компонент скорости:

$$
\begin{aligned}
v_x &= \quad \alpha\,[s_0 + \sin(\tau - z_0)] + O(\alpha^3), \\
v_y &= \pm\alpha\,[c_0 - \cos(\tau - z_0)] + O(\alpha^3), \\
v_z &= \quad \alpha^2\,(1 - \cos\tau) + O(\alpha^4).
\end{aligned}
$$

В выбранной системе единиц скорость измеряется в единицах скорости света. Поэтому константа α характеризует типичную скорость частицы в перпендикулярной к распространению волны плоскости. В продольном направлении, приобретаемая в среднем скорость существенно меньше и в этом приближении равна α^2.

Если $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, то изначально неподвижный заряд в среднем смещается по оси z и y, совершая колебания с ограниченной по оси x амплитудой ($b = a$):





Направление смещения заряда в плоскости xy зависит от его начального положения z_0 (фазы волны) и составляет с осью y угол равный z_0.

• Запишем теперь выражение для энергии заряда в волне с круговой поляризацией с произвольным начальным импульсом ($b = a$):

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \frac{a}{\pi_0}\,(p_{x0} + a s_0)\,[\sin(\tau - z_0) + s_0] - \frac{a}{\pi_0}\,(p_{y0} + a c_0)\,[\cos(\tau - z_0) - c_0].$$

Энергия не будет изменяться со временем ($\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$), если

$$p_{x0} = -a \sin z_0, \qquad p_{y0} = -a \cos z_0. \tag{27}$$

В этом случае: $t = (\mathcal{E}_0/\pi_0)\tau$. Из закона сохранения (19) следует, что импульс вдоль оси z остаётся постоянным ($p_z = p_{z0}$). Траектория частицы в плоскости xy является окружностью:

$$x = x_0 - \frac{a}{\pi_0}[\cos(\tau - z_0) - c_0], \qquad y = y_0 - \frac{a}{\pi_0}[\sin(\tau - z_0) + s_0],$$

где

$$\pi_0 = \mathcal{E}_0 - p_{z0}, \qquad \mathcal{E}_0 = \sqrt{m^2 + a^2 + p_{z0}^2}.$$

Если $p_{z0} = 0$, то $t = \tau$ и частица вращается по окружности с частотой, равной частоте волны. Если же $p_{z0} \neq 0$, то траектория частицы является спиралью, причём частота вращения по этой спирали тем меньше, чем быстрее частица движется вдоль оси z. Например, для $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ уравнение движения имеют вид:

$$x = R - R\,\cos(\Omega t), \qquad y = -R\,\sin(\Omega t),$$

где параметры с восстановленными размерными константами равны:

$$\Omega = \omega\left(1 - \frac{c\,p_{z0}}{\mathcal{E}_0}\right), \qquad R = \frac{eac^2/\omega^2}{\mathcal{E}_0 - c\,p_{z0}}.$$

При движении частицы против оси z (на встречу волне) частота её вращения по спирали, наоборот, увеличивается.

Движущаяся по окружности частица имеет постоянные энергию и момент импульса. Подобным свойством обладает также движение частицы в однородном магнитном поле. Правда, в последнем случае радиус окружности может быть любой (при данном магнитном поле) и определяется начальной скоростью частицы. При движении в поле электромагнитной волны радиус строго фиксирован.

Подчеркнём, что подобное решение возникает, только при выполнении специфического начального условия (27). Подобное состояние заряда является неустойчивым и при небольших отклонениях от (27) “ось спирали” начинает наклонятся от оси z, а энергия периодически изменяться со временем.

C   Линейная поляризация

Рассмотрим теперь случай линейной поляризации $b = 0$ (электрическое поле направлено по оси x, магнитное по оси y). Пусть частица в момент времени $t = 0$ движется вдоль оси z ($p_{x0} = p_{y0} = 0,\ p_{z0} \neq 0$) и находится в начале координат $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Тогда:

$$t = \frac{\mathcal{E}_0}{\pi_0}\,\tau + \frac{m^2}{4\pi_0^2}\,\alpha^2\,(\tau - \sin\tau\cos\tau), \qquad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \frac{m^2}{2\pi_0}\,\alpha^2\,\sin^2\tau.$$

Координаты частицы в параметрическом виде равны:

$$x = \frac{m}{\pi_0}\,\alpha\,(1-\cos\tau), \qquad y = 0, \qquad z = \left(p_{z0} + \frac{m^2}{4\pi_0}\,\alpha^2\right)\frac{\tau}{\pi_0} - \frac{a^2}{8\pi_0^2}\,\sin(2\tau).$$

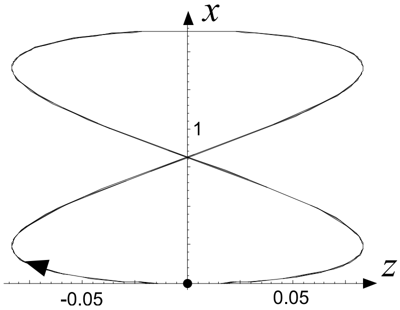
Компоненты импульса частицы:

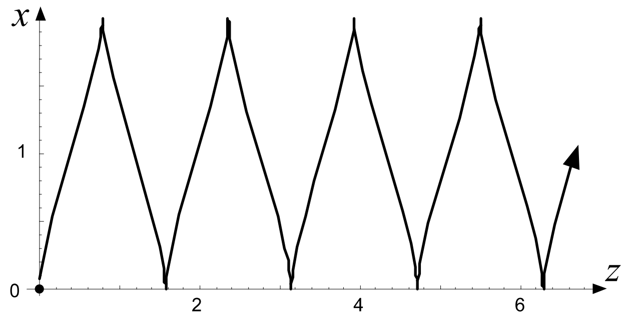
$$p_x = m\,\alpha\,\sin\tau, \qquad p_y = 0, \qquad p_z = p_{z0} + \frac{m^2}{2\pi_0}\,\alpha^2\,\sin^2\tau.$$

Пусть в начальный момент времени частица движется против направления распространения волны с импульсом $p_{z0} = -m^2\alpha^2/4\pi_0$, или, учитывая соотношение $\pi_0 = \sqrt{m^2 + p_{z0}^2} - p_{z0}$:

$$\frac{p_{z0}}{m} = -\frac{\alpha^2/4}{\sqrt{1+\alpha^2/2}}.$$

Тогда волна “остановит” частицу, и далее она начнёт описывать “восьмёрку”, лежащую в направлении оси x (левый рисунок, $a = m = 1$). Если же $p_{z0} = 0$, то она приобретёт постоянную (в среднем) скорость вдоль оси z по пилообразной траектории (правый рисунок):



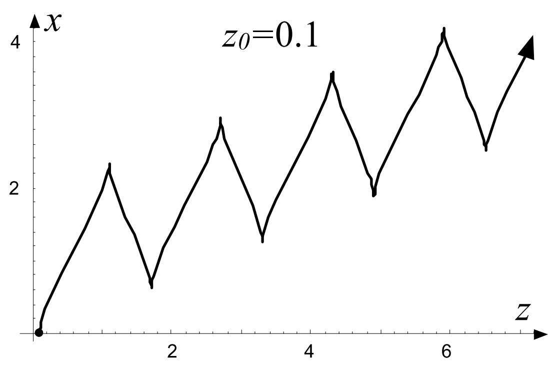


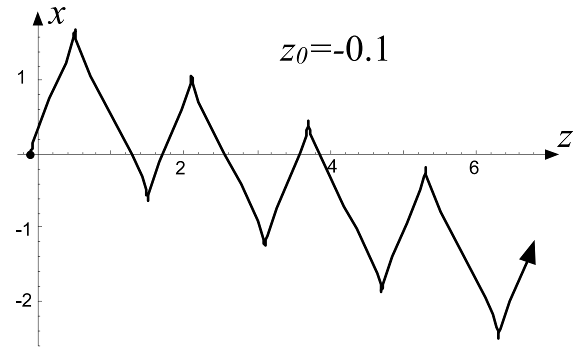
Заметим, что при таком движении энергия частицы периодически изменяется, имея среднее значение, которое превышает начальное $\mathcal{E}_0$. Отметим ещё значение момента импульса частицы для случая 8-ки:

$$M_x = 0, \qquad M_y = -\frac{m\alpha^3}{4+2\alpha^2}\,\cos^3\tau, \qquad M_z = 0.$$

Среднее значение компонент момента по τ (малые α) равно нулю.

Интересно, что, если покоящаяся частица имеет отличную от нуля начальную координату $z_0 \neq 0$, то будет происходить её снос вдоль оси x (вдоль электрического поля). Ниже на левом рисунке $z_0 = 0.1$, а на правом $z_0 = -0.1$ и в обоих случаях $a = m = 1$:





Запишем решения для координаты и импульса вдоль оси x ($a = \alpha m$):

$$x = \alpha\,[c_0 - \cos(\tau - z_0) + s_0\tau], \qquad p_x = m\,\alpha\,[s_0 + \sin(\tau - z_0)].$$

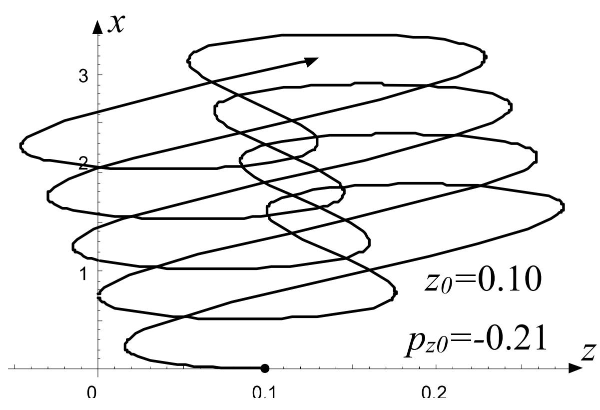
При этом вдоль оси y частица не движется ($p_y = 0$). В этом случае связь между временем и параметром τ достаточно громоздка:

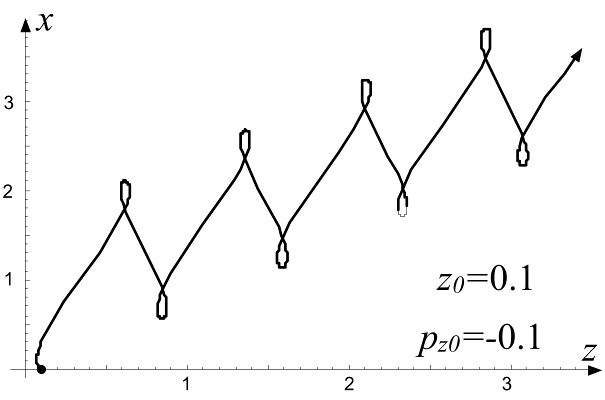
$$t = \Bigl[1 + \frac{\alpha^2}{4}\bigl(2 - \cos(2z_0)\bigr)\Bigr]\,\tau$$
$$+\frac{\alpha^2}{8}\,\Bigl[3\sin(2z_0) - \sin(2\tau - 2z_0) + 4\sin(\tau - 2z_0) - 4\sin(\tau)\Bigr].$$

Энергия частицы равна:

$$\frac{\mathcal{E}}{m} = 1 + \frac{\alpha^2}{2}\,(c_0^2 + 2s_0^2) + \frac{\alpha^2}{2}\,\bigl[2s_0\sin(\tau - z_0) - \cos^2(\tau - z_0)\bigr].$$

Вообще, траектория заряда, в зависимости от начальных условий, может быть достаточно затейливой. Ниже приведены траектории заряда при $x_0 = y_0 = 0$, $p_{x0} = p_{y0} = 0$ и различных значениях z_0, p_{z0}:





В обоих случаях $\alpha = 1$.